ОКА ТЕОРЕМЫ — теоремы о классич. проблемах теории функций многих комплексных переменных, впервые доказанные К. Ока в 1930—50 (см. [1]).

1) О. т. о *Кузена проблемах*: первая проблема Кузена разрешима в любой области голоморфности в $\mathbb{C}^n$; вторая проблема Кузена разрешима в любой области голоморфности $D \subset \mathbb{C}^n$, гомеоморфной $D_1 \times \ldots \times D_n$, где все области $D_\nu \subset \mathbb{C}$, кроме, возможно, одной, односвязны.

2) О. т. о *Леви проблеме*: всякая псевдовыпуклая риманова область является областью голоморфности.

Первоначально эта теорема была доказана К. Ока для размерности $n=2$; в случае произвольной размерности она доказана К. Ока и др. математиками.

3) Ока — Вейля теорема: пусть D — область в $\mathbb{C}^n$ и компакт $K \subset D$ совпадает со своей оболочкой относительно алгебры $\mathcal{O}(D)$ всех голоморфных в D функций; тогда для любой функции f, голоморфной в окрестности K, и любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $F \in \mathcal{O}(D)$ такая, что

$$\max_K |f - F| < \varepsilon.$$

Эта фундаментальная теорема теории голоморфных приближений широко применяется в комплексном и функциональном анализе.

4) О. т. о когерентности: пусть $\mathcal{O}$ — пучок голоморфных функций на комплексном многообразии X; тогда для любого натурального числа p любой локально конечно порожденный подпучок пучка $\mathcal{O}^p = \mathcal{O} \times \ldots \times \mathcal{O}$ (p раз) является когерентным *аналитическим пучком*.

Это одна из основных теорем т. н. теории Ока — Картана, к-рая существенно используется при доказательстве *Картана теорем* А и В.

Лит.: [1] Ока К., Sur les fonctions analitiques plusieurs variables, Tokyo, 1961; [2] Хёрмандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968; [3] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969.

Е. М. Чирка.

ОКАЙМЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА X в бикомпактном расширении bX — конечное семейство $\{U_1, \ldots, U_k\}$ открытых в X множеств такое, что множество $K \setminus U_1 \cup \ldots \cup U_k$ бикомпактно и $bX = K \cup \tilde{U}_1 \cup \ldots \cup \tilde{U}_k$, где $\tilde{U}_k$ — наибольшее открытое в bX множество, высекающее на X множество U_i (X предполагается *вполне регулярным*). Понятие О. п. X в bX совпадает с понятием близостного продолжаемого окаймления пространства близости X (близость на X индуцирована расширением bX), формулируемом в близостных терминах: кроме бикомпактности K требуется, чтобы для любой окрестности $\mathcal{O}_K$ семейство $\{\mathcal{O}_K, U_1, \ldots, U_k\}$ было равномерным покрытием пространства X. Просто окаймлением пространства X наз. его окаймление в бикомпактном расширении Стоуна — Чеха. На языке окаймлений формулируется ряд теорем о размерности наростов бикомпактных расширений топологических и близостных пространств.

Лит.: [1] Смирнов Ю. М., «Матем. сб.», 1966, т. 71, № 4, с. 454—82.

В. В. Федорчук.

ОКАЙМЛЕНИЯ МЕТОД — метод решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax = b$ с невырожденной матрицей, обращения матрицы и вычисления определителя, основанный на рекуррентном переходе от решения задачи с матрицей

$$A_{k-1}=\begin{Vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,k-1} \end{Vmatrix}$$

к решению задачи с матрицей A_k, рассматриваемой как результат окаймления A_{k-1}.

Вычислительная схема О. м. для обращения матриц такова. Пусть A_{k-1} — невырожденная матрица. Для обращения матрицы A_k используется представление

$$A_k=\begin{Vmatrix} A_{k-1} & u_k \\ v_k & a_{kk} \end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

где

$u_k=(a_{1,k}, a_{2,k}, \dots, a_{k+1,k})^T$, $v_k=(a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,k-1})$. Тогда

$$A_k^{-1}=\begin{Vmatrix} A_{k-1}^{-1}+\frac{A_{k-1}^{-1}u_kv_kA_{k-1}^{-1}}{\alpha_k} & -\frac{A_{k-1}^{-1}u_k}{\alpha_k} \\ -\frac{v_kA_{k-1}^{-1}}{\alpha_k} & \frac{1}{\alpha_k} \end{Vmatrix}, \qquad (2)$$

$$\alpha_k=a_{kk}-v_kA_{k-1}^{-1}u_k.$$

Последовательное обращение матриц $A_1, A_2, \dots, A_n$ по этой схеме дает матрицу A^{-1}.

Описанная схема О. м. пригодна лишь для матриц с отличными от нуля главными минорами. В общем случае следует принять схему О. м. с выбором главного элемента. В этой схеме в качестве окаймляющих строки и столбца берутся те, для к-рых $\alpha_k=a_{kk}-v_kA_{k-1}^{-1}u_k$ будет максимальным по модулю. Тогда вычисленная матрица будет отличаться от A^{-1} лишь перестановкой строк и столбцов [1].

По быстродействию О. м. не уступает самым быстродействующим из прямых методов *обращения матрицы*.

О. м. позволяет эффективно обращать треугольные матрицы. Если A_{k-1} — правая треугольная матрица, то в (1)

$$v_k=0 \text{ и } A_k^{-1}=\begin{Vmatrix} A_{k-1}^{-1} & -\frac{A_{k-1}^{-1}u_k}{a_{kk}} \\ 0 & \frac{1}{a_{kk}} \end{Vmatrix}.$$

Объем вычислений в этом случае уменьшается в 6 раз.

Особенно эффективен О. м. при обращении эрмитовых положительно определенных матриц. Для этих матриц не нужно применять схему выбора главного элемента. Кроме того, они могут быть заданы лишь половиной своих элементов. Вычислительная схема в этом случае упрощается:

$$A_k^{-1}=\begin{Vmatrix} A_{k-1}^{-1}+\frac{P_kP_k^*}{\alpha_k} & -\frac{P_k}{\alpha_k} \\ -\frac{P_k^*}{\alpha_k} & \frac{1}{\alpha_k} \end{Vmatrix},$$

$$P_k=A_{k-1}^{-1}u_k,\ \alpha_k=a_{kk}-u_k^*P_k.$$

Вычислительная схема О. м. для решения системы состоит в следующем. Пусть $b^{(kp)}=(a_{1p}, a_{2p}, \ldots, a_{kp})^T$, $k=1, 2, \ldots, n$; $b^{(n, n+1)}=-b$. Если A_{k-1} — невырожденная матрица и $x^{(k-1, p)}$ — решение системы $A_{k-1}x^{(k-1, p)}+b^{(k-1, p)}=0$, то решение $x^{(kp)}$ системы $A_kx^{(kp)}+b^{(kp)}=0$ находится из представления

$$A_k=\left\| \begin{matrix} A_{k-1} & b^{(k-1, k)} \\ v_k & a_{kk} \end{matrix} \right\|, \qquad b^{(kp)}=\left\| \begin{matrix} b^{(k-1, p)} \\ a_{kp} \end{matrix} \right\| \tag{3}$$

и из (2) следующим образом:

$$x^{(k, p)}=\left\| \begin{matrix} A_{k-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} b^{(k-1, p)} \\ a_{kp} \end{matrix} \right\| +$$
$$+\frac{1}{\alpha_k}\left\| \begin{matrix} x^{(k-1, k)}v_kx^{(k-1, p)} & -x^{(k-1, k)}b_k \\ -v_kx^{(k-1, p)}+b_k & \end{matrix} \right\| =$$
$$=\left\| \begin{matrix} x^{(k-1, p)} \\ 0 \end{matrix} \right\| - \frac{v_kx^{(k-1, p)}-b_k}{a_{kk}-v_kx^{(k-1, p)}} \left\| \begin{matrix} x^{(k-1, k)} \\ 1 \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$

Таким образом, по решениям $x^{(k-1, p)}$ и $x^{(k-1, k)}$ систем с одной и той же матрицей A_{k-1} и разными правыми частями легко получить решение системы с окаймленной матрицей A_k. Решение исходной системы: $x^{(n, n+1)}$. Оно может быть получено рекуррентным применением соотношения (4). Это сводится к последовательному вычислению совокупности векторов $x^{(kp)}$, $k=1, 2, \ldots, n$, $p>k$, то есть

$$\begin{matrix} x^{(12)}, & x^{(13)}, & \ldots, & x^{(1n)}, & x^{(1, n+1)}, \\ & x^{(23)}, & \ldots, & x^{(2n)}, & x^{(2, n+1)}, \\ & & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ & & & x^{(n-1, n)}, & x^{(n-1, n+1)}, \\ & & & & x^{(n, n+1)}. \end{matrix}$$

По объему вычислительной работы приведенная схема О. м. равносильна *Гаусса методу*, одному из самых быстродействующих прямых методов решения систем.

О. м. позволяет решать системы повышенного порядка за счет эффективного использования памяти ЭВМ. Это обусловлено тем, что для вычисления векторов $x^{(k, p)}$, $p>k$, требуется запоминание только векторов $x^{(k-1, p)}$, $p>(k-1)$, и коэффициентов k-го уравнения системы, т. е. массива чисел длины $f(k)=k(n-k+1)+$ $+(n+1)$. Поэтому для решения системы n-го порядка достаточно иметь рабочее поле длины $(n+1)(n+5)/4\approx$ $\approx(n/2)^2$. При этом элементы матрицы и правой части можно вводить в память ЭВМ не сразу, а последовательно — по строкам.

О. м. целесообразно использовать при решении системы, для к-рой уже ранее решена усеченная система. Тогда соотношение (4) сразу дает искомое решение.

Описанная схема О. м. может быть использована для вычисления определителя. Из представления (1) следует, что

$$|A_k|=|a_{kk}-v_kA_{k-1}^{-1}u_k|\,|A_{k-1}|.$$

Рекуррентное применение этого соотношения дает $|A|$.

Так же, как и обращение матрицы, решение системы и вычисление определителя по О. м. возможно лишь для матриц с ненулевыми главными минорами. В общем случае здесь также необходимо использовать схему выбора главного элемента.

Лит.: [1] Воеводин В. В., Численные методы алгебры, М., 1966; [2] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.—Л., 1963.

Г. Д. Ким.

ОКАТЫВАНИЕ — см. *Симметризация*.

ОКЕАНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — математические задачи в области физики, химии, геологии и биологии океана. В физике океана это прежде всего задачи геофизич. гидродинамики (определяемой как гидродинамика природных течений вращающихся бароклинных стратифицированных жидкостей). Вращение Земли, существенно влияющее на крупномасштабные течения (глобальных и синоптич. масштабов), и стратификация, т. е. изменение плотности среды по направлению силы тяжести (вертикали), создают специфич. анизотропию индивидуальных гидродинамич. полей в океане или их статистич. характеристик, к-рую необходимо учитывать, напр., при выборе базисных функций для описания этих полей по методу Галеркина, при объективном анализе (интерполяции, экстраполяции, сглаживании) эмпирич. данных об этих полях и выборе статистич. моделей для вертикально-неоднородных случайных полей турбулентности и внутренних волн.

Аналитич. описание собственных колебаний океана при помощи линеаризированных уравнений гидродинамики затрудняется из-за неправильной формы его границ — дна и берегов, что делает невозможным использование решений с разделяющимися переменными. Поэтому в теории приливов, в к-рой существенна возможность резонансных реакций океана на приливообразующие силы, имеются аналитич. расчеты лишь для модельных океанов правильной формы (напр., ограниченных отрезками меридианов и параллелей). В реальной же геометрии последовательные (возрастающие) собственные частоты должны определяться как экстремумы квадратичных интегральных функционалов, родственных энергии, на экстремалях, подбираемых по методу Галеркина; такой подход полностью еще не реализован. В теории приливов заметна не только линейная, но и нелинейная реакция океана на приливообразующие силы, к-рая может быть описана при представлении высоты прилива в виде функционального степенного ряда по приливообразующим силам; функциональные коэффициенты такого ряда описывают свойства океана как резонансной системы.

Для океана специфично наличие среди решений уравнений гидродинамики нескольких классов волн — акустических, поверхностных (капиллярных и гравитационных), внутренних гравитационных, инерционных (включая баротропные и бароклинные волны Росби — Блиновой, образующиеся вследствие изменения с широтой вертикальной проекции угловой скорости вращения Земли) и, наконец, гидромагнитных, возникающих при движениях электропроводной жидкости (соленой морской воды) в геомагнитном поле. Построение отдельных классов волновых решений (и динамич. уравнений для них) осуществляется при помощи асимптотич. методов нелинейной механики, родственных методу Ван дер Поля, в виде асимптотич. рядов по степеням малых параметров, стоящих при «лишних» производных по времени. Примером служит т. н. квазигеострофич. разложение, отфильтровывающее из числа решений уравнений гидродинамики быстрые волны и выделяющее класс волн Росби—Блиновой.

Волны в океане, как правило, нелинейны. Для длинных нелинейных волн, поверхностных и внутренних, удается вывести уравнение Кортевега—де Фриса и использовать его солитонные и периодические (кноидальные) решения. Для коротких волн сколько-нибудь общих методов нахождения солитонных и периодич. решений еще не построено, и существуют лишь отдельные примеры (капиллярные волны Слезкина — Краппера, гравитационные волны Герстнера и Стокса, баротропные и бароклинные солитоны Росби). Недостаточно развиты и статистич. теории нелинейных волновых полей, особенно актуальные для описания поверхностных и внутренних гравитационных волн (для внутренних волн — с генерацией ими турбулентных пятен и расплыванием последних в слои вертикальной микроструктуры) и волн Росби (с эволюцией квазидвумерной турбулентности в нелинейное волновое поле).

Одной из важнейших проблем гидродинамики океана является математич. моделирование его циркуляции (в наиболее общей постановке — в его взаимодействии с атмосферой через т. н. верхний перемешанный слой океана и пограничный слой атмосферы), причем вследствие большой ширины спектра масштабов пространственных неоднородностей (от миллиметров до 10^4 километров) моделируемая система здесь имеет огромное число степеней свободы (при миллиметровых элементарных объемах порядка 10^{28}), и неизбежно возникает необходимость их агрегирования, напр. методом параметризации мелкомасштабных процессов.

При аппроксимации континуальных гидродинамич. уравнений разностными возникают вопросы о порядке аппроксимации, сходимости и устойчивости разностной схемы. В современных т. н. вихреразрешающих моделях циркуляции океана используются пространственные сетки с горизонтальными шагами порядка немногих десятков километров. Конкурирующими могут быть схемы, использующие спектральные (в том числе галеркинские) разложения пространственных гидродинамич. полей.

Основные задачи математич. обработки данных измерений в гидродинамике океана делятся на задачи зондирования (функции от глубины, их разложения на моды, спектры), буксировки (горизонтальные и пространственно-временные спектры с доплеровскими эффектами) и полигонных измерений (временные ряды на трехмерной сетке точек, их спектры и взаимные спектры, объективный анализ, синхронные пространственные картины, четырехмерный анализ волновых полей).

В акустике океана рассматриваются типичные задачи распространения волн в слоистых средах; для аналитич. описания вертикальной структуры волновых полей в ряде случаев используется приближение ВКБ (см. *ВКБ-метод*). В оптике океана специфич. процессом является многократное рассеяние света, для описания к-рого используются численные решения уравнения переноса излучения, получаемые методами Монте-Карло, и асимптотические аналитич. решения. В химии океана важной математич. задачей является расчет конвективной диффузии неконсервативных примесей со специфич. источниками и стоками.

В геологии океана в связи с развитием мобилистской геотектоники (т. н. тектоники литосферных плит) возникли задачи кинематич. расчетов движения жестких плит на поверхности сферы и их генетич. объяснения при помощи математич. моделирования процессов плотностной конвекции в земной мантии (возникающей вследствие перехода тяжелых веществ из мантии в ядро). Одной из важных частных задач геологии является биостратиграфия, т. е. распознавание возрастов слоев осадочных пород по содержащимся в них микропалеонтологич. ассамблеям при помощи программ с самообучением (пока что в большинстве работ эта задача решается приближенно без использования ЭВМ).

Весьма объемные вычислительные задачи оценки статистич. характеристик сигналов, фильтрации шумов и распознавания образов возникают при регистрации и обработке данных морского многоканального непрерывного глубинного сейсмопрофилирования и вибропросвечивания океанского дна, причем в ряде случаев и при постановке измерений (пространственные распределения излучателей и приемников сигналов), и при их регистрации перспективны голографич. методы, использующие преобразования Фурье.

В биологии океана в проблеме управления биологич. продуктивностью океана важное значение приобретает математич. моделирование структуры и функционирования экологич. систем и, в частности, динамики популяций. Примером служит задача об эволюции со временем t вертикальных распределений $q_i(z, t)$ компонент

q_i экологич. системы (включающих концентрации ряда видов фито- и зоопланктона, кислорода, углекислого газа, фосфорных и азотных солей, температуру и соленость воды, освещенность фотосинтетически-активной радиацией), описываемой уравнениями вида

$$q_i = A_{i\alpha} q_\alpha + B_{i\alpha\beta} q_\alpha q_\beta + \frac{\partial}{\partial z} K(z) \frac{\partial q_i}{\partial z},$$

где $A_{i\alpha}$, $B_{i\alpha\beta}$ — биологич. и биофизич. параметры; здесь представляют интерес как численные решения задачи Коши с конкретными начальными данными, так и выводы качественной теории дифференциальных уравнений о поведении решений в целом и об их зависимости от имеющихся в уравнениях параметров.

Лит.: [1] Биология океана, т. 1—2, М., 1977; [2] Физика океана, т. 1, М., 1978; [3] Геофизика океана, т. 1—2, М., 1979; [4] Химия океана, т. 1—2, М., 1979; [5] Геология океана, т. 1, М., 1979. *А. С. Монин.*

ОКОЛЬЦОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X, снабженное пучком колец $\mathcal{O}_X$. Пучок $\mathcal{O}_X$ наз. структурным пучком О. п. $(X, \mathcal{O}_X)$. Обычно предполагается, что $\mathcal{O}_X$ есть пучок ассоциативных и коммутативных колец с единицей. Морфизмом О. п. $(X, \mathcal{O}_X)$ в О. п. $(Y, \mathcal{O}_Y)$ наз. пара $(f, f^\#)$, где $f: X \to Y$ — непрерывное отображение и $f^\#: f^*\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ — гомоморфизм пучков колец над Y, переводящий единицы слоев в единицы. О. п. и их морфизмы составляют категорию. Задание гомоморфизма $f^\#$ равносильно заданию гомоморфизма

$$f_\#: \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X,$$

переводящего единицы в единицы.

Окольцованное пространство $(X, \mathcal{O}_X)$ наз. локально окольцованным, если $\mathcal{O}_X$ — пучок локальных колец. В определении морфизма $(f, f^\#)$ локально О. п. $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ дополнительно предполагается, что для любого $x \in X$ гомоморфизм

$$f_x^\#: \mathcal{O}_{Y, f(x)} \to \mathcal{O}_{X, x}$$

является локальным. Локально О. п. составляют подкатегорию в категории всех О. п. Другую важную подкатегорию составляют О. п. над (фиксированным) полем k, то есть О. п. $(X, \mathcal{O}_X)$, где $\mathcal{O}_X$ — пучок алгебр над k, а морфизмы согласованы со структурой алгебр.

Примеры О. п. 1) Каждому топологич. пространству X соответствует О. п. (X, C_X), где C_X — пучок ростков непрерывных функций на X.

2) Каждому дифференцируемому многообразию (напр., класса C^∞) X соответствует О. п. (X, D_X), где D_X — пучок ростков функций класса C^∞ на X; при этом категория дифференцируемых многообразий вкладывается в категорию О. п. над $\mathbb{R}$ в качестве полной подкатегории.

3) *Аналитические многообразия* и *аналитические пространства* над полем k составляют полные подкатегории в категории О. п. над k.

4) *Схемы* составляют полную подкатегорию в категории локально О. п.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981. *А. Л. Онищик.*

ОКРЕСТНОСТЬ точки x (подмножества A) топологического пространства — любое открытое подмножество этого пространства, содержащее точку x (множество A). Иногда под О. точки x (множества A) понимается любое такое подмножество топологич. пространства, к-рое содержит точку x (множества A) в своей внутренности. *Б. А. Пасынков.*

ОКРУГЛЕНИЕ числа — приближенное представление числа в нек-рой системе счисления с помощью конечного количества цифр. Необходимость О. диктуется потребностями вычислений, в к-рых, как правило, окончательный результат не может быть получен абсолютно точно и следует избегать бесполезного выписывания лишних цифр, ограничивая все числа лишь нужным количеством знаков.

При О. числа оно заменяется другим числом (t-разрядным, т. е. имеющим t цифр), представляющим его приближенно. Возникающую при этом погрешность наз. погрешностью округления, или ошибкой округления.

Применяются различные способы О. числа. Простейший из них состоит в отбрасывании младших разрядов числа, выходящих за t разрядов. Абсолютная погрешность О. при этом не превосходит единицы t-го разряда числа. Способ О., обычно применяемый в ручных вычислениях, состоит в О. числа до ближайшего t-разрядного числа. Абсолютная ошибка О. при этом не превосходит половины t-го разряда округляемого числа. Этот способ дает минимально возможную ошибку среди всех способов О., использующих t разрядов.

Способы О., реализуемые на вычислительной машине, определяются ее назначением, технич. возможностями и, как правило, уступают по точности О. до ближайшего t-разрядного числа. В ЭВМ наиболее приняты два режима арифметич. вычислений: т. н. режим с плавающей запятой и режим с фиксированной запятой. В режиме с плавающей запятой результат О. числа имеет определенное количество значащих цифр; в режиме с фиксированной запятой — определенное количество цифр после запятой. В первом случае принято говорить об О. до t разрядов, во втором — об О. до t разрядов после запятой. При этом в первом случае контролируется относительная погрешность О., во втором — абсолютная погрешность.

В связи с использованием вычислительных машин развились исследования накопления ошибок О. в больших вычислениях. Анализ накопления ошибок в численных методах позволяет характеризовать методы по чувствительности их к ошибкам О., строить стратегии реализации их в вычислительной практике, учитывающие ошибки О., и оценить точность окончательного результата.

Лит.: [1] Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, 5 изд., М.— Л., 1950; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [3] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [4] Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977.

Г. Д. Ким.

ОКРУГЛЕНИЯ ТОЧКА — эллиптическая точка поверхности, *в к-рой соприкасающийся параболоид вырождается* в параболоид вращения. В О. т. нормальные кривизны по всем направлениям равны, *Дюпена индикатриса* является окружностью. О. т. иногда наз. омбилической точкой, шаровой точкой, или круговой точкой. *Д. Д. Соколов.*

ОКРУЖНОСТЬ — замкнутая плоская кривая, все точки к-рой одинаково удалены от данной точки (центра О.), лежащей в той же плоскости, что и кривая. О. с общим центром наз. концентрическими. Отрезок R, соединяющий центр О. с какой-либо ее точкой (а также длина этого отрезка), наз. радиусом О. Уравнение О. в прямоугольных декартовых координатах:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

где a и b — координаты центра.

Прямая, проходящая через две точки О., наз. секущей; отрезок ее, лежащий внутри О.,— хордой. Хорды, равноотстоящие от центра, равны. Хорда, проходящая через центр О., наз. ее диаметром. Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит ее пополам.

Каждая из двух частей, на к-рые две точки О. делят ее, наз. дугой.

Угол, образованный двумя радиусами О., соединяющими ее центр с концами дуги, наз. центральным углом, а соответствующая дуга — дугой, на к-рую он опирается. Угол, образованный двумя хордами с общим концом, наз. вписанным углом. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на дугу, заключенную между концами вписанного угла. Длина окружности $C=2\pi R$, длина дуги $l=\frac{\pi R a^\circ}{180^\circ}=R\alpha$, где a° — величина (в градусах) соответствующего центрального угла, α — его радианная мера.

Если через какую-либо точку плоскости провести к О. несколько секущих, то произведение расстояний от точки до обеих точек пересечения каждой секущей с О. есть постоянное число (для данной точки), в частности, оно равно квадрату длины отрезка касательной к О. из этой точки (*степень точки*). Совокупность всех точек плоскости, относительно к-рых данная точка имеет одинаковую степень, составляет *связку* О. Совокупность всех общих О. двух связок, лежащих в одной плоскости, наз. *пучком* О.

Часть плоскости, ограниченная О. и содержащая ее центр, наз. кругом. Сектором наз. часть круга, ограниченная дугой О. и радиусами, проведенными в концы этой дуги. Сегментом наз. часть круга, заключенная между дугой и ее хордой.

Площадь круга $S=\pi R^2$, площадь сектора $S_1=\pi R^2\frac{a^\circ}{360^\circ}$, где a° — градусная мера соответствующего центрального угла, площадь сегмента $S_2=\pi R^2\frac{a^\circ}{360^\circ}\pm S_\Delta$, где S_Δ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и в концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор, знак «$-$» берется, если $a^\circ<180^\circ$, и знак «$+$», если $a^\circ>180^\circ$.

О. на *выпуклой поверхности* локально почти изометрична границе выпуклой поверхности конуса (теорема Залгаллера). О. в многообразии ограниченной кривизны может иметь достаточно сложное строение (т. е. могут существовать угловые и кратные точки, О. может состоять из нескольких компонент и т. п.). Тем не менее точки О. в многообразиях ограниченной кривизны можно естественно упорядочить, превратив ее тем самым в циклически упорядоченное множество (см. [1]).

Об О. в более общих пространствах — банаховых, финслеровых и т. п. см. в ст. *Сфера*.

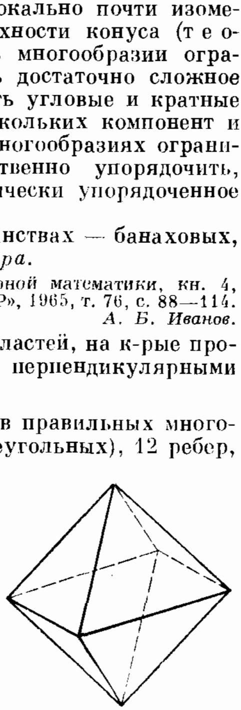
Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, М., 1963; [2] «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 76, с. 88—114.

А. Б. Иванов.

ОКТАНТ — любая из восьми областей, на к-рые пространство делится тремя взаимно перпендикулярными координатными плоскостями.

ОКТАЭДР — один из пяти типов правильных многогранников. О. имеет 8 граней (треугольных), 12 ребер, 6 вершин (в каждой вершине сходятся 4 ребра). Если a — длина ребра О., то его объем

$$v=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}\approx 0{,}4714a^3.$$



БСЭ-3.

ОКТАЭДРА ПРОСТРАНСТВО — пространство, получающееся из октаэдра при отождествлении противоположных его граней — треугольников, повернутых друг относительно друга на угол $\pi/3$. О. п. — трехмерное многообразие, являющееся пространством орбит действия бинарной группы октаэдра на трехмерной сфере. Оно может быть отождествлено с пространством куба, получающимся аналогичным образом. Одномерная группа Бетти О. п. является группой третьего порядка. *М. И. Войцеховский.*

ОМБИЛИЧЕСКАЯ ТОЧКА — то же, что *округления точка.*

«ОМЕГА-КВАДРАТ» РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей случайной величины

$$\omega^2 = \int_0^1 Z^2(t)\,dt,$$

где $Z(t)$ — условный *винеровский процесс.* Характеристич. функция «О.-к.» р. выражается формулой

$$\mathsf{E}e^{it\omega^2} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{2it}{\pi^2k^2}\right)^{-1/2}.$$

В математической статистике «О.-к.» р. часто встречается в связи со следующим обстоятельством. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[0, 1]$, по к-рым построена функция эмпирич. распределения $F_n(\cdot)$. В этом случае процесс

$$Z_n(t) = \sqrt{n}\,(F_n(t)-t)$$

слабо сходится к условному винеровскому процессу, откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\int_0^1 Z_n^2(t)\,dt < \lambda\right\} = \mathsf{P}\{\omega^2 < \lambda\} =$$

$$= 1-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{e^{-t^2\lambda/2}}{\sqrt{-t\sin t}}\,dt,\ \lambda > 0.$$

См. также *Крамера — Мизеса критерий.*

Лит.: [1] Смирнов Н. В., «Матем. сб.», 1937, т. 2, с. 973—993; [2] Anderson T. W., Darling D. A., «Ann. Math. Statist.», 1952, v. 23, p. 193—212. *М. С. Никулин.*

ОМЕГА-НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ — свойство формальных арифметич. систем, означающее невозможность получения омега-противоречия. Омега-противоречием наз. такая ситуация, когда для нек-рой формулы $A(x)$ доказуема каждая формула из бесконечной последовательности формул $A(\ulcorner 0 \urcorner)$, $A(\ulcorner 1 \urcorner)$, $\ldots$, $A(\ulcorner n \urcorner)$, $\ldots$ и формула $\neg\forall x A(x)$, где $\ulcorner 0 \urcorner$ — константа формальной системы, обозначающая число 0 а константы $\ulcorner n \urcorner$ определяются рекурсивно через терм $(x)'$, обозначающий число, непосредственно следующее за x: $\ulcorner n+1 \urcorner = (\ulcorner n \urcorner)'$.

Понятие О.-н. появилось в связи с *Гёделя теоремой о неполноте* арифметики. Именно в предположении О.-н. формальной арифметики К. Гёдель (K. Gödel) доказал ее неполноту. Свойство О.-н. сильнее свойства простой непротиворечивости. Простая непротиворечивость получится, если взять в качестве $A(x)$ формулу, не содержащую x. Из теоремы Гёделя о неполноте вытекает существование непротиворечивых, но омега-противоречивых систем.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *В. Н. Гришин.*

ОМЕГА-ПОЛНОТА — свойство формальных арифметич. систем, состоящее в том, что для всякой формулы $A(x)$ из выводимости формул $A(\ulcorner 0 \urcorner)$, $A(\ulcorner 1 \urcorner)$, $\ldots$ $\ldots$, $A(\ulcorner n \urcorner)$, $\ldots$ следует выводимость формулы $\forall x A(x)$, где $\ulcorner n \urcorner$ — константа, обозначающая натуральное число n или 0. В противном случае система наз. омега-неполной. К. Гёдель в своей теореме о неполноте формальной арифметики фактически установил ее омега-неполноту. Если в качестве аксиом взять множество всех формул, истинных в стандартной модели арифметики, то получится омега-полная аксиоматич. система. Наоборот, во всяком омега-полном расширении арифметики Пеано выводима всякая истинная в стандартной модели формула.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *В. Н. Гришин.*

ОПЕРАНД в языках программирования — аргумент операции; грамматич. конструкция, обозначающая выражение, задающее значение аргумента операции; иногда О. наз. место, позиция в тексте, где должен стоять аргумент операции. Отсюда понятие местности, или арности, операции, т. е. числа аргументов операции.

В зависимости от положения О. относительно знака операции различают префиксные (напр., $\sin x$), инфиксные (напр., $a+b$) и постфиксные (напр., x^2) операции. В зависимости от числа О. различают одноместные (унарные, или монадические) операции; двуместные (бинарные, или диадические) операции; многоместные (или полиадические) операции.

В связи с различением операнда-позиции и операнда как фактического аргумента возникает понятие приведения О. к виду, требуемому операцией. Напр., если действительный аргумент находится в позиции целого О., правила языка могут подразумевать тот или иной способ округления действительного числа до подходящего целого. Другим примером приведения является изменение формы представления объекта, напр. скаляр приводится к вектору, состоящему из одной компоненты. *А. П. Ершов.*

ОПЕРАТОР в программировании — грамматическая конструкция в языках программирования, выражающая нек-рое законченное действие при выполнении программы на ЭВМ. В императивных языках программирования (напр., *алгол*, *фортран*) О. является командой, предписывающей выполнить выражаемое им действие. В апликативных языках (напр., *лисп*) О. является обозначением результата выполнения выражаемого им действия. В нек-рых языках (напр., *алгол-68*) императивные и апликативные свойства О. объединяются: каждый О. вырабатывает нек-рое значение, может быть пустое, и выполняет (в качестве побочного эффекта) предписываемое им действие. Обычно действие О. состоит из двух частей: информационной и логической.

Информационная часть О. состоит в выработке нек-рого значения как функции состояния памяти или, более общо, в отображении состояния памяти на другое состояние.

Логическая часть О. состоит в выборе из программы другого О., выполняемого вслед за данным. В зависимости от однозначности выбора имеет место детерминированность или недетерминированность выполнения программы.

См. также *Алгоритмический язык.* *А. П. Ершов.*

ОПЕРАТОР — отображение одного множества на другое, каждое из к-рых наделено нек-рой структурой (алгебраич. операциями, топологией, отношением порядка). Общее определение О. совпадает с определением отображения или функции: пусть X и Y — два множества; оператором A из множества X во множество Y наз. правило или соответствие, к-рое каждому элементу x из нек-рого подмножества $D \subset X$ сопоставляет однозначно определенный элемент $A(x) \in Y$; множество D наз. областью определения оператора A и обозначается $D(A)$; множество $\{A(x), x \in D\}$ наз. областью значений оператора A и обозначается $R(A)$. Часто пишут Ax вместо $A(x)$. Термин «О.» используется чаще всего в случае, когда X и Y — векторные пространства. Если A — оператор из X в Y, где $Y=X$, то A наз. оператором в X. Если $D(A)=X$, то A наз. всюду определенным оператором. Если A_1, A_2 — операторы из X_1 в Y_1 и из X_2 в Y_2 с областями определения $D(A_1)$ и $D(A_2)$ соответственно и такие, что $D(A_1) \subset D(A_2)$ и $A_1x = A_2x$ при всех $x \in D(A_1)$, то при $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ оператор A_1 называется с у ж е н и е м, или о г р а н и ч е н и е м, оператора A_2, а оператор A_2 — р а с ш и р е н и е м оператора A_1; при $X_1 \subset X_2$, A_2 называется расширением оператора A_1 с выходом из X_1.

Многие уравнения в функциональных или абстрактных пространствах можно представить в виде $Ax = y$, где $y \in Y$, $x \in X$, y — задан, x — неизвестен, A — оператор из X в Y. Утверждение о существовании решения такого уравнения при любой правой части $y \in Y$ равносильно утверждению, что область значений оператора A есть все пространство Y; утверждение, что уравнение $A(x) = y$ имеет при любом $y \in R(A)$ единственное решение, означает, что A взаимно однозначно отображает $D(A)$ на $R(A)$.

Если X и Y — векторные пространства, то в множестве всех О. из X в Y можно выделить класс *линейных операторов;* остальные О. из X в Y наз. н е л и н е й н ы м и о п е р а т о р а м и. Если X и Y — топологические векторные пространства, то в множестве О. из X в Y естественно выделяется класс *непрерывных операторов*, а также класс о г р а н и ч е н н ы х л и н е й н ы х о п е р а т о р о в A (таких операторов A, что образ любого ограниченного множества в X ограничен в Y) и класс линейных *компактных операторов* (т. е. таких О., что образ любого ограниченного множества в X предкомпактен в Y). Если X и Y — локально выпуклые пространства, то в X и Y естественно рассматривать различные топологии; О. наз. п о л у н е п р е р ы в н ы м, если он определяет непрерывное отображение пространства X (в исходной топологии) в пространство Y в слабой топологии (понятие полунепрерывности используется главным образом в теории нелинейных О.); О. наз. у с и л е н н о н е п р е р ы в н ы м, если он непрерывен как отображение пространства X в ограниченно слабой топологии в пространство Y; О. наз. с л а б о н е п р е р ы в н ы м, если он определяет непрерывное отображение X в Y, где X и Y наделены слабой топологией. Часто компактные О. наз. в п о л н е н е п р е р ы в н ы м и. Иногда термин «вполне непрерывный О.» используется вместо термина «усиленно непрерывный О.» или для обозначения О., переводящего любую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся; если X и Y — рефлексивные банаховы пространства, то эти условия эквивалентны компактности О. Если О. усиленно непрерывен или компактен, то он непрерывен; если О. непрерывен, то он слабо непрерывен.

Г р а ф и к о м о п е р а т о р а A наз. множество $\Gamma(A) \subset X \times Y$, определенное соотношением

$$\Gamma(A) = \{\{x, Ax\}, x \in D(A)\}.$$

Пусть X и Y — топологические векторные пространства; оператор A из X в Y наз. *замкнутым оператором*, если его график замкнут. Понятие замкнутого О. особенно плодотворно в случае линейных О. с плотной областью определения.

Понятие графика позволяет обобщить понятие О.: м н о г о з н а ч н ы м о п е р а т о р о м из X в Y наз. любое подмножество A в $X \times Y$; если X и Y — векторные пространства, то многозначным линейным О. наз. линейное подпространство $X \times Y$; областью определения многозначного О. наз. множество

$$D(A) = \{x \in X: \text{существует } y \in Y \text{ такой, что } \{x, y\} \in A\}.$$

Если X — векторное пространство над полем k и $Y = k$, то всюду определенный О. из X в k наз. *функционалом* на X.

Если X и Y — локально выпуклые пространства, то оператор A из X в Y с плотной в X областью определения имеет сопряженный оператор A^* с плотной в Y^* в ослабленной топологии областью определения тогда и только тогда, когда A — замкнутый О.

Примеры операторов. 1) О., сопоставляющий любому элементу $x \in X$ элемент $0 \in Y$ (нулевой оператор).

2) О., сопоставляющий любому элементу $x \in X$ этот же элемент $x \in X$ (единичный оператор в X обозначается id_X или 1_X).

3) Пусть X — векторное пространство функций на нек-ром множестве M и f — функция на M; О. в X с областью определения

$$D(A) = \{\varphi \in X : f\varphi \in X\},$$

действующий по правилу

$$A\varphi = f\varphi$$

при $\varphi \in D(A)$, наз. оператором умножения на функцию; A — линейный О.

4) Пусть X — векторное пространство функций на множестве M и F — отображение множества M в себя; О. в X с областью определения

$$D(A) = \{\varphi \in X : \varphi \circ F \in X\},$$

действующий по правилу

$$A\varphi = \varphi \circ F$$

при $\varphi \in D(A)$, будет линейным О.

5) Пусть X, Y — векторные пространства действительных измеримых функций на пространствах с мерой (M, Σ_M, μ) и (N, Σ_N, ν) соответственно, K — функция на $M \times N \times \mathbb{R}$, измеримая относительно произведения мер $\mu \times \nu \times \mu_0$, где μ_0 — мера Лебега на $\mathbb{R}$, и непрерывная по $t \in \mathbb{R}$ при любых фиксированных $m \in M$, $n \in N$; О. из X в Y с областью определения

$$D(A) = \left\{\varphi \in X : f(x) = \int_M K(x, y, \varphi(y))\, dy\right\},$$

существующий для почти всех $x \in N$ и $f \in Y$, действующий по правилу $A\varphi = f$ при $\varphi \in D(A)$, наз. интегральным оператором; если

$$K(x, y, z) = K(x, y)\, z, \quad x \in M, \quad y \in N, \quad z \in \mathbb{R},$$

то A линейный О.

6) Пусть X — векторное пространство функций на дифференцируемом многообразии M, ξ — векторное поле на M; оператор A в X с областью определения

$$D(A) = \{f \in X : \text{производная } D_\xi f$$

$$\text{функции } f \text{ вдоль поля } \xi \text{ определена всюду и } D_\xi f \in X\},$$

действующий по правилу $Af = D_\xi f$ при $f \in D(A)$, наз. оператором дифференцирования; A — линейный О.

7) Пусть X — векторное пространство функций на множестве M; всюду определенный О., сопоставляющий функции $\varphi \in X$ значение этой функции в точке $a \in M$, есть линейный функционал на X; он наз. δ-функцией в точке a и обозначается δ_a.

8) Пусть G — коммутативная локально компактная группа, $\hat{G}$ — группа характеров группы G; dg, $d\hat{g}$ — меры Хаара на G, $\hat{G}$ соответственно; пусть

$$X = L^2(G, dg), \quad Y = L^2(\hat{G}, d\hat{g});$$

линейный оператор A из X в Y, сопоставляющий функции $f \in X$ функцию $\hat{f} \in Y$, определяемую формулой

$$\hat{f}(\hat{g}) = \int f(g)\, \hat{g}(g)\, dg,$$

всюду определен, если сходимость интеграла понимается как сходимость в среднем.

Если X и Y — топологические векторные пространства, то О. в примерах 1) и 2) непрерывны; если в примере 3) пространство X есть $L^2(M, \Sigma_M, \mu)$, где μ — мера на X, то О. умножения на ограниченную измеримую функцию замкнут и имеет плотную область определения; если в примере 5) пространство $X=Y$ есть гильбертово пространство $L^2(M, \Sigma_M, \mu)$ и $K(x, y, z)=K(x, y)z$, где $K(x, y)$ принадлежит $L^2(M\times M, \Sigma_M\times\Sigma_M, \mu\times\mu)$, то A компактен; если в примере 8) пространства X и Y рассматриваются как гильбертовы пространства, то A непрерывен.

Если A — О. из X в Y такой, что $Ax\neq Ay$ при $x\neq y$, $x, y\in D(A)$, то можно определить обратный оператор A^{-1} к A; вопрос о существовании обратного О. и его свойствах связан с теоремой существования и единственности решения уравнения $Ax=f$; если A^{-1} существует, то $x=A^{-1}f$ при $f\in R(A)$.

Для О. в векторных пространствах можно определить сумму, произведение на число и произведение О. Если A, B — операторы из X в Y с областями определения $D(A)$ и $D(B)$ соответственно, то *суммой операторов* A и B наз. О., обозначаемый $A+B$, с областью определения

$$D(A+B)=D(A)\cap D(B),$$

действующий по правилу

$$(A+B)x=Ax+Bx$$

при $x\in D(A+B)$. *Произведением оператора* A *на число* λ наз. О., обозначаемый λA, с областью определения

$$D(\lambda A)=D(A),$$

действующей по правилу

$$(\lambda A)x=\lambda(Ax)$$

при $x\in D(\lambda A)$. *Произведение операторов* определяется как композиция отображений: если A оператор из X в Y, B — оператор из Y в Z, то произведением B и A наз. оператор BA с областью определения

$$D(BA)=\{x\in X: x\in D(A) \text{ и } Ax\in D(B)\},$$

действующий по правилу

$$(BA)x=B(Ax)$$

при $x\in D(BA)$.

Если P — всюду определенный О. в X такой, что $PP=P$, то P наз. *проектором* в X; если I — всюду определенный О. в X такой, что $II=\mathrm{id}_X$, то I наз. *инволюцией* в X.

Теория О. составляет важнейшую часть линейного и нелинейного функционального анализа, являясь, в частности, основным аппаратом теории динамич. систем, представлений групп и алгебр и важнейшим математич. инструментом математич. физики и квантовой механики.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [4] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1—3, М., 1962—74; [5] Эдвардс Р. -Э., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969; [6] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967.

М. А. Наймарк, А. И. Штерн.

ОПЕРАТОРНАЯ ГРУППА — 1) О. г. — однопараметрическая группа операторов в банаховом пространстве E, т. е. семейство линейных ограниченных операторов U_t, $-\infty<t<\infty$, такое, что $U_0=I$, $U_{s+t}=U_s\cdot U_t$ и U_t непрерывно зависит от t (в равномерной, сильной или слабой топологии). Если E — гильбертово пространство и $\|U_t\|$ равномерно ограничены, то группа

$\{U_t\}$ подобна группе унитарных операторов (теорема Надя).

Лит.: [1] Sz.-Nagy B., «Acta Univ. szeged. Sec. scient. Math.», 1947, t. 11, p. 152—57; [2] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962. *В. И. Ломоносов.*

2) О. г., группа с областью операторов Σ, — такая группа G, что всякому элементу $a \in G$ и всякому $\sigma \in \Sigma$, где Σ — нек-рое множество символов, поставлен в соответствие элемент $a\sigma \in G$, причем $(ab)\sigma = a\sigma \cdot b\sigma$ при любых a, $b \in G$. Пусть G и G' — группы с одной и той же областью операторов Σ; изоморфное (гомоморфное) отображение φ группы G на G' наз. операторным изоморфизмом (гомоморфизмом), если $(a\sigma)\varphi = (a\varphi)\sigma$ для любых $a \in G$, $\sigma \in \Sigma$. Подгруппа (нормальный делитель) H группы G с областью операторов Σ наз. допустимой подгруппой (допустимым нормальным делителем), если $H\sigma \subseteq H$ при всяком $\sigma \in \Sigma$. Пересечение всех допустимых подгрупп, содержащих данное подмножество M группы G, наз. допустимой подгруппой, порожденной множеством M. Группа, не имеющая допустимых нормальных делителей, кроме себя и единичной подгруппы, наз. простой (относительно заданной области операторов). Всякая факторгруппа О. г. по допустимому нормальному делителю является группой с той же областью операторов.

Группа G наз. группой с полугруппой операторов Σ, если G — группа с областью операторов Σ, Σ — полугруппа и $a(\sigma\tau) = (a\sigma)\tau$ для любых $a \in G$, σ, $\tau \in \Sigma$. Если Σ — полугруппа с единицей ε, то считается, что $a\varepsilon = a$ при всяком $a \in G$. Всякая группа с произвольной областью операторов Σ_0 есть группа с полугруппой операторов Σ, где Σ — свободная полугруппа, порожденная множеством Σ_0. Группа F с полугруппой операторов Σ, обладающей единицей, наз. Σ-свободной, если она порождается такой системой элементов X, что элементы $x\alpha$, где $x \in X$, $\alpha \in \Sigma$, составляют для F (как группы без операторов) систему свободных образующих. Пусть F есть Γ-свободная группа (Γ — группа операторов), Δ — подгруппа группы Γ, $f \in F$ и $A_{f,\Delta}$ — допустимая подгруппа группы F, порожденная всеми элементами вида $f^{-1}(f\alpha)$, где $\alpha \in \Delta$. Тогда всякая допустимая подгруппа группы F является операторным свободным произведением групп типа $A_{f,\Delta}$ и нек-рой Γ-свободной группы (см. [2]). Если Σ — свободная полугруппа операторов, то при $a \neq 1$ допустимая подгруппа Σ-свободной группы F, порожденная элементом a, сама является Σ-свободной группой со свободным образующим a (см. также [3]).

Абелева группа с ассоциативным кольцом операторов K — это модуль над K.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Завало С. Т., «Матем. сб.», 1953, т. 33, с. 399—432; [3] его же, «Укр. матем. ж.», 1964, т. 16, № 5, с. 593—602; № 6, с. 730—51. *А. П. Мишина.*

ОПЕРАТОРНАЯ ТОПОЛОГИЯ — топология в пространстве $L(E, F)$ непрерывных линейных отображений одного топологического векторного пространства E в другое топологич. пространство F, превращающая пространство $L(E, F)$ в топологическое векторное пространство. Пусть F — локально выпуклое пространство и $\mathfrak{S}$ — такое семейство ограниченных подмножеств пространства E, что линейная оболочка объединения множеств этого семейства плотна в E; пусть $\mathfrak{V}$ — базис окрестностей нуля в F. Семейство

$$M(S, V) = \{f : f \in L(E, F),\ f(S) \subset V\},$$

где S пробегает $\mathfrak{S}$, а V пробегает $\mathfrak{V}$, является базисом окрестностей нуля для единственной инвариантной относительно сдвигов топологии, к-рая является О. т. и превращает пространство $L(E, F)$ в локально выпуклое пространство; эта топология наз. $\mathfrak{S}$-топологией на $L(E, F)$.

Примеры. I. Пусть E, F — локально выпуклые пространства; 1) пусть $\mathfrak{S}$ — семейство всех конечных подмножеств в E, соответствующая $\mathfrak{S}$-топология (в $L(E, F)$) наз. топологией простой (или поточечной) сходимости; 2) пусть $\mathfrak{S}$ — семейство всех выпуклых закругленных компактных подмножеств E, соответствующая топология наз. топологией выпуклой закругленной компактной сходимости; 3) пусть $\mathfrak{S}$ — семейство всех предкомпактных подмножеств E, соответствующая $\mathfrak{S}$-топология наз. топологией предкомпактной сходимости; 4) пусть $\mathfrak{S}$ — семейство всех ограниченных подмножеств, соответствующая топология наз. топологией ограниченной сходимости.

II. Если E, F — банаховы пространства, рассматриваемые одновременно в слабой или сильной (нормированной) топологии, то соответствующие пространства $L(E, F)$ алгебраически совпадают; соответствующие топологии простой сходимости наз. слабой и сильной О. т. в $L(E, F)$. Сильная О. т. мажорирует слабую О. т.; обе они согласуются с двойственностью между $L(E, F)$ и пространством функционалов на $L(E, F)$ вида $f(A)=\Sigma\varphi_i(A\,\xi_i)$, где $\xi_i \in E$, $\varphi_i \in E^*$, $A \in L(E, F)$.

III. Пусть E, F — гильбертовы пространства и $\tilde{E}$, $\tilde{F}$ — счетные прямые суммы гильбертовых пространств E_n, F_n соответственно, где $E_n=E$, $F_n=F$ для всех натуральных n; пусть ψ — вложение пространства $L(E, F)$ в $L(\tilde{E}, \tilde{F})$, определенное условием: для любого оператора $A \in L(E, F)$ ограничение оператора $\psi(A)$ на подпространство E_n переводит E_n в F_n и совпадает на E_n с оператором A. Тогда полный прообраз в $L(E, F)$ слабой (сильной) О. т. в $L(\tilde{E}, \tilde{F})$ наз. ультраслабой (соответственно ультрасильной) О. т. в $L(E, F)$. Ультраслабая (ультрасильная) топология мажорирует слабую (сильную) О. т. Симметричная подалгебра $\mathfrak{A}$ алгебры $L(E)$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве E, содержащая единичный оператор, тогда и только тогда совпадает с множеством всех операторов из $L(E)$, перестановочных с каждым оператором из $L(E)$, перестановочным со всеми операторами из $\mathfrak{A}$, когда $\mathfrak{A}$ замкнута в слабой (или сильной, или ультраслабой, или ультрасильной) О. т., то есть является *Неймана алгеброй*.

Лит.: [1] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [2] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [3] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [4] Sakai S., C*-algebras and W*-algebras, В., 1971.

А. И. Штерн.

ОПЕРАТОРНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА — общее название теорем о пределе средних по неограниченно удлиняющемуся «промежутку времени» $n=0, 1, \ldots, N$ или $0 \leqslant t \leqslant T$ для степеней $\{A^n\}$ линейного оператора A, действующего в банаховом (или даже топологическом векторном, см. [5]) пространстве E, либо для действующей в E однопараметрич. полугруппы линейных операторов $\{A_t\}$. В последнем случае можно рассматривать также предел средних по неограниченно уменьшающемуся промежутку времени (локальные эргодические теоремы, см. [5], [6]; говорят также об «эргодичности в нуле», см. [1]). Средние могут пониматься в различных смыслах, аналогично тому, как это делается в теории суммирования рядов. Чаще всего используются средние Чезаро

$$\bar{A}_N=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} A^n$$

или

$$\overline{A}_T = \frac{1}{T}\int_0^T A_t\,dt$$

или средние Абеля

$$\overline{A}_\theta = (1-\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\theta^n A^n,\ |\theta|<1$$

или

$$\overline{A}_\lambda = \lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} A_t\,dt.$$

Условия эргодич. теорем заведомо обеспечивают сходимость подобных бесконечных рядов или интегралов; при этом, хотя абелевы средние образуются с участием всех A^n или A_t, главную роль играют значения A^n или A_t на конечном отрезке времени, неограниченно возрастающем при $\theta\to 1$ (или $\lambda\to 0$). Предел средних ($\lim\limits_{N\to\infty}\overline{A}_N$ и т. д.) тоже может пониматься в различных смыслах — в сильной или слабой операторной топологии (статистические эргодические теоремы, т. е. *Неймана теорема* эргодическая — исторически первая О. э. т. — и ее обобщения), в равномерной операторной топологии (равномерные эргодические теоремы, см. [1], [2], [3]), а если E реализовано как нек-рое пространство функций на нек-ром пространстве с мерой, то и в смысле сходимости почти всюду средних $\overline{A}_N\varphi$ и т. п. при $\varphi\in E$ (индивидуальные эргодические теоремы, т. е. *Биркгофа эргодическая теорема* и ее обобщения, см., напр., *Орнстейна—Чекона эргодическая теорема*; их, впрочем, не всегда относят к О. э. т.). Нек-рые из О. э. т. как бы сравнивают силу различных упомянутых выше вариантов, устанавливая, что из существования пределов средних в одном смысле следует существование пределов в другом смысле. В нек-рых теоремах речь идет не о пределе средних, а о пределе отношения двух средних (такова теорема Орнстейна — Чекона).

Имеются также О. э. т. для n-параметрических и даже более общих полугрупп.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., М., 1962; [2] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [3] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [4] Вершик А. М., Юзвинский С. А., в кн.: Итоги науки, в. 15 — Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 133—87; [5] Каток А. Б., Синай Я. Г., Степин А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129—262; [6] Krengel U., «Astérisque», 1977, t. 50, p. 151—92. *Д. В. Аносов.*

ОПЕРАТОРНО НЕПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — представление π группы (алгебры, кольца, полугруппы) X в (топологическом) векторном пространстве E такое, что любой (непрерывный) линейный оператор в пространстве E, перестановочный со всеми операторами $\pi(x)$, $x\in X$, кратен единичному оператору в E. Если π — вполне неприводимое представление (в частности, если π — конечномерное неприводимое представление), то π — О. н. п.; обратное, вообще говоря, неверно. Если π — унитарное представление группы или симметричное представление симметричной алгебры, то π тогда и только тогда является О. н. п., когда π — *неприводимое представление*. *А. И. Штерн.*

ОПЕРАТОРНОЕ КОЛЬЦО, кольцо с областью операторов Σ, — кольцо, в к-ром определено умножение элементов кольца на элементы из нек-рого фиксированного множества Σ (внешний закон композиции), удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$(a+b)\,\alpha = a\alpha + b\alpha, \tag{1}$$

$$(ab)\,\alpha = (a\alpha)\,b = a\,(b\alpha), \tag{2}$$

где α — элемент множества Σ, а a, b, $a\alpha$, $b\alpha$—элементы кольца. Операторы, таким образом, действуют как эндоморфизмы аддитивной группы, перестановочные с умножением на элемент кольца. Кольцо с областью операторов Σ, или короче Σ-операторное кольцо, можно трактовать и как универсальную алгебру с двумя бинарными операциями (сложением и умножением) и множеством Σ унарных операций, связанных обычными кольцевыми тождествами, а также тождествами (1) и (2). Понятия Σ-допустимого подкольца, Σ-допустимого идеала, Σ-операторного изоморфизма и Σ-операторного гомоморфизма могут быть определены подобно тому, как это делается для *операторных групп*. Если Σ-операторное кольцо R обладает единицей, то все идеалы и все односторонние идеалы кольца R Σ-допустимы.

Кольцо R наз. кольцом с кольцом операторов Σ, если оно есть Σ-операторное кольцо, область операторов Σ к-рого сама является ассоциативным кольцом, причем для любых α, $\beta\in\Sigma$ и $a\in R$ справедливы равенства

$$a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta,$$

$$a(\alpha\beta)=(a\alpha)\beta.$$

Кольцо с кольцом операторов можно определить так же, как кольцо являющееся одновременно Σ-модулем и удовлетворяющее аксиоме (2). Всякое кольцо можно естественным образом считать операторным над кольцом целых чисел.

Для всех a из R и α, β из Σ элемент $a(\alpha\beta-\beta\alpha)$ является аннулятором кольца R. Поэтому, если R — кольцо без аннуляторов, то его кольцо операторов Σ непременно коммутативно.

Наиболее часто рассматриваются кольца с ассоциативно-коммутативным кольцом операторов, обладающим единицей. Такое О. к. наз. обычно алгеброй над коммутативным кольцом, а также линейной алгеброй. Наиболее изучены линейные алгебры над полями, их теория развивается параллельно общей теории колец (без операторов).

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973. *К. А. Жевлаков.*

ОПЕРАТОРНЫЙ ГОМОМОРФИЗМ — гомоморфизм алгебраической системы, перестановочный с каждым оператором из нек-рого фиксированного множества, действующим на этой системе, т. е. гомоморфизм операторной группы, операторного кольца и т. д.

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — один из методов математич. анализа, позволяющий в ряде случаев сводить исследование *дифференциальных операторов*, *псевдодифференциальных операторов* и нек-рых типов *интегральных операторов* и решение уравнений, содержащих эти операторы, к рассмотрению более простых алгебраич. задач. Развитие и систематич. применение О. и. началось с работ О. Хевисайда (O. Heaviside, 1892), к-рый предложил формальные правила обращения с оператором дифференцирования $\frac{d}{dt}$ и решил ряд прикладных задач. Однако О. и. не получило у него математич. обоснования: оно было дано с помощью *Лапласа преобразования*; Я. Микусиньский (J. Mikusiński, 1953) алгебраизировал О. и., опираясь на понятие функционального кольца; наиболее общая концепция О. и. получается с помощью *обобщенных функций*.

Простейший вариант О. и. строится следующим образом. Пусть K — совокупность функций (с действительными или комплексными значениями), заданных в области $0\leqslant t<\infty$ и абсолютно интегрируемых в любом конечном интервале. Сверткой функций f, $g \in K$ наз. интеграл

$$h = f * g = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

Относительно обычного сложения и операции свертки K становится кольцом без делителей нуля (теорема Титчмарша, 1924). Элементы поля частных P этого кольца наз. операторами и обозначаются $\frac{a}{b}$; невыполнимость деления в K как раз и есть источник нового понятия оператора, обобщающего понятие функции. Для выявления необходимого в О. и. различия между понятиями функции и ее значения в точке введены следующие обозначения:

$$\{f(t)\} \text{ — функция } f(t);$$
$$f(t) \text{ — значение } f(t) \text{ в точке } t.$$

Примеры операторов.

1) $e = \{1\}$ — оператор интегрирования:

$$\{1\}\{f\} = \left\{ \int_0^t f(\tau)\, d\tau \right\},$$

при этом

$$e^p = \left\{ \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} \right\}$$

и, в частности,

$$e^n\{f\} = \underbrace{\int_0^t dt \ldots \int_0^t}_{n \text{ раз}} f(t)\, dt =$$

$$= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, d\tau;$$

это — формула Коши, обобщение к-рой на случай произвольного (нецелого) показателя служит для определения дробного интегрирования.

2) $[\alpha] = \frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$ (где α — функция-константа) — числовой оператор; поскольку $[\alpha]\ [\beta] = [\alpha, \beta]$, $[\alpha]\ \{f\} = \{\alpha f\}$, в то время как $\{\alpha\}\ \{\beta\} = \{\alpha\beta t\}$, то числовые операторы ведут себя как обычные числа. Таким образом, оператор является обобщением не только функции, но и числа; единицей кольца K является $[1]$.

3) $s = \frac{[1]}{e}$ — оператор дифференцирования, обратный оператору интегрирования. Так, если функция $a(t) = \{a(t)\}$ имеет производную $a'(t)$, то

$$s\{a\} = \{a'\} + [a(0)]$$

и

$$\{a^{(n)}\} = s^n\{a\} - s^{n-1}[a(0)] - \ldots - [a^{n-1}(0)];$$

отсюда, напр.,

$$\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-a}.$$

На оператор дифференцирования s можно умножать не только дифференцируемые функции, однако результат есть уже, вообще говоря, оператор.

4) $D\{f\} = \{-tf(t)\}$ — алгебраическая производная, она распространяется на произвольные операторы обычным способом, при этом оказывается, что действие этого оператора на функции от s совпадают с дифференцированием по s.

О. и. дает удобные способы решения линейных дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и с частными производными. Напр., решение уравнения

$$\alpha_n x^{(n)} + \ldots + \alpha_0 x = f, \ \alpha_i = \text{const}, \ i = 0, 1, \ldots, n,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = \gamma_0, \ldots,$

$x^{(n-1)}(0)=\gamma_{n-1}$ автоматически приводится к алгебраич. уравнению и символически выражается формулой

$$x=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\ldots+\beta_0+f}{\alpha_n s^n+\ldots+\alpha_0},$$

$$\beta_\nu=\alpha_{\nu+1}\gamma_0+\cdots+\alpha_n\gamma_{n-\nu-1},$$

решение в обычном виде получается разложением на элементарные дроби от переменной s с последующим обратным переходом по соответствующим таблицам к функциям.

Для применения О. и. к уравнениям с частными производными (а также к более общим псевдодифференциальным уравнениям) строятся дифференциальное и интегральное исчисления операторных функций, т. е. функций, значениями к-рых являются операторы: вводятся понятия непрерывности, производной, сходимости ряда, интеграла и т. д.

Пусть $f(\lambda, t)$ — нек-рая функция, определенная для $t \geqslant 0$ и $\lambda \in [a, b]$. Параметрическая операторная функция $f(\lambda)$ определяется формулой $f(\lambda)=\{f(\lambda, t)\}$; она ставит в соответствие рассматриваемым значениям λ операторы частного вида — функции от t. Операторная функция наз. непрерывной при $\lambda \in [a, b]$, если она представима как произведение нек-рого оператора q и такой параметрич. функции $f_1(\lambda)=\{f_1(\lambda, t)\}$, что $f_1(\lambda, t)$ непрерывна в обычном смысле.

Примеры. 1) С помощью параметрич. функции $h(\lambda)=\{h(\lambda, t)\}$:

$$h(\lambda, t)=\begin{cases}0 & \text{для } 0 \leqslant t<\lambda, \\ t-\lambda & \text{для } 0 \leqslant \lambda \leqslant t,\end{cases}$$

определяется функция Хевисайда

$$H(\lambda)=s\{h(\lambda, t)\};$$

значения гиперболической показательной функции

$$e^{-\lambda s} \equiv sH(\lambda)=s^2\{h(\lambda, t)\}$$

наз. операторами сдвига, поскольку умножение данной функции на $e^{-\lambda s}$ вызывает смещение ее графика на длину λ в положительном направлении оси t.

2) Решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\alpha^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}$$

выражается через параболическую показательную функцию (являющуюся также параметрической операторной функцией):

$$e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}=\left\{\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right)\right\}.$$

3) Периодич. функция $f(t)$ с периодом $2\lambda_0$ имеет представление

$$\{f\}=\frac{\int_0^{2\lambda_0} e^{-\lambda s} f(\lambda)\, d\lambda}{1-e^{-2\lambda_0 s}}.$$

4) Если $f(\lambda)$ принимает числовые значения в интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$, то

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\lambda s} f(\lambda)\, d\lambda=\begin{cases}f(\lambda), & \lambda_1<t<\lambda_2, \\ 0, & 0 \leqslant t<\lambda_1,\ t>\lambda_2,\end{cases}$$

т. е. умножение данной функции $\{f\}$ на $e^{-\lambda s}$ с последующим интегрированием вызывает усечение ее графика. В частности,

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} f(\lambda)\, d\lambda=\{f(t)\};$$

таким образом, каждой функции $f(t)$, для к-рой рассматриваемый интеграл сходится, ставится в соответствие аналитич. функция

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

— ее преобразование Лапласа. Благодаря этому обстоятельству довольно обширный класс операторов описывается функциями одного параметра s, более того, это формальное сходство уточняется математически установлением определенного изоморфизма.

Имеются различные обобщения О. и.; таково О. и. дифференциальных операторов, отличных от $s=\frac{d}{dt}$, напр. $b=\frac{d}{dt}\left(t\frac{d}{dt}\right)$, к-рое основывается на функциональных кольцах с надлежащим образом определенным произведением.

Лит.: [1] Диткин В. А., Прудников А. П., Справочник по операционному исчислению, М., 1965; [2] Микусинский Я., Операторное исчисление, пер. с польск., М., 1956.

М. И. Войцеховский.

А-ОПЕРАЦИЯ, операция A, — теоретико-множественная операция, открытая П. С. Александровым [1] (см. также [2] с. 39 и [3]). Пусть $\{E_{n_1\ldots n_k}\}$ — система множеств, заиндексированных всеми конечными последовательностями натуральных чисел. Множество

$$P=\bigcup_{n_1\ldots n_k\ldots}\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_1\ldots n_k},$$

где суммирование распространяется на все бесконечные последовательности натуральных чисел, наз. результатом A-О., примененной к системе $\{E_{n_1\ldots n_k}\}$.

Применение A-О. к системе интервалов числовой прямой дает множества (названные *А-множествами* в честь П. С. Александрова), к-рые могут не быть борелевскими (см. *Дескриптивная теория множеств*). A-О. сильнее операций счетного объединения и счетного пересечения и является идемпотентной. Относительно A-О. инвариантны *Бэра свойство* (подмножеств произвольного топологич. пространства) и измеримость по Лебегу.

Лит.: [1] Александров П. С., «С. r. Acad. sci», 1916, t. 162, p. 323—25; [2] его же, Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств, М., 1978; [3] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 275—78; [4] Суслин М. Я., «С. r. Acad. sci.», 1917, t. 164, p. 88—91; [5] Лузин Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958, с. 284; [6] Куратовский К., Топология, пер. [с англ.], т. 1, М., 1966.

А. Г. Елькин.

δs-ОПЕРАЦИЯ — теоретико-множественная операция, результат применения к-рой к последовательности (E_n) множеств может быть записан в виде

$$\Phi(E_n)=\bigcup_{z\in N}\bigcap_{n\in z}E_n,$$

где N — система множеств положительных целых чисел, наз. базой $\delta s=0$. См. *Дескриптивная теория множеств.*

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Матем. сб.», 1928, т. 35, № 3—4, с. 415—22; [2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [3] Александров П. С., Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств, М., 1978, с. 35—40, 53—58; [4] Очан Ю. С., «Успехи матем. наук», 1955, т. 10, в. 3, с. 71—128; [5] Колмогоров А. Н., там же, 1966, т. 21, в. 4, с. 275—78.

А. Г. Елькин.

ОПЕРЕНИЕ пространства — счетное семейство P покрытий пространства X множествами, открытыми в нек-ром объемлющем пространстве Y, такое, что

$$\bigcap\{\mathrm{St}_\gamma(x):\gamma\in P\}\subset X$$

для каждой точки $x\in X$ (здесь $\mathrm{St}_\gamma(x)$ означает звезду точки x относительно γ, т. е. объединение всех элементов из γ, содержащих точку x).

Понятие О. лежит в основе определения т. н. p-пространства (в смысле А. В. Архангельского). Пространство X наз. p-пространством, если оно имеет О. в своем *Стоуна — Чеха бикомпактном расширении* или *Уолмена бикомпактном расширении*. Каждое полное в смысле Чеха пространство является p-пространством. Каждое p-пространство имеет точечно-счетный тип. В p-пространстве справедливы аддиционная теорема для веса, и сетевой вес совпадает с весом. Паракомпактные p-пространства — это в точности совершенные прообразы метрич. пространств. Паракомпактные p-пространства с точечно-счетной базой метризуемы, равно как метризуемы и пространства этого вида с диагональю G_δ. Совершенный образ и совершенный прообраз паракомпактного p-пространства — также паракомпактные p-пространства. *В. И. Пономарев.*

ОПОРНАЯ ГИПЕРПЛОСКОСТЬ множества M в n-мерном векторном пространстве — $(n-1)$-мерная плоскость, к-рая содержит точки замыкания M и оставляет M в одном замкнутом пространстве. При $n=3$ О. г. наз. опорной плоскостью, а при $n=2$ — опорной прямой.

Граничную точку множества M, через к-рую проходит хотя бы одна О. г., наз. опорной точкой M. У выпуклого множества M все его граничные точки — опорные. Последнее свойство Архимед использовал как определение выпуклости M. Граничные точки выпуклого множества M, через к-рые проходит единственная О. г., наз. гладкими.

В *общих векторных пространствах*, где гиперплоскость определяется как область постоянства значений линейного функционала, также вводится понятие О. г. как гиперплоскости, экстремальной по значению этого функционала среди гиперплоскостей, оставляющих M в одном полупространстве. *В. А. Залгаллер.*

ОПОРНАЯ ФУНКЦИЯ, опорный функционал, множества A, лежащего в векторном пространстве X, — функция sA, задаваемая в находящемся с ним в двойственности векторном пространстве Y соотношением

$$(sA)(y)=\sup_{y\in A}\langle x,\ y\rangle.$$

Напр., О. ф. единичного шара в нормированном пространстве, рассматриваемом в двойственности со своим сопряженным пространством, — это норма в последнем.

О. ф. всегда выпуклая, замкнутая и положительно однородная (первой степени). Оператор $s: A\to sA$ взаимно однозначно отображает совокупность выпуклых замкнутых множеств в X на совокупность выпуклых замкнутых однородных функций, обратный оператор — не что иное, как *субдифференциал* (в нуле) опорной функции. Именно, если A — выпуклое замкнутое подмножество в X, то $\partial(sA)=A$, и если p — выпуклая замкнутая однородная функция на Y, то $s(\partial p(0))=p$. Эти два соотношения (являющиеся следствием теоремы Фенхеля — Моро, см. *Сопряженная функция*) и выражают двойственность между замкнутыми выпуклыми множествами и выпуклыми замкнутыми однородными функциями.

Примеры соотношений, связывающих оператор s с алгебраическими и теоретико-множественными операциями:

$$s(\lambda C)=\lambda sC,\ \lambda>0;\ s(A_1+A_2)=sA_1+sA_2;$$

$$s(\operatorname{conv}(A_1\cup A_2))(x)=\max(sA_1(x),\ sA_2(x)).$$

Лит.: [1] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973; [2] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, Lpz.—B., 1910; [3] его же, Gesammelte Abhandlungen, Bd 2, Lpz.— B., 1911; [4] Fenchel W., «Canad. J. Math.», 1949, v. 1, p. 73—77; [5] его же, Convex cones, sets and funktions, Princeton, 1953; [6] Hörmander L., «Ark. för Mat.», 1955, bd 3, p. 181—86. *В. М. Тихомиров.*

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ — см. *Интеграл.*

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ, детерминант, квадратной матрицы $A=\|a_{ij}\|$ порядка n над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей 1 — элемент кольца K, равный сумме всех членов вида

$$(-1)^t \, a_{1i_1} \dots a_{ni_n},$$

где $i_1, \dots, i_n$ — перестановка чисел $1, \dots, n$, а t — число инверсий перестановки $i_1, \dots, i_n$. О. матрицы

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{matrix}\right\|$$

обозначается

$$\left|\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{matrix}\right| \text{ или } \det A.$$

О. матрицы A содержит $n!$ членов; при $n=1$ $\det A = a_{11}$, при $n=2$ $\det A = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$. Наиболее важные для приложений случаи: K — поле (в частности, числовое поле), K — кольцо функций (в частности, кольцо многочленов), K — кольцо целых чисел.

Всюду ниже K — ассоциативно-коммутативное кольцо с 1, $M_n(K)$ — совокупность всех квадратных матриц порядка n над K, E_n — единичная матрица над K. Пусть $A \in M_n(K)$, а $a_1, \dots, a_n$ — строки матрицы A (все далее изложенное справедливо и для столбцов матрицы A). О. матрицы A удобно рассматривать как функцию от ее строк:

$$\det A = D(a_1, \dots, a_n).$$

Отображение

$$d: M_n \longrightarrow K \quad (A \longmapsto \det A)$$

подчинено следующим трем условиям:

1) $d(A)$ — линейная функция любой строки матрицы A:

$$D(a_1, \dots, \lambda a_i + \mu b_i, \dots, a_n) = \\ = \lambda D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \mu D(a_1, \dots, b_i, \dots, a_n),$$

где $\lambda, \mu \in K$;

2) если матрица B получена из A заменой строки a_i строкой a_i+a_j, $i \neq j$, то $d(A)=d(B)$;

3) $d(E_n)=1$.

Условия 1) — 3) однозначно определяют отображение d, т. е. если отображение $h: M_n(K) \to K$ удовлетворяет условиям 1) — 3), то $h(A)=\det A$. Таким образом получается аксиоматич. построение теории О.

Пусть отображение $f: M_n(K) \to K$ удовлетворяет условию:

1_a) если B получается из матрицы A умножением одной строки на $\lambda \in K$, то $f(B)=\lambda f(A)$. Очевидно, $1) \Rightarrow 1_a)$. В случае, когда K — поле, совокупность условий 1) — 3) оказывается равносильной условиям 1_a), 2), 3).

О. диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов. Отсюда вытекает сюръективность отображения $d: M_n(K) \to K$. О. треугольной матрицы также равен произведению ее диагональных элементов. Для матрицы $A=\left\|\begin{matrix} B & 0 \\ D & C \end{matrix}\right\|$, где B и C — квадратные матрицы,

$$\det A = \det B \det C.$$

Из свойств перестановок вытекает, что $\det A^T = \det A$, где ^{T} — знак транспонирования. Если матрица A имеет две одинаковые строки, то ее определитель равен 0; если поменять местами две строки матрицы A, то ее О. изменит знак;

$$D(a_1, \dots, a_i+\lambda a_j, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

при $i \neq j$, $\lambda \in K$; для A и B из $M_n(K)$

$$\det AB = \det A \det B.$$

Таким образом, отображение d есть эпиморфизм мультипликативных полугрупп $M_n(K)$ и K.

Пусть $m \leqslant n$, $A = \|a_{ij}\|$ есть (m, n) матрица, $B = \|b_{ij}\|$ есть $(n \times m)$-матрица над K, а $C = AB$. Тогда верна формула Бине — Коши:

$$\det C = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n} \begin{vmatrix} a_{1j_1} \ldots a_{1j_m} \\ \ldots \quad \ldots \\ a_{mj_1} \ldots a_{mj_m} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} b_{j_1 1} \ldots b_{j_1 m} \\ \ldots \ldots \\ b_{j_m 1} \ldots b_{j_m m} \end{vmatrix}.$$

Пусть $A = |a_{ij}| \in M_n(K)$, а A_{ij} — алгебраич. дополнение элемента a_{ij}. Тогда верны формулы

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \delta_{ik} \det A, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \delta_{jk} \det A, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Для вычислений О. часто используются разложение его по элементам строки или столбца, т. е. формулы (1), теорема Лапласа (см. *Алгебраическое дополнение)* и преобразования матрицы A, не меняющие О. Для матрицы A из $M_n(K)$ тогда и только тогда существует обратная матрица A^{-1} в $M_n(K)$, когда в K имеется элемент, обратный элементу $\det A$. Следовательно, отображение

$$\mathrm{GL}(n, K) \longrightarrow K^* \ (A \longmapsto \det A),$$

где $\mathrm{GL}(n, K)$ — группа всех обратимых матриц в $M_n(K)$, т. е. полная линейная группа, а K^* — группа обратимых элементов K, есть эпиморфизм этих групп.

Квадратная матрица над полем обратима тогда и только тогда, когда ее О. отличен от нуля. n-мерные векторы $a_1, \ldots, a_n$ над полем F линейно зависимы тогда и только тогда, когда

$$D(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

О. матрицы A порядка $n > 1$ над полем равен 1 тогда и только тогда, когда A есть произведение элементарных матриц вида

$$t_{ij}(\lambda) = E_n + \lambda e_{ij},$$

где $i \neq j$, а e_{ij} — матрица, единственный ненулевой элемент к-рой равен 1 и расположен на позиции (i, j).

Теория О. возникла в связи с задачей решения систем линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где a_{ij}, b_j — элементы нек-рого поля F. Если $\det A \neq 0$, где $A = \|a_{ij}\|$ — матрица системы (2), то эта система имеет единственное решение, вычисляемое по формулам Крамера (см. *Крамера правило*). В случае, когда система (2) задана над кольцом K и $\det A$ обратим в K, система также имеет единственное решение, определяемое теми же формулами Крамера.

Теория О. построена также и для матриц над некоммутативным ассоциативным телом. О. матрицы над телом k (о п р е д е л и т е л ь Д ь ё д о н н е) вводится следующим образом. Тело k рассматривается как полугруппа и строится ее коммутативный гомоморфный образ $\bar{k}$. k — группа k^* с внешне присоединенным нулем 0, а в качестве $\bar{k}$ берется также группа $\bar{k}^*$ с внешне присоединенным нулем $\bar{0}$, где $\bar{k}^*$ — факторгруппа группы k^* по коммутанту. Эпиморфизм $k \rightarrow \bar{k}$,

$\lambda \to \overline{\lambda}$, задается канонич. эпиморфизмом групп $k^* \to \overline{k^*}$ и условием $0 \to \overline{0}$. Очевидно, $\overline{1}$ — единица полугруппы $\overline{k}$.

Теория О. над телом основана на следующей теореме. Существует единственное отображение

$$\delta: M_n(k) \mapsto \overline{k},$$

удовлетворяющее *следующим трем аксиомам:*

I) если матрица B получена из матрицы A умножением слева одной строки на $\lambda \in k$, то $\delta(B) = \overline{\lambda}\delta(A)$;

II) если B получена из A заменой строки a_i строкой $a_i + a_j$, где $i \neq j$, то $\delta(B) = \delta(A)$;

III) $\delta(E_n) = \overline{1}$.

Элемент $\delta(A)$ наз. определителем матрицы A и обозначается $\det A$. Для коммутативного тела аксиомы I), II), III) совпадают с условиями 1$_a$), 2), 3) соответственно, и, следовательно, в этом случае получаются обычные О. над полем. Если $A = \operatorname{diag}[a_{11}, \ldots, a_{nn}]$, то $\det A = \overline{a_{11} \ldots a_{nn}}$; таким образом, отображение $\delta: M_n(k) \to \overline{k}$ сюръективно. Матрица A из $M_n(k)$ обратима тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Справедливо равенство $\det AB = \det A \cdot \det B$. Как и в коммутативном случае, $\det A$ не изменится, если строку a_i матрицы A заменить строкой $a_i + \lambda a_j$, где $i \neq j$, $\lambda \in k$. При $n > 1$ $\det A = \overline{1}$ тогда и только тогда, когда A произведение элементарных матриц вида $t_{ij}(\lambda) = E_n + \lambda e_{ij}$, $i \neq j$, $\lambda \in k$. Если $a \neq 0$, то

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \overline{ad - aca^{-1}b}, \quad \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\overline{cb}.$$

В отличие от коммутативного случая, $\det A^T$ может и не совпадать с $\det A$. Напр., для матрицы $A = \begin{Vmatrix} i & j \\ k & -1 \end{Vmatrix}$ над телом *кватернионов* $\det A = -\overline{2i}$, а $\det A^T = \overline{0}$.

Бесконечные О., то есть О. бесконечных матриц, определяются как предел, к-рому стремится О. конечной подматрицы при бесконечном возрастании ее порядка. Если этот предел существует, то О. наз. сходящимся, в противном случае — расходящимся.

Понятие «О.» восходит к Г. Лейбницу (G. Leibnitz, 1678); первая публикация принадлежит Г. Крамеру (G. Cramer, 1750). Теория О. создана трудами А. Вандермонда (A. Vandermonde), П. Лапласа (P. Laplace), *О. Коши (A. Cauchy) и К. Якоби (C. Jacobi). Термин* «О.» встречается впервые у К. Гаусса (C. Gauss, 1801). Современное обозначение введено А. Кэли (A. Cayley, 1841).

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [2] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [3] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, М., 1970; [4] Тышкевич Р. И., Феденко А. С., Линейная алгебра и аналитическая геометрия, 2 изд., Минск, 1976; [5] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [6] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [7] Каган В. Ф., Основания теории определителей, Одесса, 1922. *Д. А. Супруненко.*

ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА ОКРЕСТНОСТЕЙ множества A в топологическом пространстве X — любое семейство ξ подмножеств пространства X, подчиненное следующим двум условиям: а) для каждого $O \in \xi$ найдется открытое множество V пространства X такое, что $O \supset V \supset A$, б) каково бы ни было открытое в X множество W, содержащее A, найдется элемент U семейства ξ, содержащийся в W. Иногда дополнительно предполагают, что все элементы семейства ξ открытые множества. Определяющей системой окрестностей точки $x \in X$ в топологич. пространстве X наз. О. с. о. в X одноточечного множества $\{x\}$.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974. *А. В. Архангельский.*

ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, ассоциированное с регулярной особой точкой $z=a$ обыкновенного линейного дифференциального уравнения

$$p_0(z)\,w^{(n)}+p_1(z)\,w^{(n-1)}+\ldots+p_n(z)\,w=0. \qquad (1)$$

Пусть

$$p_j(z)=(z-a)^{n-j}\,q_j(z),$$

функции $q_j(z)$ голоморфны в точке $z=a$ и $q_0(a)\neq 0$. Определяющее уравнение имеет вид

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)\,q_0(a)+\ldots+\lambda q_{n-1}(a)+q_n(a)=0. \qquad (2)$$

Если корни λ_j, $1\leqslant j\leqslant n$, уравнения (2) таковы, что все разности $\lambda_j-\lambda_k$ при $j\neq k$ не являются целыми числами, то уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений вида

$$w_j(z)=(z-a)^{\lambda_j}\,\varphi_j(z),\ 1\leqslant j\leqslant n, \qquad (3)$$

где функции $\varphi_j(z)$ голоморфны в точке $z=a$. В противном случае решения уравнения (1) могут быть многочленами от $\ln(z-a)$ с коэффициентами, голоморфными в точке $z=a$.

О. у. для системы из n уравнений

$$(z-a)\,w'=A(z)\,w, \qquad (4)$$

отвечающее регулярной особой точке $z=a$, имеет вид

$$\det\|\lambda I-A(a)\|=0,$$

где $A(z)$ — матрица-функция порядка $n\times n$, голоморфная в точке $z=a$, и $A(a)\neq 0$. Если все разности $\lambda_j-\lambda_k$ при $j\neq k$ не являются целыми числами, где λ_j — собственные значения матрицы A, то система (4) имеет фундаментальную систему решений вида (3), где $\varphi_j(z)$ — вектор-функции, голоморфные в точке $z=a$; в противоположном случае вектор-функции $\varphi_j(z)$ могут быть многочленами от $\ln(z-a)$ с коэффициентами, которые являются голоморфными в точке $z=a$ вектор-функциями.

В ином смысле термин «О. у.» употребляется при исследовании групп преобразований, допускаемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями с частными производными (см. [3]).

Лит.: [1] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [3] Овсянников Л. В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978. *М. В. Федорюк.*

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ универсальной алгебры G относительно системы $\{g_i,\ i\in I\}$ ее порождающих элементов — соотношения вида

$$u_j(g_{i1},\ g_{i2},\ \ldots,g_{in})=v_j(g_{i1},\ g_{i2},\ \ldots,g_{in}),\ j\in J,$$

между порождающими (где u_j, v_j—термы в сигнатуре рассматриваемой алгебры) такие, что все остальные соотношения этого вида являются следствиями данных и тождеств многообразия, в к-ром рассматривается алгебра G. Обычно, когда говорят о задании алгебры порождающими и О. с., имеют в виду факторалгебру *свободной алгебры* многообразия с теми же порождающими по конгруэнции, определяемой всеми парами (u_j, v_j), $j\in J$. В случае мультиоператорных групп (в частности, групп, алгебр, колец, модулей) вид О. с. упрощается: их можно записать либо как $w_j=0$, либо как $w_j=1$ (в группах).

О. с. выбираются неоднозначно даже при одной и той же системе порождающих. Напр., циклическая группа второго порядка с порождающим элементом a может быть задана одним О. с. $a^2=1$, а также двумя О. с. $a^6=1$ и $a^4=1$. Существуют специальные преобразования (преобразования Тице в группах, см. [2], и их аналоги в различных многообразиях алгебр), позволяющие по одному заданию алгебры порождающими и О. с. строить другие задания той же алгебры. При этом для конечно определенных групп (или алгебр), то есть задаваемых конечной системой образующих и конечной системой О. с., можно конечным числом преобразований Тице перейти от любого такого задания к любому другому ее (конечному) заданию порождающими и О. с. Если алгебра конечно порождена, то из любой системы ее порождающих можно выбрать конечную подсистему порождающих; если алгебра в нек-рой конечной системе порождающих задается конечным числом О. с., то в любой другой конечной системе порождающих из любой системы О. с. можно выбрать конечную подсистему О. с.

Изучение конечно определенных алгебр породило целый ряд проблем алгоритмического характера, таких, как проблема равенства (тождества), проблема изоморфизма и др. (см. *Алгоритмическая проблема*). Ряд результатов получен для алгебр с одним О. с. Напр., в группах с одним О. с. разрешима проблема равенства, описаны элементы конечного порядка, центр и все подгруппы с нетривиальными тождествами (см. также *Групповое исчисление*).

Лит.: [1] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [3] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974.

А. Л. Шмелькин.

ОПРОВЕРЖИМАЯ ФОРМУЛА, формально опровержимая в данной системе формула,— замкнутая формула данной системы, отрицание к-рой выводимо в этой системе.

В. Н. Гришин.

ОПТИМАЛЬНАЯ ГАРАНТИРУЮЩАЯ СТРАТЕГИЯ — стратегия, к-рая имеет в данной операции оценку эффективности, равную наилучшему гарантированному результату (см. *Наибольшего гарантированного результата принцип*). Если, напр., в операции с критерием эффективности $f(x, y)$ неопределенный фактор y принимает значения из множества Y, то О. г. с. $\tilde{x}^*$ определяется из равенства

$$\sup_{\tilde{x}} \inf_{y \in Y} f(\tilde{x}, y) = \inf_{y \in Y} f(\tilde{x}^*, y).$$

Если верхняя грань по $\tilde{x}$ не достигается, то вводится понятие ε-оптимальной гарантирующей стратегии $\tilde{x}_\varepsilon^*$, для к-рой

$$\inf_{y \in Y} f\left(\tilde{x}_\varepsilon^*, y\right) \geqslant \sup_{\tilde{x}} \inf_{y \in Y} f(\tilde{x}, y) - \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$. В зависимости от множества стратегий $\tilde{x} = x(y)$ и информации о неопределенном факторе (обстановке проведения операции) запись О. г. с. конкретизируется (см. [1]). Так, если множество стратегий $\tilde{x}$ состоит из всех функций $x(y)$ и в операции имеется полная информация об y, то О. г. с. $x^*(y)$ наз. абсолютно оптимальной стратегией и определяется из условия

$$\sup_x f(x, y) = f(x^*(y), y) \text{ при всех } y \in Y.$$

Изучаются также оптимальные стратегии, соответствующие иным принципам оптимальности (см., напр., [2], [3]).

Лит.: [1] Гермейер Ю. Б., Введение в теорию исследования операций, М., 1971; [2] его же, Игры с непротивоположными интересами, М., 1976; [3] Воробьев Н. Н., в кн.: Теория игр, Ер., 1973, с. 5—57.

Ф. И. Ерешко, В. В. Федоров.

ОПТИМАЛЬНАЯ КВАДРАТУРА — квадратурная формула, дающая наилучшее приближение интегралу

$$I(f) = \int_\Omega f(P)\, \omega(P)\, dP$$

на классе F подинтегральных функций. Если

$$S_N(f) = \sum_{k=1}^{N} c_k f(P_k),$$

то

$$R_N(f) = S_N(f) - I(f)$$

наз. погрешностью квадратуры при вычислении интеграла от данной функции, а

$$r_N(F) = \sup_{f \in F} |R_N(f)|$$

наз. погрешностью квадратуры на классе F. Если существует такая квадратура, что для соответствующей ей $r_N(F)$ выполняется равенство

$$r_N(F) = \inf_{c_k, P_k} r_N(F),$$

то эту квадратуру наз. оптимальной на этом классе.

О. к. построены лишь для нек-рых классов функций в основном одного переменного (см. [1] — [3]). О. к. наз. также наилучшими квадратурными формулами, или экстремальными квадратурными формулами.

Лит.: [1] Никольский С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979; [2] Бахвалов Н. С., в кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы, М., 1964, с. 5—63; [3] Соболев С. Л., Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974.

Н. С. Бахвалов.

ОПТИМАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ — кривая $x(t)$ в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $t, x^1, \ldots, x^n$, по к-рой точка $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, движение к-рой описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

переводится из начального состояния

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

в конечное состояние

$$x(t_1) = x_1 \tag{3}$$

под воздействием оптимального управления $u(t)$, доставляющего минимальное значение заданному функционалу

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, u)\, dt, \quad f^0: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{4}$$

На выбор оптимального управления накладывается ограничение

$$u \in U, \tag{5}$$

где U — замкнутое множество допустимых управлений, $U \subset \mathbb{R}^p$. Начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1 для определенности предполагаются соответственно фиксированным и свободным.

Аналогичным образом О. т. определяется для вариационных задач более общего вида по сравнению с (1) — (5), напр. для задач с подвижными концами и с ограничениями на фазовые координаты. О методах отыскания О. т. см. *Вариационное исчисление*; численные методы.

Для автономных задач, в к-рых функции f^0, f не зависят явно от времени t:

$$f^0 = f^0(x, u), \quad f = f(x, u),$$

более удобным для теории и приложений оказывается понятие фазовой оптимальной траектории. Фазовая оптимальная траектория есть проекция О. т. на n-мерное подпространство фазовых переменных $x^1, \ldots, x^n$. Для автономных задач фазовая О. т. не зависит от выбора начального момента времени t_0.

Исследование множества фазовых О. т., переводящих систему из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние (или, наоборот, из заданного начального состояния в произвольное конечное), позволяет решить многие качественные вопросы для рассматриваемой вариационной задачи. Построение множества фазовых О. т. является обязательным этапом построения синтеза оптимальных управлений

$$u(t) = v(x(t)),$$

обеспечивающего движение по О. т. в любой точке фазового пространства.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Болтянский **В. Г.**, Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976; [2] Деруссо П., **Рой Р.**, Клоуз Ч., Пространство состояний в теории управления, пер. с англ., М., 1970. *И. Б. **Вапнярский**.*

ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ЗАДАЧА — одна из задач *оптимального управления математической теории*, состоящая в определении минимального времени

$$J(u) = t_1, \tag{1}$$

за к-рое управляемый объект, движение к-рого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \; u \in U, \; f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n,$$

можно перевести из заданного начального состояния $x(0) = x_0$ в заданное конечное состояние $x(t_1) = x_1$. Здесь $x = x(t)$ есть n-мерный вектор фазовых координат, а $u = u(t)$ есть p-мерный вектор управляющих параметров (управлений), принадлежащий при любом t заданной замкнутой допустимой области управлений U.

Искомое минимальное время t_1 является функционалом (1), зависящим от выбираемого управления $u(t)$. В качестве класса допустимых управлений, среди к-рых разыскивается управление, оптимальное по быстродействию, для большинства приложений достаточно рассматривать кусочно непрерывные управления $u(t)$, т. е. функции, непрерывные для всех рассматриваемых t, за исключением конечного числа моментов времени, в к-рых они могут терпеть разрывы 1-го рода. Теоретически, строго говоря, следует рассматривать более общий класс функций $u(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, измеримых по Лебегу.

О. б. з. можно рассматривать как частный случай *Больца задачи* и *Майера задачи*, рассматриваемых в вариационном исчислении, получающийся из этих задач при специальном задании оптимизируемого функционала. Оптимальное по быстродействию управление $u(t)$ должно удовлетворять принципу максимума Понтрягина, являющемуся необходимым условием, обобщающим необходимые условия Эйлера, Клебша и Вейерштрасса, используемые в классическом вариационном исчислении.

Для линейных О. б. з. из необходимых условий можно получить нек-рые выводы о качественной структуре оптимального управления. Линейными О. б. з. (см. [1], [2]) наз. такие задачи, в к-рых выполнены следующие три условия:

1) уравнения движения объекта линейны по x и u:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где A и B — постоянные матрицы размерности $n \times n$ и $n \times p$ соответственно;

2) конечное состояние x_1 совпадает с началом координат, являющимся состоянием равновесия объекта при $u = 0$;

3) область управления U является p-мерным выпуклым многогранником таким, что начало координат пространства u принадлежит U, но не является его вершиной.

Пусть выполнено условие общности положения, состоящее в линейной независимости векторов

$$Bw, \; ABw, \; A^2Bw, \; \ldots, \; A^{n-1}Bw,$$

где w — произвольный p-мерный вектор, параллельный ребру многогранника U. Тогда для оптимальности по быстродействию управления $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящего объект из заданного начального состояния x_0 в положение равновесия (начало координат в пространстве x), необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло принципу максимума Понтрягина. Далее, оптимальное управление $u(t)$ в линейной задаче оптимального быстродействия кусочно постоянно, и его значениями являются лишь вершины многогранника U.

В общем случае число переключений $u(t)$ хотя и конечно, но может быть произвольным. В следующем важном случае число переключений допускает точную оценку сверху.

Если многогранник U является p-мерным параллелепипедом

$$a^s \leqslant u^s \leqslant b^s, \quad s=1, \ldots, p,$$

и все собственные значения матрицы A действительны, то каждая из компонент $u^s(t)$, $s=1, \ldots, p$, оптимального управления $u(t)$ является кусочно постоянной функцией, принимающей только значения a^s и b^s и имеющей не более $n-1$ переключений, т. е. не более n интервалов постоянства.

О. б. з. может рассматриваться и для неавтономных систем, т. е. для систем, у к-рых правая часть f зависит еще и от времени t.

В тех случаях, когда это удается, полезно рассматривать О. б. з. не только в программной постановке, как это описано выше, но и в позиционной постановке в форме задачи синтеза (см. *Оптимальное управление позиционное*). Решение задачи синтеза позволяет получить качественное представление о структуре оптимального по быстродействию управления, переводящего систему из любой точки, находящейся в нек-рой окрестности исходной начальной точки x_0, в заданное конечное состояние x_1.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976; [2] Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, М., 1966.

И. Б. Вапнярский.

ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — раздел математики, в к-ром изучаются способы формализации и методы решения задач о выборе наилучшего в заранее предписанном смысле способа осуществления управляемого динамич. процесса. Этот динамический процесс может быть, как правило, описан при помощи дифференциальных, интегральных, функциональных, конечноразностных уравнений (или иных формализованных эволюционных соотношений), зависящих от системы функций или параметров, наз. управлениями и подлежащих определению. Искомые управления, а также реализации самого процесса следует в общем случае выбирать с учетом ограничений, предписанных постановкой задачи.

В более специальном смысле термином «О. у. м. т.» принято называть математич. теорию, в к-рой изучаются методы решения неклассических вариационных задач оптимального управления (как правило, с дифференциальными связями), допускающих рассмотрение негладких функционалов и произвольных ограничений на параметры управления или иные зависимые переменные (обычно рассматривают ограничения, задаваемые нестрогими неравенствами). Термину «О. у. м. т.» иногда придают более широкий смысл, имея в виду теорию, изучающую математич. методы исследования задач, решения к-рых включают какой-либо процесс статической или динамич. оптимизации, а соответствующие модельные ситуации допускают интерпретацию в терминах той или иной прикладной процедуры принятия наилучшего решения. В таком толковании

О. у. м. т. содержит элементы *исследования операций*, *математического программирования* и *игр теории*.

Задачи, рассматриваемые в О. у. м. т., возникли из практич. потребностей, прежде всего в области механики космич. полета и *автоматического управления теории* (см. также *Вариационное исчисление*). Формализация и решение этих задач поставили новые вопросы, напр. в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, как в области обобщения понятия решения и вывода соответствующих условий существования, так и в изучении динамических и экстремальных свойств траекторий управляемых дифференциальных систем; в частности, О. у. м. т. стимулировала изучение свойств *дифференциальных включений*. Соответствующие направления О. у. м. т. поэтому часто рассматриваются как раздел теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В О. у. м. т. содержатся математич. основы теории управления движением — нового раздела общей механики, в к-ром исследуются законы формирования управляемых механич. движений и смежные математич. вопросы. По методам исследования и по своим приложениям О. у. м. т. тесно связана с аналитич. механикой, в особенности с разделами, относящимися к *вариационным принципам классической механики*.

Хотя частные задачи оптимального управления и неклассические вариационные задачи встречались и ранее, основы общей О. у. м. т. были заложены в 1956—1961. Ключевым пунктом этой теории послужил *Понтрягина принцип максимума*, сформулированный Л. С. Понтрягиным в 1956 (см. [1]). Важными стимулами создания О. у. м. т. были открытие метода *динамического программирования*, выяснение роли функционального анализа в теории оптимальных систем, открытие связей решений задач оптимального управления с результатами теории устойчивости по Ляпунову, появление работ, связанных с понятиями управляемости и наблюдаемости динамич. систем (см. [2]—[5]). В последующие годы были развиты основы теории стохастич. управления и стохастич. фильтрации динамич. систем, построены общие методы решения неклассических вариационных задач, получены обобщения основных положений О. у. м. т. на более сложные классы динамич. систем, изучены связи с классическим вариационным исчислением (см. [6]—[11]). О. у. м. т. интенсивно развивается, в частности, в направлении изучения игровых задач динамики (см. *Дифференциальные игры*), задач управления в условиях неполной или неопределенной информации, систем с распределенными параметрами, уравнений на многообразиях и т. д.

Результаты О. у. м. т. нашли широкие приложения в формировании процессов управления, относящихся к самым разным областям современной техники, в изучении экономич. динамики, в решении ряда задач из области биологии, медицины, экологии, демографии и т. д.

Задача оптимального управления в общем виде может быть описана следующим образом.

1) Дана управляемая система S, состояние к-рой в момент времени t изображается величиной x (напр., вектором обобщенных координат и обобщенных импульсов механич. системы, функцией от пространственных координат в распределенной системе, вероятностным распределением, характеризующим текущее состояние стохастич. системы, вектором выпуска продукции в динамич. модели экономики и т. д.). Предполагается, что к системе S приложены управляющие воздействия u, оказывающие влияние на ее динамику. Они могут, напр., иметь смысл механич. сил, температурных или электрич. потенциалов, программы капиталовложений и т. д.

2) Дано уравнение, связывающее переменные x, u, t и описывающие динамику системы. Указан про-

межуток времени, на к-ром рассматривается уравнение. В типичном случае это может быть обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}=f(t, x, u), \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \ x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^p, \qquad (1)$$

с заранее оговоренными свойствами функции f (часто требуют, напр., непрерывности f по t, x, u и непрерывной дифференцируемости по x).

3) Известен характер информации, к-рая может быть использована для формирования управляющих воздействий (напр., в каждый момент времени или в заранее предписанные моменты становятся известными доступные измерению величины — значения фазовых координат системы (1) или функций от этих координат). Оговорен класс функций, описывающих управления, допускаемые к рассмотрению: множество кусочно непрерывных функций вида $u=u(t)$, множество линейных по x функций вида $u=u(t, x)=P'(t)x$ с непрерывными коэффициентами и т. д.

4) Установлены ограничения на процесс, подлежащий реализации. Сюда прежде всего входят условия, определяющие цель управления (напр., для системы (1) — попадание в заданную точку или на заданное множество фазового пространства $\mathbb{R}^n$, требование стабилизации решений около заданного движения и т. д.). Кроме того, ограничения могут быть наложены на величины управляющих воздействий u или координат состояния x, на функции от этих величин, на функционалы от их реализаций и т. д. В системе (1), напр., возможны ограничения на параметры управления

$$u \in U \subseteq \mathbb{R}^p \text{ или } \varphi(u) \leqslant 0, \ \varphi: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^k, \qquad (2)$$

и на координаты

$$x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ или } \psi(x) \leqslant 0, \ \psi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l; \qquad (3)$$

здесь U, X — замкнутые множества, φ, ψ — дифференцируемые функции. Могут рассматриваться и более сложные ситуации, когда множество U зависит от t, x или задано неравенство вида $g(t, x, u) \leqslant 0$ (случай смешанных ограничений) и т. д.

5) Задан показатель (критерий) качества процесса, подлежащего реализации, представимый в виде функционала $J(x(\cdot), u(\cdot))$ от реализации переменных x, u на рассматриваемом отрезке времени. Условия 1)—4) теперь дополняются требованием оптимальности процесса — минимума, максимума, минимакса и т. д. показателя $J(x(\cdot), u(\cdot))$.

Таким образом, в заданном классе управлений для заданной системы требуется выбрать управление u, оптимизирующее показатель $J(x(\cdot), u(\cdot))$ (при условии достижения цели управления и при выполнении наложенных ограничений). Функция (напр., вида $u=u(t)$ или $u=u(t, x)$ и т. д.), решающая задачу оптимального управления, наз. оптимальным управлением (пример формулировки типичной задачи оптимального управления см. в ст. *Понтрягина принцип максимума*).

Среди динамич. объектов, охватываемых задачами О. у. м. т., принято отличать конечномерные от бесконечномерных — в зависимости от размерности фазового пространства соответствующих систем дифференциальных уравнений, описывающих их, или от вида ограничений, наложенных на фазовые переменные.

Различают задачи *оптимального управления программного* и *оптимального управления позиционного*. В первом случае воздействие u формируется в виде функции времени. Во втором случае воздействие u формируется в виде стратегии управления по принципу обратной связи, как функция от доступных значений текущих параметров процесса.

В изучении задач О. у. м. т. выделяют вопросы существования решений, вывод необходимых условий экстремума (оптимальности управления), исследование достаточных условий, построение численных алгоритмов. Рассматриваются также соотношения между решениями задач О. у. м. т., полученных в классе программных и позиционных управлений.

Описанные варианты постановок задач оптимального управления предполагают существование корректной математич. модели процесса и рассчитаны на полную априорную или даже на полную текущую информацию о соответствующей системе. Однако в прикладных постановках доступной информации о системе (напр., сведений о начальных и конечных условиях, о коэффициентах соответствующих уравнений, о значениях дополнительных параметров или доступных измерению координат и т. д.) часто оказывается недостаточно для прямого применения отмеченной выше теории. Последнее приводит к задачам оптимального управления, сформулированным в иных информационных предположениях. Большой раздел О. у. м. т. посвящен задачам, где описание недостающих величин носит статистич. характер (т. н. теория стохастического оптимального управления). Если какая-либо статистич. информация о недостающих величинах отсутствует, но заданы лишь допустимые области их изменения, то соответствующие задачи рассматриваются в рамках теории оптимального управления в условиях неопределенности. К решению этих задач тогда привлекают методы минимакса и теории игр. Задачи стохастического оптимального управления и оптимального управления в условиях неопределенности особенно содержательны, когда речь идет о позиционном оптимальном управлении.

Хотя формализованное описание управляемых систем может принимать достаточно абстрактную форму (см. [11]), простейшая классификация допускает также деление их на системы с непрерывным временем (описываемые, напр., дифференциальными уравнениями — обыкновенными или с частными производными, уравнениями с отклоняющимся аргументом, уравнениями в банаховом пространстве, а также дифференциальными включениями, интегральными, интегро-дифференциальными уравнениями и т. д.) и многошаговые (дискретные) системы, описываемые рекуррентными разностными уравнениями и рассматриваемые лишь в изолированные (дискретные) моменты времени.

Дискретные системы управления, помимо самостоятельного интереса, имеют серьезное значение как конечно-разностные модели непрерывных систем. Последнее важно для построения численных методов решения задач оптимального управления (см. [12], [13]), в особенности в тех случаях, когда исходная задача подвергается дискретизации, начиная с самой постановки. К дискретным системам применимы основные указанные выше постановки задач. Хотя теоретико-функциональная сторона исследования здесь оказывается проще, перенесение основных фактов теории оптимального управления для непрерывных систем и изложение их в компактной форме связано со специфич. трудностями и не всегда возможно (см. [14], [15]).

Теория оптимальных линейных дискретных систем управления с ограничениями, задаваемыми выпуклыми функциями, разработана достаточно полно (см. [15]). Она смыкается с методами линейного и выпуклого программирования (особенно с соответствующими «динамическими» или «нестационарными» вариантами) (см. [16]). Важное значение в этой теории приобретают решения, позволяющие соединять в рекуррентном процессе оптимизацию дискретной динамической системы с реализацией адекватного численного дискретного алгоритма.

Отдельный круг проблем О. у. м. т. образуют вопросы аппроксимации решений задач оптимального управления для непрерывных систем дискретными, тесно связанные с проблемой регуляризации некорректно поставленных задач (см. [17]).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976; [2] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; [3] Красовский Н. Н., Теория управления движением, М., 1968; [4] его же, в сб.: Механика в СССР за 50 лет, т. 1, М., 1968, с. 179—244; [5] Калман Р., в кн.: Труды 1 Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 2, М., 1961, с. 521—47; [6] Флеминг У., Ришел Р., Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами, пер. с англ., М., 1978; [7] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В., Оптимальное управление, М., 1979; [8] Варга Дж., Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями, пер. с англ., М., 1977; [9] Hestenes M., Calculus of variations and optimal control theory, N. Y., 1966; [10] Янг Л., Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления, пер. с англ., М., 1974; [11] Калман Р., Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем, пер. с англ., М., 1971; [12] Моисеев Н. Н., Элементы теории оптимальных систем, М., 1975; [13] Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ, т. 14, М., 1977, с. 101—66; [14] Болтянский В. Г., Оптимальное управление дискретными системами, М., 1973; [15] Canon M. D., Cullum C. D., Polak E., Theory of optimal control and mathematical programming, N. Y., 1970; [16] Пропой А. И., Элементы теории оптимальных дискретных процессов, М., 1973; [17] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979.

А. Б. Куржанский.

ОПТИМАЛЬНОЕ ДЕКОДИРОВАНИЕ — декодирование, к-рое максимизирует *сообщений точность воспроизведения* для заданных источников сообщений, канала связи и метода кодирования. В случае, когда точность воспроизведения сообщений характеризуется средней *ошибочного декодирования вероятностью*, О. д. минимизирует эту вероятность. Пусть, напр., для передачи M сообщений, занумерованных числами $1, \ldots, M$, вероятности появления к-рых равны $p_1, \ldots, p_M$ соответственно, используется дискретный канал с конечным числом значений сигналов на входе и выходе и переходной функцией, задаваемой матрицей

$$q(y, \tilde{y}) = \mathsf{P}\{\tilde{\eta} = \tilde{y} \mid \eta = y\}, \quad y \in Y, \quad \tilde{y} \in \tilde{Y},$$

где Y, $\tilde{Y}$ — множества значений сигналов η на входе и $\tilde{\eta}$ на выходе соответственно, а кодирование задается функцией $f(\cdot)$ такой, что $f(m) = y_m$, $m = 1, \ldots, M$, где $y_m \in Y$, $m = 1, \ldots, M$,— код, т. е. нек-рый набор M возможных значений сигнала на входе канала. Тогда О. д. задается функцией $g(\cdot)$ такой, что $g(\tilde{y}) = m'$ для любого $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, где m' удовлетворяет неравенству

$$p_{m'} q(y_{m'}, \tilde{y}) \geqslant p_m q(y_m, \tilde{y})$$

для всех $m \neq m'$. В частности, если все сообщения равновероятны, т. е. $p_1 = \ldots = p_M = 1/M$, то описанное О. д. является в то же время декодированием по методу «максимального правдоподобия» (к-рое в общем случае оптимальным не является): полученный на выходе канала сигнал $\tilde{y}$ следует декодировать в сообщение m', для к-рого

$$q(y_{m'}, \tilde{y}) \geqslant q(y_m, \tilde{y}) \text{ при } m \neq m'.$$

Лит.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ — решение неклассической вариационной задачи оптимального управления (см. *Оптимального управления математическая теория*). В типичном случае О. у. дает решение задачи об экстремуме заданного функционала вдоль траекторий обыкновенного дифференциального уравнения, зависящего от параметров-«управлений» (при наличии дополнительных ограничений, предписанных постановкой задачи). Здесь, в зависимости от рассматриваемого класса управлений, О. у. может принимать форму функции времени (в задаче *оптимального управления программного*) или функции времени и текущего состояния (позиций) системы (в задаче синтеза *оптимального управления позиционного*).

В более сложных или более специальных задачах О. у. может принимать форму обобщенного управления — функции времени со значениями во множестве мер, функционала от отрезка траектории или от нек-рого множества в фазовом пространстве, краевого условия для уравнения с частными производными, многозначного отображения, последовательности экстремальных элементов нестационарной задачи математич. программирования и т. д. *А. Б. Куржанский.*

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЗИЦИОННОЕ — решение задачи *оптимального управления математической теории*, состоящей в синтезе оптимального управления в виде стратегии управления по принципу обратной связи, как функции текущего состояния (позиции) процесса (см. [1] — [3]). Последнее определяется, помимо текущего момента t, также доступными значениями текущих параметров. Таким образом, введение позиционной стратегии позволяет формировать реализацию управления u апостериорно, корректируя его на основе дополнительной информации, получаемой по ходу процесса.

Простейшая задача синтеза, напр. для системы

$$\dot{x}=f(t, x, u), \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \ x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^p, \qquad (1)$$

с ограничениями

$$u \in U \subseteq \mathbb{R}^p \text{ или } \psi(u) \leqslant 0, \ \psi: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^k, \qquad (2)$$

и заданным «терминальным» показателем

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \varphi(t_1, x(t_1)), \ \varphi: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^1,$$

предполагает поиск решения u^0, минимизирующего функционал $I(x(\cdot), u(\cdot))$ среди функций вида $u(t, x)$ для произвольной исходной позиции $\{\tau, x\}$. Естественный путь состоит в решении для каждой позиции $\{\tau, x\}$ соответствующей задачи о построении *оптимального управления программного*

$$u^0[t \mid \tau, x], \ x=x(\tau), \ \tau \leqslant t \leqslant t_1,$$

на минимум того же функционала $I(x(\cdot), u(\cdot))$ и при тех же самых ограничениях. Далее полагается, что

$$u^0(t, x) = u^0[t \mid t, x]$$

и если функция $u^0(t, x)$ корректно определена, а уравнение

$$\dot{x}=f(t, x, u^0(t, x)), \ x(\tau)=x, \ \tau \leqslant t \leqslant t_1, \qquad (3)$$

имеет единственное решение, то задача синтеза решена, причем оптимальные значения показателя I, найденные в классах программных и позиционных управлений, совпадают (в общем случае выделяют условия, обеспечивающие существование в определенном содержательном смысле решений уравнения (3), и условия, гарантирующие оптимальность всех траекторий этого уравнения).

Синтезированная функция $u^0(t, x)$, являющаяся О. у. п., позволяет построить оптимальное в смысле минимума функционала I решение задачи оптимального управления для любой исходной позиции $\{\tau, x\}$, в отличие от программного оптимального управления, зависящего, вообще говоря, от фиксированного начального состояния $\{t_0, x^0\}$ процесса. Решение задачи оптимального управления в форме синтеза оптимального управления находит большие приложения, в частности в связи с тем, что реальные процедуры построения управления осуществляются, как правило, на фоне информационных помех или возмущений процедуры счета. В указанных ситуациях позиционное управление предпочтительней программного.

Нахождение $u^0(t, x)$ сразу в виде функции текущего состояния связано с использованием метода *динамического программирования* (см. [2]). Вводимая в рассмотрение функция действия (функция Беллмана) $V(\tau, x)$, имеющая смысл минимума (максимума) оптимизируемой величины (напр., функционала

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_\tau^{t_1} f^0(t, x, u)\,dt + \varphi(t_1, x(t_1)) \quad (4)$$

для системы (1) при $x(\tau) = x$, $t \in [\tau, t_1]$), должна удовлетворять дифференциальному уравнению Беллмана с частными производными и с краевыми условиями, зависящими от цели управления и показателя J. Для системы (1), (2), (4) это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0, \quad V(t_1, x) = \varphi(t_1, x), \quad (5)$$

где

$$H\left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x}\right) = \min\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}, f(t, x, u)\right) + f^0(t, x, u) \,\middle|\, u \in U\right\} \quad (6)$$

— функция Гамильтона. Оно связано с уравнениями, фигурирующими в условиях *Понтрягина принципа максимума*, подобно тому, как уравнение Гамильтона — Якоби для функции действия связано в аналитич. механике с обыкновенным дифференциальным уравнением Гамильтона (см. *Вариационные принципы классической механики*).

Вывод уравнения (5) для задачи синтеза опирается на принцип оптимальности, утверждающий, что отрезок оптимальной траектории есть снова оптимальная траектория (см. [2]). Правомерность такого подхода зависит от корректного определения информационных свойств процесса и, в частности, понятия позиции (текущего состояния, см. [5]).

В задаче быстродействия — о минимальном времени $T(x)$ попадания траектории автономной системы (1) из положения x на множество M — функцию $V(\tau, x) = V(x)$ можно рассматривать как своего рода потенциал $V(x) = T(x)$ относительно множества M. Выбор оптимального управления $u^0(t, x)$ из условий (5), (6), приобретающих здесь вид

$$\min\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}, f(x, u)\right) \,\middle|\, u \in U\right\} = -1,$$
$$V(x) = 0 \text{ при } x \in M,$$

тогда означает, что $u^0(t, x) = u^0(x)$ осуществляет спуск оптимальной траектории $x^0(t)$ относительно поверхностей уровня функции $V(x)$ наискорейшим из способов, допускаемых условием $u \in U$.

Применение метода динамич. программирования (как достаточного условия оптимальности) будет обосновано, если функция $V(\tau, x)$ всюду удовлетворяет определенным условиям гладкости (напр., в задаче (3)—(6) функция $V(\tau, x)$ должна быть непрерывно дифференцируемой) или если условия гладкости выполняются всюду, за исключением нек-рого «особого» множества N. При выполнении нек-рых специальных «условий регулярного синтеза» метод динамич. программирования оказывается эквивалентным принципу Понтрягина, к-рый тогда выступает как необходимое и достаточное условие оптимальности (см. [8]). Трудности, связанные с априорной проверкой применимости метода динамич. программирования и с необходимостью решать дифференциальное уравнение Беллмана с частными производными, усложняют использование этого метода. Метод динамического программирования нашел распространение в задачах синтеза оптимального управления для дискретных (многошаговых) систем, где соответствующее уравнение Беллмана конечно-разностное (см. [2], [9]).

В задачах оптимального управления с дифференциальными связями метод динамич. программирования дает эффективное решение задачи синтеза в замкнутой форме для класса задач, охватываемых линейными системами с квадратичным показателем (4) (функции f^0, φ суть положительно определенные квадратичные формы соответственно по x, u и по x). Эта задача об аналитическом конструировании оптимального регулятора при $\varphi(t, x) \equiv 0$, $t_1 = \infty$ переходит в задачу об оптимальной стабилизации системы (из существования допустимого управления здесь сразу вытекает свойство асимптотич. устойчивости положения равновесия синтезированной системы) (см. [10], [4]). Существование решения в данном случае обеспечивается свойством стабилизируемости системы (см. [4]). Для линейных стационарных и периодич. систем оно эквивалентно свойству управляемости системы по неустойчивым собственным координатам (см. *Оптимальное управление программное*).

Решение задачи оптимальной стабилизации показало, что соответствующая функция Беллмана является в то же время «оптимальной» функцией Ляпунова для исходной системы с найденным оптимальным управлением. Отмеченные обстоятельства позволили получить эффективные условия стабилизируемости и построить для задач стабилизации полный аналог теории устойчивости по Ляпунову (по первому приближению и в критич. случаях), охватывающий обыкновенные квазилинейные и периодич. системы, а также системы с запаздыванием. В последнем случае роль функции Беллмана играют «оптимальные» функционалы Ляпунова — Красовского, заданные на отрезках траектории, соответствующих величине запаздывания в системе (см. [4], [5]). Теория линейно-квадратичных задач оптимального управления хорошо развита и для дифференциальных уравнений с частными производными (см. [11]).

В прикладных задачах синтеза оптимального управления измерение всех фазовых координат системы доступно далеко не всегда. Поэтому возникает следующая задача наблюдения, допускающая многочисленные обобщения: зная на промежутке $\sigma \leqslant t \leqslant \vartheta$ реализацию $y[t] \in \mathbb{R}^m$ доступной измерению функции $y = g(t, x)$ координат системы (1) (при известном $u(t)$, напр. при $u(t) \equiv 0$, и $m < n$), найти вектор $x(\vartheta) \in \mathbb{R}^n$ в заданный момент ϑ. Системы, позволяющие по реализации $y[t]$ однозначным образом восстанавливать $x(\vartheta)$, каким бы он ни был, наз. вполне наблюдаемыми.

Свойство полной наблюдаемости, как и построение соответствующих аналитич. операций, выделяющих $x(\vartheta)$, а также оптимизация этих операций хорошо изучены для линейных систем. Здесь известен принцип дуальности, состоящий в том, что каждой задаче наблюдения может быть поставлена в соответствие эквивалентная двухточечная краевая задача управления для дуальной системы. Вследствие этого оказывается, что свойство полной наблюдаемости линейной системы совпадает со свойством полной управляемости дуальной системы с управлением. Более того, оказывается, что и соответствующие дуальные экстремальные задачи об оптимальном наблюдении и оптимальном управлении могут быть составлены так, что их решения совпадут (см. [3]). Свойства управляемости и наблюдаемости линейных систем допускают весьма разнообразные обобщения на линейные бесконечномерные объекты (уравнения в банаховом пространстве, системы с отклоняющимся аргументом, дифференциальные уравнения с частными производными). Имеется и ряд результатов, характеризующих соответствующие свойства. Для нелинейных систем известен лишь ряд локальных теорем о наблюдаемости. Решения проблемы наблюдения нашли многочисленные применения в задачах синтеза в условиях неполной информации о координатах, в том числе в задачах *оптимальной стабилизации* (см. [3]—[5], [14], [15]).

Задача синтеза становится особенно содержательной, когда информация об уравнениях управляемого процесса, исходных начальных условиях и текущих параметрах искажена возмущениями. Если описание возмущений носит статистич. характер, то задачи оптимального управления рассматривают в рамках теории **стохастического оптимального управления**. Эта теория, начатая с решения стохастических программных задач [16], в наибольшей степени разработана для систем вида

$$\dot{x}=f(t,\ x,\ u)+g(t,\ x,\ u)\,\eta,\ x(t_0)=x^0, \qquad (7)$$

со случайными возмущениями $\eta(t)$, описываемыми гауссовскими диффузионными процессами или более общими классами марковских процессов (начальный вектор обычно также считают случайным). При этом, как правило, предполагается, что заданы нек-рые вероятностные характеристики величин η (напр., сведения о моментах соответствующих распределений или о параметрах стохастич. уравнений, описывающих эволюцию процесса $\eta(t)$).

В общем случае применение программных и синтезирующих управлений здесь дает существенно различные значения оптимальных показателей J качества (роль таких показателей могут играть, напр., те или иные средние оценки неотрицательных функционалов, заданных на траекториях процесса). Задача синтеза стохастического оптимального управления теперь имеет очевидные преимущества, т. к. непрерывное измерение координат системы позволяет корректировать движение с учетом реального хода случайного процесса, непредсказуемого заранее. Здесь было обнаружено, что метод динамич. программирования совершенно естественным образом сопрягается с теорией бесконечно малых производящих операторов для полугрупп преобразований, генерируемых марковскими случайными процессами. Эти обстоятельства позволили построить и строго обосновать серию достаточных условий оптимальности, приведших к решению на конечном и бесконечном интервале времени ряда задач о синтезе стохастического оптимального управления с полной и неполной информацией о текущих координатах, стохастич. задач преследования и т. д. При этом существенно, что для справедливости принципа оптимальности управление u здесь должно строиться в каждый момент времени t как функция «достаточных координат» z процесса, для к-рых будет обеспечено свойство марковости (см. [5], [6], [17], [18]).

Таким путем, в частности, была разработана теория **оптимальной стохастической стабилизации**, связанная с соответствующей теорией устойчивости по Ляпунову, развитой для стохастич. систем [19].

Для формирования синтезирующего оптимального управления, а также для иных целей управления целесообразно оценивать состояние стохастич. системы по результатам измерения. Решению этого вопроса при условии, что процесс измерения искажается вероятностными «шумами» (т. е. решению задачи наблюдения в условиях случайных возмущений), посвящена **теория стохастической фильтрации**. Наиболее полные решения здесь известны для линейных систем с квадратичными критериями оптимума (т. н. ф и л ь т р К а л м а н а—Б ь ю с и, см. [13]). В применении этой теории к задаче синтеза стохастического оптимального управления были выявлены условия, обеспечивающие справедливость принципа разделения, позволяющего решать собственно задачу управления независимо от задачи оценивания текущих позиций на основе достаточных координат процесса (см. [20]; *более общим закономерностям стохастич.* фильтрации, а также задачам стохастич. оптимального управления, когда само управление выбирается в классе марковских процессов диффузионного типа, посвящены работы [18], [21]).

Строго формализованное решение задачи стохастического оптимального управления неизбежно соприкасается с проблемой корректного обоснования вопросов существования решений соответствующих стохастических дифференциальных уравнений. Последнее обстоятельство порождает определенные трудности в решении задач стохастического оптимального управления при наличии неклассич. ограничений.

Содержательный процесс динамич. оптимизации возникает в задачах синтеза оптимального управления в условиях неопределенности (см. *Оптимальное управление программное*). Позиционные решения в общем случае позволяют и здесь улучшить показатели качества процесса по сравнению с программными, представляющими собой все-таки результат статич. оптимизации (проводимой, правда, в пространстве динамич. систем и функций-управлений). К решению задач тогда привлекают понятия и методы теории игр.

Пусть имеется система

$$\dot{x} = f(t, x, u, w), \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{8}$$

при ограничениях

$$\boldsymbol{x^0} = \boldsymbol{x}(t_0) \in X^0 \subseteq \mathbb{R}^n, \ u \in U \subseteq \mathbb{R}^p, \ w \in W \subseteq \mathbb{R}^q,$$

на начальный вектор x^0, управление u и возмущения w. В отличие от игрока-союзника, представляющего исходное управление u, подлежащее определению, воздействия w здесь трактуют как управление игрока-противника и допускают к рассмотрению любые целенаправленные стратегии w, формируемые на основе любой допустимой информации. При этом цели управления могут быть сформулированы с точки зрения каждого из игроков в отдельности. Если названные цели противоположны, то возникает задача к о н ф л и к т н о г о у п р а в л е н и я. Исследование задач позиционного управления в условиях конфликта или неопределенности составляет предмет теории *дифференциальных игр.*

Процесс формирования позиционного оптимального управления в условиях неопределенности может быть осложнен неполнотой информации о текущем состоянии. Так, в системе (8) могут быть доступны лишь результаты косвенных измерений фазового вектора x — реализации $y[t]$ функции

$$y(t) = g(t, x, \xi), \tag{9}$$

где неопределенные параметры ξ стеснены известным априорным ограничением $\xi \in \Xi$. Знание $y[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ (при заданном $u(t)$), позволяет построить в фазовом пространстве и н ф о р м а ц и о н н у ю о б л а с т ь $X(\vartheta, y(\cdot))$ состояний системы (8), совместимых с реализацией $y[t]$, уравнением (9) и ограничениями на w, ξ. Среди элементов $X(\vartheta, y(\cdot)) = X(\vartheta, \cdot)$ будет содержаться и неизвестное истинное состояние системы (8), к-рое может быть оценено выбором нек-рой точки $x^*(\vartheta, \cdot)$ из $X(\vartheta, \cdot)$ (напр., «центра тяжести» или «чебышевского центра» $X(\vartheta, \cdot)$). Изучение эволюции областей $X(\vartheta, \cdot)$ и динамики векторов $x^*(\vartheta, \cdot)$ составляет содержание т е о р и и м и н и м а к с н о й ф и л ь т р а ц и и.

Наиболее полные решения здесь известны для линейных систем и выпуклых ограничений (см. [22]).

В общем случае выбор позиционной стратегии оптимального управления в условиях неопределенности (напр., в виде функционала $u=u(t, X(t, \cdot))$) должен быть нацелен на управление эволюцией областей $X(\vartheta, \cdot)$ (т. е. на изменение их конфигурации и перемещение их в пространстве) в соответствии с предписанными критериями. Для указанной задачи известен ряд общих качественных результатов, а также конструктивных решений в классе специальных линейно-выпуклых задач (см. [7], [22]). При этом информация, доставляемая измерениями (напр., функцией $y[t]$ в системе (8), (9)), позволяет по ходу процесса апостериорным образом переоценивать области допустимых значений неопределенных параметров в направлении их сужения. Таким образом попутно решается задача идентификации математич. модели процесса (напр., параметров w уравнения (8)). Сказанное позволяет трактовать решения задачи о синтезе оптимального управления в условиях неопределенности как процедуру адаптивного оптимального управления, в к-ром уточнение свойств модели процесса переплетается с выбором управляющего воздействия как такового. Вопросы идентификации моделей динамич. процессов и задачи адаптивного оптимального управления подробно изучены в предположениях о существовании того или иного вероятностного описания неопределенных параметров (см. [23], [24]).

Если в задачах синтеза оптимального управления в условиях неопределенности трактовать параметры w, ξ как «управления» фиктивного игрока-противника, то цели управлений u и $\{w, \xi\}$ могут быть различными. Последнее обстоятельство приводит к нескалярному *показателю качества процесса*, вследствие чего соответствующие задачи могут рассматриваться в рамках понятий о равновесных ситуациях, свойственных многокритериальным задачам теории неантагонистич. игр или их обобщениям.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976; [2] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; [3] Красовский Н. Н., Теория управления движением, М., 1968; [4] его же, «Дифференциальные уравнения», 1965, т. 1, № 1, с. 5—16; [5] его же, в сб.: Механика в СССР за 50 лет, т. 1, М., 1968, с. 179—244; [6] его же, «Прикл. матем. и мех.», 1961, т. 25, № 5, с. 806—17; [7] Красовский Н. Н., Субботин А. И., Позиционные дифференциальные игры, М., 1974; [8] Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, М., 1966; [9] его же, Оптимальное управление дискретными системами, М., 1973; [10] Летов А. М., Математическая теория процессов управления, М., 1981; [11] Лионс Ж., Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, пер. с франц., М., 1972; [12] Калман Р., в кн.: Труды 1 Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 2, М., 1961, с. 521—47; [13] Калман Р., Бьюси Р., «Труды Амер. об-ва инженеров-механиков. Сер. 1, Д.», 1961, т. 83, с. 123; [14] Ли Э.-Б., Маркус Л., Основы теории оптимального управления, пер. с англ., М., 1972; [15] Бутковский А. Г., Структурная теория распределенных систем, М., 1977; [16] Колмогоров А. Н., Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., «Докл. АН СССР», 1962, т. 145, № 5, с. 993—95; [17] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [18] Острем К. Ю., Введение в стохастическую теорию управления, пер. с англ., М., 1973; [19] Кац И. Я., Красовский Н. Н., «Прикл. матем. и мех.», 1960, т. 24, № 5, с. 809—23; [20] Wonham W. M., «SIAM J. Contr.», 1968, v. 6, p. 312—26; [21] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [22] Куржанский А. Б., Управление и наблюдение в условиях неопределенности, М., 1977; [23] Цыпкин Я. З., Основы теории обучающихся систем, М., 1970; [24] Эйкхофф П., Основы идентификации систем управления, пер. с англ., М., 1975.

А. Б. Куржанский.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОГРАММНОЕ — решение задачи *оптимального управления математической теории*, в к-рой управляющее воздействие $u=u(t)$ формируется в виде функции времени (тем самым предполагается, что по ходу процесса никакой информации, кроме заданной в самом начале, в систему не поступает). Таким образом, О. у. п. формируется по априорным сведениям о системе и уже не может быть скорректировано, в отличие от *оптимального управления позиционного*.

Проблема существования решений задачи О. у. п. разбивается на два вопроса: выяснение осуществимости цели управления при заданных ограничениях (существование допустимого управления, реализующего цель управления) и установление разрешимости экстремальной задачи — достижимость экстремума (как правило, относительного) — в упомянутом выше классе допустимых управлений (существование оптимального управления).

В связи с первым вопросом весьма важно изучение свойства управляемости системы. Для системы

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x,\ u)$$

оно означает существование в заданном классе $U=\{u(\cdot)\}$ функций, допускаемых к рассмотрению, *управлений* $u(t)$, *переводящих фазовую точку* (см. *Понтрягина принцип максимума*) из любого заданного начального положения $x(t_0)=x^0\in\mathbb{R}^n$ в любое заданное конечное положение $x(t_1)=x^1\in\mathbb{R}^n$ (за фиксированное или свободное время $T=t_1-t_0$, в зависимости от постановки задачи). Необходимые и достаточные условия управляемости (или, как еще принято говорить, полной управляемости) известны в конструктивной форме для линейных систем

$$\dot{x}=A(t)\,x+B(t)\,u,\ x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^p, \tag{1}$$

с аналитическими или периодич. коэффициентами (они наиболее просты при $A\equiv\text{const}$, $B\equiv\text{const}$). Для линейных систем общего вида полностью решается и вопрос о разрешимости задачи попадания с одного выпуклого множества на другое (при выпуклых ограничениях на u, x). В нелинейном случае известны лишь локальные условия управляемости (справедливые в малой окрестности заданного движения) или условия для частных классов систем (см. [2], [4], [5]). Свойство управляемости изучают и в рамках многочисленных обобщений, связанных, в частности, с рассмотрением специальных классов U (напр., множества U всех ограниченных кусочно непрерывных управлений $u(t)$), задач управляемости по части координат или изучением более общих классов систем, в том числе бесконечномерных.

Вопрос о существовании оптимального управления в общем случае связан со свойством компактности в той или иной топологии минимизирующих последовательностей управлений или траекторий и свойством полунепрерывности по соответствующим переменным минимизируемых функционалов. Первое из этих свойств тесно связано для системы

$$\dot{x}=f(t,\ x,\ u),\ t_0\leqslant t\leqslant t_1,\ x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^p, \tag{2}$$

при ограничениях

$$u\in U\subseteq\mathbb{R}^p \tag{3}$$

с выпуклостью множества

$$f(t,\ x,\ U)=\{f(t,\ x,\ u)\mid u\in U\},$$

а второе (для интегральных функционалов) — с выпуклостью по соответствующим переменным $J(x(\cdot), u(\cdot))$. Отсутствие этих свойств возмещают путем расширения исходных вариационных задач. Так, невыпуклость $f(t, x, u)$ можно возместить путем введения скользящих режимов — обобщенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений, порожденных управлениями-мерами, заданными на U и создающими эффект «овыпукления» (см. [6], [7]). Отсутствие выпуклости у интегральных функционалов $J(x(\cdot), u(\cdot))$ возмещают путем погружения задачи в более общую, с новым функционалом, являющимся выпуклой минорантой прежнего, и решения новой задачи в более широком классе управлений (см. [8]). В отмеченных случаях существование оптимального управления часто вытекает из существования допустимого управления.

Теория необходимых условий экстремума наиболее развита в задачах О. у. п. Основополагающим результатом здесь послужил принцип максимума Понтрягина, содержащий необходимые условия сильного экстремума в задаче оптимального управления.

Следует отметить создание общих приемов получения необходимых условий в экстремальных задачах, эффективно использованных для задач О. у. п. с более сложными ограничениями (фазовыми, функциональными, минимаксными, смешанными и т. д.) и основанных, так или иначе, на теоремах об отделимости выпуклых конусов (см. [9], [10]). Пусть, напр., E — векторное пространство, $f(x)$, $x \in E$,— заданный функционал, Q_i— множества из E,

$$Q = \bigcap Q_i, \; i = 1, \; \ldots, \; n,$$

$x^0 \in Q$ — точка, в к-рой $f(x)$ достигает минимума на Q,

$$Q_0 = \{x \mid f(x) < f(x^0)\}.$$

Суть распространенного общего метода состоит в том, что каждое из множеств Q_i, $i=0, 1, \ldots, n$, аппроксимируется в окрестности точки x^0 нек-рым выпуклым конусом K_i с вершиной в точке x^0 (конус «убывания» для Q_0; конус «допустимых направлений» для ограничений, изображаемых неравенствами; конус «касательных направлений» для ограничений типа равенства, в том числе для дифференциальных связей, и т. д.). Необходимое условие минимума теперь состоит в том, чтобы x^0 была единственной точкой, общей для всех K_i, $i=0, 1, \ldots, n$, и, следовательно, чтобы конусы были «отделимы» (см. [8]). Последнему «геометрическому» условию далее придают аналитич. форму и по возможности преобразуют к удобному виду, напр. при помощи функции Гамильтона. В зависимости от исходных ограничений, а также от класса используемых вариаций, необходимые условия могут принимать как форму, аналогичную принципу Понтрягина, так и форму локального (линеаризованного) принципа максимума (условия слабого экстремума по u). Реализация отмеченного пути, таким образом, зависит от возможности аналитически описывать конусы K_i. Эффективное их описание достигается для множеств Q_i, задаваемых гладкими функциями, удовлетворяющими нек-рым дополнительным условиям регулярности в рассматриваемой точке, или выпуклыми функциями (см. [9], [10]). В принципе отмеченный путь допускает обобщения и на случай негладких ограничений, в том числе дифференциальных. Здесь, напр., может быть использовано понятие субдифференциала выпуклой функции или его обобщения, когда выпуклость отсутствует (см. [11], [12]).

Условия 1-го порядка, аналогичные принципу Понтрягина, известны для решений в классе обобщенных функций-мер (т. н. интегральный принцип максимума), для управляемых систем, описываемых дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом, дифференциальными уравнениями с частными производными, эволюционными уравнениями в банаховом пространстве, дифференциальными уравнениями на многообразиях, рекуррентными разностными уравнениями и т. д. (см. [1], [6], [7], [13] — [16]).

Из указанных необходимых условий экстремума в задаче оптимального управления вытекают известные необходимые условия 1-го порядка классического вариационного исчисления. В частности, в двухточечной краевой задаче для системы (2), (3), где U — открытое множество, $J(x(\cdot), u(\cdot))$ — стандартный интегральный функционал, из принципа Понтрягина вытекает необходимое условие экстремума Вейерштрасса в классическом вариационном исчислении.

В теории оптимального управления развиваются методы получения необходимых условий высших порядков (особенно 2-го порядка) для неклассических вариационных задач (см. [19]). Интерес к условиям высших порядков в значительной степени был связан с изучением вырожденных задач оптимального управления, приводящих к т. н. особым управлениям и не имеющих адекватных аналогов в классич. теории. Напр., в принципе Понтрягина функция $H(t, \psi, x, u)$ либо может приводить к целому семейству управлений, каждое из к-рых удовлетворяет принципу максимума, либо вообще не зависит от u (тогда любое из допустимых значений u удовлетворяет принципу Понтрягина). Эта ситуация оказалась весьма характерной для целого ряда прикладных задач управления в пространстве. В данном случае выделение оптимального управления уже требует перебора экстремалей 1-го порядка (т. н. экстремалей Понтрягина) и применения к ним необходимых условий оптимальности 2-го или, в общем случае, более высокого порядка. Здесь разные по форме необходимые условия были получены путем использования специальных классов «неклассических» вариаций (напр., «связок» игольчатых вариаций и т. д.). Реализация особых управлений часто связана снова с использованием скользящих режимов (см. [17], [18]).

Теория достаточных условий оптимальности разработана в меньшей степени. Известны результаты, относящиеся к условиям локальной оптимальности и содержащие, в числе прочих требований, условия невырожденности системы в вариациях и ограничения на свойства гессиана правых частей, вычисленного вдоль исследуемой траектории для соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения. Другая группа достаточных условий опирается на метод динамич. программирования и его связь с теорией принципа максимума (см. [8]). Имеются и формализмы, приводящие к достаточным условиям абсолютного минимума, основанные на идее расширения вариационных задач. Область их реальной применимости охватывает специальные классы задач с выпуклыми критериями и вырожденных задач оптимального управления (см. [18]).

Полное решение задачи О. у. п. (необходимые и достаточные условия оптимальности) известно для линейных систем (1), когда рассматриваемые функционалы и ограничения на u, x выпуклы (в ряде случаев здесь требуется выполнение нек-рых дополнительных условий). Привлечение идей двойственности, используемых в выпуклом анализе, выявило особое экстремальное свойство траекторий системы, описывающей сопряженные переменные принципа максимума Понтрягина. Это позволило свести краевую задачу, возникающую при использовании необходимых условий общего вида, к решению более простой двойственной экстремальной задачи. В рамках названного подхода получила развитие теория линейных систем с импульсными управлениями, моделирующих объекты, подверженные мгновенным воздействиям (ударным, взрывным, импульсным), и формализуемых при помощи дифференциальных уравнений в обобщенных функциях соответствующих порядков сингулярности. Эффективное применение, особенно в теории игровых систем, нашел метод областей достижимости (см. [2], [3]).

В отсутствии полной априорной информации о системе (и в том числе статистич. описания недостающих величин) рассматривают задачу О. у. п. в **условиях неопределенности**. Пусть в системе ($t_0 \leqslant t \leqslant t_1$)

$$\dot{x} = f(t, x, u, w),\ x(t_0) = x^0 \in X^0,\ w \in W, \qquad (4)$$

параметр $w \in \mathbb{R}^q$, реализующийся в виде функции времени $w = w(t)$, и вектор x^0 неизвестны, но заданы лишь множества $X^0 \subseteq \mathbb{R}^n$, $W \subseteq \mathbb{R}^q$. Тогда, предполагая существование и продолжаемость на $[t_0, t_1]$ решений

$$x(t \mid x^0, u(\cdot), w(\cdot)),\ x(t_0 \mid x^0, u(\cdot), w(\cdot)) = x^0$$

уравнения (4) (при заданных x^0, $u(\tau)$, $w(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1$), можно построить пучок (ансамбль) траекторий

$$X(t \mid u(\cdot)) = \\ = \bigcup \{x(t \mid x^0, u(\cdot), w(\cdot)) \mid x^0 \in X^0,\ w(\tau) \in W, \\ t_0 \leqslant \tau \leqslant t\}.$$

Выбирая программное управление $u(t)$ (одно и то же для всех траекторий пучка), можно управлять положением $X(t \mid u(\cdot))$ в фазовом пространстве. Типичная задача О. у. п. в условиях неопределенности теперь состоит в оптимизации $u(t)$ в силу функционала Φ типа максимума

$$\Phi(X(t_1 \mid u(\cdot))) = \max\{\varphi(x) \mid x \in X(t_1 \mid u(\cdot))\} \qquad (5)$$

(тогда решение $u^0(t)$ задачи будет обеспечивать нек-рый гарантированный результат) или интегрального функционала

$$\Phi(X(t_1 \mid u(\cdot))) = \int_{X(t_1 \mid u(\cdot))} f_0(x)\, dx. \qquad (6)$$

Применение техники вывода необходимых условий оптимальности или ее модификаций позволило сформулировать требования, обеспечивающие существование аналогов принципа Понтрягина для задач (5), (6) (в первом случае он принимает форму нек-рого условия минимакса). Для линейных систем эти задачи допускают столь же детальное решение, как и в случае полной информации (см. [3], [20], [21]).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976; [2] Красовский Н. Н., Теория управления движением, М., 1968; [3] Красовский Н. Н., Субботин А. И., Позиционные дифференциальные игры, М., 1974; [4] Калман Р., в кн.: Труды 1 Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 2, М., 1961, с. 521—47; [5] Ли Э.-Б., Маркус Л., Основы теории оптимального управления, пер. с англ., М., 1972; [6] Гамкрелидзе Р. В., Основы оптимального управления, Тбилиси, 1977; [7] Варга Дж., Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями, пер. с англ., М., 1977; [8] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 6, с. 51—116; [9] Дубовицкий А. Я., Милютин А. А., «Журн. вычисл. матем. и матем. физики», 1965, т. 5, № 3, с. 395—453; [10] Neustadt L. W., Optimizations. A theory of necessary conditions, Princeton, 1974; [11] Пшеничный Б. Н., Необходимые условия экстремума, М., 1969; [12] Clarke F. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1975, v. 205, p. 247—62; [13] Sussmann H. J., «Math. Syst. Theory», 1977, v. 10, № 3, p. 263—284; [14] Лионс Ж., Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, пер. с франц., М., 1972; [15] Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, М., 1966; [16] его же, Оптимальное управление дискретными системами, М., 1973; [17] Габасов Р., Кириллова Ф. М., Особые оптимальные управления, М., 1973; [18] Кротов В. Ф., Букреев В. З., Гурман В. И., Новые методы вариационного исчисления в динамике полета, М., 1969; [19] Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 6, с. 85—148; [20] Куржанский А. Б., Управление и наблюдение в условиях неопределенности, М., 1977; [21] Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н., Введение в минимакс, М., 1972. *А. Б. Куржанский.*

ОПТИМАЛЬНОСТИ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ — условия, обеспечивающие оптимальность данного решения задачи вариационного исчисления в выбранном классе кривых сравнения.

О. д. у. слабого минимума (см. [1]): для того чтобы кривая $\overline{y}(x)$ доставляла слабый минимум функционалу

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \tag{1}$$

при граничных условиях

$$y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1,$$

достаточно, чтобы выполнялись следующие условия.

1) Кривая $\overline{y}(x)$ должна быть экстремалью, т. е. удовлетворять *Эйлера уравнению*

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0.$$

2) Вдоль кривой $\overline{y}(x)$, включая ее концы, должно выполняться усиленное *Лежандра условие*

$$F_{y'y'}(x, y, y')>0.$$

3) Кривая $\overline{y}(x)$ должна удовлетворять усиленному *Якоби условию*, требующему, чтобы решение уравнения Якоби

$$\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)\eta-\frac{d}{dx}(F_{y'y'}\eta')=0 \tag{2}$$

с начальными условиями

$$\eta(x_0)=0,\quad \eta'(x_0)=1$$

не обращалось в нуль в точках замкнутого справа интервала $x_0<x\leqslant x_1$.

Коэффициенты уравнения Якоби (2), представляющего собой линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, вычисляются вдоль экстремали $\overline{y}(x)$ и представляют известные функции от x.

Для сильного минимума достаточно, чтобы дополнительно, помимо перечисленных выше, выполнялось следующее условие.

4) Существует окрестность кривой $\overline{y}(x)$, в каждой точке (x, y) к-рой при любом y' выполняется неравенство

$$\mathscr{E}(x, y, u(x, y), y')\geqslant 0, \tag{3}$$

где

$$\mathscr{E}(x, y, u, y')=F(x, y, y')-F(x, y, u)-$$
$$-(y'-u)F_{y'}(x, y, u)$$

— функция Вейерштрасса, а $u(x, y)$ — наклон поля экстремалей, окружающего $\overline{y}(x)$.

На самой экстремали $\overline{y}(x)$ условие (3) принимает вид

$$\mathscr{E}(x, \overline{y}, \overline{y}', y')=$$
$$=F(x, \overline{y}, y')-F(x, \overline{y}, \overline{y}')-(y'-\overline{y}')F_{y'}(x, \overline{y}, \overline{y}')\geqslant 0. \tag{4}$$

Условие (4) является необходимым для сильного минимума; оно наз. **необходимым условием Вейерштрасса**. Таким образом, в отличие от достаточных условий слабого минимума, к-рые требуют выполнения нек-рых усиленных необходимых условий в точках самой экстремали, в достаточных условиях сильного минимума требуется выполнение необходимого условия Вейерштрасса в нек-рой окрестности экстремали. В общем случае нельзя ослабить формулировку достаточных условий сильного минимума, заменив требование выполнения условия Вейерштрасса в окрестности экстремали на усиленное условие Вейерштрасса (условие (4) со знаком строгого неравенства) в точках экстремали (см. [1]).

Для неклассических вариационных задач, рассматриваемых в *оптимального управления математической* *теории*, существует несколько подходов к установлению О. д. у. абсолютного экстремума.

Пусть поставлена задача оптимального управления, в к-рой требуется определить минимум функционала

$$J=\int_0^{t_1} f^0(x, \quad u)\,d\,t, \tag{5}$$

$$f^0\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R},$$

при условиях

$$\dot{x}=f(x,\ u),\ f\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}^n, \tag{6}$$

$$x(0)=x_0,\ x(t_1)=x_1, \tag{7}$$

$$u\in U, \tag{8}$$

где U — заданное замкнутое множество p-мерного пространства.

При использовании метода динамического программирования [3] О. д. у. формулируются следующим образом. Для того чтобы управление $u(t)$ было оптимальным управлением в задаче (5)—(8), достаточно, чтобы:

1) существовала такая непрерывная функция $S(x)$, к-рая имеет непрерывные частные производные при всех x, за исключением, быть может, нек-рого кусочно гладкого множества размерности меньше n, равна нулю в конечной точке x_1, $S(x_1)=0$, и удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\max_{u\in U}\left(\frac{\partial S}{\partial x}f(x,\ u)-f^0(x,\ u)\right)=0; \tag{9}$$

2) $u(t)=v(x(t))$, при $0\leqslant t\leqslant t_1$, где $v(x)$ — синтезирующая функция, определяемая из уравнения Беллмана:

$$\frac{\partial S}{\partial x}f(x,\ v(x))-f^0(x,\ v(x))=$$

$$=\max_{u\in U}\left(\frac{\partial S}{\partial x}f(x,\ u)-f^0(x,\ u)\right)=0.$$

В действительности при использовании метода динамич. программирования получается более сильный результат: О. д. у. для множества различных управлений, переводящих фазовую точку из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние x_1.

В более общем случае, когда рассматривается неавтономная система, т. е. подинтегральная функция и вектор-функция правых частей зависят еще и от времени t, функция S должна зависеть от t и к левой части уравнения (9) следует добавить слагаемое $\frac{\partial S}{\partial t}$. Имеется доказательство (см. [4]), в к-ром удалось снять весьма стеснительное и не выполняющееся в большинстве задач, но обычно предполагаемое условие непрерывной дифференцируемости функции $S(x)$ для всех x.

О. д. у. могут быть построены на основе принципа максимума Понтрягина. Если в нек-рой области G фазового пространства осуществлен регулярный синтез, то все траектории, полученные с помощью принципа максимума при построении регулярного синтеза, являются оптимальными в области G.

Определение регулярного синтеза хотя и является довольно громоздким, но по существу не накладывает особых ограничений на задачу (5)—(8).

Существует другой подход к установлению О. д. у. (см. [5]). Пусть $\varphi(x)$ — функция, непрерывная вместе со своими частными производными при всех допустимых x, принадлежащих заданной области G, и

$$R(x,\ u)=\varphi_x f(x,\ u)-f^0(x,\ u). \tag{10}$$

Для того чтобы пара $\overline{u}(t)$, $\overline{x}(t)$ доставляла абсолютный минимум в задаче (5)—(8), достаточно существование такой функции $\varphi(x)$, что

$$R(\overline{x},\ \overline{u})=\max_{x\in G,\ u\in U}R(x,\ u). \tag{11}$$

Допускаются соответствующие изменения приведенной формулировки О. д. у. для более общих случаев неавтономной системы, задач с функционалами типа Майера и Больца (см. *Больца задача*), а также для скользящих оптимальных режимов (см. [5]).

Исследовались вариационные задачи с функционалами в виде кратных интегралов и дифференциальными связями в форме уравнений с частными производными, в к-рых рассматриваются функции нескольких переменных (см. [6]).

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950; [2] Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [3] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; [4] Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, М., 1966; [5] Кротов В. Ф., «Автоматика и телемеханика», 1962, т. 23, № 12, с. 1571—83; 1963, т. 24, № 5, с. 581—98; [6] Бутковский А. Г., Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, М., 1965. *И. Б. Вапнярский.*

ОПТИМАЛЬНОСТИ ПРИНЦИПЫ — формальные описания различных представлений об оптимальном. Обычно О. п. отражают те или иные черты интуитивного понимания устойчивости, выгодности и справедливости. Существенно, что одновременная реализация всех (или хотя бы достаточно большого числа) таких черт часто оказывается невозможной ввиду их формальной несовместности. По мере того как теория О. п. приобретает аксиоматич. характер, создаются новые О. п., уже не всегда обладающие интуитивной прозрачностью.

Проблемы О. п. возникают, напр., в тех случаях, когда ищется значение переменного, одновременно экстремизирующее несколько заданных функций (т. н. многокритериальные экстремальные задачи). Задачи, требующие для своего решения привлечения нетривиальных О. п., фактически относятся к *игр теории*. Одним из наиболее простых теоретико-игровых О. п. является *минимакса принцип*. Другие О. п. реализуются в виде *с*-ядра решения по Нейману—Моргенштерну, *Шепли вектора* и т. д.

О принципе оптимальности Беллмана см. *Динамическое программирование.* *Н. Н. Воробьев.*

ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕЖИМ ОСОБЫЙ, особое оптимальное управление,— оптимальное управление, для к-рого на нек-ром участке времени одновременно выполняются условия

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=0, \tag{2}$$

где H — *Гамильтона функция.* В векторном случае, когда О. р. о. имеет место по k, $k>1$, компонентам управления, условие (1) заменяется на k условий

$$\frac{\partial H}{\partial u_s}=0,\ s=1,\ \ldots,\ k, \tag{3}$$

а вместо равенства (2) требуется обращение в нуль определителя

$$\left|\frac{\partial^2 H}{\partial u_s\,\partial u_p}\right|=0,\ p,\ s=1,\ \ldots,\ k. \tag{4}$$

На О. р. о. функция Гамильтона H стационарна, но ее второй дифференциал не является отрицательно определенным, т. е. максимум H по u (при u, изменяющемся внутри допустимой области) оказывается «размытым».

Наиболее типичными задачами, в к-рых может иметь место О. р. о., являются задачи оптимального управления, в к-рых подинтегральная функция и правые части линейно зависят от управления.

Ниже рассматриваются задачи такого рода сначала со скалярным особым управлением.

Пусть требуется определить минимум функционала

$$J=\int_0^{t_1} (F(x)+u\Phi(x))\,dt \tag{5}$$

при условиях связи

$$\dot{x}^i=f^i(x)+u\varphi^i(x), \quad i=1,\ \dots,\ n, \tag{6}$$

граничных условиях

$$x(0)=x_0, \quad x(t_1)=x_1 \tag{7}$$

и ограничениях на управление

$$|u|\leqslant 1. \tag{8}$$

Необходимые условия, к-рым должен удовлетворять О. р. о., позволяют заранее исследовать задачу (5)—(8) и выделить многообразия особых участков, на к-рых оптимальное управление лежит внутри допустимой области: $|u|<1$. Пристраивая к ним неособые участки, удовлетворяющие граничным условиям (7), с управлением $|u|=1$, определяемым из *Понтрягина принципа максимума*, можно получить оптимальное решение задачи (5)—(8).

Согласно принципу максимума оптимальное управление при любом $t\in[0, t_1]$ должно доставлять максимум функции Гамильтона

$$H(\psi(t),\ x(t),\ u(t))=\max_{|u|\leqslant 1} H(\psi(t),\ x(t),\ u), \tag{9}$$

где

$$H(\psi,\ x,\ u)=-(F(x)+u\Phi(x))+\sum_{i=1}^{n}\psi_i(f^i(x)+u\varphi^i(x)),$$

а $\psi=(\psi_1,\ \dots,\ \psi_n)$ — нек-рая не обращающаяся в нуль сопряженная вектор-функция, удовлетворяющая системе уравнений

$$\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H(\psi,\ x,\ u)}{\partial x^i}, \quad i=1,\ \dots,\ n. \tag{10}$$

Условие (2) выполняется для любого управления, а не только для О. р. о.

На тех участках времени, на к-рых $\frac{\partial H}{\partial u}\neq 0$, условие (9) определяет неособое оптимальное управление, принимающее граничные значения

$$u(t)=\operatorname{sign}\frac{\partial H}{\partial u}=\pm 1.$$

Таким образом, участки $[\tau_0,\ \tau_1]$ с оптимальным особым управлением

$$|u(t)|<1$$

могут появиться лишь при выполнении условия (1):

$$\frac{\partial H(\psi(t),\ x(t),\ u(t))}{\partial u}=0, \quad \tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1, \tag{11}$$

при к-ром функция Гамильтона перестает явно зависеть от управления u. Следовательно, для задач, линейных по управлению, условие (9) не позволяет непосредственно определить оптимальное особое управление $u(t)$.

Пусть функция $\frac{\partial H}{\partial u}$ дифференцируется по t в силу систем (6), (10) до тех пор, пока управление u не войдет с ненулевым коэффициентом в очередную производную. Доказывается (см. [1]—[3]), что управление u может войти с ненулевым коэффициентом лишь в четную производную, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^s}{dt^s}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\right)=0, \quad s=1,\ \dots,\ 2q-1,\\ &\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)=a(\psi,\ x)+u\cdot b(\psi,\ x);\ b(\psi(t),\ x(t))\neq 0, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

и что необходимым условием оптимальности особого управления является выполнение неравенства

$$(-1)^q b(\psi, x)=(-1)^q\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\right)\right)\leqslant 0. \qquad (13)$$

Если $b(\psi(t), x(t))\neq 0$ на всем отрезке, то оптимальное особое управление

$$u(t)=-\frac{a(\psi(t), x(t))}{b(\psi(t), x(t))}, \quad \tau_0\leqslant t\leqslant \tau_1.$$

Поскольку условия (12) получены в результате последовательного дифференцирования (11), то на участке особого режима, в частности в точках сопряжения τ_0 и τ_1 особого и неособого участков, помимо равенства (11), выполняется $2q-1$ равенств

$$\frac{d^s}{dt^s}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)=0, \quad s=1, \ \ldots, \ 2q-1. \qquad (14)$$

Анализ условий (11), (14) показывает, что для случаев четного и нечетного q характер сопряжения особого и неособого участков траектории различен (см. [4]).

При четном q оптимальное управление на неособом участке не может быть кусочно непрерывным. Разрывы управления (точки переключения) сгущаются к точке сопряжения с особым участком, так что оптимальное управление оказывается измеримой по Лебегу функцией *со счетным множеством точек разрыва*.

При нечетном q только две кусочно гладкие оптимальные траектории могут входить в точку, лежащую на особом участке (или исходить из нее). Пусть размерность многообразия особых участков в n-мерном пространстве фазовых координат равна k. Тогда в рассматриваемом случае нечетного q оптимальные траектории с кусочно непрерывным управлением заполняют в фазовом пространстве лишь нек-рую поверхность размерности $k+1$. Поэтому при $k\leqslant n-2$ почти все оптимальные траектории будут иметь управление с бесконечным числом точек переключения.

Сформулировано предположение (см. [4]), что $k=n-q$. Если это так, то при $q\geqslant 2$ сгущение точек переключения перед выходом на особый участок (или сходом с него) является типичным явлением для задач типа (5)—(8).

Пример сопряжения неособого и особого участков оптимального управления с бесконечным числом переключений приведен в [5].

При четном q, $q\geqslant 2$, оптимальное особое управление на неособом участке, примыкающем к особому, не может быть кусочно непрерывным, а имеет бесконечное число точек переключения, сгущающихся к точке входа τ_0, т. е. не существует $\varepsilon>0$ такого, что в промежутке $[\tau_0-\varepsilon, \tau_0]$ оптимальное управление постоянно.

В наиболее часто встречающемся О. р. о. величина $q=1$. Для этого случая сопряжение неособого и особого участков осуществляется с помощью кусочно непрерывного оптимального управления.

В более общем случае О. р. о., в к-ром рассматривается k, $k>1$, управлений:

$$J=\int_0^{t_1}\left(F(x)+\sum\nolimits_{s=1}^{k} u_s\Phi_s(x)\right)dt, \qquad (15)$$

$$\dot{x}^i=f^i(x)+\sum\nolimits_{s=1}^{k} u_s\varphi_s^i(x), \qquad (16)$$

(как и в скалярном случае) условие (4), в силу линейности, выполняется для любого управления. На участке $[\tau_0, \tau_1]$ О. р. о. по k компонентам с $|u_s|<1$ должны выполняться k условий (3):

$$M_s(\psi(t), x(t))=\frac{\partial H(\psi(t), x(t), u(t))}{\partial u_s}=0, \qquad (17)$$

$$\tau_0\leqslant t\leqslant \tau_1, \quad s=1, \ \ldots, \ k,$$

где $$H(\psi, x) = -\left(F(x) + \sum_{s=1}^{k} u_s \Phi_s(x)\right) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \left(f^i(x) + \sum_{s=1}^{k} u_s \varphi_s^i(x)\right) = \\ = Q(\psi, x) + \sum_{s=1}^{k} u_s M_s(\psi, x),$$
а ψ_i определяются из (10).

Дальнейшие необходимые условия оптимальности для О. р. о. по нескольким компонентам отличаются от рассмотренного выше случая О. р. о. по одной компоненте следующими особенностями. На участке О. р. о. должны выполняться необходимые условия двух видов. Одно из них, типа неравенства, является аналогом условия (13). Другие необходимые условия являются условиями типа равенства и не имеют более ранних аналогий (см. [6]).

Дифференцируя (17) полным образом по t, получают систему k линейных уравнений относительно k неизвестных $u_1, \ldots, u_k$:
$$\frac{dM_s(\psi, x)}{dt} = \sum_{p=1}^{k} u_p \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial M_s}{\partial x^i} \varphi_p^i - \frac{\partial M_p}{\partial x^i} \varphi_s^i\right)\right] + \\ + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial M_s}{\partial x^i} f^i - \frac{\partial Q}{\partial x^i} \varphi_s^i\right) = 0, \quad s = 1, \ldots, k. \quad (18)$$
Матрица коэффициентов системы (18)
$$a_{sp} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial M_s}{\partial x^i} \varphi_p^i - \frac{\partial M_p}{\partial x^i} \varphi_s^i\right), \quad s, p = 1, \ldots, k,$$
является кососимметричной: $a_{sp} = -a_{ps}$. Отсюда, в частности, следует, что элементы a_{ss}, стоящие на главной диагонали матрицы (a_{sp}), равны нулю. Остальные элементы a_{sp}, $s \neq p$, в системе (18) в общем случае на произвольной траектории, соответствующей нек-рому неоптимальному управлению, отличны от нуля. На О. р. о. по k компонентам должны выполняться необходимые условия, требующие обращения в нуль всех $\frac{k(k-1)}{2}$ коэффициентов системы (18) (см. [6]):
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial M_s}{\partial x^i} \varphi_p^i - \frac{\partial M_p}{\partial x^i} \varphi_s^i\right) = 0, \quad s, p = 1, \ldots, k, \quad s < p. \quad (19)$$

Кроме этих условий должно выполняться условие типа неравенства (являющееся аналогом условия (13) для О. р. о. по одной компоненте при $q = 1$):
$$\sum_{s, p=1}^{k} \frac{\partial}{\partial u_p} \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u_s}\right)\right) \delta u_s \delta u_p \geqslant 0. \quad (20)$$
Условия (13), (20) можно рассматривать как обобщение *Лежандра условия* и *Клебша условия* на случай О. р. о., поэтому указанные неравенства наз. иногда обобщенным условием Лежандра — Клебша.

Важность выявления и исследования О. р. о. в задачах оптимального управления объясняется следующим свойством О. р. о. (см. [4]): если оптимальная траектория, исходящая из нек-рой точки, содержит участок О. р. о., то этим же свойством обладают все оптимальные траектории, исходящие из близких точек.

Исследованы нек-рые вопросы, связанные с определением порядка О. р. о. для линейных и нелинейных по управлению задач (см. [8]).

Все приведенные выше результаты по О. р. о. получены из рассмотрения второй вариации функционала. Оказывается, что можно получить дополнительные необходимые условия оптимальности особого режима из рассмотрения третьей и четвертой вариаций функционала (см. [9]).

Лит.: [1] Келли Г., «Ракетная техника и космонавтика», 1964, № 8, с. 26—29; [2] Роббинс Г., там же, 1965, № 6, с.

139—45; [3] Конн Р., Мойер Г., там же, 1965, № 8, с. 84—90; [4] Бэрщанский Я. М., «Автоматика и телемеханика», 1979, № 3, с. 5—11; [5] Фуллер А. Т., в кн.: Тр. 1 Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Теория дискретных оптимальных и самонастраивающихся систем, М., 1961, с. 584—605; [6] Вапнярский И. Б., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 2, с. 259—83; [7] Krener A., «SIAM J. Contr. and Optimiz.», 1977, v. 15, № 2, p. 256—93; [8] Lewis R. M., там же, 1980, v. 18, № 1, p. 21—32; [9] Скородинский И. Т., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1979, т. 19, № 5, с. 1134—40; [10] Габасов Р., Кириллова Ф. М., Особые оптимальные управления, М., 1973. *И. Б. Вапнярский.*

ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕЖИМ СКОЛЬЗЯЩИЙ — термин, используемый в теории оптимального управления для описания оптимального способа управления системой в случае, когда минимизирующая последовательность управляющих функций не имеет предела в классе измеримых по Лебегу функций.

Пусть, напр., требуется найти минимум функционала

$$J(x, u) = \int_0^s (x^2 - u^2)\,dt \qquad (1)$$

при условиях

$$\dot{x} = u, \qquad (2)$$

$$x(0) = 1, \quad x(3) = 1, \qquad (3)$$

$$|u| \leqslant 1. \qquad (4)$$

Для получения минимума функционала (1) желательно иметь при каждом t как можно меньшее значение $|x(t)|$ и как можно большее значение $|u(t)|$. Первому требованию, с учетом условия связи (2), граничных условий (3) и ограничений на управление (4), удовлетворяет траектория

$$x(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & 1 < t < 2, \\ t-2, & 2 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases} \qquad (5)$$

Если бы траекторию (5) можно было построить при нек-ром управлении, принимающем при всех t граничные значения

$$u(t) = +1 \text{ или } u(t) = -1, \qquad (6)$$

был бы получен абсолютный минимум функционала (1). Однако «идеальная» траектория (5) не может быть построена ни при какой управляющей функции $u(t)$, удовлетворяющей (6), поскольку при $1<t<2$ $u(t) \equiv 0$. Тем не менее можно, используя управляющие функции $u_n(t)$, реализующие при $n \to \infty$ и $1<t<2$ все более частые переключения с 1 на -1 и обратно:

$$u_n(t) = $$

$$= \begin{cases} -1, \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ +1, \ 1+\frac{k}{n} < t \leqslant 1+\frac{2k+1}{2n}, \ k=0, 1, \ldots, n-1, \\ -1, \ 1+\frac{2k+1}{2n} < t \leqslant 1+\frac{k+1}{n}, \ k=0, 1, \ldots, n-1, \\ +1, \ 2 < t \leqslant 3, \\ \qquad\qquad n=1, 2, \ldots, \end{cases} \qquad (7)$$

построить минимизирующую последовательность управлений $\{u_n(t)\}$, удовлетворяющую (6), и минимизирующую последовательность траекторий $\{x_n(t)\}$, сходящуюся к «идеальной» траектории (5).

Каждая из траекторий $x_n(t)$ отличается от (5) только на интервале (1, 2), на к-ром вместо точного движения по оси x она обеспечивает «пилообразное» движение с n одинаковыми «зубьями», расположенными над осью x. «Зубья пилы» становятся все мельче при $n \to \infty$, так что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$, $1<t<2$. Таким образом, минимизирующая последовательность траекторий $\{x_n(t)\}$ сходится к (5), но минимизирующая последовательность управлений $\{u_n(t)\}$, реализующих при $n \to \infty$ и $1<t<2$ все более частые переключения с 1 на -1 и обратно, не имеет предела в классе измеримых (а тем более в классе кусочно непрерывных) функций. Это означает, что на участке (1, 2) имеет место О. р. с.

Используя не очень строгие рассуждения, можно описать полученный О. р. с. следующим образом: оптимальное управление в каждой точке интервала (1, 2) «скользит», т. е. перескакивает со значения $+1$ на -1 и обратно так, что для любого, сколь угодно малого, интервала времени мера множества точек t, в к-рых $u=+1$, равна мере множества точек t, в к-рых $u=-1$, что обеспечивает, в силу уравнения (2), точное движение по оси x. Приведенное описание характера изменения оптимального управления на участке скользящего режима является нестрогим, ибо оно не удовлетворяет обычному определению функции.

Можно дать строгое определение О. р. с., если наряду с исходной задачей (1)—(4) ввести в рассмотрение вспомогательную, расщепленную задачу: найти минимум функционала

$$I(x, \alpha, u)=\int_0^3 \left(x^2-\alpha_0 u_0^2-\alpha_1 u_1^2\right) dt \qquad (8)$$

при условиях

$$\dot{x}=\alpha_0 u_0+\alpha_1 u_1, \qquad (9)$$

$$x(0)=1, \quad x(3)=1, \qquad (10)$$

$$|u_0|\leqslant 1, \ |u_1|\leqslant 1, \ \alpha_0+\alpha_1=1, \ \alpha_0\geqslant 0, \ \alpha_1\geqslant 0. \qquad (11)$$

Расщепленная задача (8)—(11) отличается от исходной тем, что: вместо одной управляющей функции $u(t)$ вводятся две независимые управляющие функции $u_0(t)$ и $u_1(t)$; подинтегральная функция и функция, стоящая в правой части уравнения (2) исходной задачи, заменяются линейной выпуклой комбинацией соответствующих функций, взятых при различных управлениях $u_0(t)$ и $u_1(t)$ с коэффициентами $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, к-рые также рассматриваются как управляющие функции.

Таким образом, в задаче (8)—(11) имеется 4 управления u_0, u_1, α_0, α_1. Поскольку α_0 и α_1 связаны условием типа равенства $\alpha_0+\alpha_1=1$, то от одного из управлений α_0 или α_1 можно избавиться, выразив его через другое. Однако для удобства последующего анализа целесообразно оставить оба эти управления в явном виде.

В отличие от исходной задачи оптимальное управление в расщепленной задаче (8)—(11) существует. На участке О. р. с. исходной задачи оптимальное управление расщепленной задачи имеет вид

$$\alpha_0(t)=\alpha_1(t)=\frac{1}{2}, \quad u_0(t)=-1, \quad u_1(t)=+1, \quad 1<t<2,$$

а на участках входа и выхода

$$\alpha_0(t)=1, \ u_0(t)=-1, \ \alpha_1(t)=0, \ u_1(t) \text{ — любая}, \\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$\alpha_1(t)=1, \ u_1(t)=+1, \ \alpha_0(t)=0, \ u_0(t) \text{ — любая}, \\ 2\leqslant t\leqslant 3.$$

На участке О. р. с. управления α_0 и α_1, линейно входящие в правую часть и подинтегральную функцию, принимают значения, лежащие внутри допустимой области. Это означает, что О. р. с. исходной задачи (1)—(4) есть особый оптимальный режим, или особое оптимальное управление, для вспомогательной, расщепленной задачи (8)—(11).

Аналогичные результаты для О. р. с. имеют место в общем случае задачи оптимального управления. Пусть требуется найти минимум функционала

$$J(x, u)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, u)\, dt, \qquad (12)$$

$$f^0(t, x, u): \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R},$$

при условиях

$$\dot{x}=f(t,\ x,\ u),\ f(t,\ x,\ u)\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n, \quad (13)$$

$$x(t_0)=x_0,\quad x(t_1)=x_1, \quad (14)$$

$$u\in U. \quad (15)$$

О. р. с. характеризуется неединственностью максимума по u функции Гамильтона

$$H(t,\ x,\ \psi,\ u)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i f^i(t,\ x,\ u),$$

где ψ_i — сопряженные переменные (см. [2]). При этом на участке $[\tau_1,\ \tau_2]$ «скольжения» по $k+1$, $k>1$, максимумам $u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_k$ исходная задача расщепляется и принимает вид

$$I(x,\ \alpha,\ u)=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{s=0}^{k}\alpha_s f^0(t,\ x,\ u_s)\,dt, \quad (16)$$

$$\dot{x}=\sum_{s=0}^{k}\alpha_s f(t,\ x,\ u_s), \quad (17)$$

$$x(t)=x_0,\ x(t_1)=x_1, \quad (18)$$

$$u_s\in U,\ \sum_{s=0}^{k}\alpha_s=1,\ \alpha_s\geqslant 0, s=0,\ 1,\ \ldots,\ k. \quad (19)$$

Функцию Гамильтона для задачи (16)—(19)

$$H(t,\ x,\ \psi,\ \alpha,\ u)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i\left(\sum_{s=0}^{k}\alpha_s f^i(t,\ x,\ u_s)\right)$$

после исключения α_0 и перегруппировки слагаемых можно привести к виду

$$H(t,\ x,\ \psi,\ \alpha,\ u)=$$

$$=\sum_{s=1}^{k}\left(\sum_{i=0}^{n}\psi_i f^i(t,\ x,\ u_0)-\sum_{i=0}^{n}\psi_i f^i(t,x,u_s)\right)\alpha_s=$$

$$=\sum_{s=k}^{k}(H(t,\ x,\ \psi,\ u_1)-H(t,\ x,\ \psi,\ u_s))\,\alpha_s. \quad (20)$$

Поскольку все $H(t,x,\psi,u_s)$, $s=0,\ 1,\ \ldots,\ k$, есть равные между собой максимумы H по u на множестве U, то на участке $[\tau_1,\ \tau_2]$ О. р. с. с $k+1$ максимумами коэффициенты при k независимых линейных управлениях $\alpha_1,\ \ldots$ $\ldots,\ \alpha_k$ функции Гамильтона расщепленной задачи (12)—(15) равны нулю. О. р. с. со «скольжением» по $k+1$ максимумам есть особый оптимальный режим по k компонентам для расщепленной задачи (16)—(19). Максимально возможное значение k, к-рое целесообразно брать при исследовании скользящих режимов, определяется из условия выпуклости множества значений вектора правых частей и выпуклости вниз точной нижней границы множества значений подинтегральной функции расщепленной системы, получающихся, когда вектор управления $(\alpha_s,\ u_s)$, $s=0,\ 1,\ \ldots,\ k$ пробегает всю допустимую область значений. Таким образом, $k\leqslant n$ — оценка сверху для k. В самом общем случае все О. р. с. исходной задачи могут быть получены как особые оптимальные управления расщепленной задачи, записанной при $k=n$. В частности, в рассмотренном выше примере расщепленная задача рассматривалась при $k=1$, поскольку условия связи содержали только одно уравнение; исследование расщепленной задачи (8)—(11) было достаточно для исследования О. р. с. исходной задачи (1)—(4).

Если известны $k+1$ управлений $u_0(t),\ u_1(t),\ \ldots,\ u_k(t)$, доставляющих равные между собой абсолютные максимумы функции Гамильтона $H(t,\ x,\ \psi,\ u)$ в допустимой области U, то анализ О. р. с. сводится к исследованию особого оптимального режима по k компонентам. Это исследование может быть проведено с использованием необходимых условий оптимальности особого управления (см. *Оптимальный режим особый*).

Исследовались О. р. с. с помощью достаточных условий оптимальности (см. [4]).

Лит.: [1] Гамкрелидзе Р. В., «Докл. АН СССР», 1962, т. 143, № 6, с. 1243—45; [2] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969; [3] Вапнярский И. Б., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 2, с. 259—83; [4] Кротов В. Ф., «Автоматика и телемеханика», 1963, т. 24, № 5, с. 581—98.

И. Б. Вапнярский.

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МЕТОДА — обычно то же, что *оптимизация вычислительных алгоритмов.* Иногда, однако, эти понятия трактуются различно. Напр., можно говорить об оптимальности конкретного сеточного метода решения краевой задачи на нек-ром классе задач, имея в виду, что он требует вычисления правой части в минимальном числе точек. При рассмотрении вопросов об оптимизации вычислительного алгоритма изучается дополнительно ряд других моментов: способы решения возникающей системы сеточных уравнений, программная реализация этих способов и т. п.

Н. С. Бахвалов.

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ — выбор оптимального вычислительного алгоритма при решении прикладных задач или при разработке систем стандартных программ. При решении конкретной задачи оптимальная тактика поведения может состоять в том, чтобы не оптимизировать метод решения, а подключиться к стандартной программе или воспользоваться простейшим методом, составление программы для к-рого не потребует много усилий.

Теоретич. постановка вопроса об О. в. а. имеет следующее основание. При выборе метода решения задачи исследователь ориентируется на нек-рые ее свойства и выбирает алгоритм решения в зависимости от них, причем алгоритм будет применимым и при решении других задач, обладающих этими свойствами. Поэтому при теоретич. исследовании алгоритмов вводят в рассмотрение нек-рый класс задач P, обладающих определенными свойствами. При выборе метода решения исследователь располагает нек-рым множеством M методов решения. При применении метода m к решению задачи p решение будет получено с нек-рой погрешностью $\varepsilon(p, m)$. Величина

$$E(P, m) = \sup_{p \in P} |\varepsilon(p, m)|$$

наз. погрешностью метода m **на классе** задач P, а

$$E(P, M) = \inf_{m \in M} E(P, m)$$

— **оптимальной на классе P оценкой погрешности** методов из множества M. Если существует метод такой, что

$$E(P, m_0) = E(P, M),$$

то этот метод наз. оптимальным. Такая схема рассмотрения проблемы О. в. а., восходящая к А. Н. Колмогорову [2], изучает множество задач вычисления интеграла

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

при условии $|f^{(n)}| \leqslant A$, M — множество всевозможных квадратур

$$I(f) \approx \sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j);$$

каждая квадратура задается совокупностью $2N$ чисел C_j и x_j. Задача о минимальном количестве информации (см. [2], [3]), необходимой для запоминания функции из данного класса с требуемой точностью, также может быть уложена в эту схему. Рассматривается [4] более сложная постановка проблемы, где трудоемкость реализации алгоритма в определенном смысле увязывается с объемом используемой памяти. Оптимальные алгоритмы построены для незначительного числа задач типа [1].

Однако для большого числа вычислительных задач построены методы, по своим асимптотич. характеристикам близкие к оптимальным (см. [5]—[8]).

Исследование характеристик оптимальных на классах вычислительных алгоритмов решения задач (см. [5], [7]) складывается из двух частей: построение конкретных методов решения с возможно лучшими характеристиками и получение оценок снизу характеристик вычислительных алгоритмов (см. [2]—[4], [9]). По существу первая часть вопроса является основной проблемой теории численных методов и в большинстве случаев рассматривается независимо от проблемы оптимизации. Получение оценок снизу обычно сводится к оценке снизу ε-энтропии или поперечников соответствующих пространств; иногда оно проводится независимо, но с использованием техники, аналогичной технике получения указанных оценок.

Вычислительные алгоритмы условно делят на пассивные и активные. В первом случае алгоритм решения задачи не зависит от получаемой в ходе решения задачи информации, а во втором — зависит. При вычислении интеграла используемая информация о функции есть обычно информация о ее значениях в N точках. В случае пассивного алгоритма интеграл вычисляется по формуле

$$I(f) \approx \sum_{j=1}^{N} C_j f(P_j),$$

где веса C_j и P_j из области Ω определения f задаются заранее. Активные алгоритмы вычисления интеграла укладываются в следующую схему: задается точка $P_1 \in \Omega$ и функции

$$Q_q = \Phi_q(Q_1, \ldots, Q_{q-1}; y_1, \ldots, y_{q-1}), \quad q=2, \ldots, N,$$
$$S_N(Q_1, \ldots, Q_N; y_1, \ldots, y_N),$$

где y_j, S_N — числа, $Q_j \in \Omega$. Последовательно вычисляют

$$f(P_1), \; P_2 = \Phi_2(P_1; f(P_1)), \; f(P_2),$$
$$P_3 = \Phi_3(P_1, P_2; f(P_1), f(P_2)), \; \ldots, \; f(P_N)$$

и полагают

$$I(f) \approx S_N(P_1, \ldots, P_N; f(P_1), \ldots, f(P_N)).$$

В случае выпуклых классов подинтегральных функций, центрально симметричных относительно функции $f \equiv 0$, оптимальная оценка на классе пассивных алгоритмов совпадает с оптимальной оценкой на классе активных алгоритмов (см. [10], [11]).

В практике численного интегрирования активные алгоритмы типа алгоритмов интегрирования с автоматич. выбором шага (см. [10]) показали свое превосходство над пассивными алгоритмами. Это подтверждает общепринятую точку зрения о том, что формальная схема О. в. а. зачастую не охватывает специфики реальных задач. При решении задач оптимизации (в частности, задач минимизации) пассивные алгоритмы практически не употребляются (см. [12], [13]). Выше за единицу трудоемкости алгоритма неявно принимается трудоемкость вычисления одного значения функции из нек-рого класса F. Возможны и другие подходы к оценке оптимальности характеристик алгоритма. Напр., за единицу трудоемкости принимается трудоемкость вычисления нек-рого функционала $l(f)$ из множества функционалов $L(f)$. В этом случае оценка снизу трудоемкости алгоритмов производится с помощью теории поперечников (см. [14], [15]). Трудоемкость алгоритма складывается не только из трудоемкости получения информации об исходных данных, но и из трудоемкости обработки полученной информации. В настоящее время, по-видимому, нельзя привести примеров классов реальных вычислительных задач, где бы были получены оценки снизу трудоемкости алгоритмов, отличные от информационных оценок рассматриваемого типа. Однако для ряда задач невычислительного характера такого типа оценки известны (см. *Алгоритма сложность*).

В случае, когда исследование проблемы О. в. а. имеет своей целью решение задач на ЭВМ, проблема О. в. а. приобретает дополнительные оттенки, связанные с устойчивостью алгоритма к вычислительной погрешности, с ограничением на объем разных видов используемой памяти (см. *Вычислительный алгоритм*). Выше задача О. в. а. рассматривалась как задача О. в. а. на классах задач. Существенный интерес для практики представляет задача О. в. а. на конкретной задаче (см. [10], [16]). Постановка проблемы оптимизации (см. [16]) заключается в следующем. Дифференциальное уравнение интегрируется методом Рунге — Кутта с переменным шагом. Производится оценка главного члена оценки погрешности. Затем эта оценка оптимизируется по распределению узлов интегрирования (при общем заданном числе узлов). Такой подход к проблеме оптимизации оказал существенное влияние на развитие теории и практики активных алгоритмов численного интегрирования.

Лит.: [1] Никольский С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979; [2] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 3, с. 385—88; [3] Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 2, с. 3—86; [4] Витушкин А. Г., Оценка сложности задачи табулирования, М., 1959; [5] Бабушка И., Соболев С. Л., «Aplikace mat.», 1965, t. 10, s. 96—129; [6] Бахвалов Н. С., *там же*, 1968, t. 13, s. 27—38; [7] его же, *в кн.: Международный конгресс математиков в Ницце. 1970. Доклады советских математиков*, М., 1972, с. 27—33; [8] его же, в кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы, М., 1964, с. 3—63; [9] его же, «Матем. заметки», 1972, т. 12, в. 6, с. 655—64; [10] его же, Численные методы, 2 изд., М., 1975; [11] его же, «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1971, т. 11, № 4, с. 1014—18; [12] Уайлд Д.-Дж., Методы поиска экстремума, пер. с англ., М., 1967; [13] Васильев Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980; [14] Оганесян Л. А., Руховец Л. А., Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, Ер., 1979; [15] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [16] Тихонов А. Н., Горбунов А. Д., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1964, т. 4, № 2, с. 232—41. *Н. С. Бахвалов.*

ОПЦИОНАЛЬНАЯ σ-АЛГЕБРА — наименьшая σ-алгебра $\mathcal{O}=\mathcal{O}(\mathbb{F})$ множеств из $\Omega\times R_+=\{(\omega, t):\omega\in\Omega, t\geqslant 0\}$, порожденная всеми отображениями $(\omega, t)\rightsquigarrow f(\omega, t)$ множества $\Omega\times R_+$ в R, к-рые (для каждого фиксированного $\omega\in\Omega$) являются (по t) непрерывными справа, имеют пределы слева и $\mathbb{F}$-согласованы с неубывающим семейством $\mathbb{F}=(F_t)_{t\geqslant 0}$ под-σ-алгебр $F_t\subseteq F$, $t\geqslant 0$, где (Ω, F) — *измеримое пространство*. О. σ-а. совпадает с наименьшей σ-алгеброй, порожденной стохастич. интервалами $[\![0, \tau[\![=\{(\omega, t):0\leqslant t<\tau(\omega)\}$, где $\tau=\tau(\omega)$ — марковские моменты (относительно $\mathbb{F}=(F_t)_{t\geqslant 0}$). Между опциональными и предсказуемыми σ-алгебрами имеет место соотношение $\mathcal{P}(\mathbb{F})\subseteq\mathcal{O}(\mathbb{F})$.

Лит.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975. *А. Н. Ширяев.*

ОПЦИОНАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС — стохастический процесс $X=(X_t(\omega), F_t)_{t\geqslant 0}$, являющийся измеримым (как отображение $(\omega, t)\rightsquigarrow X(\omega, t)=X_t(\omega)$) относительно *опциональной σ-алгебры* $\mathcal{O}=\mathcal{O}(\mathbb{F})$. *А. Н. Ширяев.*

ОРБИТ МЕТОД — метод изучения унитарных представлений групп Ли. С помощью О. м. была построена теория унитарных представлений нильпотентных групп Ли, а также указана возможность его применения к другим группам [1].

О. м. основан на следующем «экспериментальном» факте: существует глубокая связь между унитарными неприводимыми представлениями группы Ли G и орбитами этой группы в *коприсоединенном представлении*. Решение основных задач теории представлений с помощью О. м. осуществляется следующим образом (см. [2]).

I. Конструкция и классификация неприводимых унитарных представлений. Пусть Ω — орбита действительной группы Ли G в коприсоединенном представлении, F — точка этой орбиты (являющаяся линейным функционалом на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G), $G(F)$ — стабилизатор точки F, $\mathfrak{g}(F)$ — алгебра Ли группы $G(F)$. Поляризацией точки F наз. комплексная подалгебра $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, где $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ — *комплексификация алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, обладающая свойствами:

1) $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{h}=\dim\mathfrak{g}-\frac{1}{2}\dim\Omega$;

2) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ содержится в ядре функционала F на $\mathfrak{g}$;
3) $\mathfrak{h}$ инвариантна относительно Ad $G(F)$.

Пусть $H^0=\exp(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g})$ и $H=G(F)\cdot H^0$. Поляризация $\mathfrak{h}$ наз. действительной, если $\mathfrak{h}=\overline{\mathfrak{h}}$, и чисто комплексной, если $\mathfrak{h}\cap\overline{\mathfrak{h}}=\mathfrak{g}(F)$. Функционал F определяет характер (одномерное унитарное представление) χ_F^0 группы H^0 по формуле

$$\exp X \longrightarrow \exp 2\pi i \langle F,\ X\rangle.$$

Пусть χ_F^0 продолжается до характера χ_F группы H. Если $\mathfrak{h}$ — действительная поляризация, то пусть $T_{F,\,\mathfrak{h},\,\chi_F}$ — индуцированное характером χ_F подгруппы H представление группы G (см. *Индуцированное представление*). Если $\mathfrak{h}$ — чисто комплексная поляризация, то пусть $T_{F,\,\mathfrak{h},\,\chi_F}$ — голоморфно индуцированное представление, действующее в пространстве голоморфных функций на G/H.

Первая основная гипотеза состоит в том, что представление $T_{F,\,\mathfrak{h},\,\chi_F}$ неприводимо и его класс эквивалентности зависит только от орбиты Ω и от выбора продолжения χ_F характера χ_F^0. Эта гипотеза доказана для нильпотентных групп [1] и для разрешимых групп Ли [5]. Для нек-рых орбит простой особой группы G_2 гипотеза неверна [7]. Возможность продолжения и степень его неоднозначности зависят от топологич. свойств орбиты: препятствием к продолжению служат двумерные когомологии орбиты, а в качестве параметра, нумерующего различные продолжения, можно взять одномерные когомологии орбиты. Более точно, пусть B_Ω — каноническая 2-форма на орбите Ω. Для существования продолжения необходимо и достаточно, чтобы форма B_Ω принадлежала целочисленному классу (т. е. интеграл ее по любому двумерному циклу был целым числом); если это условие выполнено, то множество продолжений параметризуется характерами фундаментальной группы орбиты.

Вторая основная гипотеза состоит в том, что указанным способом получаются все унитарные неприводимые представления рассматриваемой группы G. Единственным (1983) противоречащим этой гипотезе примером являются т. н. дополнительные серии представлений полупростых групп Ли.

II. Функториальные свойства соответствия между орбитами и представлениями. Значительное место в теории представлений занимают вопросы о разложении на неприводимые компоненты представления, получаемого ограничением на подгруппу H неприводимого представления группы G и индуцированием с помощью неприводимого представления подгруппы $H\subset G$. О. м. дает ответ на эти вопросы в терминах естественной проекции $p:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{h}^*$ (* означает переход к сопряженному пространству; проекция p состоит в ограничении функционала с $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$). А именно, пусть G — экспоненциальная группа Ли (для таких групп соответствие между орбитами и представлениями взаимно однозначно).

Тогда неприводимое представление группы G, соответствующее орбите $\Omega\subset\mathfrak{g}^*$, при ограничении на H разлагается на неприводимые компоненты, соответствующие тем орбитам $\omega\in\mathfrak{h}^*$, к-рые лежат в $p(\Omega)$, а представление группы G, индуцированное неприводимым представлением группы H, соответствующим орбите $\omega\subset\mathfrak{h}^*$, разлагается на неприводимые компоненты, соответствующие тем орбитам $\Omega\subset\mathfrak{g}^*$, к-рые имеют непустое пересечение с прообразом $p^{-1}(\omega)$. Из этих результатов вытекают два следствия: если неприводимые представления T_i соответствуют орбитам Ω_i, $i=1, 2$, то тензорное произведение $T_1\otimes T_2$ разлагается на неприводимые компоненты, соответствующие тем орбитам Ω, к-рые лежат в арифметич. сумме $\Omega_1+\Omega_2$; квазирегулярное представление группы G в пространстве функций на G/H разлагается на неприводимые компоненты, соответствующие тем орбитам $\Omega\subset\mathfrak{g}^*$, для к-рых образ $p(\Omega)\subset\mathfrak{h}^*$ содержит нуль.

III. Теория характеров. Для характеров неприводимых представлений (как обобщенных функций на группе) предложена [2] следующая универсальная формула:

$$\chi(\exp X)=\frac{1}{p(X)}\int_\Omega e^{2\pi i\langle F, X\rangle}\beta(F), \qquad (*)$$

где $\exp:\mathfrak{g}\to G$ — экспоненциальное отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в группу G, $p(X)$ — квадратный корень из плотности инвариантной меры Хаара на G в канонич. координатах, β — форма объема на орбите Ω, связанная с канонической 2-формой B_Ω соотношением $\beta=\frac{B_\Omega^k}{k!}$, $k=\frac{1}{2}\dim\Omega$. Эта формула справедлива для нильпотентных групп, разрешимых групп типа 1, компактных групп, дискретной серии представлений полупростых действительных групп и основной серии представлений комплексных полупростых групп. Для нек-рых вырожденных серий представлений $SL(3, \mathbb{R})$ формула неверна. Из формулы (*) получается простая формула для вычисления инфинитезимального характера неприводимого представления T_Ω, соответствующего орбите Ω, а именно: каждому оператору Лапласа Δ на G может быть сопоставлен Ad^*G-инвариантный многочлен P_Δ на $\mathfrak{g}^*$ так, что значение инфинитезимального характера представления T_Ω на элементе Δ в точности равно значению P_Δ на Ω.

IV. Конструкцию неприводимого унитарного представления группы G по ее орбите Ω в коприсоединенном представлении можно рассматривать как операцию квантования нек-рой гамильтоновой системы, для к-рой Ω играет роль фазового пространства, а G — роль многомерного некоммутативного времени (или группы симметрий). При этом G-орбиты в коприсоединенном представлении — это все G-однородные симплектич. многообразия, допускающие квантование. Таким образом, вторую основную гипотезу можно переформулировать так: каждая элементарная квантовая система с временем (или группой симметрий) G получается квантованием из соответствующей классич. системы (см. [2]).

Обнаружена также связь О. м. с теорией вполне интегрируемых гамильтоновых систем (см. [11]).

Лит.: [1] Кириллов А. А., «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 4, с. 57—110; [2] его же, Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [3] Диксмье Ж., Универсальные обертывающие алгебры, пер. с франц., М., 1978; [4] Simms D. J., Woodhouse N. M. J., Lectures on geometric quantization, B.— Hdlb.— N. Y., 1976; [5] Auslander L., Kostant B., «Invent. math.», 1971. v. 14, p. 255—354; [6] Moore C.C., «Ann. Math.», 1965, v. 82, № 1, p. 146—82; [7] Rothschild L. P., Wolf J. A., «Ann. Sci. Ecole norm. supér. Sér.4», 1974, v. 7, № 2, p. 155—74; [8] Représentations des groupes de Lie résolubles, P., 1972; [9] Гинзбург В. А., «Докл. АН СССР», 1979, т. 249, № 3, с. 525—28; [10] Kirillov A. A., Infinite dimensional groups, their representations, orbits, invariants, в сб.: Proc. Int. Congr. Math., Helsinki, 1978; [11] Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A., «Invent. math.», 1979, v. 54, № 1, p. 81—100. *А. А. Кириллов.*

ОРБИТА точки x относительно группы G, действующей на множестве X (слева),— множество

$$G(x)=\{g(x) \mid g \in G\}.$$

Множество

$$G_x=\{g \in G \mid g(x)=x\}$$

является подгруппой в G и наз. стабилизатором, или стационарной подгруппой точки x относительно G. Отображение $g \mapsto g(x)$, $g \in G$, индуцирует биекцию между G/G_x и орбитой $G(x)$. О. любых двух точек из X либо не пересекаются, либо совпадают; иначе говоря, О. определяют разбиение множества X. Фактормножество по отношению эквивалентности, определенному этим разбиением, наз. пространством орбит, или фактормножеством X по G, и обозначается X/G. Сопоставление каждой точке ее О. определяет канонич. отображение $\pi_{X,G}: X \to X/G$. Стабилизаторы точек из одной О. сопряжены в G, точнее $G_{g(x)}=gG_xg^{-1}$. Если в X имеется только одна О., то X — однородное пространство группы G; говорят также, что G действует на X транзитивно. Если G — топологич. группа, X — топологич. пространство и действие непрерывно, то X/G обычно снабжается топологией, в к-рой множество $U \subset X/G$ открыто в X/G тогда и только тогда, когда множество $\pi^{-1}_{X,G}(U)$ открыто в X.

Примеры. 1) Пусть G — группа поворотов плоскости X вокруг фиксированной точки a. Тогда О.— это всевозможные окружности с центром в a (в том числе и сама точка a). 2) Пусть G — группа всех невырожденных линейных преобразований конечномерного действительного векторного пространства V, X — множество всех симметрич. билинейных форм на V, а действие G на X определено формулой $(gf)(u, v)=f(g^{-1}(u), g^{-1}(v))$ для любых $u, v \in V$. Тогда О. группы G на X — множество форм, имеющих фиксированный ранг и сигнатуру.

Пусть G — вещественная группа Ли, гладко действующая на дифференцируемом многообразии X (см. *Ли группа преобразований*). Для любой точки $x \in X$ орбита $G(x)$ является погруженным подмногообразием в X, диффеоморфным G/G_x (диффеоморфизм индуцирован отображением $g \mapsto g(x)$, $g \in G$). Это подмногообразие не обязательно замкнуто в X (не обязательно вложено). Классич. примером служит «обмотка тора», то есть О. действия аддитивной группы $\mathbb{R}$ на торе

$$T^2=\{(z_1, z_2) \mid z_i \in \mathbb{C}, \ |z_i|=1, \ i=1, 2\},$$

заданного формулой

$$t(z_1, z_2)=(e^{it}z_1, e^{i\alpha t}z_2), \ t \in \mathbb{R},$$

где α — иррациональное действительное число; замыкание такой О. совпадает с T^2. Если G компактна, то все О. являются вложенными подмногообразиями.

Если G — алгебраич. группа, X — алгебраич. многообразие над алгебраически замкнутым полем k, а действие регулярно (см. *Алгебраическая группа преобразований*), то любая орбита $G(x)$ является гладким алгебраич. многообразием, открытым в своем замыкании $\overline{G(x)}$ (в топологии Зариского), причем в $\overline{G(x)}$ всегда содержится замкнутая О. группы G (см. [5]). В этом случае морфизм $G \to G(x)$, $g \mapsto g(x)$, индуцирует изоморфизм алгебраич. многообразий G/G_x и $G(x)$ тогда и только тогда, когда он сепарабелен (это условие всегда выполнено, если k — поле нулевой характеристики). О. максимальной размерности образуют открытое в X множество.

Описание структуры О. для данного действия обычно сводится к указанию в каждой О. нек-рого единственного представителя x, к нахождению стабилизатора G_x и к описанию какого-либо — по возможности обозримого — класса функций, постоянных на О. (инвариантов) и разделяющих разные О.; эти функции позволяют описать «расположение» О. в X (О. являются пересечениями их множеств уровня). Эта программа обычно наз. задачей орбитального разложения. К такой задаче часто сводятся многие задачи классификации. Так, в примере 2) это — задача классификации билинейных симметрич. форм с точностью до эквивалентности; инварианты в этом случае «дискретны» — это ранг и сигнатура, а стабилизатор G_f, где f невырождена, является соответствующей псевдоортогональной группой. Классич. теория жордановой формы матриц (также, как и теории других *нормальных форм* матриц) тоже укладывается в эту схему: жорданова форма — это канонич. представитель (определенный, правда, с точностью до порядка жордановых клеток) в О. полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ на пространстве всех комплексных $(n\times n)$-матриц при действии, заданном формулой $Y\to AYA^{-1}$; среди инвариантов важное место занимают коэффициенты характеристич. многочлена матрицы Y (к-рые не разделяют, однако, любые две О.). Идея рассмотрения эквивалентных объектов как О. нек-рой группы активно используется в различных задачах классификации, напр. в алгебраич. *модулей теории* (теория Мамфорда, см. [10]), в теории перечисления графов (см. [2]) и др.

Если G и X конечны, то

$$|X/G|=\frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G}|\mathrm{Fix}\, g|,$$

где $|Y|$ — число элементов множества Y, а

$$\mathrm{Fix}\, g=\{x\in X\mid g(x)=x\}.$$

Если G — компактная группа Ли, гладко действующая на связном гладком многообразии X, то структура О. на X локально конечна, т. е. у любой точки $x\in X$ существует такая окрестность U, что число различных стабилизаторов G_y, $y\in U$, с точностью до сопряженности в G конечно. В частности, если X компактно, то конечно число различных (с точностью до сопряженности в G) стабилизаторов G_y, $y\in X$. При этом для любой подгруппы H в G каждое из множеств

$$X_{(H)}=\{x\in X\mid G_x \text{ сопряжена } H \text{ в } G\}$$

является пересечением открытого и замкнутого инвариантных подмножеств в X. Исследование $X_{(H)}$ приводит в этом случае к классификации действий (см. [1]). Аналоги этих результатов получены в геометрич. *инвариантов теории* (см. [3]). А именно, пусть G — редуктивная алгебраич. группа, регулярно действующая на аффинном алгебраич. многообразии X (основное поле k алгебраически замкнуто и имеет характеристику 0). В замыкании любой О. содержится единственная замкнутая О. Существует разбиение X в объединение конечного числа локально замкнутых инвариантных непересекающихся подмножеств $X=\cup_\alpha X_\alpha$, обладающее свойствами: а) если $x, y\in X_\alpha$ и $G(x)$ замкнута, то стабилизатор G_y сопряжен в G подгруппе в G_x, а если замкнута и $G(y)$, то G_y сопряжен с G_x; б) если $x\in X_\alpha$, $y\in X_\beta$, $\alpha\neq\beta$, а $G(x)$ и $G(y)$ замкнуты, то G_x и G_y не сопряжены в G. Если X — гладкое алгебраич. многообразие (напр., в важном случае, когда рассматривается рациональное линейное представление G в векторном пространстве $V=X$), то существует такое непустое открытое подмножество Ω в X, что G_x и G_y сопряжены в G для любых $x, y\in\Omega$. Последний результат является утверждением о свойстве точек общего положения в X, т. е. точек, заполняющих непустое открытое подмножество; имеется и ряд других утверждений такого типа. Напр., для рационального линейного представления полупростой группы G в векторном пространстве V О. точек общего положения замкнуты тогда и только тогда, когда их стабилизаторы редуктивны (см. [7]); в случае, когда G неприводима, найден явный вид стабилизаторов точек общего положения (см. [8], [9]). Вопрос о замкнутости О. является специфическим и важным в этой теории. Так, множество тех точек $x \in V$, О. к-рых содержит в своем замыкании нуль пространства V, совпадает с многообразием нулей непостоянных инвариантных многочленов на V; во многих случаях, и в частности в применениях теории инвариантов к теории модулей, это многообразие играет существенную роль (см. [10]). Любые две различные замкнутые О. разделяются инвариантными многочленами. Орбита $G(x)$ замкнута тогда и только тогда, когда замкнута О. точки x относительно нормализатора $G(x)$ в G (см. [4]). Появление незамкнутых О. связано со свойствами G; если G унипотентна (а X аффинно), то любая О. замкнута (см. [6]). Одним из направлений теории инвариантов является изучение орбитальных разложений различных конкретных действий (в особенности линейных представлений). Одно из них — присоединенное представление редуктивной группы G — подробно исследовалось (см., напр., [11]). Его изучение связано с теорией представлений группы G; см. *Орбит метод.*

Лит.: [1] Palais R., The classification of G-spaces, Providence, 1960 (Mem. Amer. Math. Soc., № 36); [2] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [3] Luna D., «Bull. Soc. Math. France. Mém. 33», 1973, p. 81—105; [4] его же, «Invent. math.», 1975, v. 29, № 3, p. 231—38; [5] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [6] Steinberg R., Conjugacy classes in algebraic groups, B.— Hdlb.— N. Y., 1974; [7] Попов В. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1970, т. 34, с. 523—31; [8] Попов А. М., «Функц. анализ и его прилож.», 1978, т. 12, № 2, с. 91—92; [9] Элашвили А. Г., там же, 1972, т. 6, № 2, с. 65—78; [10] Mumford D., Geometric invariant theory, B.— Hdlb.— N. Y., 1965; [11] Kostant B., «Amer. J. Math.», 1963, v. 85, № 3, p. 327—404; [12] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980.

В. Л. Попов.

ОРБИТАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ — свойство траектории ξ (решения $x(t)$) *автономной системы* обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (*)$$

состоящее в следующем: для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что всякая положительная полутраектория, начинающаяся в δ-окрестности траектории ξ, содержится в ε-окрестности траектории ξ. Здесь под траекторией понимается множество значений решения $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, системы (*), а под положительной полутраекторией — множество значений решения $x(t)$ при $t \geqslant 0$. Если решение $x(t)$ устойчиво по Ляпунову, то его траектория орбитально устойчива.

Траектория ξ наз. асимптотически орбитально устойчивой, если она орбитально устойчива и, кроме того, найдется $\delta_0 > 0$ такое, что траектория всякого решения $x(t)$ системы (*), начинающегося в δ_0-окрестности траектории ξ (т. е. $d(x(0), \xi) < \delta_0$), стремится при $t \to +\infty$ к траектории ξ, то есть

$$\lim_{t \to +\infty} d(x(t), \xi) = 0,$$

где

$$d(x, \xi) = \inf_{y \in \xi} d(x, y)$$

— расстояние от точки x до множества ξ ($d(x, y)$ — расстояние между точками x и y).

Роль понятия асимптотической орбитальной устойчивости основана на следующих фактах. Периодич. решение системы (*) никогда не бывает асимптотически устойчивым. Но если у периодич. решения такой системы модули всех *мультипликаторов*, кроме одного, меньше единицы, то траектория этого периодич. решения асимптотически орбитально устойчива (Андронова — Витта теорема). Имеет место также более общая теорема Демидовича (см. [3]): пусть $x_0(t)$ — ограниченное решение системы (*), причем

$$\inf_{t \geqslant 0} |x_0(t)| > 0,$$

и пусть система уравнений в вариациях вдоль $x_0(t)$ правильная (см. *Правильная линейная система*), причем все ее *Ляпунова характеристические показатели*, кроме одного, отрицательны; тогда траектория решения $x_0(t)$ асимптотически орбитально устойчива.

Лит.: [1] Андронов А. А., Собр. трудов, М., 1956; [2] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [3] Демидович Б. П., «Дифференц. уравнения», 1968, т. 4, № 4, с. 575—88; № 8, с. 1359—73.

В. М. Миллионщиков.

ОРДИНАЛЬНОЕ ЧИСЛО, ординал,— то же, что *порядковое число*.

ОРДИНАТА — одна из декартовых *координат* точки.

ОРИЕНТАЦИЯ — формализация и далеко идущее обобщение понятия направления обхода. Определяется О. нек-рых специальных классов пространств (*многообразий*, *векторных расслоений*, *Пуанкаре комплексов* и т. д.). Современный взгляд на О. дается в рамках *обобщенных теорий когомологий*.

В классич. случае ориентация — выбор одного класса систем координат, связанных между собой положительно в нек-ром определенном смысле. Каждая система задает О., определяя класс, к к-рому она принадлежит.

В случае векторного пространства $\mathbb{R}^n$ конечной размерности две системы координат связаны положительно, если положителен определитель матрицы перехода от одной из них к другой. Здесь имеется два класса. В комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ комплексный репер $e_1, \ldots, e_n$ определяет действительный репер $e_1, \ldots, e_n$, $ie_1, \ldots, ie_n$ в том же пространстве, рассматриваемом как $\mathbb{R}^{2n}$, и все такие реперы связаны попарно положительными переходами (т. е. комплексная структура задает О. в $\mathbb{R}^{2n}$).

На прямой, плоскости и вообще в действительном аффинном пространстве E^n системы координат состоят из точки (начала 0) и репера e, переход определяется вектором переноса начала и заменой репера. Этот переход положителен, если положителен определитель матрицы замены (напр., при четной перестановке векторов репера). Две системы координат определяют одну и ту же О., если одну из них можно перевести в другую непрерывно, т. е. существует непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$ семейство координатных систем O_t, e_t, связывающее данные системы O_0, e_0 и O_1, e_1. При отражении в плоскости (размерности $n-1$) системы двух классов переходят друг в друга.

Классы систем координат можно задавать различными геометрич. фигурами. Если какая-либо фигура X по определенному закону связывается с системой координат, то зеркально симметричная ей фигура будет по тому же закону связана с системой координат из другого класса. Тем самым X (вместе с данным законом) определит О. Напр., на плоскости E^2 окружность с фиксированным направлением обхода задает системы координат из одного класса по правилу: начало лежит в ее центре, первый вектор берется произвольно, а второй так, чтобы вращение от первого ко второму через меньший угол происходило в направлении, заданном на окружности. В E^3 репер можно связать с винтом с точностью до непрерывного вращения и растяжения пространства: первый вектор идет по направлению ввинчивания, вращение от второго вектора к третьему совпадает с вращением при ввинчивании (предполагается при этом, что все винты находятся в положительной связи друг с другом). Репер может быть также задан тремя первыми пальцами руки хорошо известным способом.

Если в E^n задана О., то каждое полупространство E^n_+ определяет О. на граничной плоскости E^{n-1}. Напр., усл авливаются, что если в репере последние $n-1$ векторов лежат в E^{n-1}, а первый смотрит наружу из E^n_+, то последние векторы задают О. в E^{n-1}. В E^n О. может быть задана порядком вершин n-мерного симплекса (треугольника в E^2, тетраэдра в E^3). Репер определяется условием: в первую вершину помещается начало, в остальные из первой направляются векторы репера. Два порядка задают одну О., если и только если они отличаются на четную перестановку. Симплекс с фиксированным с точностью до четной перестановки порядком вершин наз. ориентированным. Каждая $(n-1)$-грань σ^{n-1} ориентированного симплекса получает индуцированную ориентацию: если первая вершина не принадлежит σ^{n-1}, то порядок остальных принимается за положительный для σ^{n-1}.

В связном многообразии M системой координат служит атлас — набор карт, покрывающих M. Атлас наз. ориентирующим, если координатные преобразования все положительны. Это означает, что их степени равны $+1$, а в случае дифференцируемого многообразия положительны якобианы преобразования во всех точках. Если ориентирующий атлас существует, то многообразие M наз. ориентируемым. В этом случае все ориентирующие атласы распадаются на два класса, так что переход от карт одного атласа к картам другого положителен, если и только если атласы принадлежат одному классу. Выбор такого класса наз. ориентацией многообразия. Этот выбор может быть сделан указанием одной карты или локальной О. в точке x_0 (связные карты, содержащие x_0, естественным образом распадаются на два класса). В случае дифференцируемого многообразия локальную О. можно задать указанием репера в касательной плоскости в точке x_0 (напр., вращение на окружности можно задать указанием одного касательного вектора). Если M имеет край и ориентировано, то край также ориентируем, напр. по правилу: в точке края берется репер, ориентирующий M, первый вектор к-рого направлен из ∂M, а остальные векторы лежат в касательной плоскости края; эти последние и принимаются за ориентирующий репер края.

Вдоль любого пути q: $[0, 1] \to M$ можно выбрать цепочку карт так, что две соседние карты связаны положительно. Тем самым О. в точке $q(0)$ определяет О. в точке $q(1)$, и эта связь зависит от пути q лишь с точностью до его непрерывной деформации при фиксированных концах. Если q — петля, т. е. $q(0)=q(1)=x_0$, то q наз. дезориентирующим путем, если эти О. противоположны. Возникает гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(M, x_0)$ в группу порядка 2: дезориентирующие петли переходят в -1, а остальные в $+1$. По этому гомоморфизму строится накрытие, являющееся двулистным в случае неориентируемого многообразия. Оно наз. ориентирующим (т. к. накрывающее пространство будет ориентируемым). Этот же гомоморфизм определяет над M одномерное расслоение, тривиальное, если и только если M ориентируемо. Для дифференцируемого M оно может быть определено как расслоение $\Lambda^n(M)$ дифференциальных форм порядка n. Ненулевое сечение в нем существует лишь в ориентируемом случае и задает форму объема на M и одновременно О. Классифицирующим отображением этого расслоения служит отображение k: $M \to \mathbb{R}P^n$. Многообразие M ориентируемо, если и только если не равен нулю класс $\mu \in H^{n-1}(M, \mathbb{Z})$, служащий образом класса двойственного к $\mathbb{R}P^{n-1}\subset\mathbb{R}P^n$. Он двойствен циклу, носителем к-рого служит многообразие, являющееся прообразом $\mathbb{R}P^{n-1}$ при отображении k, приведенным в *общее положение*. Этот цикл наз. ориентирующим, т. к. дополнение к нему ориентируемо: если по нему M разрезать, то получится ориентируемое многообразие. Само M ориентируемо (неориентируемо), если и только если после разреза получится несвязное многообразие (это дополнение связно). Напр., в $\mathbb{R}P^2$ ориентирующим циклом служит проективная прямая $\mathbb{R}P^1$.

Триангулированное многообразие M (или псевдомногообразие) ориентируемо, если можно ориентировать все n-мерные симплексы так, что два симплекса с общей $(n-1)$-мерной гранью индуцируют на ней противоположные О. Замкнутая цепочка n-мерных симплексов, каждые два соседа в к-рой имеют общую $(n-1)$-грань, наз. дезориентирующей, если эти симплексы могут быть ориентированы так, что первый и последний симплексы индуцируют на общей грани совпадающие О., а остальные соседи — противоположные.

О. может быть определена на гомологич. языке: для связного ориентируемого многообразия без края *гомологий группа* $H_n(M;\ \mathbb{Z})$ (с замкнутыми носителями) изоморфна $\mathbb{Z}$, и выбор одной из двух образующих задает О.— отбираются карты с положительными степенями отображений. Для связного многообразия с краем то же верно и для $H_n(M,\ \partial M;\ \mathbb{Z})$. В первом случае ориентируемость есть гомотопич. инвариант M, а во втором — пары $(M,\ \partial M)$. Так, лист Мёбиуса и кольцо имеют один и тот же абсолютный гомотопич. тип, но разный — относительно края. Локальная О. многообразия может быть также задана выбором образующей в группе $H_n(M,\ M\setminus x_0;\ \mathbb{Z})$, изоморфной $\mathbb{Z}$. Гомологич. интерпретация О. позволяет перенести это понятие на обобщенные *гомологические многообразия*.

Пусть над пространством X задано расслоение p: $E\to X$ со стандартным слоем F^n. Если О. всех слоев можно выбрать так, что любое (собственное) отображение $p^{-1}(\gamma(0))\to p^{-1}(\gamma(1))$, определенное путем γ: $(0,1)\to X$ однозначно с точностью до собственной гомотопии, сохраняет О., то расслоение наз. ориентированным, а указанный выбор О. слоев — ориентацией расслоения. Напр., лист Мёбиуса, рассматриваемый как векторное расслоение над окружностью, не обладает О., в то время как боковая поверхность цилиндра — обладает.

Понятие О. допускает естественное обобщение и для случая бесконечномерного многообразия, моделированного при помощи бесконечномерного банахова или топологического векторного пространства. При этом необходимы ограничения на линейные операторы, являющиеся дифференциалами функций перехода от карты к карте: они должны не просто принадлежать общей линейной группе всех изоморфизмов моделирующего пространства, к-рая гомотопически тривиальна (в равномерной топологии) для большинства классических векторных пространств, а содержаться в нек-рой линейно несвязной подгруппе общей линейной группы. Тогда компонента связности данной подгруппы и будет задавать «знак» О. В качестве такой подгруппы обычно выбирается фредгольмова группа, состоящая из тех изоморфизмов моделирующего пространства, для к-рых разность с тождественным изоморфизмом есть вполне непрерывный оператор.

Ориентация в обобщенных теориях когомологий. Пусть E^* — мультипликативная обобщенная теория когомологий (ниже — просто теория). Имеется единица $1\in\tilde{E}^0(S^0)$, и при изоморфизме надстройки $\tilde{E}^0(S^0)\approx\tilde{E}^n(S^n)$ ей отвечает элемент $\gamma_n\in\tilde{E}^n(S^n)$, где S^n есть n-мерная сфера.

Пусть ξ есть n-мерное векторное расслоение над линейно связным пространством X и пусть $T\xi$ — *Тома пространство* расслоения ξ. Пусть i: $S^n \to T\xi$ — стандартное вложение, т. е. гомеоморфизм на «слой» над нек-рой точкой $x_0 \in X$. Элемент $u \in \tilde{E}^n(T\xi)$ наз. ориентацией или *Тома классом* расслоения ξ, если $i^*(u) = \varepsilon\gamma_n$, где $\varepsilon \in \tilde{E}^0(S^0)$ — некоторый обратимый элемент (напр., $\varepsilon = 1$). Расслоение, обладающее О., наз. ориентируемым в теории E^*, или просто E-ориентируемым, а расслоение с выбранной E-ориентацией наз. E-ориентированным. Изоморфизм Тома $\tilde{E}^*(T\xi) \approx E^*(X)$ (см. [6]). Множество О. данного E-ориентированного расслоения ξ над X находится во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $\tilde{E}^0(X) \oplus (\tilde{E}^0(S^0))^*$, где $(\ )^*$ — группа обратимых элементов кольца $(\ )$.

Тривиальное n-мерное расслоение θ^n обладает О. в любой теории E^n, и если два из трех расслоений ξ, η, $\xi \oplus \eta$ E-ориентируемы, то E-ориентируемо и третье (см. [7]). В частности, E-ориентируемость расслоения ξ влечет E-ориентируемость расслоения $\xi \oplus \theta^n$.

Понятие E-ориентируемости вводится и для любого расслоения в смысле Гуревича p: $E \to B$, слой к-рого гомотопически эквивалентен сфере. Пространством Тома такого расслоения наз. конус отображения p; в остальном определение аналогично. Определение О. векторного расслоения ξ сводится к этому, если в качестве E взять расслоение на единичные (в нек-рой римановой метрике на ξ) сферы, ассоциированное с ξ. E-ориентируемость есть инвариант стационарного послойного гомотопического типа векторного (сферического) расслоения. Расслоение, ориентируемое в одной теории, не обязано быть ориентируемым в другой, но при наличии кольцевого гомоморфизма теорий $E^* \to F^*$ из E-ориентируемости следует F-ориентируемость.

Примеры. 1) В теории $H^*(-;\ \mathbb{Z}_2)$ ориентируемо любое векторное (сферическое) расслоение. 2) В теории $H^*(-;\ \mathbb{Z})$ ориентируемы в точности те расслоения ξ, для к-рых характеристич. класс Штифеля $w_1(\xi) = 0$, т. е. ориентируемы те расслоения, к-рые ориентируемы в классич. смысле. 3) Ориентируемость векторного расслоения ξ в вещественной *K-теории* эквивалентна тому, что $w_1(\xi) = w_2(\xi) = 0$, а в комплексной K-теории — тому, что $w_1(\xi) = 0$ и $w_2(\xi)$ — целочисленный элемент [8]. При этом для K-ориентируемости сферич. расслоений это условие необходимо, но не достаточно. 4) Ориентируемость в теории унитарных кобордизмов U^* не охарактеризована (1983); комплексные расслоения U-ориентируемы, но это явно не необходимо. 5) В теории Π^* стабильных когомотопич. групп ориентируемы лишь расслоения тривиального стационарного послойного гомотопич. типа.

В задаче описания класса расслоений, ориентируемых в данной теории, имеется следующий общий результат. Пусть топологич. группа G действует на $\mathbb{R}^n$ и пусть E^* — нек-рая теория. Существует (см. [7], где дана явная конструкция) пространство $B(G, E)$ с универсальным E-ориентированным расслоением над ним, классифицирующее E-ориентированные векторные расслоения со структурной группой G, т. е. для любого (линейно связного) пространства X множество E-ориентированных G-векторных расслоений над X находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством $[X,\ B(G,\ E)]$ гомотопич. классов отображений $X \to B(G, E)$. Это же верно для сферич. расслоений и «хороших» моноидов G.

Обратная задача состоит в описании теории, где данное расслоение (или данный класс расслоений) ориентируемо. Известно, что если в теории E^* ориентируемы все векторные расслоения, то

$$E^*(X) \approx H^*(X; \tilde{E}(S^0)),$$

причем $2E^*(S^0)=0$. В этом контексте иногда ослабляют условия на теорию E^*, напр. снимают условие коммутативности умножения и т. д. Для любой теории E^*, в к-рой все комплексные расслоения ориентируемы, имеется гомоморфизм теории $U^* \to E^*$, где U^* — теория унитарных кобордизмов, и этот гомоморфизм полностью задается E-ориентацией канонич. расслоения η над $\mathbb{C}P^\infty$. Аналогичное верно и для S_p-расслоений (см. *Кобордизм*). Построение для любого класса векторных расслоений универсальной теории, отображающейся в любую теорию, где ориентируем данный класс расслоений, еще (1983) не проведено.

Ориентацией (другое название — фундаментальный класс) замкнутого n-мерного многообразия (или, более общо, комплекса Пуанкаре формальной размерности n) в теории E^* наз. такой элемент $z \in E_n(M)$, что гомоморфизм $E^i(M) \to E_{n-i}(M)$ вида $x \to z \cap x$ (см. [9]) есть изоморфизм; это — т. н. изоморфизм двойственности Пуанкаре. Оказывается, что многообразие (комплекс Пуанкаре) E-ориентируемо тогда и только тогда, когда E-ориентируемо его нормальное расслоение. Определяется О. и для многообразий (комплексов Пуанкаре) с краем.

Лит.: [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, М., 1979; [2] Введение в топологию, М., 1980; [3] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [4] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [5] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [6] Дольд А., «Математика», 1965, т. 9, № 2, с. 8—14; [7] May J., E_∞ ring spaces and E_∞ ring spectra, B.— N. Y., 1977; [8] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [9] Уайтхед Дж., Новейшие достижения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1974.

Ю. В. Рудяк, А. В. Чернавский.

ОРИСФЕРА — поверхность пространства Лобачевского, ортогональная к прямым, параллельным в некотором направлении. О. можно рассматривать как сферу с бесконечно удаленным центром. На О. реализуется евклидова геометрия, если под прямыми понимать *орициклы*, порядок точек определить через порядок прямых в пучке параллелей, определяющих орицикл, а движением называть такие движения в пространстве Лобачевского, к-рые переводят О. в себя.

А. Б. Иванов.

ОРИЦИКЛ, предельная линия,— ортогональная траектория параллельных в нек-ром направлении прямых плоскости Лобачевского. О. можно рассматривать как окружность с бесконечно удаленным центром. О., порожденные одним пучком параллельных прямых, конгруэнтны, концентричны (т. е. высекают на прямых пучка конгруэнтные отрезки), незамкнуты и вогнуты в сторону параллельности прямых пучка. Кривизна О. постоянна. В модели Пуанкаре О.— окружность, касающаяся изнутри абсолюта.

Прямая и О. либо не имеют общих точек, либо касаются, либо пересекаются в двух точках под равными углами, либо пересекаются в одной точке под прямым углом.

Через две точки плоскости Лобачевского проходят два и только два О.

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1—2, М.— Л., 1949—56; [2] Норден А. П., Элементарное введение в геометрию Лобачевского, М., 1953; [3] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978.

А. Б. Иванов.

ОРИЦИКЛИЧЕСКИЙ ПОТОК — поток в пространстве биэдров такого n-мерного риманова многообразия M^n (обычно замкнутого), для к-рого определено понятие орицикла; О. п. описывает движение биэдров вдоль определяемых ими орициклов.

Основные случаи, когда определено понятие орицикла,— те, когда кривизна римановой метрики отрицательна и либо $n=2$, либо кривизна постоянна. Б и э д р у, т. е. ортонормированному 2-реперу (x, e_1, e_2) $(x \in M^n$; e_1, e_2 — взаимно ортогональные единичные касательные векторы в точке $x)$, сопоставляется орицикл $h(x, e_1, e_2)$, к-рый проходит через x в направлении e_2 и расположен на проходящей через x орисфере $H(x, e_1)$, являющейся $(n-1)$-мерным ортогональным многообразием семейства геодезич. линий, асимптотических (в положительном направлении) к геодезич. линии, проходящей через x в направлении e_1. Направление на h, определяемое e_2, принимается за положительное (при $n=2$ роль e_2 только к этому и сводится; H и h могут иметь самопересечения; простейший способ избежать могущих возникнуть из-за этого неясностей состоит в том, чтобы выполнить аналогичные построения не в M^n, а в его универсальном накрывающем многообразии — при постоянной кривизне это обычное n-мерное пространство Лобачевского — и спроектировать полученный там орицикл в M^n). Под действием О. п. биэдр (x, e_1, e_2) за время t переходит в

$$(x(t),\ e_1(t),\ e_2(t)),$$

где $x(t)$ с изменением t движется с единичной скоростью по $h(x, e_1, e_2)$ в положительном направлении, единичный вектор $e_1(t)$ ортогонален $H(x, e_1)$ в точке $x(t)$ (выбор одного из двух возможных направлений для $e_1(t)$ производится по непрерывности) и $e_2(t)=dx(t)/dt$.

Изучение О. п. было начато в связи с тем, что он играл важную роль при исследовании *геодезических потоков* на многообразиях отрицательной кривизны [1]. Позднее эта роль перешла к нек-рым *слоениям*, возникающим в теории *У-систем*, а О. п. стал самостоятельным объектом исследования. Свойства О. п. хорошо изучены (см. [2]—[7], [11]). О нек-рых обобщениях см. в [8] — [10].

Лит.: [1] Хопф Э., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 2, с. 129—70; [2] Парасюк О. С., там же, 1953, т. 8, в. 3, с. 125—26; [3] Гуревич Б. М., «Докл. АН СССР», 1961, т. 136, № 4, с. 768—70; [4] Furstenberg H., в кн.: Recent advances in topological dynamics, B.— [u. a.], 1973, p. 95—115; [5] Marcus B., «Israel J. Math.», 1975, v. 21, № 2—3, p. 133—44; [6] его же, «Ann. Math.», 1977, v. 105, № 1, p. 81—105; [7] его же, «Invent. math.», 1978, v. 46, № 3, p. 201—09; [8] Green L. W., «Duke math. J.», 1974, v. 41, № 1, p. 115—26; [9] Bowen R., «Israel J. Math.», 1976, v. 23, № 3—4, p. 267—73; [10] Bowen R., Marcus B., там же, 1977, v. 26, № 1, p. 43—67; [11] Ratner M., «Ann. Math.», 1982, v. 115, №3, p. 597—614.

Д. В. Аносов.

ОРЛИЧА КЛАСС — множество функций L_M, удовлетворяющее условию

$$\int_G M(x(t))\,dt < \infty,$$

где G — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, dt — мера Лебега, $M(u)$ — четная выпуклая функция, возрастающая при положительных u, и

$$\lim_{u \to 0} u^{-1}M(u) = \lim_{u \to \infty} u\,[M(u)]^{-1} = 0.$$

Такие функции наз. N-ф у н к ц и я м и. Функция $M(u)$ допускает представление

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(v)\,dv,$$

где $p(v)=M'(v)$ не убывает на полуоси,

$$p(0) = \lim_{v \to 0} p(v) = 0,$$

$p(0)>0$ при $v>0$. Функции $M(u)$ и

$$N(u) = \int_0^{|u|} p^{-1}(v)\,dv,$$

где $p^{-1}(v)$ — обратная к $p(v)$ функция, наз. д о п о л н и т е л ь н ы м и ф у н к ц и я м и. Напр., если

$M(u)=u^{p'}/p'$, $1<p<\infty$, то $N(u)=u^{p'}/p'$, где $1/p+1/p'=1$. Для пары дополнительных функций справедливо неравенство Юнга:

$$ab \leqslant M(a)+N(b).$$

Функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если существуют такие C и u_0, что $M(2u)\leqslant CM(u)$ для всех $u \geqslant u_0$. О. к. линеен тогда и только тогда, когда $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию. Из *Иенсена неравенства* вытекает выпуклость L_M.

Пусть $M_1(u)$ и $M_2(u)$ — две N-функции. Для того чтобы $L_{M_1}\subset L_{M_2}$, необходимо и достаточно, чтобы $M_2(u)\leqslant CM_1(u)$ для нек-рого C и достаточно больших u.

О. к. рассмотрены В. Орличем и З. Бирнбаумом [1].

Лит.: [1] Birnbaum Z., Orlicz W., «Studia math.», 1931, v. 3, p. 1—67; [2] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958. *Е. М. Семенов.*

ОРЛИЧА ПРОСТРАНСТВО — банахово пространство измеримых функций; введено В. Орличем [1]. Пусть $M(u)$ и $N(u)$ — пара дополнительных N-функций (см. *Орлича класс*) и G — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Пространством Орлича L_M^* наз. множество измеримых относительно меры Лебега функций на G, на к-рых

$$\|x\|_M=\sup\left\{\int_G x(t)\,y(t)\,dt : \int_G N(y(t))\,dt\leqslant 1\right\}<\infty.$$

О. п. — полное нормированное пространство относительно нормы $\|x\|_M$, к-рая наз. нормой Орлича. Когда $M(u)=u^p$, $1<p<\infty$, то L_M^* совпадает с *Рисса пространством* L_p и с точностью до скалярного множителя $\|x\|_M$ совпадает с $\|x\|_{L_p}$.

Если $M_1(u)$ и $M_2(u)$ суть N-функции, то вложение $L_{M_1}^*\subset L_{M_2}^*$ имеет место тогда и только тогда, когда для нек-рого C и всех достаточно больших u выполнено неравенство $M_2(u)\leqslant M_1(Cu)$. Для любого О. п. L_M^* справедливы вложения $L_\infty\subset L_M^*\subset L_1$. Всякая суммируемая функция принадлежит нек-рому О. п.

Пространство L_M^* сепарабельно тогда и только тогда, когда $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию. В общем случае L_∞ не плотно в L_M^* и замыкание L_∞ в L_M^* обозначается через E_M, оно всегда сепарабельно. Если $x\in L_M^*$, то

$$\lim_{\tau\to 0}\ \sup_{\operatorname{mes} E=\tau}\|x\chi_E\|_M=\rho(x, E_M),$$

где

$$\chi_E(t)=\begin{cases}1, & t\in E,\\ 0, & t\notin E.\end{cases}$$

Если $M(u)$ и $N(u)$ — дополнительные N-функции и $x\in L_M^*$, $y\in L_N^*$, то справедлив аналог *Гёльдера неравенства*

$$\int_G x(t)\,y(t)\leqslant\|x\|_{(M)}\|y\|_{(N)},$$

где $\|x\|_{(M)}$ — *Люксембурга норма*. Всякий непрерывный линейный функционал f на E_M представим в виде

$$f(x)=\int_G x(t)\,y(t)\,dt,$$

где $y\in L_N$ и $\|f\|=\|y\|_{(N)}$.

Критерии компактности М. Рисса (M. Riesz) и А. Н. Колмогорова для пространств L_p переносятся на E_M. Следующие условия эквивалентны: 1) пространство L_M^* рефлексивно; 2) $M(u)$ и $N(u)$ удовлетворяют Δ_2-условию; 3) в L_M^* существует безусловный *базис*; 4) *Хаара система* образует безусловный базис в L_M^*; 5) тригонометрич. система — базис в L_M^*. Система Хаара — базис в E_M.

Аналогичным образом определяется пространство последовательностей l_M^*, однако свойства пространства l_M^* зависят от асимптотики функции $M(u)$ в 0. Изучены [5] многие геометрич. свойства пространств L_M^* и l_M^*; напр., для любой функции $M(u)$ находится множество всех таких p, что l_p изоморфно вкладывается в L_M^*.

О. п. применяются при изучении свойств интегральных операторов, в теории дифференцируемых функций многих переменных и в других разделах анализа.

Лит.: [1] Orlicz W., «Bull. intern. Acad. Pol. Sér. A», 1933 (année 1932), p. 207—20; [2] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958; [3] Гапошкин В. Ф., «Функц. анализ и его прилож.», 1967, т. 1, № 4, с. 26—32; [4] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., Интерполяция линейных операторов, М., 1978; [5] Lindenstrauss J., Tzafriri L., Classical Banach Spaces, v. 1—2, B.— Hdlb.— N. Y., 1977—79.

Е. М. Семенов.

ОРНСТЕЙНА — ЧЕКОНА ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА: пусть (W, μ) — пространство с σ-конечной мерой и T — линейный положительный оператор в $L_1(W, \mu)$, причем L_1-норма $\|T\| \leqslant 1$; если $f, g \in L_1(W, \mu)$ и $g \geqslant 0$ почти всюду, то предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} T^k f(w)}{\sum_{k=0}^{n} T^k g(w)}$$

существует почти всюду на том множестве, где знаменатель при достаточно больших n отличен от нуля, т. е. где хоть одно из чисел $T^k g(w) > 0$.

Эта теорема сформулирована и доказана Д. Орнстейном и Р. Чеконом [1] (см. также [2], [3]); позднее был получен ее аналог для непрерывного времени (см. [4]).

Непосредственными следствиями О.—Ч. э. т. являются *Биркгофа эргодическая теорема* и нек-рые из ранее предложенных обобщений последней, но имеется также ряд эргодич. теорем, независимых от О.—Ч. э. т., а сама она подвергалась различным обобщениям (см. [5], [6], а также лит. при ст. *Операторная эргодическая теорема*). Вместе с тем из всех обобщений теоремы Биркгофа, по-видимому, чаще всего используется О.—Ч. э. т.

В иностранной литературе О.—Ч. э. т., как и вообще теоремы, в к-рых речь идет о пределе отношения двух временных средних, наз. ratio ergodic theorem.

Лит.: [1] Chacon R. V., Ornstein D. S., «Ill. J. Math.», 1960, v. 4, № 2, p. 153—60; [2] Хопф Э., «Математика», 1962, т. 6, № 3, с. 29—36; [3] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [4] Akcoglu M. A., Cunsolo J., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 24, № 1, p. 161—70; [5] Chacon R. V., в кн.: Ergodic theory. Proceedings of an International Symposium. New Orleans, 1961, N. Y.— L., 1963, p. 89—120; [6] Terrell T. R., «Boll. Unione mat. ital.», 1972, v. 6, № 2, p. 175—80. *Д. В. Аносов.*

ОРНШТЕЙНА — УЛЕНБЕКА ПРОЦЕСС — гауссовский стационарный случайный процесс $V(t)$ с нулевым математич. ожиданием и экспоненциально затухающей корреляционной функцией вида

$$\mathsf{E} V(t)\, V(t+\tau) = B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|), \quad \alpha > 0.$$

О.—У. п. может быть также определен как стационарное решение стохастич. уравнения (уравнения Ланжевена) вида

$$m\,dV(t) + \beta V(t)\,dt = dW(t), \qquad (*)$$

где $W(t)$ — *винеровский процесс* (так что $dW(t)/dt = W'(t)$ — обобщенный случайный процесс белого шума), а m и β — положительные постоянные, причем $\beta/m = \alpha$.

Уравнение (*) приближенно описывает одномерное броуновское движение свободной частицы; при этом $V(t)$ интерпретируется как скорость частицы, m — ее масса, $-\beta V(t)$ — пропорциональная скорости сила «вязкого трения» (для сферич. частицы радиуса a коэффициент β равен $6\pi\eta a$, где η — коэффициент вязкости, в силу гидродинамич. формулы Стокса), а белый шум $W'(t)$ — это «случайная сила», порожденная хаотич. толчками молекул среды, находящихся в тепловом движении, и являющаяся основной причиной броуновского движения. В первоначальной теории броуновского движения, развитой А. Эйнштейном (A. Einstein) и М. Смолуховским (M. Smoluchowski) в 1905—06, пренебрегалось инерцией частицы, т. е. считалось, что $m=0$; при этом уравнение (*) приводило к выводу, что координата броуновской частицы

$$X(t)=\int_0^t V(t')\,dt'$$

равна $\beta^{-1}W(t)$, т. е. представляет собой винеровский процесс. Таким образом, винеровский процесс описывает модель Эйнштейна — Смолуховского броуновского движения (отсюда другое его название — процесс броуновского движения); т. к. этот процесс недифференцируем, то в теории Эйнштейна — Смолуховского частица, совершающая броуновское движение, не имеет конечной скорости. Уточненная теория броуновского движения, опирающаяся на уравнение (*), где $m\neq 0$, была предложена Л. Орнштейном и Дж. Уленбеком ([1]; см. также [2]); позже та же теория была выдвинута С. Н. Бернштейном [3] и А. Н. Колмогоровым [4]. В теории Орнштейна — Уленбека скорость $V(t)$ броуновской частицы является конечной, но ее ускорение бесконечно (так как О.— У. п. недифференцируем); для того чтобы и ускорение оказалось конечным, надо уточнить теорию, учтя отличие случайной силы от идеализированного белого шума $W'(t)$.

Уравнение (*) можно использовать и для описания одномерного броуновского движения гармонич. осциллятора, если пренебречь его массой и считать, что $V(t)$ — это координата осциллятора, $-\frac{mdV}{dt}$ — сила вязкого трения, $-\beta V$ — регулярная упругая сила, удерживающая осциллятор, а $W'(t)$ — случайная сила, создаваемая молекулярными толчками. Таким образом, О.— У. п. доставляет также модель пульсаций координаты гармонич. осциллятора, совершающего броуновское движение, родственную модели Эйнштейна — Смолуховского броуновского движения свободной частицы.

О.— У. п. является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа (см. *Диффузионный процесс*); наоборот, процесс $V(t)$, являющийся одновременно стационарным случайным процессом, гауссовским процессом и марковским процессом, обязательно представляет собой О.— У. п. Как марковский процесс О.— У. п. удобно характеризовать его переходной плотностью вероятности $p(t, x, y)$, представляющей собой фундаментальное решение соответствующего уравнения Фоккера — Планка (т. е. прямого *Колмогорова уравнения*) вида

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\alpha\frac{\partial (yp)}{\partial y}+\alpha\sigma^2\frac{\partial^2 p}{\partial y^2},$$

и, следовательно, задаваемой формулой

$$p(t,\ x,\ y)=\frac{1}{[2\pi\sigma^2(1-e^{-2\alpha t})]^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{(y-xe^{-\alpha t})^2}{2\sigma^2\,(1-e^{-2\alpha t})}\right\}.$$

Многие свойства О.— У. п. $V(t)$ (включая и его марковость) можно вывести из известных свойств винеровского процесса, воспользовавшись тем, что процесс

$$W_0(t)=\frac{\sqrt{t}}{\sigma}V\left(\frac{\ln t}{2\alpha}\right)$$

является стандартным винеровским процессом (см. [5]). В частности, отсюда следует, что реализации О.— У. п.

непрерывны и нигде не дифференцируемы с вероятностью 1 и что

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\ \frac{|V(t)-V(0)|}{\sqrt{4\alpha\sigma^2 t\ln\ln\frac{1}{t}}}=1,\quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{|V(t)|}{\sqrt{2\sigma^2\ln t}}=1$$

с вероятностью 1.

Лит.: [1] Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S., «Phys. Rev.», 1930, v. 36, p. 823—41; [2] Чандрасекар С., Стохастические проблемы в физике и астрономии, пер. с англ., М., 1947; [3] Бернштейн С. Н., «Докл. АН СССР», 1934, т. 1, № 1, с. 1—9; № 7, с. 361—65; [4] Kolmogorov A. N., «Ann. Math.», 1934, v. 35, p. 116—17; [5] Doob J. L., «Ann. Math.», 1942, v. 43, p. 351—69. *А. М. Яглом.*

ОРРА — ЗОММЕРФЕЛЬДА УРАВНЕНИЕ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\varphi^{(4)}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi=i\alpha R\,[(w-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-w''\varphi],\qquad(1)$$

где R — число Рейнольдса, $w(y)$ — заданная функция (профиль скорости невозмущенного потока), к-рая обычно предполагается голоморфной в окрестности отрезка $[-1,\ 1]$ в комплексной плоскости y, $\alpha>0$ — постоянная и c — спектральный параметр. Для О.— З. у. исследуется краевая задача

$$\varphi(-1)=\varphi'(-1)=\varphi(1)=\varphi'(1)=0.\qquad(2)$$

О.— З. у. возникло при исследовании У. Орром [1] и А. Зоммерфельдом [2] устойчивости в линейном приближении плоского течения Пуазёйля — течения вязкой несжимаемой жидкости в слое $-\infty<x<\infty$, $-1<y<1$ с твердыми границами; возмущение для функции тока берется в виде $\varphi(y)e^{i\alpha(x-ct)}$.

Собственные значения задачи (1), (2), вообще говоря, комплексны; течение устойчиво, если $\operatorname{Im}c<0$ для всех собственных значений, и неустойчиво, если $\operatorname{Im}c>0$ для нек-рого из них. Кривая $\operatorname{Im}c(\alpha, R)=0$ наз. *нейтральной кривой.* Течение Пуазёйля устойчиво при небольших числах Рейнольдса. В. Гейзенберг [6] впервые высказал предположение, что течение Пуазёйля неустойчиво при больших числах Рейнольдса, и вычислил 4 точки нейтральной кривой. Для квадратичного профиля скорости установлено, что течение неустойчиво при $\alpha R\gg 1$.

Асимптотич. теория О.— З. у. построена в предположении, что $(\alpha R)^{-1}\to 0$ — малый параметр. Точка y_c, в к-рой $w(y_c)=0$, является точкой поворота (см. *Малого параметра метод*). В малой окрестности точки $y\neq y_c$ О.— З. у. имеет фундаментальную систему решений вида

$$\varphi_{1,2}(y)=\varphi^0_{1,2}(y)+O((\alpha R)^{-1}),$$

$$\varphi_{3,4}(y)=\exp\left[\pm\int^y\sqrt{i(w-c)}\,dy\right]\times$$

$$\times\left[(w-c)^{-5/4}+O\left((\alpha R)^{-1/2}\right)\right],$$

где $\varphi^0_1(y)$, $\varphi^0_2(y)$ — фундаментальная система решений невязкого (то есть $\alpha R=0$) уравнения

$$(w-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-w''\varphi=0.$$

Исследование задач (1), (2) связано, напр., со следующими трудностями: 1) невязкое уравнение в окрестности точки $y=y_c$ имеет голоморфное в ней решение и решение с логарифмич. особенностью; 2) при малых $|c|$ (т. е. в наиболее важном случае) точки поворота сливаются с концами отрезка $[-1,\ 1]$ (напр., для квадратичного профиля скорости $w=1-y^2$).

При $\alpha R\gg 1$ получено строгое обоснование неустойчивости (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Orr W. Mc F., «Proc. R. Irish. Acad. A», 1907, v. 27, p. 9—68, 69—138; [2] Sommerfeld A., в кн.: Atti del IV Congresso internazionale dei matematici (Roma, 1908), 1909, p. 116—24; [3] Линь Цзя-Цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, пер. с англ., М., 1958; [4] Гидродинамическая неустойчивость. Сборник, пер. с англ., М., 1964; [5] Gersting J. M., Janowski D. F., «Internat. J. Num. Meth. in Eng.», 1972, v. 4, p. 195—206; [6] Heisenberg W., «Ann. Phys.», 1924, Bd 74, № 15, S. 577—627. *М. В. Федорюк.*

ОРТ, единичный вектор,— вектор, длина к-рого равна единице выбранного масштаба.

ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ МЕТОД — метод решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax=b$ с невырожденной матрицей A, основанный на процессе Грама—Шмидта *ортогонализации* системы векторов.

Если

$$A=\|a_{ij}\|;\quad x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)^\top;$$
$$b=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)^\top;$$
$$a_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{in},\ -b_i),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$
$$y=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ 1)^\top,$$

то исходная система уравнений может быть записана в виде

$$(a_i,y)=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Это значит, что решение системы равносильно нахождению вектора y, имеющего единичную последнюю компоненту и ортогонального ко всем векторам a_i, $i=1$, $2, \ldots, n$. Для этого к системе векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a_{n+1}, где $a_{n+1}=(0, 0, \ldots, 1)$, линейно независимой в силу невырожденности матрицы A, применяется процесс ортогонализации, состоящий в построении ортонормированной относительно скалярного произведения $(x, y)=x^\top y$ системы векторов $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ по рекуррентным соотношениям

$$\left.\begin{array}{c} v_1=a_1,\quad q_1=v_1/\sqrt{(v_1,\ v_1)},\\ v_k=a_k+\sum_{i=1}^{k-1} c_iq_i,\ c_i=-(a_k,\ q_i),\\ q_k=v_k/\sqrt{(v_k,\ v_k)}. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Коэффициенты c_i здесь находятся из условия ортогональности v_k векторам $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{k-1}$. Векторы a_1, $a_2, \ldots, a_n$ линейно выражаются через $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$, поэтому вектор $q_{n+1}=(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n+1})$ ортогонален ко всем векторам $a_1, a_2, \ldots, a_n$. При этом невырожденность матрицы A обеспечивает выполнение $z_{n+1}\neq 0$. Таким образом,

$$(z_1/z_{n+1},\ z_2/z_{n+1},\ \ldots,\ z_n/z_{n+1})$$

— искомое решение системы.

Описанная схема О. м. хорошо вписывается в общую схему прямых методов решения системы: соотношения (*) равносильны преобразованию матрицы системы в матрицу $L_nL_{n-1}\ldots L_1A$, где

$$L_k=\left\|\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ C_1 & C_2 & \ldots & C_k & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right\|,$$

и тем самым осуществляют факторизацию матрицы системы в виде $A=LQ$, где L — треугольная, Q — унитарная матрицы.

Процесс факторизации матрицы A по О. м. устойчив к ошибкам округления. Если в (*) при выполнении операции скалярного произведения векторов использовать процедуру накопления с удвоенной точностью, то для факторизации матрицы по О. м. имеет место одна из лучших оценок точности в классе прямых методов. При этом, однако, свойство ортогональности векторов $q_1, q_2, \ldots, q_n$, то есть унитарности матрицы Q, неустойчиво по отношению к ошибкам округления. Поэтому решение системы, полученное из рекуррентных соотношений (*), может иметь большую погрешность. Для устранения этого недостатка используются различные методы переортогонализации (см. [1], [2]).

О. м. уступает многим прямым методам по быстродействию.

Лит.: [1] Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *Г. Д. Ким.*

ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ, процесс ортогонализации,— алгоритм построения для данной линейно независимой системы векторов евклидова или эрмитова пространства V ортогональной системы ненулевых векторов, порождающих то же самое подпространство в V. Наиболее известным является процесс ортогонализации Шмидта (или Грама — Шмидта), при к-ром по линейно независимой системе $a_1, \ldots, a_k$ строится ортогональная система $b_1, \ldots, b_k$ такая, что каждый вектор b_i ($i=1, \ldots, k$) линейно выражается через $a_1, \ldots, a_i$, то есть $b_i = \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} a_j$, где $C = \|\gamma_{ij}\|$ — верхняя треугольная матрица. При этом можно добиться того, чтобы система $\{b_i\}$ была ортонормированной и чтобы диагональные элементы γ_{ii} матрицы C были положительны; этими условиями система $\{b_i\}$ и матрица C определяются однозначно.

Процесс Грама—Шмидта состоит в следующем. Полагают $b_1 = a_1$; если уже построены векторы $b_1, \ldots, b_i$, то

$$b_{i+1} = a_{i+1} + \sum_{j=1}^{i} \alpha_i b_j,$$

где

$$\alpha_j = -\frac{(a_{i+1}, b_j)}{(b_j, b_j)},$$

$j=1, \ldots, i$, найдены из условия ортогональности вектора b_{i+1} к $b_1, \ldots, b_i$. Геометрич. смысл описанного процесса состоит в том, что на каждом шагу вектор b_{i+1} является перпендикуляром, восстановленным к линейной оболочке векторов $a_1, \ldots, a_i$ до конца вектора a_{i+1}. Произведение длин $|b_1| \ldots |b_k|$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах системы $\{a_i\}$, как на ребрах. Нормируя полученные векторы b_i, получают искомую ортонормированную систему. Явное выражение векторов b_i через $a_1, \ldots, a_k$ дает формула

$$b_i = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \ldots & (a_1, a_{i-1}) & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_i, a_1) & \ldots & (a_i, a_{i-1}) & a_i \end{vmatrix}$$

(определитель в правой части следует формально разложить по последнему столбцу). Соответствующая ортонормированная система имеет вид

$$q_i = \frac{b_i}{\sqrt{\Gamma_{i-1}\Gamma_i}},$$

где Γ_i — *Грама определитель* системы $a_1, \ldots, a_i$. Этот процесс применим также и к счетной системе векторов.

Процесс Грама—Шмидта может быть истолкован как разложение невырожденной квадратной матрицы в произведение ортогональной (или унитарной матрицы в случае эрмитова пространства) и верхней треугольной матрицы с положительными диагональными элементами, что есть частный случай *Ивасавы разложения*.

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966; [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. *И. В. Проскуряков.*

ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ — построение для заданной системы функций $\{f_n(x)\}$, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a, b]$ функций ортогональной системы $\{\varphi_n(x)\}$ путем применения нек-рого процесса *ортогонализации* или же путем продолжения функций $f_n(x)$ на более длинный интервал $[c, d]$, $c < a < b < d$.

Применение процесса ортогонализации Шмидта к полным системам $\{f_n(x)\}$ всегда приводит к полным ортонормированным системам $\{\varphi_n(x)\}$ и при соответствующем выборе последовательности $\{f_n(x)\}$ дает возможность построения систем, обладающих теми или иными хорошими свойствами. Таким путем построена, напр., система Франклина (см. *Ортогональная система*), являющаяся базисом в $C[0, 1]$ и в $L^p[0, 1]$, $p\geqslant 1$.

О. с. ф. путем продолжения на более длинный интервал впервые рассматривалась И. Шуром (см. [1] с. 84). Он доказал, что для существования ортонормированной в $L^2[0, 1]$ системы $\{\varphi_n(x)\}$, $\varphi_n(x)=f_n(x)$, $x\in[a, b]$, $0<a<<b<1$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sup\int_a^b\left[\sum\xi_i f_i(x)\right]^2dx=1,$$

где верхняя грань берется по всем $\{\xi_i\}$, $\sum\xi_i^2=1$. Найдены также необходимые и достаточные условия, при выполнении к-рых можно путем такой ортогонализации получить полную ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$ (см. [2]).

Нек-рые конструкции ортогонализации продолжением функций даны Д. Е. Меньшовым [3]. Они использовались при доказательстве теорем о точности условия $\sum a_n^2\ln^2 n<\infty$ для сходимости почти всюду ортогональных рядов $\sum a_n\varphi_n(x)$.

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [2] Олевский А. М., «Матем. заметки», 1969, т. 6, № 6, с. 737—47; [3] Меньшов Д. Е., «Матем. сб.», 1938, т. 3, с. 103—20; [4] Franklin Ph., «Math. Ann.», 1928, Bd 100, S. 522—29.

А. А. Талалян.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ГРУППА — группа всех линейных преобразований n-мерного векторного пространства V над полем k, сохраняющих фиксированную невырожденную квадратичную форму Q на V (т. е. таких линейных преобразований φ, что $Q(\varphi(v))=Q(v)$ для любого $v\in V$). О. г. принадлежит к числу *классических групп*. Элементы О. г. наз. ортогональными (относительно Q) преобразованиями V, а также автоморфизмами формы Q. Пусть, далее, $\operatorname{char} k\neq 2$ (об О. г. над полями характеристики 2 см [1], [7]) и f — *связанная с Q невырожденная симметрич.* билинейная форма на V, определенная формулой

$$f(v, u)=\frac{1}{2}(Q(v+u)-Q(v)-Q(u)).$$

Тогда О. г. состоит в точности из тех линейных преобразований пространства V, к-рые сохраняют f, и обозначается через $O_n(k, f)$ или (когда ясно о каком поле k и форме f идет речь) просто через O_n. Если B — матрица f в каком-либо базисе пространства V, то О. г. может быть отождествлена с группой всех таких $(n\times n)$-матриц A с коэффициентами в k, что $A^\top BA=B$ ($^\top$ — транспонирование).

Описание алгебраич. строения О. г. составляет предмет классич. исследований. Определитель любого элемента из O_n равен 1 или -1. Элементы с определителем 1 наз. вращениями; они образуют в О. г. нормальный делитель $O_n^+(k, f)$ (или просто O_n^+) индекса 2, наз. группой вращений. Элементы из $O_n-O_n^+$ наз. переворачиваниями. Всякое вращение (переворачивание) является произведением четного (нечетного) числа отражений из O_n.

Пусть Z_n — группа всех гомотетий φ_α: $v\mapsto\alpha v$, $\alpha\in k$, $\alpha\neq 0$, пространства V. Тогда $O_n\cap Z_n$ — это центр O_n; он состоит из двух элементов: φ_1 и φ_{-1}. Если n нечетно, то O_n является прямым произведением своего центра и O_n^+. Центр O_n^+ при $n\geqslant 3$ тривиален, если n нечетно, и совпадает с центром O_n, если n четно. Если же $n=2$, то группа O_n^+ коммутативна и изоморфна либо мультипликативной группе k^* поля k (в случае, когда индекс Витта ν формы f равен 1), либо группе элементов с нормой 1 в поле $k(\sqrt{-\Delta})$, где Δ — дискриминант формы f (в случае, когда $\nu=0$). Коммутант группы $O_n(k, f)$ обозначается через $\Omega_n(k, f)$ или просто Ω_n; он порождается квадратами элементов из O_n. При $n \geqslant 3$ коммутант группы O_n^+ совпадает с Ω_n. Центр группы Ω_n имеет вид $\Omega_n \cap Z_n$.

Классич. группами, связанными с О. г., являются также канонич. образы O_n^+ и Ω_n в *проективной группе*; они обозначаются $PO_n^+(k, f)$ и $P\Omega_n(k, f)$ (или просто PO_n^+ и $P\Omega_n$) и изоморфны соответственно $O_n^+/(O_n^+ \cap Z_n)$ и $\Omega_n/(\Omega_n \cap Z_n)$.

Основные классич. факты об алгебраич. структуре О. г. относятся к описанию последовательных факторов следующего ряда нормальных делителей в О. г.

$$O_n \supset O_n^+ \supset \Omega_n \supset \Omega_n \cap Z_n \supset \{e\}.$$

Группа O_n/O_n^+ имеет порядок 2. Всякий элемент в O_n/Ω_n имеет порядок 2, ввиду чего строение этой группы полностью определяется кардинальным числом ее элементов, к-рое может быть либо бесконечным, либо конечным вида 2^a, a — целое. Описание остальных факторов существенно зависит от того, отличен ли от нуля индекс Витта ν формы f.

Пусть сначала $\nu \geqslant 1$. Тогда $O_n^+/\Omega_n \approx k^*/k^{*2}$ при $n \geqslant 2$. Этот изоморфизм определен спинорной нормой, к-рая задает эпиморфизм O_n^+ на k^*/k^{*2} с ядром Ω_n. Группа $\Omega_n \cap Z_n$ нетривиальна (и состоит из преобразований φ_1 и φ_{-1}) тогда и только тогда, когда n четно и $\Delta \in k^2$. Если $n \geqslant 5$, то группа $P\Omega_n = \Omega_n/(\Omega_n \cap Z_n)$ проста. Случаи $n=3, 4$ рассматриваются отдельно. А именно, $P\Omega_3 = \Omega_3$ изоморфна $PSL_2(k)$ (см. *Специальная линейная группа*) и также проста, если число элементов в k не равно 3 (группа O_3^+ изоморфна проективной группе $PGL_2(k)$). При $\nu=1$ группа $P\Omega_4 = \Omega_4$ изоморфна группе $PSL_2(k(\sqrt{\Delta}))$ и проста (в этом случае $\Delta \notin k^2$), а при $\nu=2$ группа $P\Omega_4$ изоморфна $PSL_2(k) \times PSL_2(k)$ и не проста. В частном случае, когда $k=\mathbb{R}$ и Q — форма сигнатуры (3, 1), группа $P\Omega_4 = \Omega_4 \simeq PSL_2(\mathbb{C})$ наз. группой Лоренца.

В случае же, когда $\nu=0$ (т. е. Q — анизотропная форма), многие из указанных результатов не верны. Напр., если $k=\mathbb{R}$, а Q — положительно определенная форма, то $\Omega_n = O_n^+$, хотя $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^{*2}$ состоит из двух элементов; при $k=\mathbb{Q}$, $n=4$, возможен случай, когда $\Delta \in k^2$, но $\varphi_{-1} \notin \Omega_4$. Вообще при $\nu=0$ структура О. г. и связанных с ней групп существенно зависит от k. Напр., если $k=\mathbb{R}$, то PO_n^+, $n \geqslant 3$, $n \neq 4$, $\nu=0$, проста (а PO_4^+ изоморфна прямому произведению $O_3^+ \times O_3^+$ двух простых групп); если же k — поле p-адических чисел, то при $\nu=0$ в O_3 (и в O_4) существует бесконечный ряд нормальных делителей с абелевыми факторами. Наиболее изучены случаи локально компактного поля и поля алгебраич. чисел. Если k — поле p-адических чисел, то случай $\nu=0$ невозможен при $n \geqslant 5$. Если же k — поле алгебраич. чисел, то такого ограничения нет и один из основных результатов состоит в том, что $P\Omega_n$ при $\nu=0$ и $n \geqslant 5$ проста. В этом случае изучение О. г. тесно связано с теорией эквивалентности квадратичных форм, к-рая основывается на рассмотрении форм, полученных из Q при расширении k до локальных полей, определенных нормированиями k (принцип Хассе).

Если k — конечное поле $\mathbb{F}_q$ из q элементов, то О. г. является конечной группой. Порядок O_n^+ при нечетном n равен

$$(q^{n-1}-1)\, q^{n-2}\, (q^{n-3}-1)\, q^{n-4} \ldots (q^2-1)\, q,$$

а при $n=2m$ равен

$$(q^{2m-1}-\varepsilon q^{m-1})(q^{2m-2}-1)q^{2m-3}\ldots(q^2-1)q,$$

где $\varepsilon=1$ при $(-1)^m\Delta\in\mathbb{F}_q^2$ и $\varepsilon=-1$ в противном случае. Указанные формулы вместе с приведенными общими фактами об О. г. при $\nu\geqslant1$ позволяют вычислить также и порядки Ω_n и $P\Omega_n$, так как $\nu\geqslant1$ при $n\geqslant3$, а порядок k^*/k^{*2} равен 2. Группа $P\Omega_n$, $n\geqslant5$, является одной из классических простых конечных групп (см. также *Шевалле группа*).

Один из основных результатов об автоморфизмах О. г. состоит в следующем: если $n\geqslant3$, то всякий автоморфизм φ группы O_n имеет вид $\varphi(u)=\chi(u)gug^{-1}$, $u\in O_n$, где χ — фиксированный гомоморфизм O_n в ее центр, а g — фиксированное биективное полулинейное отображение V в себя, удовлетворяющее условию $Q(g(v))=r_gQ^\sigma(v)$ для всех $v\in V$, где $r_g\in k^*$, а σ — связанный с g автоморфизм k. Если $\nu\geqslant1$ и $n\geqslant6$, то всякий автоморфизм O_n^+ индуцирован автоморфизмом O_n (см. [1], [3]).

Так же, как и другие классич. группы, О. г. допускает (при нек-рых предположениях) геометрич. характеризацию. А именно, пусть Q — такая анизотропная форма, что $Q(v)\in k^2$ для любого $v\in V$. В этом случае k — пифагорово упорядочиваемое поле. При фиксированном упорядочении поля k n-мерной цепью инцидентных полупространств в V наз. любая последовательность $(H_s)_{1\leqslant s\leqslant n}$, построенная по линейно независимой системе векторов $(h_s)_{1\leqslant s\leqslant n}$, где H_s — множество всех линейных комбинаций вида $\sum_{j=1}^{s}\lambda_jh_j$, $\lambda_s\geqslant0$. Группа O_n обладает свойством свободной подвижности, т. е. для любых двух n-мерных цепей полупространств существует единственное преобразование из O_n, переводящее первую цепь во вторую. Это свойство характеризует О. г.: если L — любое упорядоченное тело и G — подгруппа в $GL_n(L)$, $n\geqslant3$, обладающая свойством свободной подвижности, то L является пифагоровым полем, а $G=O_n(L, f)$, где f — такая анизотропная симметрич. билинейная форма, что $f(v, v)\in L^2$ для любого вектора v.

Пусть $\bar{k}$ — фиксированное алгебраич. замыкание поля k. Форма f естественно продолжается до невырожденной симметрич. билинейной формы $\bar{f}$ на $V\otimes_k\bar{k}$, а О. г. $O_n(\bar{k}, \bar{f})$ является определенной над k *линейной алгебраической группой* с группой k-точек $O_n(k, f)$. Определяемые таким образом (для разных f) линейные алгебраич. группы изоморфны над $\bar{k}$ (но, вообще говоря, не над k); соответствующая линейная алгебраич. группа над $\bar{k}$ наз. ортогональной алгебраической группой $O_n(\bar{k})$. Ее подгруппа $O_n^+(\bar{k}, \bar{f})$ также является линейной алгебраич. группой над $\bar{k}$ и наз. собственно ортогональной, или специальной ортогональной, алгебраической группой (обозначение: $SO_n(\bar{k})$); она является связной компонентой единицы группы $O_n(\bar{k})$. Группа $SO_n(\bar{k})$ — почти простая алгебраич. группа (т. е. не содержащая ненульмерных алгебраич. нормальных делителей) типа B_s при $n=2s+1$, $s\geqslant1$, и типа D_s при $n=2s$, $s\geqslant3$. Универсальной накрывающей группы SO_n является *спинорная группа*.

Если $k=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или p-адическое поле, то $O_n(k, f)$ естественно снабжается структурой вещественной, комплексной или p-адической *аналитической группы*. Группа Ли $O_n(\mathbb{R}, f)$ определяется с точностью до изоморфизма сигнатурой формы f; если эта сигнатура имеет вид (p, q), $p+q=n$, то $O_n(\mathbb{R}, f)$ обозначается через $O(p, q)$ и наз. псевдоортогональной группой. Ее можно отождествить с группой Ли всех действительных $(n\times n)$-матриц A, удовлетворяющих условию

$$A^{\top}I_{p,\,q}A=I_{p,\,q},\quad \text{где } I_{p,\,q}=\left\|\begin{matrix}1_p & 0\\ 0 & -1_q\end{matrix}\right\|$$

(через 1_s обозначена единичная $(s\times s)$-матрица); алгебра Ли этой группы отождествляется с алгеброй Ли всех действительных $(n\times n)$-матриц X, удовлетворяющих условию $X^{\top}I_{p,\,q}=-I_{p,\,q}X$. В частном случае $q=0$ группа $O(p,\,q)$ обозначается через $O(n)$ и наз. **вещественной ортогональной группой**; ее алгебра Ли состоит из всех кососимметрических действительных $(n\times n)$-матриц. Группа Ли $O(p,\,q)$ имеет четыре компоненты связности при $q\neq 0$ и две компоненты связности при $q=0$. Связной компонентой единицы является ее коммутант, к-рый при $q=0$ совпадает с подгруппой $SO(n)$ в $O(n)$, состоящей из всех преобразований с определителем, равным 1. Группа $O(p,\,q)$ компактна только при $q=0$. Инварианты $SO(n)$ как топологич. многообразия достаточно подробно изучены. Один из классич. результатов в этом направлении — вычисление чисел Бетти многообразия $SO(n)$: его полином Пуанкаре имеет вид

$$\prod_{s=1}^{m}(1+t^{4s-1})$$

при $n=2m+1$ и вид

$$(1+t^{2m-1})\prod_{s=1}^{m-1}(1+t^{4s-1})$$

при $n=2m$. Фундаментальная группа многообразия $SO(n)$ есть $\mathbb{Z}_2$. Вычисление высших гомотопич. групп $\pi_i(SO(n))$ имеет непосредственное отношение к классификации локально тривиальных главных $SO(n)$-расслоений над сферами. Важную роль в топологической *К-теории* играет теорема периодичности, согласно к-рой при $N\gg n$ имеют место изоморфизмы

$$\pi_{n+8}(O(N))\simeq\pi_n(O(N)),\ \pi_n(O(N))\simeq\mathbb{Z}_2,$$

если $n=0,\ 1$;

$$\pi_n(O(N))\simeq\mathbb{Z},$$

если $n=3,\ 7$, и

$$\pi_n(O(N))=0,$$

если $n=2,\ 4,\ 5,\ 6$. Изучение топологии группы $O(p,\,q)$ по существу сводится к предыдущему случаю, т. к. связная компонента единицы группы $O(p,\,q)$ диффеоморфна произведению $SO(p)\times SO(q)$ на евклидово пространство.

Лит.: [1] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [2] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [3] Автоморфизмы классических групп, пер. с англ. и франц., М., 1976; [4] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [5] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [6] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [7] O'Meara O. T., Introduction to quadratic forms, B.—Hdlb., 1963; [8] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970.

В. Л. Попов.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ МАТРИЦА — матрица над коммутативным кольцом R с единицей 1, для к-рой транспонированная матрица совпадает с обратной. Определитель О. м. равен ± 1. Совокупность всех О. м. порядка n над R образует подгруппу полной линейной группы $\mathrm{GL}_n\ (R)$. Для любой действительной О. м. a существует такая действительная О. м. c, что

$$cac^{-1}=\mathrm{diag}\,[\pm 1,\ \ldots,\ \pm 1,\ a_1,\ \ldots,\ a_t],$$

где

$$a_j=\left\|\begin{matrix}\cos\varphi_j & \sin\varphi_j\\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j\end{matrix}\right\|.$$

Невырожденная комплексная матрица a тогда и только тогда подобна комплексной О. м., когда система ее *элементарных делителей* обладает следующими свойствами: 1) для $\lambda\neq\pm 1$ элементарные делители $(x-\lambda)^m$ и

$(x-\lambda^{-1})^m$ повторяются одно и то же число раз; 2) каждый элементарный делитель вида $(x\pm1)^{2l}$ повторяется четное число раз.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975.

Д. А. Супруненко.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ СЕТЬ — сеть, у к-рой касательные в нек-рой точке к линиям различных семейств ортогональны. Примеры О. с.: *асимптотическая сеть* на минимальной поверхности, *кривизны линий сеть.*

А. Б. Иванов.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА — 1) О. с. векторов — множество $\{x_\alpha\}$ ненулевых векторов евклидова (гильбертова) пространства со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ такое, что $(x_\alpha, x_\beta)=0$ при $\alpha\neq\beta$. Если при этом норма каждого вектора равна единице, то система $\{x_\alpha\}$ наз. ортонормированной. Полная О. с. $\{x_\alpha\}$ наз. ортогональным (ортонормированным) базисом.

М. И. Войцеховский.

2) О. с. координат — система координат, в к-рой координатные линии (или поверхности) пересекаются под прямым углом. О. с. координат существуют в любом евклидовом пространстве, но, вообще говоря, не существуют в произвольном пространстве. В двумерном гладком аффинном пространстве О. с. всегда можно ввести по крайней мере в достаточно малой окрестности каждой точки. Иногда возможно введение О. с. координат в целом. В О. с. метрич. тензор g_{ij} диагонален; диагональные компоненты g_{ii} принято наз. коэффициентами Ламе. *Ламе коэффициенты* О. с. в пространстве выражаются формулами

$$L_u=\sqrt{(\partial x/\partial u)^2+(\partial y/\partial u)^2+(\partial z/\partial u)^2},$$
$$L_v=\sqrt{(\partial x/\partial v)^2+(\partial y/\partial v)^2+(\partial z/\partial v)^2},$$
$$L_w=\sqrt{(\partial x/\partial w)^2+(\partial y/\partial w)^2+(\partial z/\partial w)^2},$$

где x, y и z — декартовы прямоугольные координаты. Через коэффициенты Ламе выражаются элемент длины:

$$ds=\sqrt{L_u^2\,du^2+L_v^2\,dv^2+L_w^2\,dw^2},$$

элемент площади поверхности:

$$d\sigma=\sqrt{(L_uL_v\,du\,dv)^2+(L_uL_w\,du\,dw)^2+(L_vL_w\,dv\,dw)^2},$$

элемент объема:

$$dV=L_uL_vL_w\,du\,dv\,dw,$$

векторные дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad}_u\varphi=\frac{1}{L_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u},\quad \operatorname{grad}_v\varphi=\frac{1}{L_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v},\quad \operatorname{grad}_w\varphi=\frac{1}{L_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{L_uL_vL_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_uL_vL_w)+\frac{\partial}{\partial v}(a_vL_uL_w)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial w}(a_wL_uL_v)\right];$$

$$\operatorname{rot}_u\boldsymbol{a}=\frac{1}{L_vL_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(a_wL_w)-\frac{\partial}{\partial w}(a_vL_v)\right],$$

$$\operatorname{rot}_v\boldsymbol{a}=\frac{1}{L_uL_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(a_uL_u)-\frac{\partial}{\partial u}(a_wL_w)\right],$$

$$\operatorname{rot}_w\boldsymbol{a}=\frac{1}{L_uL_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_vL_v)-\frac{\partial}{\partial v}(a_uL_u)\right],$$

$$\Delta\varphi=\frac{1}{L_uL_vL_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_vL_w}{L_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_uL_w}{L_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_uL_v}{L_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right].$$

Наиболее часто используемые О. с. координат: на плоскости — декартовы, полярные, эллиптические, параболические; в пространстве — сферические, цилиндрические, параболоидальные, бицилиндрические, биполярные.

Д. Д. Соколов.

3) О. с. функций — конечная или счетная система $\{\varphi_i(x)\}$ функций, принадлежащих пространству

$L^2(X,\ S,\ \mu)$ и удовлетворяющих условиям

$$\int_X \psi_i(x)\overline{\varphi}_j(x)\,d\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \lambda_i > 0 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Если $\lambda_i = 1$ для всех i, то система наз. ортонормированной. При этом предполагается, что мера $\mu(x)$, определенная на σ-алгебре S подмножеств множества X, счетно аддитивна, полна и имеет счетную базу. Это определение О. с. включает все рассматриваемые в современном анализе О. с.; они получаются при различных конкретных реализациях пространства с мерой $(X,\ S,\ \mu)$.

Наибольший интерес представляют полные ортонормированные системы $\{\varphi_n(x)\}$, обладающие тем свойством, что для любой функции $f(x) \in L^2(X,\ S,\ \mu)$ существует единственный ряд $\sum c_n\varphi_n(x)$, сходящийся к $f(x)$ в метрике пространства $L^2(X,\ S,\ \mu)$, при этом коэффициенты c_n определяются формулами Фурье

$$c_n = \int_X f\overline{\varphi}_n\,d\mu.$$

Такие системы существуют в силу сепарабельности пространства $L^2(X,\ S,\ \mu)$. Универсальный способ построения полных ортонормированных систем дает метод ортогонализации Шмидта. Для этого достаточно применить его к нек-рой полной в $L^2(S,\ X,\ \mu)$ системе линейно независимых функций.

В теории *ортогональных рядов* в основном рассматриваются О. с. пространства $L^2[a,\ b]$ (тот частный случай, когда $X=[a,\ b]$, S — система множеств, измеримых по Лебегу, и μ — мера Лебега). Многие теоремы о сходимости или суммируемости рядов $\sum a_n\varphi_n(x)$, $\sum a_n^2 < \infty$, по общим О. с. $\{\varphi_n(x)\}$ пространства $L^2[a,\ b]$ верны и для рядов по ортонормированным системам пространства $L^2(X,\ S,\ \mu)$. Вместе с тем в этом частном случае построены интересные конкретные О. с., обладающие теми или иными хорошими свойствами. Таковы, например, системы Хаара, Радемахера, Уолша—Пэли, Франклина.

1) Система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$: $\chi_1(x)=1$, $x \in [0,\ 1]$,

$$\chi_m(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } x \in \left(\frac{2k-2}{2^{n+1}},\ \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } x \in \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}},\ \frac{2k}{2^{n+1}}\right), \\ 0 & \text{в остальных точках отрезка } [0,\ 1], \end{cases}$$

где $m=2^n+k$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, $m=2,\ 3,\ \ldots$. Ряды по системе Хаара представляют типичный пример *мартингалов* и для них верны общие теоремы из теории мартингалов. Кроме того, система $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в $L^p[0,\ 1]$, $p \geqslant 1$, и ряд Фурье по системе Хаара любой интегрируемой функции почти всюду сходится.

2) Система Радемахера $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_n(x) = \operatorname{sign}\sin 2^{n+1}\pi x, \quad x \in [0,\ 1],$$

представляет собой важный пример О. с. независимых функций и имеет применения как в теории вероятностей, так и в теории ортогональных и общих функциональных рядов.

3) Система Уолша — Пэли $\{W_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определяется через функции Радемахера:

$$W_0(x)=1,\ W_n(x) = \prod_{k=0}^{m} [r_k(x)]^{q_k},\ x \in [0,\ 1],$$

где числа m и q_k определяются из двоичного разложения числа n:

$$n = \sum_{k=0}^{m} q_k 2^k.$$

4) Система Франклина $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ получается ортогонализацией методом Шмидта последовательности функций

$$u_1(x)=x,\ u_2(x)=1-x,\ u_n(x)=\int_0^x \chi_{n-1}(t)\,dt,$$
$$n\geq 3,\quad x\in[0,\ 1].$$

Она является примером ортогонального базиса пространства $C[0,\ 1]$ непрерывных функций.

В теории кратных ортогональных рядов рассматриваются системы функций вида

$$\varphi_{n_1}(x_1)\cdot\varphi_{n_2}(x_2)\ldots\varphi_{n_m}(x_m),\ x_i\in[a,\ b],\ 1\leqslant i\leqslant m,$$
$$n_i=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в $L^2[a,\ b]$. Такие системы ортонормированы на m-мерном кубе $J^m=[a,\ b]\times\ldots\times[a,\ b]$ и полны, если полна система $\{\varphi_n(x)\}$.

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [2] Итоги науки. Математический анализ, 1970, М., 1971, с. 109—46; [3] там же, с. 147—202; [4] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [5] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [6] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965. *А. А. Талалян.*

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА, ортогональный массив, ОА $(N,\ k,\ n,\ t,\ \lambda)$ — матрица размера $k\times N$, элементы к-рой суть числа 1, 2, ..., n, обладающая тем свойством, что в каждой ее подматрице размера $t\times N$ любой из n^t возможных t-мерных векторов-столбцов, имеющих координатами эти числа, встречается в качестве столбцов этой подматрицы точно λ раз. Из определения О. т. следует, что $N=\lambda n^t$. Иногда под О. т. понимают ОА $(N,\ k,\ n,\ t,\ \lambda)$ с $t=2$ и $\lambda=1$, и тогда эта О. т. обозначается ОА $(n,\ k)$. При $k>3$ О. т. ОА $(n,\ k)$ эквивалентна множеству из $k-2$ попарно ортогональных латинских квадратов. При заданных $n,\ t,\ \lambda$ максимальное значение параметра k определено лишь в нескольких частных случаях. Так, напр., $k\leqslant(\lambda n^2-1)/(n-1)$ при $t=2$ или $k_{\max}=t+1$ в случае нечетного λ при $n=2$.

Лит.: [1] Dénes J., Keedwell A. D., Latin Squares and their applications, Bdpst, 1974; [2] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970. *В. М. Михеев.*

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ — см. *Изогональная траектория.*

ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — линейное преобразование A евклидова пространства, сохраняющее длины или (что эквивалентно этому) скалярное произведение векторов. О. п. и только они переводят ортонормированный базис в ортонормированный. Необходимым и достаточным условием ортогональности является также равенство $A^*=A^{-1}$, где A^* — сопряженное, а A^{-1} — обратное линейные преобразования.

В ортонормированном базисе О. п. (и только им) соответствуют ортогональные матрицы. Собственные значения О. п. равны ±1, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Определитель О. п. равен $+1$ (собственное О. п.) или -1 (несобственное О. п.). В случае евклидовой плоскости всякое собственное О. п. является поворотом, и его матрица в подходящем ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{Vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{Vmatrix},$$

где φ — угол поворота, а всякое несобственное О. п. является отражением относительно нек-рой прямой, его матрица в подходящем ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix}.$$

В трехмерном пространстве всякое собственное О. п. есть поворот вокруг нек-рой оси, а всякое несобственное — произведение поворота вокруг оси и отражения в перпендикулярной плоскости. В произвольном n-мерном евклидовом пространстве О. п. также сводятся к поворотам и отражениям (см. *Вращение*).

Множество всех О. п. евклидова пространства образует группу относительно умножения преобразований — *ортогональную группу* данного евклидова пространства. Собственные О. п. образуют нормальную подгруппу в этой группе (специальную ортогональную группу). *Т. С. Пиголкина.*

ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ МЕТОД — вариант метода прогонки, основанный на ортогональном преобразовании неизвестных. Пусть при $a \leqslant x \leqslant b$ рассматривается граничная задача для пары линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'(x) = a_1(x)\, y(x) + b_1(x)\, z(x) + f_1(x), \tag{1}$$

$$z'(x) = a_2(x)\, y(x) + b_2(x)\, z(x) + f_2(x) \tag{2}$$

с условиями вида

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 z(a) = \gamma_1, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \tag{3}$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 z(b) = \gamma_2, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1. \tag{4}$$

Пусть данные функции $a_i(x)$, $b_i(x)$, $f_i(x)$, $i=1,2$, непрерывны на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Решение граничной задачи (1)—(4) О. п. м. осуществляется следующим путем.

I. Решается вспомогательная задача Коши

$$s'(x) = c(x)\, r(x), \quad c'(x) = -s(x)\, r(x),$$
$$r(x) = s^2(x)\, b_1(x) + s(x)\, c(x)\, (b_2(x) - a_1(x)) - - c^2(x)\, a_2(x), \tag{5}$$

$$u'(x) = \overline{a}_1(x)\, u(x) + \overline{f}_1(x), \tag{6}$$

$$s(a) = \alpha_1, \ c(a) = \beta_1, \ u(a) = \gamma_1, \tag{7}$$

где

$$\overline{a}_1(x) = a_1(x)\, s^2(x) + b_2(x)\, c^2(x) + (b_1(x) + a_2(x))\, s(x)\, c(x),$$
$$\overline{f}_1(x) = f_1(x)\, s(x) + f_2(x)\, c(x)$$

(п р я м о й х о д п р о г о н к и).

II. Проверяется условие $\Delta = \alpha_2 c(b) - \beta_2 s(b) \neq 0$, и если оно выполняется, то в направлении от точки $x=b$ к точке $x=a$ решается задача Коши

$$v'(x) = \overline{a}_2(x)\, u(x) + \overline{b}_2(x)\, v(x) + \overline{f}_2(x), \tag{8}$$

$$v(b) = \{\gamma_2 - [\alpha_2 s(b) + \beta_2 c(b)]\, u(b)\}/\Delta, \tag{9}$$

где

$$\overline{a}_2(x) = 2\,(a_1(x) - b_2(x))\, s(x)\, c(x) + + (b_1(x) + a_2(x))\, (c^2(x) - s^2(x)),$$
$$\overline{b}_2(x) = a_1(x)\, c^2(x) + b_2(x)\, s^2(x) - (b_1(x) + a_2(x))\, s(x)\, c(x),$$
$$\overline{f}_2(x) = f_1(x)\, c(x) - f_2(x)\, s(x)$$

(о б р а т н ы й х о д п р о г о н к и).

III. Искомые функции вычисляются по формулам

$$y(x) = s(x)\, u(x) + c(x)\, v(x),$$
$$z(x) = c(x)\, u(x) - s(x)\, v(x).$$

Если решение $y(x)$, $z(x)$ граничной задачи (1)—(4) существует, единственно и устойчиво относительно малых изменений коэффициентов и свободных членов, определяющих ее, то $\Delta \neq 0$ и рассмотренный метод также устойчив (см. [2]).

Система линейных алгебраических уравнений

$$y_{k+1} = A_k y_k + B_k z_k + F_k, \tag{10}$$

$$z_{k+1} = C_k y_k + D_k z_k + G_k, \ k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{11}$$

$$\alpha_0 y_0 + \beta_0 z_0 = \gamma_0, \tag{12}$$

$$\alpha_n y_n + \beta_n z_n = \gamma_n, \tag{13}$$

где $A_kD_k \neq B_kC_k$, $\alpha_0^2+\beta_0^2=1$, $\alpha_n^2+\beta_n^2=1$, решается по следующим правилам.

1) Используя формулы

$$s_{k+1}=(C_kc_k-D_ks_k)/\rho_k,$$
$$c_{k+1}=(B_ks_k-A_kc_k)/\rho_k,$$
$$\rho_k=\sqrt{[(C_kc_k-D_ks_k)^2+(B_ks_k-A_kc_k)^2]},$$
$$u_{k+1}=(A_ks_ks_{k+1}+B_kc_ks_{k+1}+C_ks_kc_{k+1}+D_kc_kc_{k+1})\,u_k+$$
$$+(F_ks_{k+1}+G_kc_{k+1}),$$
$$s_0=\alpha_0,\quad c_0=\beta_0,\quad u_0=\gamma_0,$$

последовательно вычисляют s_{k+1}, c_{k+1}, u_{k+1} при $k=0, \ldots, n-1$ (прямой ход прогонки).

2) Проверяется условие $\Delta_n=\alpha_nc_n-\beta_ns_n\neq 0$, и если оно выполняется, то вычисляют

$$v_n=[\gamma_n-(\alpha_ns_n+\beta_nc_n)\,u_n]/\Delta_n$$

и

$$v_k=\{v_{k+1}+[(C_ks_k+D_kc_k)s_{k+1}-(A_ks_k+B_kc_k)\,c_{k+1}]\,u_k+$$
$$+(G_ks_{k+1}-F_kc_{k+1})\}/\rho_k$$

при $k=n-1, n-2, \ldots, 1$ (обратный ход прогонки).

3) Значения искомого решения системы уравнений (10)—(13) вычисляются по формулам

$$y_k=u_ks_k+v_kc_k,\qquad z_k=u_kc_k-v_ks_k.$$

Если решение системы уравнений (10)—(13) существует, единственно и устойчиво относительно малых изменений коэффициентов и свободных членов, то и рассмотренный О. п. м. также устойчив (см. [2]).

Иногда ортогональной прогонкой наз. методы, основанные на использовании фундаментальной системы решений однородной системы уравнений для целей переноса граничных условий (см. [1], [3]). Однако эти методы являются скорее вариантами *пристрелки метода*.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975; [2] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы высшей математики, т. 2, Минск, 1975; [3] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

А. Ф. Шапкин.

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ — обобщение понятия перпендикулярности векторов евклидова пространства. Наиболее естественное понятие О. введено в теории гильбертовых пространств. Два элемента x и y из гильбертова пространства H наз. ортогональными ($x \perp y$), если их скалярное произведение равно нулю ($(x, y)=0$). Это понятие О. в том частном случае, когда H — евклидово пространство, совпадает с понятием перпендикулярности двух векторов. В терминах этого понятия в любом гильбертовом пространстве верна теорема Пифагора: если элемент $x \in H$ равен конечной или счетной сумме попарно ортогональных элементов x_i, $x_i \in H$ (счетная сумма $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ понимается в смысле сходимости ряда в метрике пространства H), то $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2$ (см. *Парсеваля равенство*).

Полная счетная система $\{x_i\}$ ортонормированных векторов сепарабельного гильбертова пространства представляет аналог полной системы попарно ортогональных векторов конечномерного евклидова пространства: любой элемент $x \in H$ единственным образом представляется в виде суммы $\sum_{i=1}^{\infty} c_ix_i$, причем $c_ix_i=(x, x_i)x_i$ — проекция элемента x на x_i.

В случае функционального пространства $L^2[a, b]$ такую роль играют полные ортонормированные системы функций $\{\varphi_k\}$: если $f(x) \in L^2[a, b]$, то

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$$

в метрике пространства $L^2[a, b]$, где

$$c_k = \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx.$$

В случае, когда $\varphi_k(x)$ — ограниченные функции, коэффициенты c_k можно определить для любой интегрируемой функции. При этом представляет интерес вопрос о сходимости соответствующего разложения в том или ином смысле (см. *Тригонометрическая система*, *Хаара система*). Поэтому для функций термин «О.» употребляется в более широком смысле: интегрируемые на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ наз. ортогональными, если

$$\int_b^a f(x)\,g(x)\,dx = 0$$

(для существования интеграла обычно требуется, чтобы $f(x) \in L^p[a, b]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $g(x) = L^q[a, b]$, $1/p + 1/q = 1$,

$$L^\infty[a, b] —$$

множество ограниченных функций).

Существуют также определения О. элементов произвольного действительного нормированного пространства. Одно из них (см. [4]) следующее: элемент x действительного нормированного пространства B считается ортогональным элементу y, если $\|x\| \leqslant \|x+ky\|$ для любого действительного k. В терминах этого понятия установлены нек-рые необходимые и достаточные условия, при к-рых может быть определено скалярное (внутреннее) произведение элементов пространства B (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [2] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [3] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [4] Birkhoff G., «Duke Math. J.», 1935, v. 1, p. 169—72; [5] James R., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 61, p. 265—92; [6] его же, «Bull. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 53, p. 559—66. *А. А. Талалян.*

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ЛАТИНСКИЕ КВАДРАТЫ — пара латинских квадратов $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ порядка n таких, что $(a_{ij}, b_{ij}) \neq (a_{kl}, b_{kl})$ при $(i, j) \neq (k, l)$, $i, j, k, l \in S = \{1, \ldots, n\}$. Квадраты A и B наз. ортогональными соквадратами. Матрица, получаемая наложением A на B, наз. греко-латинским, или эйлеровым, квадратом, ее элементы — все n^2 упорядоченных пар элементов S. Ортогональность A и B обозначается $A \perp B$. Пример пары О. л. к. и их эйлерова квадрата для $n=3$:

1 2 3	1 2 3	11 22 33
2 3 1	3 1 2	23 31 12
3 1 2	2 3 1	32 13 21.

Латинский квадрат A порядка n имеет ортогональный соквадрат тогда и только тогда, когда в A существует n непересекающихся трансверсалей (см. *Латинский квадрат*). Если A — латинский квадрат порядка $4t+2$ (или $4t+1$) с подквадратом порядка $2t+1$ (соответственно $2t$), все клетки к-рого за исключением, быть может, t (соответственно $[(t-1)/2]$) клеток заполнены не более чем $2t+1$ (соответственно $2t$) элементами, то для A не существует ортогонального соквадрата. Для всех $n > 2$, $n \neq 6$, имеются примеры пар О. л. к., а для $n=6$ путем перебора всех возможностей доказано, что таких пар нет [3].

Несколько латинских квадратов одного порядка наз. попарно ортогональными, если любые два из них ортогональны. Если $N(n)$ — максимальное возможное число попарно О. л. к., то $N(n) \leqslant n-1$. Для $N(n)$ получены следующие оценки снизу:

$n \geqslant$	7	52	53	63	90
$N(n) \geqslant$	2	3	4	5	6.

Кроме того, $N(12) \geqslant 5$, $N(33) \geqslant 3$, $N(35) \geqslant 4$, $N(40) \geqslant 4$, $N(45) \geqslant 4$ и доказано, что $N(n) \to \infty$ при $n \to \infty$; напр., $N(n) \geqslant n^{1/17}-2$ при достаточно большом n (см. [2]).

Множество из $n-1$ попарно О. л. к. порядка n наз. полным. При $n>4$ множество из $n-3$ попарно О. л. к. всегда может быть дополнено до полного. В настоящее время (1983) полные множества известны только в случае $n=p^k$, где k — натуральное, p — простое числа (то есть $N(p^k)=p^k-1$). Если же $n \equiv 1 \pmod 4$ или $n \equiv 2 \pmod 4$ и свободная от квадрата часть числа n содержит хотя бы один простой множитель $p \equiv 3 \pmod 4$, то не существует полного множества попарно О. л. к. порядка n. Напр., не существует полных множеств при $n=2p$, $p \equiv 3 \pmod 4$.

Полные множества попарно О. л. к. находят приложение в статистике при построении симметрических уравновешенных неполных *блок-схем* с параметрами $v=n^2+n+1$, $k=n+1$, $\lambda=1$. Полные множества могут интерпретироваться и как конечные проективные плоскости (см. [2]).

Предложено много методов построения О. л. к. (см. [2]). Все они созданы с целью получения как можно большего множества попарно О. л. к. порядка n. Каждый из методов может быть отнесен к одной из следующих двух групп. К первой группе принадлежат методы, характерной особенностью к-рых является то, что они дают способ построения «основного» латинского квадрата и указывают, как переставить в нем строки и столбцы, чтобы получить ортогональный соквадрат. Ко второй группе относятся методы, к-рые используют известные приемы построения О. л. к. меньшего порядка для построения О. л. к. заданного порядка.

Если $A=\|a_{ij}\|$ — латинский квадрат порядка n, построенный на множестве S, то упорядоченный набор перестановок σ_i, $i \in S$, определяемых равенствами $\sigma_i(j)=a_{ij}$, однозначно определяет латинский квадрат A. Не каждый упорядоченный набор перестановок соответствует какому-либо латинскому квадрату. Если $A=[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ и $B=[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ — два латинских квадрата, заданных указанным способом перестановками σ_i и τ_i множества S, то $A \perp B$ тогда и только тогда, когда $[\sigma_1^{-1}\tau_1, \ldots, \sigma_n^{-1}\tau_n]$ — латинский квадрат. Если определить произведения $\alpha A=[\alpha\sigma_1, \ldots, \alpha\sigma_n]$, $A\beta=[\sigma_1\beta, \ldots, \sigma_n\beta]$, где α и β — перестановки S, то, напр., $A \perp \alpha A$ тогда и только тогда, когда $[\sigma_1^{-1}\alpha\sigma_1, \ldots, \sigma_n^{-1}\alpha\sigma_n]$ — латинский квадрат.

Методы первой группы обычно используются в случае, когда A — таблица умножения конечной группы G, то есть $a_{ij}=g_ig_j$, $g_i, g_j \in G$, $i, j \in S$; отличие одного метода от другого заключается в выборе группы G, в выборе взаимно однозначных отображений α, β группы G на себя и в использовании произведений αA, $A\beta$, $\alpha^{-1}A\alpha$ и т. д.

Если G — аддитивная группа, то условие $A \perp \alpha A$ сводится к тому, что α — ортоморфизм G, т. е. такое взаимно однозначное отображение G на себя, что если для $g_1, g_2 \in G$ выполняется равенство $\alpha(g_1)-g_1=\alpha(g_2)-g_2$, то $g_1=g_2$. Напр., пять попарно О. л. к. порядка 12 были найдены после определения четырех нетривиальных ортоморфизмов абелевой группы, являющейся прямым произведением циклич. групп 6-го и 2-го порядков (см. [2], [6]).

Если G — аддитивная группа конечного поля $GF(p^r)=\{a_0=0, a_1=1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$, $n=p^r$, то все построения значительно упрощаются и получается следующее полное множество попарно О. л. к.:

$$A_k=\|a_{ij}^k\|, \; a_{ij}^k=a_ia_k+a_j; \; i, \; j \in \{0, 1, \ldots, n-1\},$$

$$k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Следует отметить, что для n, удовлетворяющих условиям $n \not\equiv 2 \pmod 4$, $n \not\equiv 3 \pmod 9$ и $n \not\equiv 6 \pmod 9$, оказалось возможным всегда построить такой латинский квадрат A порядка n, что $A \perp A^{\top}$.

Использование прямого произведения латинских квадратов составляет основу следующего метода, относящегося ко второй группе. Пусть A_1 и B_1 — О. л. к. порядка n, построенные на множестве X, а A_2 и B_2 — О. л. к. *порядка* m, *построенные на множестве* Y, тогда прямые произведения матриц $A_1 \times A_2$ и $B_1 \times B_2$ будут О. л. к. порядка mn, построенные на множестве $X \times Y$. Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$, то указанный метод приводит к оценке $N(n) \geqslant \min(p_i^{k_i} - 1)$.

В основе многих других методов второй группы лежит *следующее построение*. Пусть A_1, B_1, C_1 — попарно О. л. к. порядка $m \geqslant 2n$, построенные на $S_1 = \{1, 2, \ldots, \ldots, m\}$, A_2, B_2 — О. л. к. порядка n, построенные на $S_2 = \{m+1, \ldots, m+n\}$. Чтобы получить теперь два латинских квадрата A и B порядка $m+n$, построенные на $S = S_1 \cup S_2$, добавляют к A строки и столбцы с номерами $m+1, \ldots, m+n$ с незаполненными клетками, в результате чего получают частичный латинский квадрат порядка $m+n$, содержащий A_1 в верхнем левом углу. Клетки A_1 и B_1, имеющие те же номера, что и клетки C_1, содержащие элемент i, составляют общую для A_1 и B_1 i-ю трансверсаль, $i = 1, 2, \ldots, m$. Элементы i-й трансверсали в A_1 при $i = 1, 2, \ldots, n$ помещают в $(m+i)$-й столбец (и в $(m+i)$-ю строку) в том же порядке, в каком они располагались в строках (соответственно столбцах) A_1, а на их место ставится число $m+i$. Остается в правый нижний угол частичного квадрата поставить A_2, чтобы завершить построение A.

Построение B проводится аналогичным образом из B_1 и B_2, но только с использованием трансверсалей с номерами $n+1, n+2, \ldots, 2n$. Квадраты A и B будут латинскими, но не обязательно ортогональными. Всегда можно получить пару О. л. к. порядка $m+n$ при $m = p^k \neq 13$, где p — нечетное, и $n = (m-1)/2$; показано, как, используя приведенное выше построение, получить пару О. л. к. порядка n при $n \equiv 2 \pmod 4$, $n > 6$ (см. [2]).

Приложения О. л. к. в статистике, теории информации и в теории планирования эксперимента требуют построения О. л. к. специального вида и перенесения понятия ортогональности на другие объекты. Так, обобщением О. л. к. являются *ортогональные таблицы*. Два частичных латинских квадрата одного порядка наз. о р т о г о н а л ь н ы м и, если при наложении их друг на друга получаемые в клетках упорядоченные пары будут все различны. Говорят, что частичный латинский квадрат A вложен в латинский квадрат B, если A совпадает с нек-рой подматрицей B (за исключением пустых клеток A). Каждый квадрат из множества попарно ортогональных частичных латинских квадратов может быть вложен в латинский квадрат таким образом, что полученные латинские квадраты будут О. л. к. (см. [6]).

Лит.: [1] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [2] Dénes J., Keedwell A. D., Latin Squares and their applications, Bdpst, 1974; [3] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [4] Райзер Г.-Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [5] Hedayat A., Seiden E., «Pacif. J. Math.», 1977, v. 54, № 2, p. 85—113; [6] Lindner Ch., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1976, v. 59, № 1, p. 184—86. *В. М. Михеев.*

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ — *система многочленов* $\{P_n(x)\}$, удовлетворяющих условию ортогональности

$$\int_a^b P_n(x)\, P_m(x)\, h(x)\, dx = 0, \quad n \neq m,$$

причем степень каждого многочлена $P_n(x)$ равна его индексу n, а весовая функция (вес) $h(x) \geqslant 0$ на интервале (a, b) или (в случае конечности a и b) на отрезке $[a, b]$. О. м. наз. ортонормированными и обозначаются $\{\hat{P}_n(x)\}$, если каждый многочлен имеет положительный старший коэффициент и выполняется условие нормированности

$$\int_a^b \hat{P}_n^2(x)\, h(x)\, dx = 1.$$

А если старший коэффициент каждого многочлена равен 1, то система О. м. обозначается $\{\hat{P}_n(x)\}$.

Система О. м. $\{\hat{P}_n(x)\}$ определяется однозначно, если весовая функция (дифференциальный вес) $h(x)$ интегрируема по Лебегу на (a, b), не эквивалентна нулю и, в случае неограниченного интервала (a, b), имеет конечные степенные моменты

$$h_n = \int_a^b x^n h(x) dx.$$

Вместо дифференциального веса $h(x)$ можно рассматривать интегральный вес $d\sigma(x)$, где $\sigma(x)$ — ограниченная неубывающая функция с бесконечным множеством точек роста (в этом случае в условии ортогональности интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса).

Для того чтобы многочлен $P_n(x)$ степени n входил в систему О. м. $\{P_n(x)\}$ с весом $h(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого многочлена $Q_m(x)$ степени $m<n$ выполнялось условие

$$\int_a^b P_n(x)\, Q_m(x)\, h(x)\, dx = 0.$$

Если интервал ортогональности (a, b) симметричен относительно начала координат, а весовая функция $h(x)$ четна, то каждый многочлен $P_n(x)$ содержит только те степени x, к-рые имеют одинаковую с номером n четность, т. е. имеет место тождество

$$P_n(-x) \equiv (-1)^n P_n(x).$$

Нули О. м. в случае ортогональности по интервалу (a, b) все действительны, различны и расположены внутри (a, b), причем между двумя соседними нулями многочлена $P_n(x)$ есть один нуль многочлена $P_{n-1}(x)$. Нули О. м. часто применяются в качестве узлов интерполяционных и квадратурных формул.

Любые три последовательных многочлена системы О. м. связаны рекуррентной формулой

$$P_{n+1}(x) = (a_n x + b_n) P_n(x) - c_n P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

где $P_0(x) = \mu_0$,

$$P_1(x) = \mu_1 x + \nu_1, \ \ldots ,$$
$$P_n(x) = \mu_n x^n + \nu_n x^{n-1} + \ldots ,$$
$$a_n = \mu_{n+1}/\mu_n, \ b_n = a_n(\nu_{n+1}/\mu_{n+1} - \nu_n/\mu_n),$$
$$c_n = \frac{\mu_{n+1}\mu_{n-1}}{\mu_n^2} \cdot \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}, \quad d_n^2 = \int_a^b P_n^2(x)\, h(x)\, dx.$$

Число d_n^{-1} — нормирующий множитель многочлена $P_n(x)$, так что система $\{d_n^{-1} P_n(x)\}$ ортонормирована, т. е.

$$d_n^{-1} P_n(x) = \hat{P}_n(x).$$

Для О. м. имеет место формула Кристоффеля — Дарбу

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{d_k^2} P_k(x)\, P_k(t) =$$
$$= \frac{1}{d_n^2} \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)\, P_n(t) - P_n(x)\, P_{n+1}(t)}{x - t}.$$

О. м. представляются через степенные моменты $\{h_k\}$ весовой функции $h(x)$ по формуле

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \psi_n(x),$$

где

$$\psi_n(x)=\begin{vmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_n \\ h_1 & h_2 & \dots & h_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n-1} & h_{n-2} & \dots & h_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix},$$

а определитель Δ_{n-1} получается из $\psi_n(x)$ вычеркиванием последних строки и столбца, Δ_n определяется аналогично.

На множестве многочленов $\tilde{Q}_n(x)$ степени n с единичным старшим коэффициентом минимум функционала

$$F(\tilde{Q}_n)=\int_a^b \tilde{Q}_n^2(x)\,h(x)\,dx$$

достигается тогда и только тогда, когда

$$\tilde{Q}_n(x)\equiv\tilde{P}_n(x),$$

причем этот минимум равен μ_n^{-2}.

Если многочлены $\{\hat{P}_n(x)\}$ ортонормированы с весом $h(x)$ на отрезке $[a, b]$, то при $p>0$ многочлены

$$\hat{Q}_n(t)=\sqrt{p}\,\hat{P}_n(pt+q),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \dots,$$

ортонормированы с весом $h(pt+q)$ на отрезке $[A, B]$, к-рый переходит в отрезок $[a, b]$ в результате линейного преобразования $x=pt+q$. Поэтому при изучении асимптотич. свойств ортогональных многочленов сначала рассматривается случай стандартного отрезка $[-1, 1]$, а затем полученные результаты распространяются на другие случаи.

Наиболее важный класс О. м., встречающихся при решении краевых задач математич. физики, составляют т. н. *классические ортогональные многочлены*: *Лагерра многочлены* $\{L_n(x;\ \alpha)\}$ (для них $h(x)=x^{\alpha}e^{-x}$, $\alpha>-1$, интервал ортогональности $(0, \infty)$); *Эрмита многочлены* $\{H_n(x)\}$ (для них $h(x)=\exp(-x^2)$, интервал ортогональности $(-\infty, \infty)$); *Якоби многочлены* $\{P_n(x;\ \alpha,\ \beta)\}$ (для них $h(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$, отрезок ортогональности $[-1, 1]$) и их частные случаи: *ультрасферические многочлены*, или многочлены Гегенбауэра $\{P_n(x,\ \alpha)\}$ (для них $\alpha=\beta$), *Лежандра многочлены* $\{P_n(x)\}$ (для них $\alpha=\beta=0$), *Чебышева многочлены* первого рода $\{T_n(x)\}$ (для них $\alpha=\beta=-1/2$) и второго рода $\{U_n(x)\}$ (для них $\alpha=\beta=1/2$).

Весовая функция $h(x)$ классических О. м. $\{K_n(x)\}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона

$$\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{p_0+p_1x}{q_0+q_1x+q_2x^2}=\frac{A(x)}{B(x)},\quad x\in(a,\ b),$$

причем на концах интервала ортогональности выполняются условия

$$\lim_{x\to a+0} h(x)\,B(x)=\lim_{x\to b-0} h(x)\,B(x)=0.$$

Многочлен $y=K_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$B(x)\,y''+[A(x)+B'(x)]\,y'-n\,[p_1+(n+1)\,q_2]\,y=0.$$

Для классич. О. м. имеют место обобщенная формула Родрига

$$K_n(x)=\frac{c_n}{h(x)}\frac{d^n}{dx^n}\,[h(x)\,B^n(x)],$$

где c_n — нормировочный коэффициент, и формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dx}L_n(x;\ \alpha)=-L_{n-1}(x;\ \alpha+1),\quad \frac{d}{dx}H_n(x)=2nH_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}P_n(x;\ \alpha,\ \beta)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+n+1)\,P_{n-1}(x;\ \alpha+1,\ \beta+1).$$

Для частных случаев классических О. м. имеют место представления через гипергеометрич. функцию

$$P_n(x;\alpha,\beta)=\binom{n+\alpha}{n}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right),$$

$$P_n(x)=F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right),$$

$$T_n(x)=F\left(-n,\ n;\ \frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right),$$

$$U_n(x)=(n+1)\,F\left(-n,\ n+2;\ \frac{3}{2},\ \frac{1-x}{2}\right)$$

и через вырожденную гипергеометрич. функцию

$$L_n(x)=n!\,\Phi(-n;\ 1;\ x),$$

$$H_{2n}(x)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\Phi\left(-n;\ \frac{1}{2};\ x^2\right),$$

$$H_{2n+1}(x)=(-1)^n\frac{(2n+1)!}{n!}\Phi\left(-n;\ \frac{3}{2};\ x^2\right).$$

Исторически первым примером О. м. были многочлены Лежандра. Затем были введены многочлены Чебышева, общие многочлены Якоби, многочлены Эрмита и Лагерра. Все эти классич. О. м. играют важную роль во многих прикладных вопросах.

Общая теория О. м. была построена П. Л. Чебышевым. При этом в качестве основного аппарата исследования применялось разложение интеграла

$$\int_a^b \frac{h(t)}{x-t}\,dt$$

в цепную дробь; знаменатели подходящих дробей этой цепной дроби образуют систему О. м. на интервале $(a,\ b)$ с весом $h(t)$.

При изучении О. м. большое внимание уделяется их асимптотич. свойствам, ибо от этих свойств зависят условия сходимости рядов Фурье по О. м.

Асимптотич. свойства классических О. м. впервые исследовал В. А. Стеклов в 1907 (см. [8], с. 218). При этом он применил и усовершенствовал метод Лиувилля, к-рый ранее использовался для изучения решений уравнения Штурма — Лиувилля. В дальнейшем метод Лиувилля — Стеклова применялся во многих работах, в результате чего к настоящему времени (1983) подробно изучены асимптотич. свойства О. м. Якоби, Эрмита, Лагерра.

В общем случае ортогональности на отрезке $[-1,\ 1]$ с произвольным весом, удовлетворяющим нек-рым качественным условиям, асимптотич. формулы для О. м. впервые получил Г. Сегё (G. Szegö) в 1920—24. При этом он ввел многочлены, ортогональные на окружности, изучил их основные свойства и нашел весьма важную формулу, представляющую многочлены, ортогональные на отрезке $[-1,\ 1]$, через многочлены, ортогональные на окружности. А для исследования асимптотич. свойств многочленов, ортогональных на окружности, Г. Сегё разработал метод, основанный на специальном обобщении теоремы Фейера о представлении неотрицательных тригонометрич. полиномов с использованием методов и результатов теории аналитич. функций.

В 1930 С. Н. Бернштейн [2] для исследования асимптотич. свойств О. м. применил методы и результаты теории приближения функций. Он рассмотрел случай весовой функции вида

$$h(x)=\frac{h_0(x)}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,\ 1),\tag{1}$$

где функция $h_0(x)$, наз. **тригонометрическим весом**, удовлетворяет условию

$$0<c_1\leqslant h_0(x)\leqslant c_2<\infty.$$

Если функция $h_0(x)$ на всем отрезке $[-1, 1]$ удовлетворяет условию Дини — Липшица порядка $\gamma=1+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, то есть

$$|h_0(x+\delta)-h_0(x)|\leqslant\frac{M}{|\ln|\delta||^\gamma},\ x,\ x+\delta\in[-1, 1],$$

то для многочленов $\{\hat{P}_n(x)\}$, ортонормированных с весом (1) на всем отрезке $[-1, 1]$, имеет место асимптотич. формула

$$\hat{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi h_0(x)}}\cos(n\theta+q)+O\left[\frac{1}{(\ln n)^\varepsilon}\right],$$

где $\theta=\arccos x$, а q зависит от θ.

При исследовании сходимости рядов Фурье по О. м. возникает вопрос об условиях ограниченности О. м. либо в отдельной точке, либо на нек-ром множестве $A\subset[-1, 1]$, либо на всем отрезке ортогональности $[-1, 1]$, т. е. рассматриваются условия, при к-рых имеет место неравенство типа

$$|\hat{P}_n(x)|\leqslant M,\ x\in A\subseteq[-1, 1]. \tag{2}$$

Впервые такой вопрос поставил В. А. Стеклов (1921). Если тригонометрич. вес $h_0(x)$ на множестве A ограничен от нуля, т. е.

$$h_0(x)\geqslant c_3>0,\quad x\in A\subseteq[-1, 1], \tag{3}$$

и удовлетворяет нек-рым дополнительным условиям, то неравенство (2) имеет место. А в общем случае из неравенства (3) при $A=[-1, 1]$ без дополнительных условий следует оценка

$$|\hat{P}_n(x)|\leqslant\varepsilon_n\sqrt{n},\ \ \varepsilon_n\to 0,\ x\in[-1, 1]. \tag{4}$$

Нули весовой функции являются особыми точками в том смысле, что свойства последовательности $\{\hat{P}_n(x)\}$ существенно различны в нулях и в других точках интервала ортогональности. Пусть, напр., весовая функция имеет вид

$$h(x)=\frac{h_1(x)}{\sqrt{1-x^2}}\prod_{k=1}^{m}|x-x_k|^{\gamma_k},\ \gamma_k>0,\ x_k\in(-1, 1).$$

Тогда если функция $h_1(x)$ положительна и удовлетворяет условию Липшица на $[-1, 1]$, то последовательность $\{\hat{P}_n(x)\}$ ограничена на всяком отрезке $[a, b]\subset\subset[-1, 1]$, не содержащем точек $\{x_k\}$, а в нулях выполняются неравенства

$$|\hat{P}_n(x_k)|\leqslant c_4(n+1)^{\gamma_k/2},\ k=1, 2, \ldots, m.$$

Случай, когда нули весовой функции расположены на концах отрезка ортогональности, рассмотрел С. Н. Бернштейн [2]. Один из его результатов заключается в том, что если весовая функция имеет вид

$$h(x)=h_1(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ x\in[-1, 1],$$

где функция $h_1(x)$ положительна и удовлетворяет условию Липшица, то при $\alpha>-1/2$, $\beta>-1/2$ О. м. допускают весовую оценку

$$(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}|\hat{P}_n(x)|\leqslant c_5,\ x\in[-1, 1],$$

а в точках $x=\pm 1$ возрастают со скоростью $n^{\alpha+1/2}$ и $n^{\beta+1/2}$ соответственно.

В теории О. м. часто рассматриваются т. н. теоремы сравнения. Так, напр., теорема сравнения Корауса: если многочлены $\{\hat{\omega}_n(x)\}$, ортогональные с весом $p(x)$ на отрезке $[a, b]$, равномерно ограничены на нек-ром множестве $A\subset[a, b]$, то на этом множестве ограничены также и многочлены $\{\hat{P}_n(x)\}$, ортогональные с весом $h(x)=p(x)q(x)$, где множитель $q(x)$ положителен и удовлетворяет на отрезке $[a, b]$

условию Липшица порядка $\alpha=1$. Аналогично, при нек-рых условиях на множитель $q(x)$ с системы $\{\hat{\omega}_n(x)\}$ на систему $\{\hat{P}_n(x)\}$ переносятся асимптотич. формулы или другие асимптотич. свойства. Более того, если множитель $q(x)$ есть неотрицательный на отрезке $[a, b]$ многочлен степени m, то многочлены $\{\hat{P}_n(x)\}$ представляются через многочлены $\{\hat{\omega}_n(x)\}$ с помощью определителей порядка $m+1$ (см. [8] с. 42). Эффективные формулы для О. м. получены также в случае весовых функций вида

$$\frac{1}{Q_m(x)\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{Q_m(x)}, \quad \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{Q_m(x)},$$

где $Q_m(x)$ — произвольный положительный на отрезке $[-1, 1]$ многочлен (см. [8] с. 44). А в большинстве случаев вычисление О. м. произвольного веса при больших номерах n затруднительно.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.—Л., 1947, с. 103—26, 314—34, 335—41, 357—74; [2] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1954, с. 7—106; [3] Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, М.—Л., 1950; [4] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979; [5] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Специальные функции математической физики, М., 1978; [6] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, т. 2 — Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [7] Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, пер. с англ., М., 1948; [8] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [9] Справочник по специальным функциям..., пер. с англ., М., 1979; [10] Shohat J. A., Hille E., Walsh J. L., A bibliography on orthogonal polynomials, Wash., 1940.

П. К. Суетин.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ в комплексной области — общее название многочленов, ортогональных на окружности, по контуру или по площади. В отличие от случая ортогональности в действительной области, многочлены указанных трех систем могут иметь мнимые коэффициенты и рассматриваются при всех комплексных значениях независимого переменного. Характерной особенностью случаев ортогональности в комплексной области является тот факт, что в ряды Фурье по указанным системам разлагаются обычно аналитич. функции комплексного переменного, удовлетворяющие нек-рым дополнительным условиям в окрестности границы области аналитичности.

1) О. м. на окружности — система многочленов $\{\varphi_n(z)\}$, имеющих положительный старший коэффициент и удовлетворяющих условию ортогональности (обычно ортонормированности):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(e^{i\theta})\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}\,d\mu(\theta)=\delta_{nm},$$

где $\mu(\theta)$ — ограниченная неубывающая на сегменте $[0,2\pi]$ функция с бесконечным числом точек роста, наз. функцией распределения, а δ_{nm} — символ Кронекера. Аналогично случаю ортогональности на отрезке, для многочленов $\{\varphi_n(z)\}$ имеют место рекуррентное соотношение и аналог формулы Кристоффеля — Дарбу.

Асимптотич. свойства исследуются при условии

$$\int_0^{2\pi}\ln\mu'(\theta)\,d\theta>-\infty.$$

Случай ортогональности на окружности как периодич. случай изучен достаточно подробно, поскольку здесь успешно применяются результаты о приближении периодических функций тригонометрическими полиномами.

Пусть многочлены $\{P_n(x)\}$ ортонормированы на сегменте $[-1, 1]$ с дифференциальным весом $h(x)$, а весовая функция на окружности имеет вид

$$\mu'(\theta)=h(\cos\theta)\,|\sin\theta|.$$

Тогда при условии $x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ имеет место формула Сегё

$$P_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[1+\frac{\varphi_{2n}(0)}{\alpha_{2n}}\right]^{-1/2}\left[\frac{1}{z^n}\varphi_{2n}(z)+z^n\varphi_{2n}\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

где α_{2n} — старший коэффициент многочлена $\varphi_{2n}(z)$.

Если аналитическая в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ имеет угловые граничные значения на окружности $|z|=1$, то при нек-рых дополнительных предположениях справедливо разложение

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(z),\quad |z|<1, \tag{1}$$

коэффициенты к-рого определяются по формуле

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\,d\mu(\theta).$$

Ряды вида (1) являются непосредственным обобщением рядов Тейлора: при $\mu(\theta)=\theta$ будет $\varphi_n(z)\equiv z^n$. При нек-рых условиях на функцию распределения $\mu(\theta)$ ряд (1) в точках окружности $|z|=1$ сходится или расходится одновременно с рядом Тейлора этой же функции $f(z)$, т. е. имеет место теорема о равносходимости этих двух рядов.

2) О. м. по контуру — система многочленов $\{P_n(z)\}$, имеющих положительный старший коэффициент и удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma P_n(z)\overline{P_m(z)}\,h(z)\,|dz|=\delta_{nm},$$

где Γ — спрямляемая жорданова (обычно замкнутая) кривая в комплексной плоскости, а весовая функция $h(z)$ интегрируема по Лебегу и почти всюду положительна на Γ.

Пусть в конечной односвязной области G, ограниченной кривой Γ, задана аналитич. функция $f(z)$, граничные значения к-рой на контуре Γ интегрируемы в квадрате с весом $h(z)$. Тогда с помощью формулы для коэффициентов

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(\zeta)\overline{P_n(\zeta)}\,h(\zeta)\,|d\zeta|$$

этой функции ставится в соответствие ряд Фурье по ортогональным многочленам:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(z). \tag{2}$$

Эти ряды являются естественным обобщением рядов Тейлора по свойству ортогональности на случай односвязной области и служат для представления аналитич. функций. Если выполняется условие полноты

$$\inf_{\{Q_n\}}\int_\Gamma h(z)\,|f(z)-Q_n(z)|^2\,|dz|=0,$$

где нижняя грань берется по множеству всех многочленов $Q_n(z)$, то ряд (2) сходится к функции $f(z)$ в среднем по контуру Γ с весом $h(z)$, а при нек-рых дополнительных условиях и равномерно внутри области G.

3) О. м. по площади — система многочленов $\{K_n(z)\}$, имеющих положительный старший коэффициент и удовлетворяющих условию

$$\iint_G K_n(z)\overline{K_m(z)}\,h(z)\,dx\,dy=\delta_{nm},$$

где весовая функция $h(z)$ неотрицательна, интегрируема по площади конечной области G и неэквивалентна нулю. Если имеет место условие полноты

$$\inf_{\{Q_n\}}\iint_G h(z)\,|f(z)-Q_n(z)|^2\,dx\,dy=0,$$

где нижняя грань берется по множеству всех многочленов $Q_n(z)$, то ряд Фурье по многочленам $\{K_n(z)\}$ функции $f(z)$, аналитической в односвязной области G сходится к этой функции в среднем по площади области G с весом $h(z)$, а при нек-рых дополнительных условиях и равномерно внутри области G.

Лит.: [1] Szegö G., «Math. Z.», 1920, Bd 6, S. 167—202; 1921, Bd 9, S. 167—90, 218—70; [2] Carleman T., «Ark. för mat., astr. och fys.», 1922—23, Bd 17, № 9, S. 1—30; [3] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [4] Геронимус Я. Л., Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, М., 1958; [5] Смирнов В. И., «Журнал Ленинградского физико-матем. об-ва», 1928, т. 2, в. 1, с. 155—79; [6] Коровкин П. П., «Матем. сб.», 1941, т. 9, № 3, с. 469—485; [7] Суетин П. К., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 2, с. 41—88; [8] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 100, с. 1—96. *П. К. Суетин.*

ОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС — система попарно ортогональных элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ гильбертова пространства X такая, что любой элемент $x \in X$ однозначно представим в виде сходящегося по норме ряда

$$x = \sum\nolimits_i c_i e_i,$$

наз. рядом Фурье элемента x по системе $\{e_i\}$. Обычно базис $\{e_i\}$ выбирается так, что $\|e_i\|=1$, и тогда он наз. ортонормированным базисом. В этом случае числа C_i, наз. коэффициентами Фурье элемента x по ортонормированному базису $\{e_i\}$, имеют вид $c_i=(x, e_i)$. Необходимым и достаточным условием того, чтобы ортонормированная система $\{e_i\}$ была базисом, является равенство Парсеваля—Стеклова

$$\sum\nolimits_i |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2$$

для любого $x \in X$. Гильбертово пространство, имеющее ортонормированный базис, является сепарабельным, и обратно, во всяком сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис. Если задана произвольная система чисел $\{c_i\}$ такая, что $\Sigma_i |c_i|^2 < \infty$, то в случае гильбертова пространства с базисом $\{e_i\}$ ряд $\Sigma_i c_i e_i$ сходится по норме к нек-рому элементу $x \in X$. Этим устанавливается изоморфизм любого сепарабельного гильбертова пространства пространству l_2 (теорема Рисса — Фишера).

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966. *В. И. Соболев.*

ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТОР, ортопроектор, — отображение P_L гильбертова пространства H на его подпространство L такое, что $x-P_Lx$ ортогонально P_L! $x-P_Lx \perp P_Lx$. О. п. есть ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, и такой, что $P_L^2=P_L$ и $\|P_L\|=1$. Обратно, если дан ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, и такой, что $P^2=P$, то $L_P=\{Px | x \in H\}$ является подпространством и P есть О. п. на L_P. Два О. п. P_{L_1}, P_{L_2} наз. ортогональными, если $P_{L_1}P_{L_2}=$ $=P_{L_2}P_{L_1}=0$; это эквивалентно условию, что $L_1 \perp L_2$.

Свойства О. п.: 1) для того чтобы сумма $P_{L_1}+P_{L_2}$ двух О. п. была О. п., необходимо и достаточно, чтобы $P_{L_1}P_{L_2}=0$, в этом случае $P_{L_1}+P_{L_2}=P_{L_1 \dotplus L_2}$; 2) для того чтобы композиция $P_{L_1}P_{L_2}$ была О. п., необходимо и достаточно, чтобы $P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_2}P_{L_1}$, в этом случае $P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_1 \cap L_2}$.

О. п. $P_{L'}$ наз. частью О. п. P_L, если L' есть подпространство L. При этом $P_L-P_{L'}$ является О. п. на $L \dot{-} L'$ — ортогональное дополнение к L' в L. В частности, $I-P_L$ есть О. п. на $H \dot{-} L$.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [3] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979. *В. И. Соболев.*

ОРТОГОНАЛЬНЫЙ РЯД — ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad x \in X, \tag{1}$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ — *ортонормированная система* функций (онс) относительно меры $\mu(x)$:

$$\int_X \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,d\mu(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j. \end{cases}$$

Начиная с 18 в. при изучении различных вопросов математики, астрономии, механики и физики (движение планет, колебание струн, мембран и др.) в исследованиях Л. Эйлера (L. Euler), Д. Бернулли (D. Bernoulli), А. Лежандра (A. Legendre), П. Лапласа (P. Laplace), Ф. Бесселя (F. Bessel) и др. эпизодически появляются нек-рые специальные онс и разложения функций по ним. Определяющее же влияние на становление теории О. р. оказали:

а) исследования Ж. Фурье (J. Fourier, 1807—22) (*Фурье метод* решения краевых задач уравнений математич. физики) и в связи с ними работы Ж. Штурма и Ж. Лиувилля (J. Sturm, J. Liouville, 1837—41);

б) исследования П. Л. Чебышева по интерполированию и проблеме моментов (сер. 19 в.), повлекшие за собой создание им общей теории *ортогональных многочленов*;

в) исследования Д. Гильберта (D. Hilbert, нач. 20 в.) по интегральным уравнениям, где, в частности, были установлены общие теоремы о разложении функций в ряд по онс;

г) создание А. Лебегом (H. Lebesgue) теории меры и интеграла Лебега, придавшие теории О. р. современный вид.

Активному развитию теории О. р. в 20 в. способствует применение онс функций и рядов по ним в самых разнообразных разделах науки (математич. физика, вычислительная математика, функциональный анализ, квантовая механика, математич. статистика, операционное исчисление, автоматич. регулирование и управление, различные технич. задачи и т. п.).

Характерные результаты и направления исследований в теории О. р.

1) Пусть $X=[a, b]$, $d\mu(x)=dx$ — мера Лебега и $\{\varphi_n\}$ — онс. Тогда если $f \in L^2(a, b)$, то числа

$$a_n(f) \equiv (f, \varphi_n) \equiv \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$$

наз. коэффициентами Фурье, а ряд (1) с $a_n = a_n(f)$ — рядом Фурье функции f по системе $\{\varphi_n\}$.

Система $\{\varphi_n\}$ замкнута относительно пространства L^2, если для любой функции $f \in L^2$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется полином

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n(x)$$

такой, что норма $\|f - \Phi\|_2 < \varepsilon$. Система $\{\varphi_n\}$ полна относительно L^2, если из условий $f \in L^2$ и $a_n(f)=0$ при всех $n \geq 0$ следует, что $f(x)=0$ почти всюду, т. е. f — нулевой элемент пространства L^2.

Если для нек-рой функции $f \in L^2$ выполняется равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(f) = \int_a^b f^2(x)\,dx, \tag{2}$$

то говорят, что функция f удовлетворяет условию замкнутости Ляпунова — Стеклова (или равенству Парсеваля). Это условие эквивалентно сходимости частных сумм ряда Фурье от f по норме пространства L^2 к функции f.

Аналогично даются определения замкнутости, полноты и условия замкнутости для более общих пространств и мер.

Одним из важнейших вопросов теории О. р. является вопрос однозначного определения функции по ее коэффициентам Фурье. Для пространств L^2 он самым тесным образом связан с выполнением равенства (2) для всех функций $f \in L^2$.

Для случая тригонометрич. системы равенство (2) в 1805 было приведено (фактически без доказательства) М. Парсевалем (M. Parseval), а в 1828 Ф. Бессель установил, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(f) \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \tag{3}$$

неравенство Бесселя). В 1896 А. М. Ляпунов доказал равенство (2) для интегрируемых по Риману функций, а потом П. Фату (P. Fatou) для случая $f \in L^2$.

В. А. Стекловым (1898—1904) был поставлен вопрос о замкнутости общих онс и положительно решен для многих ортогональных систем (сферич. функции, собственные функции оператора Штурма — Лиувилля, системы ортогональных многочленов Эрмита, Лагерра, функции Ламе и др.).

Что касается неравенства (3), то оно оказалось справедливым для произвольных онс и функций $f \in L^2$.

В 1907 Ф. Рисс (F. Riesz) и Э. Фишер (E. Fischer) доказали, что для любой онс $\{\varphi_n\}$ и любой последовательности чисел $\{a_n\} \in l_2$ найдется функция $f \in L^2$, для к-рой $a_n(f) \equiv (f, \varphi_n) = a_n$ и выполнено равенство (2). Из этой теоремы и неравенства Бесселя вытекает, что для любых онс полнота и замкнутость эквивалентны в пространстве L^2; замкнутость в пространствах L^p с $1 < p < \infty$ эквивалентна полноте в пространстве $L^{p'}$, где $1/p' + 1/p = 1$ (С. Банах, S. Banach, 1931).

Неравенство Бесселя и теорема Рисса — Фишера были распространены Г. Харди (G. Hardy), Дж. Литлвудом (J. Littlewood) и Р. Пэли (R. Paley) на пространства L^p. Именно, пусть $\{\varphi_n\}$ — онс, $|\varphi_n(x)| \leqslant M$ и $1 < p < 2$. Тогда:

а) если $f \in L^p$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^p n^{p-2} \leqslant A \|f\|_p^p;$$

б) если дана последовательность $\{a_n\}$ с

$$I \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{p'} n^{p'-2} < \infty,$$

то найдется функция $f \in L^{p'}$, для к-рой $(f, \varphi_n) = a_n$ и $\|f\|_{p'}^{p'} \leqslant AI$, где A зависит лишь от p и M.

2) Другой крупной проблемой теории О. р. является вопрос разложения функции в ряд по простым функциям, сходящийся к ней по норме того или иного пространства. Система элементов $\{\varphi_n\}$ из B-пространства E наз. **базисом** (**безусловным базисом**), если каждый элемент $f \in E$ единственным образом представляется в виде ряда

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n, \quad a_n = a_n(f), \tag{4}$$

сходящегося (безусловно сходящегося) к f по норме пространства E.

Если $\{\varphi_n\}$ — базис в E, то $a_n(f)$ являются линейными непрерывными функционалами в пространстве E и в случае $E = L^p(0, 1)$ с $1 < p < \infty$ имеют вид

$$a_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\psi_n(t)\,dt,$$

где $\{\psi_n\}$ — базис пространства $L^{p'}(0, 1)$, $\{\varphi_n, \psi_n\}$ — биортонормированная система (С. Банах). В частности, если $\varphi_n \equiv \psi_n$, то есть $\{\varphi_n\}$ — онс, то ортогональный базис в L^p автоматически является базисом во всех пространствах L^r, где r — любое число между p и p'.

Исследования по указанной проблеме ведутся в двух направлениях:

а) по заданной онс $\{\varphi_n\}$ находятся те *пространства*, в к-рых $\{\varphi_n\}$ является базисом;

б) для заданного пространства E отыскиваются в нем базисы или ортогональные базисы.

В обоих случаях исследуется взаимосвязь свойств функции f и ее разложения.

Что касается тригонометрич. системы, то она не является базисом пространства непрерывных функций C (П. Дюбуа-Реймон, P. Du Bois Reymond, 1876), но является базисом в пространствах L^p с $1<p<\infty$ (М. Рисс, M. Riesz, 1927). Результат П. Дюбуа-Реймона был распространен на любые ограниченные в совокупности онс.

Ортонормированная система многочленов Лежандра является базисом в пространствах L^p при $p\in(^4/_3,\ 4)$ и не является таковой в остальных пространствах L^q (1946—52, Х. Поллард, H. Pollard, Дж. Нейман, J. Neumann, и В. Рудин, W. Rudin).

В 1910 была построена онс $\{\chi_m\}_{m=0}^{\infty}$ такая, что всякая непрерывная функция $f\in C(0,\ 1)$ единственным образом раскладывается в равномерно сходящийся ряд Фурье по этой системе (А. Хаар, A. Haar). Однако система Хаара $\{\chi_m\}$ не является базисом пространства $C(0,1)$, т. к. функции χ_m разрывны при $m\geqslant 1$. Проинтегрировав систему $\{\chi_m\}$, Г. Фабер (G. Faber, 1910) установил, что система

$$\{f_n(t)\}\equiv\left\{1,\ \int_0^t \chi_m(x)\,dx\right\}$$

является базисом в пространстве C (0,1) и тем самым был найден первый базис в пространстве непрерывных функций. Этот результат Г. Фабера был переоткрыт Ю. Шаудером (J. Schauder, 1927), к-рый указал также класс базисов пространства C (0,1) типа базиса $\{f_n\}$; в честь последнего и введен термин «базис Шаудера», хотя более справедливо было бы называть его «базис Фабера — Шаудера».

Построенные Г. Фабером и Ю. Шаудером базисы не являются ортогональными. Первый ортонормированный базис $\{F_n\}$ в пространстве C (0,1) был найден Ф. Франклином (Ph. Franklin, 1928), к-рый проортогонализировал методом Шмидта систему Фабера — Шаудера $\{f_n\}$ и получил $\{F_n\}$. На этом пути (ортогонализация и интегрирование) был введен и изучен новый класс базисов. Все ортонормированные базисы пространства C (0,1) автоматически являются базисами во всех пространствах L^p с $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Система Хаара $\{\chi_m\}$ является безусловным базисом во всех пространствах L^p с $1<p<\infty$ (1931—37, Р. Пэли, Ю. Марцинкевич, J. Marcinkiewicz). Аналогичный результат имеет место и для системы $\{F_n\}$ Франклина.

В пространствах C и L вообще нет безусловных базисов. Точно также не существует нормированных и ограниченных в совокупности безусловных базисов в пространствах L^p при $1<p<\infty$ и $p\neq 2$.

3) Большой цикл исследований проведен по проблеме сходимости почти всюду тригонометрических и ортогональных рядов.

В 1911 Н. Н. Лузин построил первый пример почти всюду расходящегося тригонометрич. ряда, коэффициенты к-рого стремятся к нулю. Такого типа ряд Фурье был построен А. Н. Колмогоровым (1923). Результат Н. Н. Лузина был распространен на произвольные полные онс, а результат А. Н. Колмогорова обобщен на множества положительной меры для ограниченных в совокупности онс.

Неотрицательная последовательность $\{\omega(n)\}$ с $\omega(n_0)>0$ и $\omega(n)\uparrow$ наз. **множителем Вейля** для сходимости почти всюду рядов по системе $\{\varphi_n\}$, если всякий ряд (1) сходится почти всюду на $X=[0,1]$, как только

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^2 \omega(n) < \infty.$$

Если $\omega(n)\equiv 1$ является множителем Вейля, то $\{\varphi_n\}$ наз. **системой сходимости почти всюду**. Последовательность $\{\omega(n)\}$ наз. **точным множителем Вейля** для сходимости почти всюду рядов (1), если $\{\omega(n)\}$ — множитель Вейля, а всякая $\tau(n)=o(\omega(n))$ при $n\to\infty$ уже не является таковой. Аналогично даются определения множителей Вейля для тех или иных видов сходимости и суммируемости (по мере, безусловная сходимость почти всюду и др.).

Множители Вейля были найдены для тех или иных систем. В 1913 М. Планшерель (M. Plancherel) доказал, что $\{\log^3 n\}$ является множителем Вейля для сходимости почти всюду рядов по любым онс $\{\varphi_n\}$, в 1922 Д. Е. Меньшов и Х. Радемахер (H. Rademacher) установили, что в качестве множителя Вейля можно взять $\{\log^2 n\}$. И что особенно важно, Д. Е. Меньшов доказал неусиляемость этого результата во всем классе онс, т. е. $\{\log^2 n\}$ является точным множителем Вейля для нек-рых онс.

Впоследствии были найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы $\{\omega(n)\}$ была множителем Вейля для сходимости или $(C,1)$-суммируемости почти всюду (по мере и др.) О. р. Было показано, напр., что система $\{\operatorname{sign}\sin \pi n x\}$ не является системой сходимости почти всюду. В 1975 была построена первая полная онс $\{\varphi_n\}$ строгой сходимости, т. е. ряд (1) сходится почти всюду на $X=[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\{a_n\}\in l_2$.

В 1927 установлено, что последовательность $\omega(n)=\tau(n)\log^2 n$ является множителем Вейля для безусловной сходимости почти всюду любых О. р., если

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\tau(n)\log n} < \infty.$$

Этот результат оказался неусиляемым.

В 1960 было показано, что система Хаара $\{\chi_n\}$ не является системой безусловной сходимости почти всюду. На основе этого результата было доказано, что многие системы (базисы в L^2, полные онс и др.) не являются системами безусловной сходимости почти всюду. Для системы $\{\chi_m\}$ последовательность $\{\omega(n)\}$ лишь тогда является множителем Вейля для безусловной сходимости почти всюду, когда

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\omega(n)} < \infty.$$

Поэтому не всякая полная онс имеет точный множитель Вейля для безусловной сходимости почти всюду.

Много исследований было проведено по проблеме представления функций рядами, сходящимися почти всюду, по мере и др. Так, в 1957 было установлено, что для любой полной онс $\{\varphi_n\}$ с $x\in X=[0,1]$ и любой измеримой функции $f(x)$ найдется ряд вида (1), к-рый сходится по мере к $f(x)$ (для случая тригонометрич. системы это утверждение было получено в 1947 Д. Е. Меньшовым). Этот результат теряет силу даже для случая конечных измеримых функций, если вместо сходимости по мере рассматривать сходимость почти всюду.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.—Л., 1951; [2] Банах С., Курс функціонального аналізу, К., 1948; [3] Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, М.— Л., 1950; [4] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [5] Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, пер. с англ., М., 1948; [6] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [7] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963; [8] Tricomi F. G., Vorlesungen über Orthogonalreihen, 2 Aufl., B., 1970; [9] Olevskiĭ A. M., Fourier series with respect to general orthogonal systems, B., 1975; [10] Меньшов Д. Е., Ульянов П. Л., О метрической теории функций в Московском университете за пятидесятилетие, «Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика», 1967, № 5, с. 24—36; [11] Талалян А. А., Представление измеримых функций рядами, «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 5, с. 77—141; [12] Ульянов П. Л., Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, там же, 1964, т. 19, в. 1, с. 3—69; [13] Итоги науки. Математический анализ. 1970, М., 1971, с. 5—264; [14] Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963; [15] Паплаускас А. Б., Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега, М., 1966.

П. Л. Ульянов.

ОРТОМОДУЛЯРНАЯ РЕШЕТКА — решетка с нулем (0) и единицей (1), в к-рой для любого элемента a существует ортодополнение $a^{\perp}$, т. е. такой элемент, что

$$1)\ a\vee a^{\perp}=1;\quad a\wedge a^{\perp}=0;\quad a^{\perp\perp}=a;$$

$$2)\ a\leqslant b\ \Rightarrow\ a^{\perp}\geqslant b^{\perp},$$

и выполняется ортомодулярный закон:

$$3)\ a\leqslant b\Rightarrow b=a\vee(b\wedge a^{\perp}).$$

В О. р. исследовались в основном дистрибутивность и перспективность, неприводимость, модулярность пар, свойства центра и идеалов, коммутант и разрешимость, приложения к логике квантовой механики (см. [1], [2]).

Если $\mathfrak{A}$ — произвольная *Неймана алгебра,* то совокупность $P(\mathfrak{A})$ всех ее проекций является полной О. р. При этом, если $\mathfrak{A}$ — фактор, то на множестве $P(\mathfrak{A})$ можно определить *размерности функцию.* В зависимости от множества значений этой функции факторы делятся на типы I_n, I_∞, II_1, II_∞, III (классификация Муррея — Неймана, [4]). Было установлено, что решетки проекций факторов типа I_n и II_1 являются непрерывными геометриями, т. е. полными дедекиндовыми решетками с дополнениями, удовлетворяющими следующим двум аксиомам непрерывности:

1) $b\wedge\left(\bigvee_{\alpha\in D}a_\alpha\right)=\bigvee_{\alpha\in D}(b\wedge a_\alpha)$ для любого направленного множества индексов D и такого множества элементов $\{a_\alpha,\ \alpha\in D\}$, что $\alpha'\leqslant\alpha''$ влечет $a_{\alpha'}\leqslant a_{\alpha''}$;

2) условие, двойственное к 1).

Возникла задача построения абстрактной теории размерности в рамках такого класса решеток, к-рый включил бы в себя, кроме модулярных решеток проекций факторов типов I_n и II_1, и немодулярные решетки проекций факторов остальных типов. Доказано (см. [5], [6]) существование функции размерности на полной О. р. с отношением эквивалентности, удовлетворяющим нек-рым дополнительным условиям. Этот класс решеток включает в себя и решетки проекций факторов, и непрерывные геометрии.

О. р., являясь естественным обобщением решеток проекций факторов, в то же время составляют существенно более широкий класс, поскольку многие свойства решеток проекций неверны для произвольных О. р. Подобно тому как непрерывные геометрии координатизируются регулярными кольцами (см. [1]), О. р. могут быть координатизированы бэровскими $*$-полугруппами. Если полная О. р. модулярна, то она непрерывна (см. [7]). Существует модулярная решетка с ортодополнениями, пополнение сечениями к-рой не ортомодулярно (в то время как пополнение сечениями полумодулярной решетки с ортодополнениями полумодулярно, и решетка проекций алгебры Неймана полумодулярна).

Лит.: [1] Скорняков Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961; [2] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1968, М., 1970; [3] Фофанова Т. С., в сб.: Упорядоченные множества и решетки, в. 3, [Саратов], 1975, с. 28—40; [4] Murray F., Neumann J., «Ann. Math.», 1936, v. 37, № 1, p. 116—229; [5] Loomis L. H., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1955, № 18, p. 1—36; [6] Maeda S., «J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A.», 1955, v. 19, № 2, p. 211—37; [7] Kaplansky I., «Ann. Math.», 1955, v. 61, № 3, p. 524—541.
Т. С. Фофанова.

ОРТОНОРМИРОВАННАЯ СИСТЕМА — 1) О. с. векторов — множество $\{x_\alpha\}$ ненулевых векторов евклидова (гильбертова) пространства со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ такое, что $(x_\alpha, x_\beta)=0$ при $\alpha \neq \beta$ (ортогональность) и $(x_\alpha, x_\alpha)=1$ (нормируемость).

М. И. Войцеховский.

2) О. с. функций — система $\{\varphi_i(x)\}$ функций пространства $L^2(X, S, \mu)$, являющаяся одновременно ортогональной и нормированной в $L^2(X, S, \mu)$, то есть

$$\int_X \varphi_i(x)\overline{\varphi}_j(x)\, d\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i=j \end{cases}$$

(см. *Нормированная система*, *Ортогональная система*). В математич. литературе часто термин «ортогональная система» означает «ортонормированная система». При исследовании данной ортогональной системы ее нормированность не играет существенной роли. Тем не менее нормированность систем дает возможность более ясной формулировки нек-рых теорем о сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^\infty c_k\varphi_k(x)$$

в терминах поведения коэффициентов $\{c_k\}$. Такой теоремой является, напр., теорема Рисса — Фишера: ряд

$$\sum_{k=1}^\infty c_k\varphi_k(x)$$

по ортонормированной в $L^2[a, b]$ системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ сходится в метрике пространства $L^2[a, b]$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 < \infty.$$

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958.
А. А. Талалян.

ОРТОЦЕНТР треугольника — точка пересечения трех высот треугольника. О. треугольника лежит на *Эйлера прямой*. Середины трех сторон, середины отрезков, соединяющих О. с тремя вершинами, и основания высот треугольника лежат на одной окружности. О. является центром окружности, вписанной в ортоцентрический треугольник, т. е. треугольник, вершинами к-рого являются основания высот данного.

П. С. Моденов.

ОСВЕЩЕНИЯ ЗАДАЧА — задача определения минимального числа направлений пучков параллельных лучей или числа источников, освещающих всю границу выпуклого тела. Пусть K — выпуклое тело n-мерного линейного пространства $\mathbb{R}^n$, а $\mathrm{bd}\, K$ и $\mathrm{int}\, K$ — соответственно граница и внутренность его, причем $\mathrm{bd}\, K \neq \phi$. Наиболее известны следующие О. з.

1) Пусть l — нек-рое направление в пространстве $\mathbb{R}^n$. Точка $x \in \mathrm{bd}\, K$ наз. освещенной извне направлением l, если прямая, проходящая через x параллельно l, проходит через нек-рую точку $y \in \mathrm{int}\, K$ и направление вектора $\overrightarrow{xy}$ совпадает с l. Ищется минимальное число $c(K)$ направлений в пространстве $\mathbb{R}^n$, достаточное для освещения в этом смысле всего множества $\mathrm{bd}\, K$.

2) Пусть z — нек-рая точка множества $\mathbb{R}^n \setminus K$. Точка $x \in \mathrm{bd}\, K$ наз. освещенной извне точ-

кой z, если прямая, определяемая точками z и x, проходит через нек-рую точку $y \in \operatorname{int} K$ и векторы $\overrightarrow{xy}$ и $\overrightarrow{zy}$ одинаково направлены. Ищется минимальное число $c'(K)$ точек из $\mathbb{R}^n \setminus K$, достаточное для освещения в этом смысле всего множества $\operatorname{bd} K$.

3) Пусть z — нек-рая точка множества $\operatorname{bd} K$. Точка $x \in \operatorname{bd} K$ наз. освещенной изнутри точкой $z \neq x$, если прямая, определяемая точками z и x, проходит через нек-рую точку $y \in \operatorname{int} K$ и векторы $\overrightarrow{xy}$ и $\overrightarrow{zy}$ противоположно направлены. Ищется минимальное число $p(K)$ точек из $\operatorname{bd} K$, достаточное для освещения изнутри всего множества $\operatorname{bd} K$.

4) Система точек $Z = \{z | z \in \operatorname{bd} K\}$ наз. фиксированной для K, если она обладает свойствами: а) Z достаточна для освещения изнутри всего множества $\operatorname{bd} K$; б) Z не обладает никаким собственным подмножеством, достаточным для освещения изнутри множества $\operatorname{bd} K$. Ищется максимальное число $p'(K)$ точек фиксированной системы для тела $K \subset \mathbb{R}^n$.

Задача 1) была поставлена в связи с *Хадвигера гипотезой* (см. [1]): минимальное число тел $b(K)$, гомотетичных ограниченному K с коэффициентом гомотетии k, $0<k<1$, достаточное для покрытия K, удовлетворяет неравенству $n+1 < b(K) \leqslant 2^n$, причем значение $b(K)=2^n$ характеризует параллелепипед. Для ограниченного $K \subset \mathbb{R}^n c(K)=b(K)$. Если K неограниченно, то $c(K) \leqslant b(K)$ и существуют такие тела, что $c(K) < b(K)$ или $c(K) = b(K) = \infty$ (см. [1]).

Задача 2) поставлена в связи с задачей 1). Для ограниченного $K \subset \mathbb{R}^n$ верно равенство $c(K) = c'(K)$. Если же K неограниченно, то $c'(K) \leqslant b(K)$ и $c(K) \leqslant c'(K)$. Число $c'(K)$ для любого неограниченного $K \subset \mathbb{R}^3$ принимает одно из значений: 1, 2, 3, 4, ∞ (см. [1]).

Решение задачи 3) имеет вид: число $p(K)$ определено тогда и только тогда, когда K отлично от конуса. В этом случае

$$2 \leqslant p(K) \leqslant n+1;$$

причем $p(K)=n+1$ характеризует n-мерный симплекс пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [1]).

Для задачи 4) (см. [2]) предполагается, что при ограниченном $K \subset \mathbb{R}^n$ верно неравенство

$$p'(K) \leqslant 2^n.$$

Каждая из О. з. тесно связана с нек-рым специальным *покрытием* тела K (см. [1]).

Лит.: [1] Болтянский В. Г., Солтан П. С., Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Киш., 1978; [2] Grünbaum B., «Acta math. Acad. sci. hung.», 1964, v. 15, p. 161—63. *П. С. Солтан.*

ОСЕВОЙ ВЕКТОР, аксиальный вектор, псевдовектор, вектор в ориентированном пространстве, к-рый при изменении ориентации пространства на противоположную преобразуется в противоположный вектор. Пример О. в. — векторное произведение векторов. *БСЭ-3.*

ОСНАЩЕННОЕ ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО — гильбертово пространство H с выделенным в нем линейным всюду плотным подмножеством $\Phi \subset H$, на к-ром задана структура топологического векторного пространства так, что вложение непрерывно. Это вложение порождает непрерывное вложение сопряженных пространств $\Phi' \subset H'$ и цепочку непрерывных вложений $\Phi \subset H \subset \Phi'$ (с помощью стандартного отождествления $H'=H$). Наиболее содержательным является случай, когда оснащение Φ — *ядерное пространство*. Здесь верно следующее усиление спектральной теоремы для самосопряженных операторов, действующих в H: любой такой оператор A, непрерывно (в топологии Φ) переводящий Φ в себя, обладает полной системой обобщенных собственных функций $\{F_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ ($\mathfrak{A}$ — нек-рое множество индексов), т. е. таких элементов $F_\alpha \in \Phi'$, что для любого $\varphi \in \Phi$

$$F_\alpha (A\varphi) = \lambda_\alpha F_\alpha (\varphi), \quad \alpha \in \mathfrak{A},$$

причем множество значений функции $\alpha \to \lambda_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, содержится в спектре оператора A и имеет полную меру относительно спектральной меры $\sigma_f(\lambda)$, $f \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$, любого элемента $f \in H$. Полнота системы означает, что $\varphi \neq 0$, $F_\alpha(\varphi) \neq 0$ для любого $\varphi \in \Phi$ хотя бы при одном $\alpha \in \mathfrak{A}$. Кроме того, для любого элемента $\varphi \in \Phi$ существует его разложение по системе обобщенных собственных функций $\{F_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, обобщающее известное разложение по базису собственных векторов для оператора с дискретным спектром.

Пример: разложение в интеграл Фурье

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{isx} \tilde{f}(s)\, dx, \; x \in \mathbb{R}, \; f \in L_2(\mathbb{R}), \; \tilde{f} \in L_2(\mathbb{R}),$$

$\{e^{isx}, s \in \mathbb{R}\}$ — система обобщенных собственных функций оператора дифференцирования, действующего в $L_2(\mathbb{R})$, возникающая при естественном оснащении этого пространства с помощью пространства Шварца $S(\mathbb{R})$. Аналогичные утверждения верны и для унитарных операторов, действующих в О. г. п.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, М., 1958; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [3] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965. *Р. А. Минлос.*

ОСНАЩЕННОЕ МНОГООБРАЗИЕ — гладкое многообразие с фиксированной тривиализацией нормального расслоения. Более точно, пусть гладкое n-мерное многообразие M вложено в $\mathbb{R}^{n+k}$ и пусть (k-мерное) нормальное расслоение ν, отвечающее этому вложению, тривиально. Оснащением многообразия M, отвечающим этому вложению, наз. любая тривиализация расслоения ν; при этом одному и тому же вложению могут отвечать разные оснащения. О. м. введены в 1937 (см. [1]) для доказательства того, что группы *бордизмов* О. м. размерности n, лежащих в $\mathbb{R}^{n+k}$, изоморфны гомотопич. группе $\pi_{n+k}(S^n)$; на этом пути были вычислены группы $\pi_{n+1}(S^n)$ и $\pi_{n+2}(S^n)$.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976.

Ю. Б. Рудяк.

ОСНОВАНИЕ ИЗГИБАНИЯ — *сопряженная сеть* на поверхности F и ее изгибании F^* вне точек их конгруэнтности. О. и. характеризуется тем, что изгиб — отношение нормальных кривизн k и k^* в соответствующих по изометрии точках F и F^* вдоль соответствующих направлений — имеет экстремальные значения вдоль направлений О. и.

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2, М.— Л., 1948. *М. И. Войцеховский.*

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ — раздел геометрии, в к-ром исследуются основные понятия геометрии, соотношения между ними и связанные с ними вопросы.

Важная роль основных понятий и соотношений между ними, на базе к-рых строятся определения фигур и доказываются геометрич. предложения, отмечается уже в работах античных геометров. Так, развивая дедуктивный метод в геометрии, они указывали на особую роль основных понятий, аксиом и постулатов, составляющих фундамент геометрии. В «Началах» Евклида (3 в. до н. э.) аксиомам и постулатам предпослана цепь определений всех понятий, к-рые используются в дальнейшем изложении. Среди этих определений особое место принадлежит понятиям «точка», «прямая», «плоскость», определения к-рых не опираются на другие геометрич. понятия. Сами определения этих **основных понятий** с геометрич. точки зрения неудовлетворительны, т. к. они выражают лишь характерное физич. свойство (напр., «точка есть то, что не имеет частей», т. е. под точкой понимается малое физически неделимое тело). Поэтому уже в трудах геометров, написанных почти одновременно с «Началами», содержатся многочисленные комментарии и критич. анализ определений основных и других геометрич. понятий, аксиом и постулатов. Но это были лишь уточнения, не затрагивающие основы определений. По существу, доказательства многих геометрич. теорем опирались в основном на наглядность чертежа, на физич. осуществимость необходимых геометрич. построений, а не выводились строго логически из аксиом и постулатов. Только в 19 в. и особенно в нач. 20 в. появляются работы, в к-рых выясняется все глубокое значение основных понятий и соотношений между ними для логически безупречного дедуктивного метода построения геометрии и ее обоснования. Причем во многом этому углубленному анализу основ геометрии способствовало открытие неевклидовой геометрии Лобачевского (1826). Результаты по обоснованию евклидовой геометрии на основе тех же принципов и понятий, что и в «Началах» Евклида, содержатся в работах Дж. Пеано (G. Peano, 1894), М. Паша (M. Pasch, 1882), М. Пиери (M. Pieri, 1899), Д. Гильберта (D. Hilbert) и др. Наибольшую известность получила *Гильберта система аксиом* евклидовой геометрии (1899). Добиваясь логически удовлетворительного построения евклидовой геометрии, Д. Гильберт выделил 5 групп аксиом, показал их необходимость и достаточность для построения всей евклидовой геометрии. Вместе с тем впервые была проведена логич. обработка всей системы, выяснена непротиворечивость системы с помощью построения числовой модели, установлена независимость групп аксиом, а также полнота системы. В отличие от концепции пространства как «места» для всех фигур, проводимой в «Началах», Д. Гильберт рассматривает его как множество всех «точек», «прямых», «плоскостей» и фигур, построенных на основе этих понятий.

Набор основных понятий в системе Гильберта был заимствован (и уточнен) из «Начал», однако эта система является, по существу, чисто геометрич. схемой, свободной от ссылок на наглядность чертежа. Вместе с тем язык геометрии, построенной на основе системы Гильберта, почти не отличается от языка «Начал».

Почти одновременно с системой Гильберта появились и др. системы аксиом евклидовой геометрии. Так, в системе Ф. Шура (F. Schur, 1909) в качестве основных понятий были «точка», «отрезок» и т. д., а вместо «конгруэнтности» фигур в этой системе вводилось понятие «движение». Введение понятия «движение» позволило применить в геометрии групповой подход к исследованию движений, алгебраизировать методы исследования. Упомянутые выше геометрич. схемы не полностью удовлетворяют требованиям дальнейшего обобщения понятия пространства и др. понятий и, кроме того, недостаточно «алгебраичны».

Новые подходы к обоснованию евклидовой геометрии потребовали выработки нового «языка», с помощью к-рого оказывается возможным провести соответствующие дальнейшие обобщения понятий, алгебраизацию доказательств, классификацию объектов и т. д. Одной из распространенных схем основания евклидовой геометрии, в к-рой сконцентрированы возможности обобщений, перевода на язык алгебры геометрич. понятий, является система аксиом, предложенная Г. Вейлем (H. Weil, 1916). Ниже приводится одна из транскрипций схемы Вейля.

Трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ определяется как множество, состоящее из элементов двух родов — «точек» и «векторов», удовлетворяющих следующим 4 группам аксиом:

I группа — аксиомы, определяющие соотношения между точками и векторами. I_1. Существует по меньшей мере одна точка. I_2. Каждой упорядоченной паре точек поставлен в соответствие один и только один вектор. I_3. Для каждой точки A и каждого вектора $\boldsymbol{a}$ существует одна и только одна точка B такая, что $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ ($\overrightarrow{AB}$ есть вектор $\boldsymbol{a}$). I_4. Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

На основе этой группы аксиом определяется сумма векторов, к-рая удовлетворяет требованиям коммутативности и ассоциативности. Существует нуль-вектор, противоположный вектор. Векторы по сложению образуют группу.

II группа — аксиомы, описывающие операцию умножения вектора на число. II_1. Каждому вектору $\boldsymbol{a}$ и каждому $k\in\mathbb{R}$ поставлен в соответствие определенный вектор $k\boldsymbol{a}$ ($k\boldsymbol{a}$ наз. произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на число k). II_2. Умножение вектора на 1 не изменяет вектора. II_3. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел $(k_1+k_2)\boldsymbol{a}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{a}$. II_4. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения векторов $k(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=k\boldsymbol{a}_1+k\boldsymbol{a}_2$. II_5. Умножение вектора на число ассоциативно $k_1(k_2\boldsymbol{a})=(k_1k_2)\boldsymbol{a}$.

С помощью операций сложения и умножения на число определяется линейная комбинация векторов, их линейная зависимость.

III группа определяет размерность пространства. III_1. Существуют три линейно независимых вектора, но всякие четыре — линейно зависимы.

Эта аксиома имеет топологич. характер; из нее вместе со второй группой аксиом следует, что $\mathbb{R}^3$ является топологич. пространством размерности 3. Первые три группы аксиом определяют трехмерное аффинное пространство.

IV группа определяет метрич. свойства. IV_1. Любым двум векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ поставлено в соответствие определенное число (скалярное произведение) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=l$, $l\in\mathbb{R}$. IV_2. Симметричность скалярного произведения: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$. IV_3. Дистрибутивность скалярного произведения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$. IV_4. Для $k\in\mathbb{R}$ имеет место $(\boldsymbol{a}, k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. IV_5. Скалярный квадрат вектора неотрицателен $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})\geqslant 0$, причем $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=0$ только для нуль-вектора.

На основе IV группы аксиом определяется расстояние между точками, угол между векторами и т. д.; с помощью векторов — «отрезки», «прямые», «плоскости» и т. д.

Схема Вейля допускает обобщение на случай любой размерности, с помощью соответствующего изменения аксиом в эту схему включаются гиперболич. и эллиптич. пространства и т. д.

Система аксиом Вейля евклидовой геометрии является непротиворечивой, независимой и удовлетворяет требованию полноты (категоричности, или минимальности). Непротиворечивость устанавливается с помощью числовой модели: упорядоченным тройкам чисел (x^1, x^2, x^3), $x^i\in\mathbb{R}$; $i=1, 2, 3$, ставятся во взаимно однозначное соответствие «точки» пространства $\mathbb{R}^3$. Вектор с началом в (x_1^1, x_1^2, x_1^3) и концом в (x_2^1, x_2^2, x_2^3) определяется тройкой $\boldsymbol{a}=(a^1, a^2, a^3)$, $a^i=x_2^i-x_1^i$; $i=1, 2, 3$. Сумма векторов (a^1, a^2, a^3) и (b^1, b^2, b^3) определяется тройкой $(a^1+b^1, a^2+b^2, a^3+b^3)$, произведение вектора (a^1, a^2, a^3) на число $k\in\mathbb{R}$ есть тройка (ka^1, ka^2, ka^3). Скалярное произведение векторов (a^1, a^2, a^3) и (b^1, b^2, b^3) выражается числом $\Sigma_{i=1}^3 a^i b^i$. Базисные векторы (тройка линейно независимых векторов) можно изображать тройками $e^1=(1,0,0)$, $e^2=(0,1,0)$, $e^3=(0,0,1)$. Для доказательства независимости аксиом друг от друга и независимости групп аксиом строится интерпретация системы, получающейся из данной путем замены какой-либо ее аксиомы ее отрицанием. Полнота системы выводится из полноты множества действительных чисел.

В качестве основных понятий при создании схемы евклидовой геометрии могут быть положены геометрич. преобразования. Так, в системе аксиом Ф. Бахмана (F. Bachmann) в качестве такого понятия вводится преобразование симметрии. С помощью симметрий, порождающих группу движений евклидовой (метрической) плоскости, определяются «точки» и «прямые» как инволютивные элементы этой группы. Теоретико-групповые отношения являются основой при определении понятий «инцидентность», «ортогональность» и т. п., геометрич. доказательства заменяются вычислениями, переводятся на язык алгебры.

Обоснование евклидовой геометрии влияло и на разработку вопросов обоснования неевклидовых геометрий. В кон. 19 — нач. 20 вв. сформировались основные современные методы и подходы в О. г. Новые подходы к понятиям, лежащим в основе геометрии, были разработаны Б. Риманом (B. Riemann), С. Ли (S. Lie), Ф. Клейном (F. Klein), А. Кэли (A. Cayley) и др. В основу геометрич. понятий были положены многомерные многообразия, группы преобразований, действующих на многообразиях, инварианты групп преобразований и т. п.

Групповой подход впервые был четко сформулирован в эрлангенской программе Ф. Клейна: геометрич. пространство определяется как множество Φ с фиксированной группой Ω его преобразований; объектом геометрии является изучение Ω-инвариантных свойств пространства. (Напр., n-мерное аффинное пространство A^n определяется как множество, на к-ром просто транзитивно действует векторная группа размерности n.) С. Ли, Ф. Клейн, А. Кэли провели исследование групп преобразований, на основе к-рого возникают новые возможности в классификации и обосновании евклидовой и неевклидовых геометрий как геометрий определенных групп преобразований. Геометрия становится учением об инвариантах групп преобразований, и О. г. опирается на теорию групп.

В работах Б. Римана был разработан метрич. подход к О. г. Геометрич. пространство рассматривается как множество, снабженное метрикой, к-рая удовлетворяет тем или иным аксиомам. Б. Риман показал, что все внутренние свойства пространства определяются заданной квадратичной дифференциальной формой (кривизна, геодезич. линии и т. д.), тем самым были открыты широкие классы различных метрич. геометрий. Впервые классификация пространств и их геометрий была осуществлена на метрич. основе. Б. Риман указал на особую роль выбора координат в точечном многообразии для исследования самих квадратичных форм. Так, для пространства постоянной римановой кривизны Б. Риман привел стандартный вид, к к-рому может быть приведена квадратичная форма путем соответствующего выбора координат.

Координатный метод евклидовой геометрии был обобщен для различных пространств, а также нашел развитие в дифференциальной геометрии; понятие многообразий, опирающееся на выбор координатных систем, получает многочисленные применения в геометрии. Групповой подход к исследованию преобразований дифференциально-геометрич. объектов позволил создать теорию инвариантов метрических (квадратичных) форм. Эта теория инвариантов групп преобразований явилась основой для построения и логич. обоснования современной дифференциальной геометрии. В качестве одного из основных понятий выкристаллизовалось понятие геометрич. объекта, геометрия рассматривается как *геометрических объектов теория.* Понятие дифференцируемого многообразия позволяет дать строгие определения дифференциально-геометрич. объектам, в частности обосновать методы анализа в геометрии и геометрич. методы в анализе.

Обоснование евклидовой (и, вообще, любой) геометрии, опирающееся на определенную систему аксиом, обнаруживает особую роль теоретико-множественных принципов при логич. анализе систем аксиом. Именно, независимость и непротиворечивость системы аксиом может быть установлена путем построения числовой модели, реализующей эту систему. Поэтому теория множеств в О. г. является своего рода эталоном безупречного логич. построения геометрич. теории. Геометрич. аксиомы непрерывности (и полноты) по существу являются нек-рыми эквивалентами теоретико-множественных аксиом.

Построение геометрии над определенным полем обосновывается путем применения понятий теоретико-множественного характера. Начиная с создания декартовой аналитич. геометрии, идея отображения множества точек на множество действительных чисел (или на произвольное числовое множество) приобретает большое значение для О. г. Развитие этой идеи позволяет определить и классифицировать геометрии по тому числовому множеству, над к-рым они построены.

В О. г. широко применяются теоретико-множественные методы для изучения геометрич. преобразований. Как уже отмечалось выше, инварианты групп преобразований являются предметом изучения в определенной этой группой геометрии. Важное применение теории инвариантов (проективных) преобразований нашел Ф. Клейн для интерпретации неевклидовых пространств и доказательства непротиворечивости неевклидовых геометрий. Углубленному анализу подверглись такие понятия, как «угол», «ортогональность» и т. д. Исследования проективных комплексных пространств, различных проективных мероопределений имеют большое значение в классификации пространств с определенной структурой.

В О. г. применяются также топологич. методы классификации многообразий, с помощью этих методов выявляются наиболее существенные различия между классами и типами многообразий, исследуются глобальные их свойства.

Основные методы и подходы в О. г.— синтетический, групповой и метрический — имеют значение и в современных исследованиях в этой области геометрии. Напр., обобщением идей Б. Римана в О. г. является инфинитезимальный подход, при к-ром геометрич. структура определяется заданием поля нек-рых инфинитезимальных величин (напр., финслеровой метрики, связности и т. п.). Многие задачи физики и механики при этом допускают геометрич. интерпретацию и при их решении используются геометрич. соображения. Вообще, все современные системы аксиом евклидовой (и неевклидовой) геометрии используют в различной степени все три подхода в О. г.

Изучение средств, используемых в доказательствах теорем на основе данной системы аксиом, является одной из важных проблем в О. г. В «Началах» Евклида для доказательств применялась классич. логика Аристотеля. Много внимания уделил этим вопросам Д. Гильберт, наметивший основные задачи математич. логики. Непротиворечивость систем геометрич. аксиом устанавливается путем построения числовых моделей этих систем и их логического исследования.

Значительное место в О. г. занимают вопросы измерения отрезков, площадей, объемов. Понятия меры отрезка, площади, объема основываются на определенных группах аксиом. Так, напр., теория площадей многоугольников на евклидовой плоскости в системе аксиом Гильберта обосновывается аксиомами, относящимися только к плоскости и независимо от аксиом непрерывности (см. *Неархимедова геометрия*, *Непаскалева геометрия*).

В О. г. исследуется проблема о материальных объективных истоках геометрич. понятий и систем аксиом. Одним из принципов построения геометрич. систем долгое время являлся принцип физич. осуществимости системы на какой-либо материальной модели. Как отмечалось выше, еще в «Началах» была сделана попытка дать истолкование основных понятий с точки зрения их физич. свойств. В кон. 19 в., после открытия геометрии Лобачевского, вновь возник вопрос об объективной возможности других, отличных от евклидовой, геометрий. Проблему объективного существования неевклидовых геометрий многие геометры решали путем построения физич. моделей, с помощью к-рых пытались убедиться в независимости и непротиворечивости геометрич. систем аксиом. Так, Н. И. Лобачевский пытался обосновать непротиворечивость выводов, вытекающих из его аксиомы о параллельных, путем физич. измерений дефектов треугольников гигантских размеров, вершины к-рых располагались на удаленных от Земли космич. телах, чтобы убедиться в том, что дефекты различны для различных треугольников и что сумма внутренних углов треугольников может быть меньше двух прямых углов. Попытку обосновать существование различных метрич. геометрий предпринял Г. Гельмгольц (H. Helmholtz), в работе, написанной вскоре после появления результатов Б. Римана. Основным понятиям, к-рыми оперирует метрич. геометрия, Г. Гельмгольц дал физич. истолкование, в основу геометрич. свойств пространства он положил нек-рые физич. законы, из к-рых вытекает возможность построения геометрии этого пространства. Эвристическим путем из основных физич. законов Г. Гельмгольц получил метрику пространства в виде дифференциальной формы, к-рая, как показал Б. Риман, определяет все внутренние свойства пространства. Вместо гипотез, лежащих в О. г., предложенных Б. Риманом, Г. Гельмгольц рассматривал факты, из к-рых вытекали те же выводы в метрич. геометрии, подчеркивая тем самым опытную проверку справедливости (непротиворечивости) этих выводов.

Объективно работы по опытной проверке геометрич. систем служили распространению новых геометрич. идей, способствовали появлению углубленного логич. анализа геометрич. систем, выработке современных основных требований к этим системам. Вместе с тем попытки физич. обоснования геометрии способствовали проникновению геометрических идей и методов в различные области математики, физики и механики.

О. г. имеют большое значение в методологии геометрии. В процессе преподавания современных курсов геометрии в университетах и педагогич. вузах раздел О. г. занимает одно из центральных мест. В связи с этим все большую роль играет выбор системы основных понятий и аксиом, чтобы «сократить» путь от самих аксиом до выводимых из них содержательных теорем, находящих практич. применение (в частности, в решении задач).

Лит.: [1] Начала Евклида, кн. 1—15, пер. с греч., М., 1948—50; [2] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [3] Веблен О., Уайтхед Дж., Основания дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1949; [4] Об основаниях геометрии, М., 1956; [5] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1—2, М.— Л., 1949—56; [6] Каган В. Ф., *Очерки по геометрии*, М., 1963; [7] Буземан Г., Геометрия геодезических, пер. с англ., М., 1962; [8] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [9] Бахман Ф., Построение геометрии на основе понятия симметрии, пер. с нем., М., 1969; [10] Розенфельд Б. А., История неевклидовой геометрии, М., 1976; [11] Погорелов А. В., Элементарная геометрия, 2 изд., М., 1974; [12] Шоке Г., Геометрия, пер. с франц., М., 1970; [13] Донеддю А., Евклидова планиметрия, пер. с франц., М., 1978; [14] Картеси Ф., Введение в конечные геометрии, пер. с англ., М., 1980.

Л. А. Сидоров.

ОСНОВНОГО ТИПА АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, общего типа алгебраическая поверхность,— поверхность одного из самых обширных классов *алгебраических поверхностей* в классификации Энрикеса. А именно, гладкая проективная поверхность X над алгебраически замкнутым полем k наз. О. т. а. п., если

$$\varkappa(X)=2,$$

где $\varkappa$ — *Кодаиры размерность.* Это условие равносильно тому, что для нек-рого целого $n>0$ линейная система $|nK|$, где K — канонич. дивизор на X, определяет бирациональное отображение поверхности X на ее образ в P^N для нек-рого N. Всякая О. т. а. п. обладает бирациональным морфизмом на свою минимальную модель.

Минимальные О. т. а. п. характеризуются (см. [1], [3], [6]) каждым из следующих наборов свойств:

а) $K^2>0$ и $KD\geqslant 0$ для любого эффективного дивизора D;

б) $K^2>0$ и $P_2\geqslant 2$, где $P_2=\dim|2K|+1$ — двукратный род X;

в) $K^2>0$ и поверхность X не рациональна;

г) существует такое целое n_0, что при любом $n\geqslant n_0$ отображение φ_{nK}, определяемое системой $|nK|$, является бирациональным морфизмом поверхности X на ее образ в $P^{\dim|nK|}$. Для О. т. а. п. существуют (см. [2], [3], [6], [10]) соотношения (вида неравенств) между численными характеристиками. Пусть p_g — геометрич. род и q — иррегулярность поверхности X, тогда для минимальной О. т. а. п. имеют место следующие неравенства:

1) $q\leqslant p_g$;

2) $p_g\leqslant\frac{1}{2}K^2+2$, если K^2 четно, $p_g\leqslant\frac{1}{2}K^2+\frac{3}{2}$, если K^2 нечетно (эти два неравенства наз. неравенствами Нётера);

3) $K^2\leqslant 3C_2$, где C_2 — второй класс Чжэня поверхности X (или топологическая эйлерова характеристика).

Наиболее полный результат о кратноканонич. отображениях φ_{nK} О. т. а. п. есть теорема Бомбьери — Кодаиры: пусть X — минимальная О. т. а. п. над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, тогда отображение

$$\varphi_{nK}: X\longrightarrow P^{\dim|nK|}$$

является бирациональным морфизмом на свой образ при всех $n\geqslant 5$. Существуют (см. [5], [8], [9]) О. т. а. п., для к-рых φ_{4K} уже не обладает этим свойством.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Богомолов Ф. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1978, т. 42, с. 1227—87; [3] Beauville A., Surfaces algébriques complexes, P., 1978; [4] Bombieri E., «Publ. Math. IHES», 1972, № 42, p. 171—219; [5] Bombieri E., Cataneso F., The tricanonical map of surface with $K^2=2$, $p_g=0$, C. P. Ramanujam, Atribute, B.— [e. a.], 1978, p. 279—90; [6] Bombieri E., Husemoller D., Classification and embeddings of surfaces, Proceedings of Symposia in Pure Math., № 29, Algebraic geometry, 1974, p. 329—420; [7] Horikawa E., «Ann. Math.», 1976, v. 104, p. 357—87; [8] его же, «Invent. math.», 1976, v. 37, p. 121—55; 1978/79, v. 50, p. 103—28; [9] Kodaira K., «J. Math. Soc. Japan», 1968, v. 20, p. 170—92; [10] Miyaoka Y., «Invent. math.», 1977, v. 42, p. 225—37.

В. А. Исковских.

ОСОБАЯ ТОЧКА — 1) О. т. аналитической функции $f(z)$ — препятствие для *аналитического продолжения* элемента функции $f(z)$ комплексного переменного z вдоль какого-либо пути на плоскости этого переменного.

Пусть аналитическая функция $f(z)$ определена некоторым вейерштрассовым элементом $(U(\zeta, R), f_\zeta)$, состоящим из степенного ряда

$$f_\zeta = f_\zeta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\zeta)^k \qquad (1)$$

и его круга сходимости

$$U(\zeta, R) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z-\zeta| < R\}$$

с центром $\zeta \neq \infty$ и радиусом сходимости $R > 0$. Рассмотрим всевозможные пути $L : [0,1] \to \mathbb{C}$, т. е. непрерывные отображения $L : z = \varphi(t)$ отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$ в расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$, начинающиеся в центре этого элемента ζ, $\zeta = \varphi(0)$. Если аналитич. продолжение данного элемента возможно вдоль любого такого пути в любую точку $z \in \overline{\mathbb{C}}$, то получающаяся при этом полная аналитич. функция $f(z)$ сводится к константе: $f(z) = \text{const}$. Для нетривиальных же аналитич. функций $f(z) \neq \text{const}$ характерно существование препятствий для аналитич. продолжения вдоль нек-рых путей L.

Пусть точка a расширенной плоскости $\mathbb{C}$ расположена на пути $L_1 : z = \varphi_1(t)$, $a = \varphi_1(\tau_1)$, $0 < \tau_1 \leqslant 1$, $\varphi_1(0) = \zeta$, и на пути $L_2 : z = \varphi_2(t)$, $a = \varphi_2(\tau_2)$, $0 < \tau_2 \leqslant 1$, $\varphi_2(0) = \zeta$, причем аналитич. продолжение вдоль L_1 и L_2 осуществимо во все предшествующие точки $z = \varphi_1(t)$, $0 \leqslant t < \tau_1$, и $z = \varphi_2(t)$, $0 \leqslant t < \tau_2$. Два таких пути L_1 и L_2 наз. **эквивалентными** по отношению к аналитич. продолжению данного элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ в точку a, если для любой окрестности $V(a)$ точки a в $\overline{\mathbb{C}}$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что вейерштрассов элемент, получаемый из $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ посредством аналитич. продолжения вдоль L_1 до какой-либо точки $z' = \varphi_1(\tau')$, $\tau_1 - \varepsilon < \tau' < \tau_1$, может быть продолжен вдоль нек-рого пути, расположенного в $V(a)$, в элемент, получаемый посредством продолжения вдоль L_2 из $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ до какой-либо точки $z'' = \varphi_2(\tau'')$, $\tau_2 - \varepsilon < \tau'' < \tau_2$.

Если аналитич. продолжение в точку a осуществимо вдоль нек-рого пути L, то оно возможно и вдоль всех путей класса эквивалентности $\{L\}$, содержащего L. В этом случае пара $(a, \{L\})$ наз. **регулярной**, или **правильной**; она определяет однозначную регулярную ветвь аналитич. функции $f(z)$ в окрестности точки $V(a)$.

Если же аналитич. продолжение вдоль нек-рого пути $L : z = \varphi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\varphi(0) = \zeta$, проходящего через a, $a = \varphi(\tau)$, $0 < \tau \leqslant 1$, осуществимо во все точки $\varphi(t)$, $0 \leqslant t < \tau$, предшествующие a, но не осуществимо в точку $a = \varphi(\tau)$, то a есть **особая точка при аналитическом продолжении элемента** $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ **вдоль пути** L. В этом случае она будет особой и при продолжении вдоль всех проходящих через a путей класса эквивалентности $\{L\}$. Пара $(a, \{L\})$, состоящая из точки $a \in \overline{\mathbb{C}}$ и класса эквивалентности $\{L\}$ путей L, проходящих через a, для каждого из к-рых точка a особая, наз. **особой точкой аналитической функции** $f(z)$, определяемой элементом $(U(\zeta, R), f_\zeta)$. Две О. т. $(a, \{L\})$ и $(b, \{M\})$ считаются совпадающими, если $a = b$ и совпадают классы $\{L\}$ и $\{M\}$. При этом точка a расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ наз. **проекцией**, или z-**координатой**, О. т. $(a, \{L\})$; говорят также, что О. т. $(a, \{L\})$ расположена над точкой $a \in \mathbb{C}$. В общем случае над одной и той же точкой $a \in \overline{\mathbb{C}}$ могут располагаться несколько и даже счетное множество различных особых и регулярных пар $(a, \{L\})$, получающихся при аналитич. продолжении одного и того же элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$.

Если радиус сходимости исходного ряда (1) $R < \infty$, то на окружности $\Gamma = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z-\zeta| = R\}$ круга сходимости $U(\zeta, R)$ непременно имеется хотя бы одна особая точка a элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$, то есть О. т. аналитич. функции $f(z)$ при продолжении вдоль путей $z=\varphi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, класса $\{L\}$ таких, что $z=\varphi(t) \in U(\zeta, R)$ при $0 \leqslant t < 1$, $a=\varphi(1)$. Иначе говоря, О. т. элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ — это такая точка $a \in \Gamma$, что непосредственное аналитич. продолжение элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ из круга $U(\zeta, R)$ в любую окрестность $V(a)$ невозможно. В этой ситуации и вообще во всех случаях, когда отсутствие явного описания класса путей $\{L\}$ не может повести к недоразумениям, ограничиваются обычно только указанием z-координаты О. т. a. Изучение расположения О. т. аналитич. функции в зависимости от свойств последовательности коэффициентов $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ исходного элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ является одним из важных направлений исследований в теории функций (см. *Адамара теорема* мультипликационная, *Звезда элемента функции*, а также [1], [3], [5]). Известно, напр., что О. т. ряда

$$f_0(z) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} b^k z^{d^k},$$

где $b \in \mathbb{C}$, $|b| < 1$, $d \geqslant 2$ — натуральное число, заполняют всю границу $\Gamma = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| = 1\}$ его круга сходимости $U(0, 1)$, хотя сумма этого ряда непрерывна всюду в замкнутом круге $\overline{U}(0, 1) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| \leqslant 1\}$. Здесь окружность Γ есть естественная граница аналитич. функции $f_0(z)$, аналитич. продолжение $f_0(z)$ за пределы круга $U(0, 1)$ невозможно.

Пусть в достаточно малой окрестности $V(a) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z-a| < R\}$ точки $a \neq \infty$ (или $V(\infty) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > R\}$) аналитич. продолжение элементов, получаемых вдоль путей определенного класса $\{L\}$, возможно во все точки, отличные от a, т. е. по всем путям, расположенным в проколотой окрестности $V'(a) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : 0 < |z-a| < R\}$ (соответственно $V'(\infty) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : R < |z| < \infty\}$); тогда О. т. $(a, \{L\})$ наз. *изолированной особой точкой*. Если при этом аналитич. продолжение элементов, получаемых вдоль путей класса $\{L\}$, по всевозможным замкнутым путям, расположенным в $V'(a)$, не изменяет этих элементов, то изолированная О. т. $(a, \{L\})$ наз. особой точкой однозначного характера. Такая О. т. может быть полюсом или существенно особой точкой: если существует бесконечный предел $\lim f(z) = \infty$ при стремлении $z \to a$ вдоль путей класса $\{L\}$, то О. т. однозначного характера $(a, \{L\})$ наз. *полюсом*; если не существует никакого конечного или бесконечного предела $\lim f(z)$ при стремлении $z \to a$ вдоль путей класса $\{L\}$, то $(a, \{L\})$ — *существенно особая точка*; случай конечного предела соответствует регулярной паре $(a, \{L\})$. Если же аналитич. продолжение элементов, получаемых вдоль путей класса $\{L\}$, по замкнутым путям, окружающим в $V'(a)$ точку a, изменяет эти элементы, то изолированная О. т. $(a, \{L\})$ наз. *ветвления точкой*, или особой точкой многозначного характера. Класс точек ветвления, в свою очередь, подразделяется на *алгебраические точки ветвления* и *трансцендентные точки ветвления* (включая *логарифмические точки ветвления*). Если после нек-рого конечного числа $m \geqslant 2$ однократных обходов точки a в одном и том же направлении в $V'(a)$ элементы, получаемые вдоль путей класса $\{L\}$, принимают исходный вид, то $(\{a, \{L\})$ есть алгебраич. точка ветвления и число $m-1$ наз. ее порядком. В противном случае, когда обходы точки a дают все новые и новые элементы, $(a, \{L\})$ есть трансцендентная точка ветвления.

Напр., для функции

$$f(z)=\frac{1}{(1+\sqrt{z})\left(1+\sqrt[6]{z}\right)}$$

точки $a=0$, ∞ (для всех путей) являются алгебраич. точками ветвления порядка 5. Как однозначную функцию точки $f(z)$ можно представить только на соответствующей *римановой поверхности* S, состоящей из 6 листов над $\overline{\mathbb{C}}$, определенным образом соединенных над точками 0, ∞. Кроме того, над точкой $a=1$ расположены три правильные ветви $f(z)$, однозначные на трех соответствующих листах S; на одном листе S расположен полюс второго порядка и на двух листах S — полюсы первого порядка. Вообще, привлечение понятия римановой поверхности оказывается весьма удобным и плодотворным при изучении характера О. т.

Если радиус сходимости исходного ряда (1) $R=\infty$, то он представляет *целую функцию* $f(z)$, голоморфную во всей конечной плоскости $\mathbb{C}$. Такая функция в случае $f(z)\neq\text{const}$ имеет единственную изолированную О. т. $a=\infty$ однозначного характера; если при этом $a=\infty$ — полюс, то $f(z)$ есть целая рациональная функция, или многочлен; если же $a=\infty$ — существенно особая точка, то $f(z)$ есть целая трансцендентная функция.

Мероморфная функция $f(z)$ в конечной плоскости $\mathbb{C}$ получается, когда аналитич. продолжение ряда (1) приводит к однозначной аналитич. функции $f(z)$ в $\mathbb{C}$, имеющей в $\mathbb{C}$ в качестве О. т. только полюсы. Если при этом и $a=\infty$ есть полюс или регулярная точка, то общее число всех полюсов $f(z)$ в расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ конечно и $f(z)$ есть рациональная функция. Для трансцендентной мероморфной функции $f(z)$ в $\mathbb{C}$ бесконечно удаленная точка $a=\infty$ может оказаться предельной точкой полюсов — это простейший пример неизолированной О. т. однозначной аналитич. функции. Мероморфная функция в произвольной области $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ определяется аналогично.

Вообще говоря, проекции неизолированных О. т. могут образовывать различные множества точек расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. В частности, какова бы ни была область $D\subset\overline{\mathbb{C}}$, существует аналитич. функция $f_D(z)$ в D, для к-рой D является ее естественной областью существования, а граница $\Gamma=\partial D$ — естественной границей, так что аналитич. продолжение функции $f_D(z)$ за пределы области D невозможно. При этом естественная граница Γ состоит из достижимых и недостижимых точек (см. *Граничные элементы*). Если точка $a\in\Gamma$ достижима вдоль путей класса $\{L\}$ (таких классов может быть и несколько), расположенных целиком, кроме конечной точки a, в области D, то над ней необходимо расположены только О. т. функции $f_D(z)$, т. к. в противном случае было бы возможно аналитич. продолжение $f_D(z)$ за пределы области D через нек-рую часть Γ в окрестности точки a; достижимые точки образуют плотное множество на Γ.

В качестве определяющего элемента аналитич. функции $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n>1$, можно принять, напр., вейерштрассов элемент $(U^n(\zeta, R),\ f_\zeta)$ в виде кратного степенного ряда

$$f_\zeta=f_\zeta(z)=\sum\nolimits_{k_1, \ldots, k_n=0}^{\infty} c_{k_1 \ldots k_n}(z_1-\zeta_1)^{k_1} \ldots (z_n-\zeta_n)^{k_n} \tag{2}$$

и поликруга сходимости этого ряда

$$U^n(\zeta, R)=\left\{z\in\mathbb{C}^n : |z_\nu-\zeta_\nu|<R_\nu,\ \nu=1, \ldots, n\right\},$$

имеющего центр $\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\in\mathbb{C}^n$ и радиус сходимости $R=\{R_1>0, \ldots, R_n>0\}$. Полагая в основу процесс аналитич. продолжения элемента (2) вдоль всевозможных путей $L:[0, 1]\to\mathbb{C}^n$, отображающих отрезок $0\leqslant t\leqslant 1$ в комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, получают общее определение О. т. $(a, \{L\})$, $a\in\mathbb{C}^n$, функции $f(z)$, формально вполне аналогичное приведенному выше для случая $n=1$.

Однако вследствие переопределенности *Коши — Римана условий* при $n>1$ и проистекающей отсюда «большей силы» аналитич. продолжения случай $n>1$ коренным образом отличается, по существу, от случая $n=1$. В частности, при $n>1$ существуют такие области $D\subset\mathbb{C}^n$, к-рые не могут быть естественными областями существования никакой однозначной аналитической, или голоморфной, функции. Иначе говоря, определенные участки границы ∂D такой области свободны от О. т. любой голоморфной функции $f(z)$, заданной в D, и через них возможно аналитич. продолжение. Напр., справедлива теорема Осгуда — Брауна: если компакт K расположен в ограниченной области $D\subset\mathbb{C}^n$, причем $D\setminus K$ является также областью, и функция $f(z)$ голоморфна в $D\setminus K$, то она голоморфно продолжается на всю область D (см. также *Устранимое множество*). Естественные области существования голоморфных функций наз. иначе *голоморфности областями*, они характеризуются определенными геометрич. свойствами. Аналитически продолжая голоморфную функцию $f(z)$, заданную первоначально в области $D\subset\mathbb{C}^n$, и желая сохранить ее однозначность, приходят к необходимости введения, вообще говоря, многолистных над $\mathbb{C}^n$ областей голоморфности на *римановых областях* — аналогах римановых поверхностей. В этой трактовке оказывается, что О. т. голоморфной функции $f(z)$ — это точки границы $\Gamma=\partial\hat{D}$ ее области голоморфности $\hat{D}$. Теорема Осгуда — Брауна показывает, что связные компоненты Γ не могут образовывать компактных множеств K таких, что в $\hat{D}\setminus K$ функция $f(z)$ голоморфна. В частности, при $n>1$ не существует изолированных О. т. голоморфных функций.

Простейшие типы О. т. аналитич. функций многих комплексных переменных доставляют мероморфные функции $f(z)$ в области $D\subset\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, характеризующиеся следующими свойствами: 1) $f(z)$ голоморфна всюду в D, за исключением *полярного множества* P, состоящего из О. т.; 2) для любой точки $a\in P$ существуют окрестность $V(a)$ и голоморфная в $V(a)$ функция $\psi_a(z)$ такие, что функция $\varphi_a(z)=\psi_a(z)f(z)$ голоморфно продолжается в $V(a)$. При этом О. т. $a\in P$ делятся на полюсы, в к-рых $\varphi_a(a)\neq 0$, и точки неопределенности, в к-рых $\varphi_a(a)=0$. В случае полюса $\lim f(z)=\infty$ при стремлении $z\to a$, $z\in D\setminus P$; в любой окрестности точки неопределенности $f(z)$ принимает все значения $w\in\mathbb{C}$. Напр., мероморфная функция $f(z)=z_1/z_2$ в $\mathbb{C}^2$ имеет в качестве полярного множества прямую $P=\{z=(z_1, z_2)\in\mathbb{C}^2 : z_2=0\}$, все точки к-рой суть полюсы, за исключением одной точки неопределенности (0,0). Мероморфная функция $f(z)$ в своей области голоморфности $\hat{D}$ представима глобально в $\hat{D}$ в виде отношения двух голоморфных функций, т. е. ее полярное множество P есть *аналитическое множество*.

Точка $a\in\mathbb{C}^n$ наз. точкой мероморфности функции $f(z)$, если $f(z)$ мероморфна в нек-рой ее окрестности; таким образом, если О. т. есть точка мероморфности, то она либо полюс, либо точка неопределенности. Все остальные О. т. аналитич. функции $f(z)$, не являющиеся точками мероморфности, иногда наз. существенно особыми точками. К ним относятся, напр., точки ветвления $f(z)$, т. е.

точки ветвления ее (многолистной) области голоморфности $\hat{D}$. Размерность множества всех О. т. голоморфной функции $f(z)$ в общем случае равна $2n-1$. При нек-рых дополнительных ограничениях на $f(z)$ это множество оказывается аналитическим (и, следовательно, имеющим меньшую размерность; см. [2]).

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [3] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1—2, М., 1962; [4] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [5] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967; [6] Bieberbach L., Lehrbuch der Funktionentheorie, 3 Aufl., Bd 1, Lpz.— B., 1930, Bd 2, Lpz.— B., 1927; [7] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [8] Фукс Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, 2 изд., М., 1962; [9] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [10] Behnke H., Thullen P., Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, B., 1934. *Е. Д. Соломенцев.*

2) О. т., особенность, алгебраического многообразия — точка, в к-рой нарушается гладкость. Точнее, пусть X — алгебраич. многообразие или схема конечного типа над полем k, тогда точка $x \in X$ наз. особой, если соответствующее локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ не регулярно (регулярность локального нётерова кольца A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ означает равенство $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$). Множество О. т. алгебраич. многообразия X замкнуто в топологии Зариского и обозначается $\operatorname{Sing} X$. Если X — приведенное многообразие, то $\operatorname{Sing} X$ нигде не плотно в X. Если x является изолированной точкой в $\operatorname{Sing} X$, то x наз. изолированной О. т. Для проверки того, будет ли точка $x \in X$ особой или неособой, используется якобиев критерий (см. *Гладкая схема*).

Разрешением особенности (десингуляризацией) алгебраич. многообразия X наз. собственный бирациональный морфизм $\pi: \overline{X} \to X$, где $\overline{X}$ — гладкое многообразие. Существование разрешения особенностей доказано для широкого класса многообразий, в частности для всех многообразий над полем характеристики 0 (см. [13]); как правило, оно не единственно. Разрешение особенностей используется для введения различных инвариантов многообразия X; примером служат пространства когомологий $H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$. Нормальное многообразие X, для к-рого $H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})=0$ при всех $i>0$, наз. многообразием с рациональными особенностями. Рациональными являются тороидальные особенности [6] и особенности многообразий Шуберта [3]. Размерность пространства $H^{n-1}(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ для n-мерного многообразия X наз. геометрическим родом X. См. также *Разрешение особенностей.*

Теория деформаций особенностей, т. е. многообразий с О. т., строится параллельно теории деформаций (гладких) алгебраич. многообразий. Деформацией многообразия X_0 наз. плоский морфизм $f: X \to S$ такой, что $f^{-1}(s_0)=X_0$ для нек-рой $s_0 \in S$; многообразие S при этом наз. базой деформации. Для многообразия X_0 с изолированной О. т. существует версальная деформация, содержащая все деформации многообразия X_0. Может оказаться, что особенность жесткая, т. е. база версальной деформации ее состоит из одной точки и все ее деформации тривиальны [4]. Противоположными к жестким являются сглаживаемые О. т., в базе S версальной деформации к-рых есть такие точки, что $X_s=f^{-1}(s)$ неособы. Множество D точек $s \in S$ с особыми X_s наз. дискриминантным подмножеством.

При изучении деформаций большую роль играет действие группы монодромии $\pi_1(S \setminus D)$ на когомологиях слоев X.

Одновременным разрешением особенностей семейства $X \to S$ наз. собственный морфизм $\pi: \overline{X} \to X$ такой, что $\overline{X}$ — гладкая S-схема и для любого $s \in S$ морфизм $\overline{X}_s \to X_s$ является разрешением особенностей. Версальная деформация простых О. т. (см. ниже) допускает одновременное разрешение после нек-рого конченого накрытия ее базы, причем группой Галуа этого накрытия служит группа Вейля соответствующей корневой системы (см. [5], с. 179—203).

Особые точки комплексной гиперповерхности. Пусть гиперповерхность X задана в $\mathbb{C}^{n+1}$ одним уравнением $f(x_0, \ldots, x_n)=0$, где f — многочлен (или росток аналитич. функции в точке 0). Якобиевым идеалом многочлена f наз. идеал $J(f)=(\partial f/\partial x_0, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ в кольце $\mathbb{C}\{x_0, \ldots, x_n\}$; изолированность О. т. 0 эквивалентна конечномерности пространства $\mathbb{C}\{x_0, \ldots, x_n\}/J(f)$. Размерность μ этого пространства наз. числом Милнора многочлена f и совпадает с рангом свободной абелевой группы $H_n(X_\varepsilon, \mathbb{Z})$, где X_ε задается уравнением $f(x_0, \ldots, x_n)=\varepsilon$, при малых $\varepsilon \neq 0$. Более точно, многообразие X_ε гомотопически эквивалентно букету μ сфер размерности n (см. [12]). База версальной деформации этой особенности неособая и также имеет размерность μ (см. [9]). Простейшим примером является невырожденная квадратичная особенность $x_0^2 + \ldots + x_n^2=0$, для нее $\mu=1$.

Простой О. т. гиперповерхности наз. особенность, при деформации к-рой появляется лишь конечное число других особенностей [9]; гиперповерхность при этом задается одним из следующих уравнений:

$$A_\mu: x_0^{\mu+1}+x_1^2+\ldots+x_n^2=0, \qquad \mu \geq 1,$$
$$D_\mu: x_0^{\mu-1}+x_0x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=0, \qquad \mu \geq 4,$$
$$E_6: x_0^4+x_1^3+x_2^2+\ldots+x_n^2=0,$$
$$E_7: x_0^3x_1+x_1^3+x_2^2+\ldots+x_n^2=0,$$
$$E_8: x_0^5+x_1^3+x_2^2+\ldots+x_n^2=0.$$

Нижний индекс μ здесь — число Милнора особенности. В случае поверхностей ($n=2$) эти особенности наз. особенностями дю Валя, или двойными рациональными О. т. Эти О. т. можно также охарактеризовать тем, что форма пересечения на пространстве $H_n(X_\varepsilon, \mathbb{R})$ является определенной. Имеется классификация следующих по сложности, унимодальных особенностей [9]. Изучается вещественный аналог этих понятий, а также их связь с теорией катастроф [10]. Многие теоремы об О. т. гиперповерхностей распространяются на О. т. полных пересечений.

Особые точки кривых. Пусть A — локальное кольцо О. т. x кривой, а $\overline{A}$ — его нормализация; главным инвариантом О. т. является $\delta_x=\dim \overline{A}/A$. Для неприводимой кривой X ее арифметич. род равен геометрич. роду плюс $\Sigma_x \delta_x$ (суммирование по всем О. т. кривой X). Причем для плоской кривой $2\delta_x=\mu+r-1$, где μ — число Милнора, а r — число ветвей кривой в точке x.

Пусть $X \subset \mathbb{C}^2$ — плоская неприводимая кривая, имеющая в точке 0 особенность кратности n (см. *Кратность особой точки*). Тогда X допускает параметризацию $x=t^n$, $y=\Sigma_{i \geq n} a_i t^i$, к-рая записывается в виде

$$y=\sum_i a_i x^{i/n}$$

(разложение Пюизё). Характеристич. показателями этого разложения наз. числа

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_1 n_2} < \ldots < \frac{m_g}{n_1 \ldots n_g} = \frac{m_g}{n},$$

где $\frac{m_1}{n_1}$ — первый нецелый показатель в разложении Пюизё, $\frac{m_2}{n_1 n_2}$ — первый показатель некратный $\frac{1}{n_1}$ и т. д. Последовательность $\{n, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$, где $\beta_\nu = \frac{m_\nu n}{n_1 \ldots n_\nu}$ наз. характеристикой особенности. Плоские одномерные особенности топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их характеристики совпадают (см. [8]).

Особые точки поверхностей. Среди разрешений особенностей нормальных поверхностей однозначно выделяются минимальные разрешения $\pi: \overline{X} \to X$, через к-рые пропускаются все остальные разрешения. Если x — О. т. поверхности X, то кривая $A = \pi^{-1}(x)$ наз. исключительной. Комбинаторным инвариантом О. т. x является взвешенный граф Γ кривой A, вершины которого соответствуют неприводимым компонентам A_i кривой A, точки пересечения компонент A_i и A_j изображаются ребрами между соответствующими вершинами, вершине приписывается вес, равный роду кривой A_i, а иногда еще и индекс самопересечения (A_i^2). Матрица $\|(A_i, A_j)\|$ пересечений компонент кривой A отрицательно определена, граф Γ связен. Наименьший положительный дивизор $Z = \Sigma r_i A_i$ такой, что $(Z, A_i) \leqslant 0$ для всех i, наз. фундаментальным циклом особенности. *Он всегда существует, и его арифметич.* род

$$p(Z) = 1 - \dim H^0(Z, \mathcal{O}_Z) + \dim H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$$

неотрицателен. О. т. рациональна тогда и только тогда, когда $p(Z) = 0$; в этом случае кратность ее равна $-(Z^2)$, а размерность касательного пространства Зариского на единицу больше [1]. Исследуются также [7] эллиптические особенности (то есть О. т. с $p(Z) = 1$).

Лит.: [1] Artin M., «Amer. J. Math.», 1966, v. 68, p. 129—36; [2] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, B.— Hdlb.— N. Y., 1972; [3] Kempf G., «Invent. math.», 1976, v. 37, p. 229—39; [4] Schlessinger M., «Invent. math.», 1971, v. 14, p. 17—26; [5] Séminaire sur les singularités des surfaces, B.— Hdlb.— N. Y., 1980; [6] Toroidal embeddings, [v. 1], B.— Hdlb.— N. Y., 1973; [7] Yau S. S.-T., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1980, v. 257, p. 269—329; [8] Zariski O., «Amer. J. Math.», 1968, v. 90, p. 961—1023; [9] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 5, с. 3—65; [10] Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, пер. с англ., М., 1977; [11] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1—2, М., 1982; [12] Милнор Дж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971; [13] Хиронака Х., «Математика», 1965, т. 9, № 6, с. 2—70; 1966, т. 10, № 1, с. 3—89.

В. И. Данилов.

3) О. т. векторного поля X — точка a, для к-рой $X(a) = 0$. О. т. наз. изолированной, если X не обращается в нуль в отличных от a точках достаточно малой окрестности точки a. О. т. наз. невырожденной, если

$$\det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial a^j} \right\| \neq 0.$$

Невырожденная О. т. всегда изолирована.

М. И. Войцеховский.

4) О. т. дифференциального уравнения

$$X(x, y)\,dy = Y(x, y)\,dx \qquad (1)$$

— любая точка $(x_0, y_0) \in G$, удовлетворяющая условию

$$X(x_0, y_0) = Y(x_0, y_0) = 0; \qquad (2)$$

здесь $X, Y: G \to \mathbb{R}$ — непрерывные в нек-рой области $G \subset \mathbb{R}^2$ функции. Точки области G, не удовлетворяющие условию (2), наз. обыкновенными точками уравнения (1). Иногда точку $(x_0, y_0) \in G$ наз. О. т. уравнения (1) и в том случае, когда условие (2) не выполняется, но задача Коши для уравнения (1) с начальными данными (x_0, y_0) имеет более одного решения.

Уравнение (1) — частный случай системы дифференциальных уравнений в симметричной форме:

$$\frac{dx_1}{X_1(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x)}, \tag{3}$$

где $n \geqslant 2$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, функции $X_i : G \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны в нек-рой области $G \subset \mathbb{R}^n$. Точка $x_0 \in G$ наз. особой точкой системы (3), если $X_i(x_0)=0$, $i=1, \ldots, n$. В противном случае x_0 — обыкновенная точка этой системы.

Пусть H — множество О. т. системы (3) в области G. Если $x_0 \in G \setminus H$, то существуют индекс $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ и окрестность U точки x_0 такие, что в U система (3) представима в нормальной форме:

$$\frac{dx_i}{dx_{i_0}} = f_i(x), \quad f_i \in \mathbb{C}(U), \qquad i \neq i_0.$$

Таким образом, поведение интегральных кривых системы (3) в окрестности обыкновенной точки описывается теоремами общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, справедлива следующая теорема о выпрямлении: если через любую точку x_0 множества $G \setminus H$ проходит единственная интегральная кривая системы (3), то каждая точка этого множества имеет окрестность V такую, что семейство дуг интегральных кривых системы (3), заполняющих V, гомеоморфно (а если $X_i \in \mathbb{C}^1(G)$, $i=1, \ldots, n$, то диффеоморфно) семейству параллельных прямых.

Если же $x_0 \in H$, то пары (i_0, U), обладающей указанным выше свойством, не существует, и интегральные кривые системы (3) могут образовывать вблизи x_0 различные конфигурации. Так, для уравнения

$$(ax+by)\,dy = (cx+ey)\,dx,$$

где $a, b, c, e \in \mathbb{R}$, а матрица $A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & e \end{Vmatrix}$ — невырожденная, расположение интегральных кривых в окрестности точки (0, 0) может относиться к типу *седло*, *узел*, *центр* или *фокус*. Соответствующее название закрепляется при этом и за самой точкой (0, 0).

Систему (3) можно рассматривать как результат исключения времени t из *автономной системы* дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad X=(X_1, \ldots, X_n). \tag{4}$$

Если (4) — система класса ($\mathbb{C}$, единственность) в G, то есть $X \in \mathbb{C}(G)$, и через каждую точку области G проходит единственная траектория системы, что далее и предполагается, то точки множества H будут для нее точками покоя (*равновесия положениями*). Часто их наз. О. т. и для этой системы, поскольку они являются таковыми (по определению) для векторного поля X. Интегральные кривые системы (3), расположенные в $G \setminus H$, представляют собою траектории системы (4), отличные от состояний покоя.

Таким образом, задачи о поведении интегральных кривых системы (3) в окрестности О. т. и о расположении траекторий системы (4) в окрестности положений равновесия эквивалентны. Исследования этих задач ведутся по двум основным направлениям.

Одно направление, берущее свое начало в трудах А. Пуанкаре [1], ставит своей целью выяснение возможных топологич. типов расположения траекторий системы (4) в окрестности изолированной точки покоя (к-рую всегда можно считать совпадающей с началом координат $O(x=0)$) и отыскание аналитич. критериев их различения. Наиболее законченные результаты получены здесь для того случая, когда система (4) представима в виде

$$\dot{x} = Ax + f(x), \qquad (5)$$

где A — постоянная невырожденная матрица, $f(x) = o(\|x\|)$ при $\|x\| \to 0$. В этом случае точка O наз. простой, или невырожденной, особой точкой системы (4). Для системы (5) установлена следующая теорема о топологической эквивалентности: если матрица A не имеет чисто мнимых собственных значений, а функция $f \in \mathbb{C}^1(G)$, то существует гомеоморфизм h окрестности U точки O на окрестность V той же точки, переводящий траектории системы (5) в траектории линейной системы

$$\dot{x} = Ax. \qquad (6)$$

Гомеоморфизм $h: U \to V$, осуществляющий топологич. соответствие между траекториями систем (5) и (6), в общем случае не является (и не может быть заменен) диффеоморфизмом.

При условиях этой теоремы точка покоя O системы (5) относится к тому же топологич. типу, что и точка покоя O системы (6). В частности, для системы 2-го порядка она будет при этом седлом, если собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A удовлетворяют условию $\lambda_1\lambda_2 < 0$, топологическим узлом (узлом или фокусом), если $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (при чисто мнимых λ_1, λ_2 точка O для системы (6) — центр, а для системы (5) — центр, фокус или *центро-фокус*).

Если матрица A имеет чисто мнимые или нулевые собственные значения, то топологич. эквивалентности между системами (5) и (6) в окрестности точки O в общем случае нет. При этих условиях поведение траекторий системы (5) в окрестности точки O весьма детально изучено в тех случаях, когда матрица A имеет не более двух собственных значений с нулевыми действительными частями, а функция f — аналитическая. В частности, для системы 2-го порядка с ненулевой матрицей A выяснены все возможные топологич. типы расположения траекторий в окрестности точки O и даны коэффициентные критерии их различения с точностью до различения центра и фокуса [9]. Здесь, кроме седла, топологич. узла и центра, точка O может быть: двухсепаратрисным седлом, седло-узлом (нек-рая окрестность U точки O разбивается тремя примыкающими к O траекториями (сепаратрисами) на три сектора: два гиперболических, заполненных траекториями, к-рые обоими концами покидают U, и один параболический, заполненный траекториями, к-рые одним концом покидают U, а другим примыкают к O) и точкой (нек-рая ее окрестность U разбивается сепаратрисами на 4 сектора: один гиперболический, два параболических и один эллиптический, заполненный траекториями, к-рые обоими концами примыкают к O, охватывая друг друга). Для системы 2-го порядка с нулевой матрицей A разработаны алгоритмы расщепления особенности (см., напр., *Фроммера метод*), позволяющие с помощью конечного числа шагов процесса расщепления выяснить топологич. тип точки O с точностью до решения задачи о различении центра и фокуса. Последняя задача (см. *Центра и фокуса проблема*) возникает для системы 2-го порядка вида (5) в случае, когда матрица A имеет чисто мнимые собственные значения, и может возникать в случае двух нулевых собственных значений этой матрицы. Она решена для частных классов таких систем.

Важной характеристикой изолированной точки покоя O системы (4) является ее индекс Пуанкаре. Для $n=2$ он определяется как вращение векторного поля X при обходе точки O по окружности $\|x\| = \rho$ достаточно малого радиуса ρ в положительном направлении, измеренное в единицах полного оборота. Напр., индекс простого седла равен -1, индекс узла, фокуса и центра равен 1. При произвольном n индекс точки O определяется как степень отображения h сферы $\|x\|=\rho$ достаточно малого радиуса ρ на себя, определенного формулой:

$$h(x)=\frac{\rho X(x)}{\|X(x)\|}.$$

Это направление развилось в обширную *качественную теорию дифференциальных уравнений*, а центр тяжести исследований переместился с локальных проблем на глобальные — изучение поведения траекторий системы (4) во всей области задания G, к-рая все чаще предполагается гладким многообразием той или иной природы.

Другое направление, заложенное трудами А. М. Ляпунова [2], занимается исследованием решений (в частности, состояний равновесия) систем вида (4), а также неавтономных систем дифференциальных уравнений на устойчивость. Оно представляет собою разветвленную теорию устойчивости движения (см. *Устойчивости теория*).

В комплексном анализе вводится понятие О. т. дифференциального уравнения

$$\frac{d^n w}{dz^n}=P\left(z,\ w,\ \frac{dw}{dz},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}\right), \tag{7}$$

а также системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dw}{dz}=P(z,\ w), \tag{8}$$

где z — комплексная переменная, P — рациональная функция от $w, w', \ldots, w^{(n-1)}$ или от компонент $w_1, w_2, \ldots, w_n$ вектора w, $n\geqslant 1$, коэффициенты к-рой — известные аналитич. функции от z. Особой для уравнения (7) (системы (8)) наз. любая точка z_0 комплексной плоскости, к-рая является О. т. хотя бы одного из коэффициентов функции P (см. *Особая точка* аналитической функции). О. т. уравнения или системы, как правило, являются особыми и для их решений как аналитич. функций от z. Они наз. *неподвижными особыми точками* решений. Кроме того, решения уравнения (7) (системы (8)) могут иметь *подвижные особые точки*, положение к-рых определяется начальными данными решений. Исследование различных классов уравнений вида (7), (8) с целью изучения аналитич. природы решений в окрестности особых точек уравнений и с целью выяснения вопроса о наличии у решений этих уравнений подвижных О. т. различных типов составляет предмет *аналитической теории дифференциальных уравнений*.

Лит.: [1] Poincaré H., Sur les courbes définies par une équation differentielle, Oeuvres, t. 1, P., 1892; рус. пер.— Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.— Л., 1947; [2] Ляпунов А., Общая задача об устойчивости движения, М.— Л., 1950; [3] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [4] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [5] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961; [6] Sansone G., Conti R., Non-linear differential equations, Oxf., 1964; [7] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [8] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971; [9] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А., Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, М., 1976; [10] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950; [11] Еругин Н. П., Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 2 изд., Минск, 1972; [12] Брюно А. Д., Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979; [13] Андреев А. Ф., Особые точки дифференциальных уравнений, Минск, 1979.

А. Ф. Андреев.

5) О. т. **дифференцируемого отображения** f — точка, к-рая является для f нерегуляр-

ной (критической) и неправильной одновременно. Точнее, пусть M^m и N^n — два дифференцируемых многообразия размерностей m и n соответственно, а $f: M^m \to N^n$ — дифференцируемое отображение первого во второе, x^i и $y^i = f(x^j)$ — локальные координаты в них. Если ранг матрицы $\left\| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right\|$ в точке $a \in M^m$ равен m, то отображение f наз. регулярным в точке a. Если ранг матрицы $\left\| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right\|$ равен n в точке $a \in M^m$, то отображение f наз. правильным в точке a. В О. т. f ранг этой матрицы меньше обоих чисел m и n. См. также *Особенности дифференцируемых отображений.*

М. И. Войцеховский.

6) О. т. действительной кривой $F(x, y) = 0$ — точка (x_0, y_0), в к-рой первые частные производные равны нулю $(F'_x)_0 = 0$, $(F'_y)_0 = 0$. О. т. наз. двойной точкой, если по крайней мере одна из вторых частных производных функции $F(x, y)$ не равна нулю. При исследовании строения кривой в окрестности О. т. рассматривают знак выражения

$$\Delta = (F''_{xx})_0 (F''_{yy})_0 - (F''_{xy})^2_0.$$

Если $\Delta > 0$, то О. т. является изолированной точкой (см. рис. , *а*); узловой точкой (или точкой самопересечения), если $\Delta < 0$ (см. рис. , *б*); если $\Delta = 0$, то О. т. является либо изолированной точкой, либо характеризуется тем, что различные ветви кривой имеют в этой точке общую касательную. Если ветви кривой расположены по разные стороны от общей касательной и по одну сторону от общей нормали, то О. т. наз. точкой возврата 1-го рода (см. рис. , *в*); если ветви кривой расположены по одну сторону от общей касательной и по одну сторону от общей нормали, то О. т. наз. точкой возврата 2-го рода (см. рис. , *г*); если ветви расположены по разные стороны от общей нормали и по разные стороны от общей касательной (см. рис. , *д*) или по одну сторону от общей касательной и по разные стороны от общей нормали (см. рис. , *е*), то О. т. наз. точкой самоприкосновения. См. также *Двойная точка.*

Если в нек-рой точке все частные производные от функции $F(x, y)$ до $(k-1)$-го порядка включительно обращаются в нуль, а среди производных k-го порядка по крайней мере одна отлична от нуля, то эта точка наз. особой точкой k-го порядка (кратной точкой).

Иногда О. т. наз. точки, отличающиеся каким-либо свойством от других точек кривой; см., напр., *Перегиба точка*, *Прекращения точка*, *Излома точка*, *Спрямления точка*, *Уплощения точка.*

О. т. пространственной кривой, заданной уравнениями $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ — точка, в окрестности к-рой ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{matrix} \right\|$$

меньше двух.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956; [2] Бюшгенс С. С., Дифференциальная геометрия, т. 1, М.—Л., 1940; [3] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 1, М.—Л., 1969.

А. Б. Иванов.

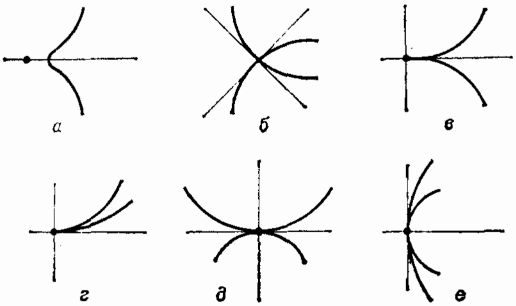
7) О. т. действительной поверхности — точка поверхности $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, в к-рой ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\|$$

меньше двух. Если поверхность определяется как множество точек, координаты к-рых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z)=0$, то О. т. наз. точку (x_0, y_0, z_0) поверхности, в к-рой первые частные производные функции $F(x, y, z)$ равны нулю:

$$(F'_x)_0=0, \quad (F'_y)_0=0, \quad (F'_z)_0=0.$$

Если в О. т. не все вторые частные производные функции $F(x, y, z)$ обращаются в нуль, то касательные к поверхности в О. т. образуют конус. Если конус касательных невырожденный, то О. т. наз. конической точкой; если конус вырождается в две



действительные плоскости, то О. т. является точкой самопересечения поверхности; если конус мнимый, то О. т. — изолированная точка поверхности.

О. т. могут составлять т. н. особые линии поверхности: *возврата ребро*, линии самопересечения, самоприкосновения и др.

Лит.: [1] Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969; [2] Норден А. П., Краткий курс дифференциальной геометрии, 2 изд., М., 1958; [3] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980. *А. Б. Иванов.*

ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ — раздел математич. анализа и дифференциальной геометрии, в к-ром изучаются свойства отображений, сохраняющихся при заменах координат в образе и прообразе отображения (или при заменах, сохраняющих нек-рые дополнительные структуры); предлагается общий подход к решению различных задач о вырождениях отображений, функций, векторных полей и т. д.; дается классификация наиболее часто встречающихся вырождений, указываются их нормальные формы и алгоритмы приведения к нормальным формам.

Точка области определения дифференцируемого отображения (т. е. отображения класса C^k, см. *Дифференцируемое многообразие*) наз. регулярной, если в этой точке матрица Якоби имеет максимальный ранг, и критической в противном случае.

Строение отображения в окрестности регулярной точки описывает классич. теорема о *неявной функции*, в окрестности такой точки и в окрестности ее образа существуют координаты, в к-рых отображение линейно.

Во многих случаях ограничиться рассмотрением лишь регулярных точек недостаточно, поэтому естественны вопросы:

а) описания отображения в окрестности каждой критич. точки;

б) описания строения множества критич. точек.

Ответы на а) и б) для произвольного отображения отсутствуют по двум причинам: при попытке охватить все отображения нет надежды на получение обозримых ответов (например, множество критических точек локально может быть произвольным замкнутым множеством), и для приложений достаточно знать ответы лишь для достаточно обширного множества отображений.

Вопросы а), б) и многие другие в теории особенностей исследуются по следующей схеме:

1) из рассмотрения исключается множество «нетипичных», «патологических» отображений,

2) указывается критерий «типичности» отображения,

3) проверяется, что всякое отображение аппроксимируется «типичными»,

4) изучаются «типичные» отображения.

Выбор множества типичных отображений зависит от решаемой задачи и не однозначен: чем меньше отображений отнесено к типичным, тем легче задача их изучения, однако 2) и 3) требуют, чтобы множество типичных отображений было достаточно широким и достаточно конструктивно определяемым.

Эту схему иллюстрирует следующая теорема Уитни: всякое дифференцируемое отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ можно аппроксимировать таким отображением f, что для любой точки $a \in \mathbb{R}^2$ в окрестностях точек a и $f(a)$ можно выбрать координаты, в к-рых отображение f записывается в одной из трех нормальных форм:

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2^2; \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2^3 + x_1 x_2 \end{cases}$$

(критерий типичности см. в [3] или [4]). Работа Х. Уитни (H. Whitney, 1955), в к-рой была доказана эта теорема, считается началом теории О. д. о., хотя ряд отдельных результатов появился гораздо раньше (теория Морса критических точек функций, теоремы Уитни об особенностях вложений, работы Л. С. Понтрягина о связи особенностей с характеристическими классами).

Основные понятия теории особенностей дифференциальных отображений.

Ростки дифференцируемых отображений. Пусть X, Y — гладкие многообразия, $p \in X$, $q \in Y$. (Всюду ниже термин «гладкий» будет употребляться как синоним термина бесконечно дифференцируемый.) Ростком в точке p наз. класс эквивалентности отображений $X \to Y$, совпадающих в некоторой окрестности точки p; множество ростков отображений, переводящих p в q, обозначается $C^\infty(X, Y)_{p,q}$. Группа ростков гладких замен переменных в X, сохраняющих точку p, обозначается $\mathrm{Diff}^\infty(X)_p$.

Важная локальная задача теории О. д. о. — изучение естественного действия группы

$$\mathrm{Diff}^\infty(X)_p \times \mathrm{Diff}^\infty(Y)_q \text{ на } C^\infty(X, Y)_{p,q}.$$

Решение этой и многих подобных задач обычно начинается с аппроксимации функциональных пространств и бесконечномерных групп, действующих на них, конечномерными многообразиями и действиями на них групп Ли. Полученные результаты затем переносятся в исходную бесконечномерную ситуацию.

Расслоения струй. Пусть f, $g: X \to Y$ — гладкие отображения и $f(p) = g(p) = q$; отображения f и g имеют, по определению, касание порядка k в точке p, если их ряды Тейлора в этой точке совпадают до порядка k. Класс эквивалентности отображений, имеющих в точке p касание порядка k, наз. k-струей. Множество всех k-струй отображений, переводящих p в q, наделяется естественной структурой гладкого многообразия и обозначается $J^k(X, Y)_{p,q}$. Определена естественная проекция

$$C^\infty(X, Y)_{p,q} \to J^k(X, Y)_{p,q}.$$

Класс эквивалентности гладких замен переменных в X, сохраняющих точку p и имеющих в этой точке касание порядка k, наз. обратимой k-струей в точке p. Обратимые k-струи образуют группу Ли

$L^k(X)_p$. Группа Ли $L^k(X)_p \times L^k(Y)_q$ действует на $J^k(X, Y)_{p, q}$, аппроксимируя действие

$$\mathrm{Diff}^\infty(X)_p \times \mathrm{Diff}^\infty(Y)_q \text{ на } C^\infty(X, Y)_{p, q}.$$

Пусть $J^k(X, Y) = \{$дизъюнктное объединение $J^k(X, Y)_{p, q}$ по всем $(p, q) \in X \times Y\}$. Множество $J^k(X, Y)$ наделяется естественной структурой гладкого расслоения над $X \times Y$ со слоем

$$J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)_{0, 0} = J^k(m, n)$$

и структурной группой

$$L^k(\mathbb{R}^m)_0 \times L^k(\mathbb{R}^n)_0 = L^k(m, n),$$

где $m = \dim X$, $n = \dim Y$.

Особенности и классы особенностей. Орбита действия $L^k(m, n)$ на $J^k(m, n)$ наз. k-особенностью; любое подмножество в $J^k(m, n)$, инвариантное относительно $L^k(m, n)$, наз. классом k-особенностей. Пусть S такой класс. Поскольку $J^k(m, n)$ можно отождествить с $J^k(X, Y)_{p, q}$, в $J^k(X, Y)_{p, q}$ определяется подмножество $S(X, Y)_{p, q}$, не зависящее от способа отождествления. Множество $S(X, Y) = \{$объединение $S(X, Y)_{p, q}$ по всем $(p, q) \in X \times Y\}$ наз. универсальным классом особенностей (или универсальной особенностью, если S — особенность). Универсальная особенность $S(X, Y)$ является подмногообразием в $J^k(X, Y)$, коразмерность этого подмногообразия равна коразмерности S в $J^k(m, n)$.

Пусть $f: X \to Y$ — гладкое отображение. Сопоставлением каждой точке $p \in X$ k-струи отображения f в точке p получается гладкое отображение $j^k f: X \to J^k(X, Y)$, наз. k-струйным расширением f. Отображение $f: X \to Y$ имеет, по определению, в точке p особенность типа S, если $j^k f(p) \in S(X, Y)$. Множество $S(f)$ всех точек, в к-рых f имеет особенность типа S, есть не что иное, как $(j^k f)^{-1} S(X, Y)$. Поэтому изучение множества $S(f)$ разбивается на два этапа: изучение универсального множества $S(X, Y)$ в $J^k(X, Y)$, сводящееся к изучению S в $J^k(m, n)$; изучение взаимного расположения $S(X, Y)$ и $j^k f(X)$. На втором этапе обычно применяется теорема трансверсальности Тома.

Трансверсальность. Гладкое отображение гладких многообразий $f: A \to B$ трансверсально подмногообразию $C \subset B$ (обозначается $f \pitchfork C$), если для любой точки $a \in A$ либо $f(a) \notin C$, либо $(df)_a(T_a A) \oplus T_{f(a)} C = T_{f(a)} B$. Если $f \pitchfork C$, то множество $f^{-1}(C)$ либо пусто, либо является подмногообразием в A, коразмерность к-рого равна коразмерности C в B. Теорема трансверсальности Тома: пусть X, Y — гладкие многообразия и C — подмногообразие в $J^k(X, Y)$; тогда множество тех f, для к-рых $j^k f \pitchfork C$, является массивным подмножеством в $C^\infty(X, Y)$ в C^∞-топологии Уитни. (Множество наз. массивным, если оно является пересечением счетного числа открытых плотных подмножеств.)

Топология Уитни. Пусть $k \geqslant 0$ и U — открытое множество в $J^k(X, Y)$. Пусть

$$M(U) = \{f \in C^\infty(X, Y): j^k f(X) \subset U\}.$$

Множества $M(U)$ образуют базис нек-рой топологии, наз. C^∞-топологией Уитни на $C^\infty(X, Y)$. В этой топологии $C^\infty(X, Y)$ является *Бэра пространством*, т. е. каждое массивное подмножество плотно.

Мультиструи. При изучении самопересечений образа гладкого отображения используется понятие мультиструи. Пусть α: $J^k(X, Y) \to X$ — естественная проекция. Пусть

$$X^{(s)} = \{(x_1, \ldots, x_s) \in X \times \ldots \times X: x_j \neq x_i, \ i \neq j\}$$

и $\alpha^s = \alpha \times \ldots \times \alpha$ (s раз). Множество $J_s^k(X, Y) = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)})$ может быть наделено естественной структурой гладкого многообразия и наз. *s-кратным расслоением k-струй*. Для s-кратных струй определяются k-струйное расширение отображения f, k-особенности, универсальные особенности и т. д. и доказывается аналог теоремы трансверсальности Тома.

Устойчивые дифференцируемые отображения. Центральной проблемой теории О. д. о. в период ее возникновения была задача изучения устойчивых дифференцируемых отображений. Гладкое отображение $f: X^m \to Y^n$ гладких многообразий наз. *устойчивым*, если для любого достаточно близкого к f отображения $\tilde{f}$ найдутся диффеоморфизмы $h: X^m \to X^m$ и $k: Y^n \to Y^n$ такие, что $\tilde{f} = h \circ f \circ k$.

При небольших m, $n(m, n \leqslant 4)$, а также при $n=1$ и любом m устойчивые дифференцируемые отображения плотны в пространстве всех собственных дифференцируемых отображений [3]. В пространстве отображений $X^9 \to Y^9$ устойчивые отображения не составляют всюду плотного множества (см. [1]). Для нек-рых пар многообразий (напр., для $X = \mathbb{R}P^{19}$, $Y = \mathbb{R}^{19}$) вообще нет ни одного устойчивого отображения X в Y. Найдены [14], [15] все «устойчивые размерности» (m, n): для любых гладких многообразий X^m и Y^n устойчивые отображения X^m в Y^n плотны в пространстве собственных дифференцируемых отображений $X^m \to Y^n$, снабженном C^∞-топологией Уитни, тогда и только тогда, когда пара (m, n) удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий $(q = n - m)$: а) $n < 7q + 8$ и $q \geqslant 4$; б) $n < 7q + 9$ и $3 \geqslant q \geqslant 0$; в) $n < 8$ и $q = -1$; г) $n < 6$ и $q = -2$; д) $n < 7$ и $q \leqslant 3$.

При доказательстве этой теоремы, а также во многих других вопросах оказываются полезными следующие два понятия: отображение $f_0: X^m \to Y^n$ наз. *гомотопически устойчивым*, если для любой гладкой гомотопии f_t отображения f_0 найдутся гладкие гомотопии h_t и k_t тождественных диффеоморфизмов X^m и Y^n такие, что $f_t = h_t \circ f_0 \circ k_t$ для достаточно малых t; отображение $f: X^m \to Y^n$ наз. *инфинитезимально устойчивым*, если всякое бесконечно близкое к f_0 отображение $\tilde{f}$ может быть получено из f_0 «бесконечно близкими к тождественным» диффеоморфизмами X^m и Y^n. Для собственного отображения понятие устойчивости, гомотопич. устойчивости и инфинитезимальной устойчивости совпадают [3]. Задача нахождения локальных нормальных форм устойчивых отображений сводится к задаче классификации нек-рых конечномерных локальных алгебр [14], [15]. Для фиксированных m, n число таких нормальных форм конечно.

Если в определении устойчивого отображения в качестве h и k взять вместо диффеоморфизмов гомеоморфизмы, то получится определение *топологически устойчивого отображения*. Доказана теорема (см. [8]) о плотности множества топологических устойчивых отображений в пространстве всех отображений любого компактного многообразия X^m в любое многообразие Y^n (при любых m, n).

Конечно определенные ростки. Пусть $\sim$ — нек-рое отношение эквивалентности на множестве $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)_{0,0}$ ростков отображений $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, переводящих 0 в 0. k-струя любого такого ростка — это его отрезок ряда Тейлора порядка k. Росток f наз. *k-определенным*, если любой другой росток g, имеющий ту же k-струю, удовлетворяет соотношению $f \sim g$. Росток наз. *конечно определенным*, если он k-определен при нек-ром k. *Достаточной* наз. такая k-струя σ, что любые два ростка f, g, имеющие σ в качестве k-струи, удовлетворяют соотношению $f \sim g$. Наиболее часто встречающиеся эквивалентности носят специальные названия:

r-эквивалентность — принадлежность одной орбите группы $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbb{R}^m)_0$ «правых» замен координат; rl-эквивалентность — принадлежность одной орбите группы $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbb{R}^m)_0 \times \mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbb{R}^n)_0$.

Топологическая эквивалентность — принадлежность одной орбите группы $\mathrm{Diff}^0(\mathbb{R}^m)_0 \times \mathrm{Diff}^0(\mathbb{R}^n)_0$. Изучение k-определенного ростка сводится к изучению отображения, заданного многочленами степени $\leqslant k$.

Решение вопроса о том, является ли росток f k-определенным относительно rl-эквивалентности, сводится к задаче о разрешимости нек-рой явно выписываемой системы конечного числа линейных уравнений.

Множество конечно определенных относительно rl-эквивалентности ростков открыто в $C^{\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)_{0,0}$, однако плотно не для любых m, n. Естественно рассмотреть более грубое отношение топологич. эквивалентности. После выбрасывания из $C^{\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)_{0,0}$ подмножества бесконечной коразмерности остается счетное число классов топологич. эквивалентности, каждый из к-рых является полуалгебраич. множеством. Отсюда следует, что открытое плотное множество в $C^{\infty}(X, Y)$ (X^m — компактно) составляют отображения, ростки к-рых топологически эквивалентны полиномиальным [13].

Деформации. Если отображение зависит от параметров, то говорят, что задано семейство отображений. Если семейство отображений изучается локально, то при малом изменении параметров в окрестности фиксированных значений говорят о деформации отображения, соответствующего этим значениям параметров. Оказывается, во многих случаях изучение всевозможных деформаций сводится к изучению одной единственной, из к-рой получаются все остальные. Такая деформация, в нек-ром смысле самая большая, содержит в себе все существенно разные деформации данного отображения. Она наз. версальной деформацией (см. [11], [12], [13]).

Критические точки функций. Критич. точка функции наз. невырожденной, если второй дифференциал — невырожденная квадратичная форма. Функция общего положения имеет лишь невырожденные критич. точки, а в окрестности каждой из них она может быть приведена к стандартной форме. Вырожденные критич. точки приходится рассматривать в тех случаях, когда эти функции зависят от параметров, и чем больше число этих параметров, тем более сложные критич. точки будут встречаться неустранимым (малым шевелением) образом при нек-рых значениях параметров.

Семейство функций, зависящее от любого числа параметров, можно превратить малым шевелением в семейство, в к-ром при каждом значении параметра в окрестности любой точки области определения функция представляется многочленом в нек-рой локальной системе координат. Это позволяет при локальном изучении функций рассматривать только многочлены и использовать комплексный анализ.

Классификация критических точек функций. Естественно начать с классификации ростков в 0 голоморфных функций в $\mathbb{C}^n$, считая два ростка эквивалентными, если один переводится в другой ростком голоморфной замены координат в $\mathbb{C}^n$, сохраняющей 0. Струя (многочлен Тейлора) голоморфной функции в 0 достаточна, если она определяет функцию с точностью до эквивалентности. Росток, у к-рого критич. точка 0 изолирована, всегда имеет достаточную струю и, следовательно, эквивалентен многочлену. Кратностью (или числом Милнора) μ критич. точки 0 наз. число невырожденных критич. точек, на к-рые распадается критич. точка 0 при малом шевелении функции. Если кратность критич. точки функции f равна μ, то $(\mu+1)$-струя достаточна. Т. к. кратность μ при малом изменении f не может увеличиваться, то классификация функций, близких к функции с изолированной критич. точкой, сводится к изучению действия группы Ли k-струй замен переменных на пространстве k-струй при достаточно большом k. В пространстве k-струй функций f таких, что $f(0)=0$, $df(0)=0$, коразмерность орбиты f равна $\mu-1$, поэтому критич. точки кратности μ встречаются неустранимым образом в семействах функций, зависящих от $(\mu-1)$ параметров. Получены классификация (см. [10]) всех критич. точек кратности $\mu \leqslant 16$ и алгоритм приведения любой такой функции к нормальной форме. Сложность критич. точки определяется не только ее кратностью μ, но и ее модальностью m (числом модулей). Критич. точка наз. простой (или 0-модальной), если среди всех близких критич. точек найдется не более чем конечное число попарно неэквивалентных. Два ростка функций наз. стабильно эквивалентными, если они становятся эквивалентными после прямого сложения с невырожденными квадратичными формами от подходящего числа переменных (для ростков функций от одинакового числа переменных стабильная эквивалентность не отличается от обычной).

С точностью до стабильной эквивалентности простые ростки исчерпываются следующим списком:

$$A_k: f(x)=x^{k+1}, \qquad k \geqslant 1;$$
$$D_k: f(x, y)=x^2y+y^{k-1}, \quad k \geqslant 4;$$
$$E_6: f(x, y)=x^3+y^4;$$
$$E_7: f(x, y)=x^3+xy^3;$$
$$E_8: f(x, y)=x^3+y^5.$$

Модальностью точки $x \in X$ при действии группы Ли G на многообразии X наз. наименьшее число m такое, что достаточно малая окрестность точки x покрыта конечным числом m-параметрич. семейств орбит.

Получена также классификация ростков функций модальности 1 и 2 (см. [10]). Классификация простых особенностей и особенностей малой модальности оказывается связанной с группами Ли, Кокстера и Вейля серий A, D, E, с теорией Кос Артина, классификацией правильных многогранников в трехмерном пространстве, классификацией Кодаиры вырождений эллиптич. кривых, классификацией треугольников на плоскости Лобачевского (см. [10], [11]).

Краевые особенности. Ряд геометрич. задач требует изучения критич. точек функций на многообразии с краем.

В комплексном случае эта ситуация соответствует изучению ростка функции, заданной в пространстве $\mathbb{C}^n$ с выделенным подпространством $\mathbb{C}^{n-1}$. Такие ростки изучаются с точностью до замен переменных в $\mathbb{C}^n$, переводящих $\mathbb{C}^{n-1}$ в себя. В этой ситуации также получена классификация всех простых ростков, ростков модальностей 1 и 2. Классификация простых краевых особенностей оказывается связанной с простыми алгебрами Ли B, C, F_4.

Топологические характеристики ростка голоморфной функции. Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — функция, голоморфная в окрестности нуля и имеющая в нуле критич. точку кратности μ. Пусть η, ε — положительные числа, $B \subset \mathbb{C}^n$ — шар $|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2 \leqslant \varepsilon^2$, S — его граница, $T \subset \mathbb{C}$ — диск $|t|<\eta$, T' — проколотый диск $T \setminus 0$. Пусть $X(t)=f^{-1}(t) \cap B$, $X=f^{-1}(T') \cap B$. Для подходящих ε и η (ε достаточно малого и η достаточно малого по сравнению с ε) отображение $f: X \to T'$ —

гладкое локально тривиальное расслоение. Слой $X(t)$ этого расслоения — $(2n-2)$-мерное многообразие с краем, гомотопически эквивалентное букету μ $(n-1)$-мерных сфер. Край $X(t)$ есть $2n-3$-мерное многообразие, диффеоморфное $f^{-1}(0)\cap S$. Даже для сравнительно простых f это многообразие может быть нетривиальным. Напр., 28 многообразий

$$x_1^{6k-1}+x_2^3+x_3^2+x_4^2+x_5^2=0, \quad |x_1|^2+\ldots+|x_5|^2=\varepsilon^2,$$
$$k=1, \ldots, 28,$$

суть 28 сфер Милнора (к-рые все гомеоморфны обычной семимерной сфере, но попарно не диффеоморфны). Группа приведенных гомологий $H_{n-1}(X(t), *, \mathbb{Z})$ изоморфна $\mathbb{Z}^\mu$. Индекс пересечения определяет на H_{n-1} целочисленную билинейную форму. Перенос слоев расслоения $f: X\to T'$ над кривыми в T' определяет действие фундаментальной группы $\pi_1(T')$ в $(n-1)$-мерных гомологиях слоя. Образующей $\pi_1(T')$ отвечает автоморфизм группы гомологий, наз. оператором монодромии. Оператор монодромии сохраняет форму пересечений. Собственные значения оператора монодромии несут информацию об асимптотиках различных интегралов, связанных с функцией f.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М., Особенности дифференцируемых отображений, М., 1982; [2] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [3] Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, пер. с англ., М., 1977; [4] Брекер Т., Ландер Л., Дифференцируемые ростки и катастрофы, пер. с англ., М., 1977; [5] Постон Т., Стюарт И., Теория катастроф и ее приложения, пер. с англ., М., 1980; [6] Милнор Дж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971; [7] Особенности дифференцируемых отображений, Сб. ст., пер. с англ. и франц., М., 1968; [8] Topological stability of smooth mappings, B.— Hdlb.— N. Y., 1976; [9] Thom R., Stabilité structurelle et morphogénèse, N. Y., 1972; [10] Арнольд В. И., «Функц. анализ и его приложения», 1972, т. 6, № 4, с. 3—25; [11] его же, «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 5, с. 119—184; 1973, т. 28, в. 5, с. 17—44; 1974, т. 29, в. 2, с. 11—49; 1975, т. 30, в. 5, с. 3—65; [12] Том Р., там же, 1972, т. 27, в. 5, с. 51—57; [13] Варченко А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1974, т. 38, № 5, с. 1037—90; 1975, т. 39, № 2, с. 294—314; [14] Мазер Д., «Математика», 1970, т. 14, № 1, с. 145—75; [15] его же, «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 6, с. 165—90; 1974, т. 29, в. 1, с. 99—158.

А. Н. Варченко, А. Г. Кушниренко.

ОСОБЕННОСТЬ аналитической функции — 1) Множество *особых точек* аналитич. функции $f(z)$ комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n\geqslant1$, выделяемое теми или иными дополнительными условиями. В частности, *изолированные особые точки* иногда наз. изолированными О.

2) Множество $K\subset\mathbb{C}^n$ такое, что в нек-рой области D, примыкающей к K, определена однозначная аналитич. функция $f(z)$ и для к-рого ставится вопрос о возможности аналитич. продолжения $f(z)$ на K. Напр., пусть D — область пространства $\mathbb{C}^n$, K — компакт, содержащийся в D, и $f(z)$ голоморфна на $D\setminus K$. Тогда K — потенциальная О. функции $f(z)$, и ставится вопрос об аналитич. продолжении (быть может, при нек-рых дополнительных условиях) $f(z)$ на всю область D, иначе говоря, вопрос об «устранении», или «стирании», особенности K.

См. также *Устранимое множество.*

Е. Д. Соломенцев.

ОСОБОЕ РЕШЕНИЕ обыкновенного дифференциального уравнения — решение, в каждой точке к-рого нарушается единственность решения задачи Коши для этого уравнения. Напр., для уравнения 1-го порядка

$$y'=f(x, y) \qquad (*)$$

с непрерывной правой частью, всюду имеющей конечную или бесконечную частную производную по y, О. р.

может лежать только во множестве

$$M=\{(x,\ y)\ \|\ f'_y(x,\ y)\ |=\infty\}.$$

Кривая $\gamma\subset M$ есть О. р. уравнения (*), если γ является интегральной кривой уравнения (*) и через каждую точку кривой γ проходит по крайней мере еще одна интегральная кривая уравнения (*). Пусть уравнение (*) имеет в нек-рой области G *общий интеграл* $\Phi(x, y, C)=0$; если это семейство кривых имеет *огибающую*, то она является О. р. уравнения (*). Для дифференциального уравнения

$$F(x,\ y,\ y')=0$$

О. р. находится исследованием *дискриминантной кривой*.

Лит.: [1] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 7 изд., М., 1958; [2] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 2, М., 1954.

Н. Х. Розов.

ОСОБОЙ ТОЧКИ ИНДЕКС — одна из основных характеристик изолированной *особой точки* векторного поля. Пусть векторное поле X определено в $\mathbb{R}^n$, Q — сфера малого радиуса, окружающая особую точку x_0, такая, что $X|_Q\neq 0$. Тогда индексом $\mathrm{ind}_{x_0}(X)$ особой точки x_0 векторного поля X наз. *степень отображения* $\deg f$, где

$$f: \frac{X(x)}{|X(x)|}: Q\longrightarrow S^{n-1},$$

т. е.

$$\mathrm{ind}_{x_0}(X)=\deg f_{x_0}.$$

Если x_0 невырождена, то

$$\mathrm{ind}_{x_0}(X)=\mathrm{sign}\det\left\|\frac{\partial X^2}{\partial x^i}\right\|.$$

О. т. и. не зависит от направления поля.

М. И. Войцеховский.

ОСОБЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — величины, определяемые формулой:

$$\Omega^0(A)=\overline{\lim_{\theta-\tau\to+\infty}}\frac{1}{\theta-\tau}\ln\|X(\theta,\ \tau)\|$$

(верхний особый показатель) или формулой

$$\omega^0(A)=\underline{\lim_{\theta-\tau\to+\infty}}\frac{1}{\tau-\theta}\ln\|X(\tau,\ \theta)\|$$

(нижний особый показатель), где $X(\theta,\ \tau)$ — *Коши оператор* системы

$$\dot{x}=A(t)\,x,\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $A(\cdot)$ — отображение $\mathbb{R}^+\to\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$, суммируемое на каждом отрезке.

О. п. могут равняться $\pm\infty$; если для нек-рого $T>0$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}+}\int_t^{t+T}\|A(\tau)\|\,d\tau<+\infty,$$

то О. п. суть числа.

Для системы (1) с постоянными коэффициентами ($A(t)\equiv A(0)$) О. п. $\Omega^0(A)$ и $\omega^0(A)$ равны соответственно максимуму и минимуму действительных частей собственных значений оператора $A(0)$. Для системы (1) с периодич. коэффициентами ($A(t+T)=A(t)$ при всех $t\in\mathbb{R}$ для нек-рого $T>0$) О. п. $\Omega^0(A)$ и $\omega^0(A)$ равны соответственно максимуму и минимуму логарифмов модулей *мультипликаторов*, деленных на период T. Иногда О. п. наз. иначе, напр. генеральными показателями (см. [4]).

Следующие определения эквивалентны приведенным выше: О. п. $\Omega^0(A)$ равен точной нижней грани множества тех чисел α, для каждого из к-рых найдется число $C_\alpha>0$ такое, что для всякого решения $x(t)\neq 0$ системы (1) выполнено неравенство

$$|x(\theta)|\leqslant C_\alpha e^{\alpha(\theta-\tau)}|x(\tau)| \text{ для всех } \theta\geqslant\tau\geqslant 0;$$

О. п. $\omega^0(A)$ равен точной верхней грани множества тех чисел β, для каждого из к-рых найдется число $C_\beta>0$ такое, что для всякого решения $x(t)\neq 0$ системы (1) выполнено неравенство

$$|x(\theta)|\geqslant C_\beta e^{\beta(\theta-\tau)}|x(\tau)| \text{ для всех } \theta\geqslant\tau\geqslant 0.$$

Для О. п. и *Ляпунова характеристических показателей* имеют место неравенства:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}+}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\|A(\tau)\|d\tau\geqslant\Omega^0(A)\geqslant\lambda_1(A)\geqslant\ldots$$

$$\ldots\geqslant\lambda_n(A)\geqslant\omega^0(A)\geqslant-\sup_{t\in\mathbb{R}+}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\|A(\tau)\|d\tau.$$

Для линейных систем с постоянными или с периодич. коэффициентами

$$\Omega^0(A)=\lambda_1(A),\quad \omega^0(A)=\lambda_n(A),$$

но существуют системы, для к-рых соответствующие неравенства — строгие (см. *Равномерная устойчивость*).

О. п. $\Omega^0(A)$ (соответственно $\omega^0(A)$) как функция на пространстве систем (1) с ограниченными непрерывными коэффициентами (отображение $A(\cdot)$ непрерывно и $\sup_{t\in\mathbb{R}+}\|A(t)\|<+\infty$), наделенном метрикой

$$d(A,B)=\sup_{t\in\mathbb{R}+}\|A(t)-B(t)\|,$$

полунепрерывна сверху (соответственно снизу), но не всюду непрерывна.

Если отображение $A(\cdot):\mathbb{R}\to\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывно и

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|A(t)\|<+\infty,$$

то *сдвигов динамическая система* ($S=\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$) имеет инвариантные нормированные меры μ_1 и μ_2, сосредоточенные на замыкании траектории точки A, такие, что для почти всех $\tilde{A}$ (в смысле меры μ_1) верхний О. п. системы

$$\dot{x}=\tilde{A}(t)x \tag{2}$$

равен ее наибольшему (старшему) характеристич. показателю Ляпунова

$$\Omega^0(\tilde{A})=\lambda_1(\tilde{A})$$

и для почти всех $\tilde{A}$ (в смысле меры μ_2) нижний О. п. системы (2) равен ее наименьшему характеристич. показателю Ляпунова

$$\omega^0(\tilde{A})=\lambda_n(\tilde{A}).$$

Для почти периодич. отображения $A(\cdot)$ (см. *Линейная система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами*) меры μ_1 и μ_2 идентичны и совпадают с той единственной нормированной инвариантной мерой, сосредоточенной на сужении динамич. системы сдвигов на замыкание траектории точки A, к-рая в этом случае имеется.

Пусть динамич. система на гладком замкнутом n-мерном многообразии V^n задана гладким векторным полем. Тогда у этой системы найдутся нормированные инвариантные меры μ_1 и μ_2 такие, что для почти всякой (в смысле меры μ_1) точки $x\in V^n$ совпадают верхний О. п. и старший характеристич. показатель Ляпунова системы уравнений в вариациях вдоль траектории точки x и для почти всякой (в смысле меры μ_2) точки $x\in V^n$ совпадают нижний О. п. и наименьший характеристич.

показатель Ляпунова системы уравнений в вариациях вдоль траектории точки x. Определения О. п., характеристич. показателей Ляпунова и т. п. сохраняют смысл для систем уравнений в вариациях гладких динамич. систем, заданных на любых гладких многообразиях. Система уравнений в вариациях такой динамич. системы вдоль траектории точки x может быть записана в виде (1), напр. с помощью задания в касательном пространстве к V^n в каждой точке траектории точки x базиса, полученного параллельным перенесением вдоль траектории точки x (в смысле римановой связности, индуцированной какой-либо гладкой римановой метрикой) нек-рого базиса касательного пространства к V^n в точке x.

Лит.: [1] Bohl P., «J. reine und angew. Math.», 1913, Bd 144, S. 284—318; [2] Персидский К., «Матем. сб.», 1933, т. 40, № 3, с. 284—93; [3] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [4] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [5] Изобов Н. А., в кн.: Итоги науки и техники. Матем. анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146. *В. М. Миллионщиков.*

ОСРЕДНЕНИЕ, усреднение,— операция вычисления средних значений функций, входящих в структуру дифференциальных уравнений, описывающих периодические, почти периодические и, вообще, колебательные процессы. Операция О. может рассматриваться как нек-рый сглаживающий оператор. Методы О. впервые стали применяться в небесной механике при исследовании движения планет вокруг Солнца. Позже они получили распространение в самых разнообразных областях: в теории нелинейных колебаний, в физике, в теории автоматич. регулирования, астродинамике и др. Методы О. часто позволяют находить приближенные решения для исходных уравнений. Наиболее типичные классы дифференциальных уравнений, к к-рым применяются методы О., следующие.

1) Стандартные системы в смысле Н. Н. Боголюбова

$$\frac{dx}{dt}=\mu X(x, t, \mu), \tag{1}$$

где x, X — векторы, t — время, μ — малый положительный параметр.

2) Многочастотные автономные 2π-периодические системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\mu X(x, y),\\ \frac{dy}{dt}&=\omega(x)+\mu Y(x, y),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где x, y, X, Y — векторы, причем

$$X(x, y+(2\pi))\equiv X(x, y),\ Y(x, y+(2\pi))\equiv Y(x, y),$$

$\omega(x)$ — вектор частот.

3) Многочастотные неавтономные системы

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\mu X(x, y, t),\\ \frac{dy}{dt}&=\omega(x, y, t)+\mu Y(x, y, t).\end{aligned} \tag{3}$$

Вместо систем (1)—(3) рассматриваются «более простые» осредненные системы 1-го приближения:

$$\frac{dx}{dt}=\mu \boldsymbol{X}_0(x) \tag{1'}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\mu \boldsymbol{X}_1(x),\\ \frac{dy}{dt}&=\omega(x);\end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\mu X_2(x, x_0, y_0, t),\\ \frac{dy}{dt}&=\omega(x, y, t),\end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

где

$$X_0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(x,\ t,\ 0)\,dt, \tag{4}$$

$$X_1(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}X(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)\,dy_1\ldots dy_n, \tag{5}$$

$$X_2(x,\ x_0,\ y_0,\ t_0)= \\ =\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}X(x,\varphi(x_0,\ y_0,\ t_0,\ t),\ t)dt. \tag{6}$$

Формулы (4)—(6) выражают наиболее распространенные схемы О.

Формула (6) выражает схему О. «вдоль порождающего решения». В функции $X(x,\ y,\ t)$ вектор y сначала заменяется порождающим решением системы

$$dx/dt=0,$$
$$dy/dt=\omega(x,\ y,\ t),$$

после чего вычисляется интегральное среднее (6).

Принципиальный вопрос, к-рый возникает при замене систем (1)—(3), состоит в том, чтобы построить ε-оценки для норм

$$\|x(t,\ \mu)-\boldsymbol{x}(t,\ \mu)\|,\quad \|y(t,\ \mu)-\boldsymbol{y}(t,\ \mu)\|$$

на возможно большем (порядка $1/\mu$) промежутке времени, если

$$x(0,\ \mu)=\boldsymbol{x}(0,\ \mu),\quad y(0,\ \mu)=\boldsymbol{y}(0,\ \mu).$$

В этом состоит проблема обоснования методов О. Для систем (1) проблема обоснования методов О. была поставлена и решена Н. Н. Боголюбовым, результаты к-рого заложили основы современной алгоритмич. теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [2] Митропольский Ю. А., Метод усреднения в нелинейной механике, К., 1971; [3] Волосов В. М., Моргунов Б. И., Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, М., 1971; [4] Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Конструктивные методы анализа нелинейных систем, М., 1979. *Е. А. Гребеников.*

ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН разложения функции — аддитивное слагаемое в формуле, задающей аппроксимацию функции с помощью другой, в каком-то смысле более простой. О. ч. равен разности между заданной функцией и функцией ее аппроксимирующей, тем самым его оценка является оценкой точности рассматриваемой аппроксимации.

К указанным формулам относятся формулы типа *Тейлора формулы*, интерполяционных формул, асимптотич. формул, формул для приближенного вычисления тех или иных величин и т. п. Так, в формуле Тейлора

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\quad x\longrightarrow x_0,$$

О. ч. (в виде Пеано) наз. слагаемое $O((x-x_0)^n)$. При асимптотич. разложении функции

$$f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right),\quad x\longrightarrow+\infty,$$

О. ч. является $O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$, $x\to\infty$. В частности, в *Стирлинга формуле*, дающей асимптотич. разложение гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(s+1)=\sqrt{2\pi s}\left(\frac{s}{e}\right)^s+O\left(e^{-s}s^{s-\frac{1}{2}}\right),\ s\longrightarrow+\infty,$$

О. ч. является $O(e^{-s}s^{s-1/2})$. *Л. Д. Кудрявцев.*

ОСТРОГРАДСКОГО МЕТОД — метод выделения алгебраич. части у неопределенных интегралов от рациональных функций. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами, причем степень $P(x)$ меньше степени $Q(x)$ и, следовательно, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная дробь,

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\ \dots\ (x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ \dots$$
$$\dots\ (x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \qquad (1)$$

a_i, p_j, q_j — действительные числа, $p_j^2/4-q_j<0$, α_i и β_i — натуральные числа, $i=1, 2, \dots, r$, $j=1, 2, \dots, s$,

$$\left.\begin{array}{c} Q_1(x)=(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ \dots \\ \dots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ \dots \\ \dots\ (x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}, \\ Q_2(x)=(x-a_1)\ \dots\ (x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\ \dots \\ \dots\ (x^2+p_sx+q_s). \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Тогда существуют такие действительные многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$, степени к-рых меньше соответственно чем степени n_1 и $n_2=r+2s$ многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, что

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx. \qquad (3)$$

Важным является то обстоятельство, что многочлены $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ можно найти без знания разложения (1) многочлена $Q(x)$ на неприводимые множители: многочлен $Q_1(x)$ является наибольшим общим делителем многочлена $Q(x)$ и его производной $Q'(x)$ и может быть получен с помощью алгоритма Евклида, а $Q_2(x)=Q(x)/Q_1(x)$. Коэффициенты многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ можно вычислить с помощью *неопределенных коэффициентов метода*. О. м. сводит, в частности, задачу интегрирования правильной рациональной дроби к задаче интегрирования правильной рациональной дроби, знаменатель к-рой имеет простые корни; интеграл от такой функции выражается через трансцендентные функции: логарифмы и арктангенсы. Следовательно, рациональная дробь $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ в формуле (3) является алгебраич. частью неопределенного интеграла $\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.

О. м. впервые опубликован М. В. Остроградским в 1845 (см. [1]).

Лит.: [1] Остроградский М. В., «Bull. scient. Acad. Sci. St.-Pitersbourg», 1845, t. 4, № 10—11, p. 145—67; № 18—19, p. 286—300. *Л. Д. Кудрявцев.*

ОСТРОГРАДСКОГО ФОРМУЛА — формула интегрального исчисления функций многих переменных, устанавливающая связь между n-кратным интегралом по области и $(n-1)$-кратным интегралом по ее границе. Пусть функции $X_i=X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вместе со своими частными производными $\partial X_i/\partial x_i$, $i=1, 2, \dots, n$, интегрируемы по Лебегу в ограниченной области $G\subset\mathbb{R}^n$, граница ∂G к-рой является объединением конечного множества кусочно гладких $(n-1)$-мерных гиперповерхностей, ориентированных с помощью внешней нормали $\boldsymbol{\nu}$. Тогда О. ф. имеет вид

$$\int\cdots\int_G \sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\,dx_1\ \dots\ dx_n=$$
$$=\int\ \dots\ \int_{\partial G}\sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i\,dx_{i+1}\ \dots\ dx_n\,dx_1\ \dots\ dx_{i-1}. \quad (1)$$

Если $\cos\alpha_i$, $i=1, 2, \dots, n$, — направляющие косинусы внешних нормалей $\boldsymbol{\nu}$ гиперповерхностей, составляющих границу ∂G области G, то формула (1) может быть записана в виде

$$\int\ \dots\ \int_G \sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\,dv=\int\cdots\int_{\partial G}\sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i\cos\alpha_i\,d\sigma, \qquad (2)$$

где $dv = dx_1 \ldots dx_n$ — элемент n-мерного объема в R^n, а $d\sigma$ — элемент $(n-1)$-мерного объема на ∂G.

В терминах векторного поля $\boldsymbol{a}=(X_1, \ldots, X_n)$ формулы (1) и (2) означают равенство интеграла от *дивергенции* этого поля по области G его потоку (см. *Поток векторного поля*) через границу области G:

$$\int \ldots \int_G \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dv = \int \ldots \int_{\partial G} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\, d\sigma.$$

Для гладких функций О. ф. была впервые получена в трехмерном случае М. В. Остроградским в 1828 (опубл. в 1831, см. [1]). На n-кратные интегралы в случае произвольного натурального n О. ф. была обобщена им в 1834 (опубл. в 1838, см. [2]). С помощью этой формулы М. В. Остроградский нашел выражение производной по параметру от n-кратного интеграла с переменными пределами и получил формулу для вариации n-кратного интеграла; при $n=3$ для одного частного случая О. ф. была получена К. Гауссом (C. Gauss) в 1813, поэтому иногда О. ф. наз. также формулой Остроградского — Гаусса. Обобщением О. ф. является *Стокса формула* для многообразий с краем.

Лит.: [1] Остроградский М. В., «Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg. Sér. 6 — Sciences mathématiques, physiques et naturelles», 1831, t. 1, p. 117—22; [2] его же, там же, 1838, t. 1, p. 35—58. *Л. Д. Кудрявцев.*

ОСТРОГРАДСКОГО — ЛИУВИЛЛЯ ФОРМУЛА — см. *Лиувилля — Остроградского формула*.

ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЕ РЕШЕНИЕ — то же, что *колеблющееся решение* обыкновенного дифференциального уравнения.

ОСЦИЛЛЯТОР ГАРМОНИЧЕСКИЙ — система с одной степенью свободы, колебания к-рой описываются уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Фазовые траектории — окружности, период колебаний $T=2\pi/\omega$ не зависит от амплитуды. Потенциальная энергия О. г. квадратично зависит от x:

$$U = \omega^2 x^2/2.$$

Примеры О. г.: малые колебания маятника, колебания материальной точки, закрепленной на пружине с постоянной жесткостью, простейший электрический колебательный контур. Термины «гармонический осциллятор» и «линейный осциллятор» часто употребляются как синонимы.

Колебания квантовомеханического линейного осциллятора описываются уравнением Шрёдингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\psi = 0.$$

Здесь m — масса частицы, E — ее энергия, $\hbar$ — постоянная Планка, ω — частота. Квантовомеханический линейный осциллятор имеет дискретный спектр уровней энергии $E_n=(n+{}^1/_2)\hbar\omega$, $n=0, 1, 2$; соответствующие собственные функции выражаются через *Эрмита функции*.

Термин «осциллятор» употребляется по отношению к системам (механическим или физическим) с конечным числом степеней свободы, движение к-рых носит колебательный характер (напр., многомерный линейный осциллятор — колебания материальной точки, находящейся в потенциальном поле сил с потенциалом, к-рый является положительно определенной квадратичной формой от координат, нелинейный осциллятор Ван дер Поля, см. *Ван дер Поля уравнение*). По-видимому, не существует однозначного толкования термина «осциллятор» или даже «линейный осциллятор».

Лит.: [1] Мандельштам Л. И., Лекции по теории колебаний, М., 1972; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика. Нерелятивистская теория, 3 изд., М., 1974 (Теоретическая физика, т. 3). *М. В. Федорюк.*

ОСЦИЛЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА — вполне неотрицательная матрица A такая, что существует целое положительное число χ, для к-рого A^{χ} — вполне положительная матрица; при этом матрица A наз. вполне неотрицательной (вполне положительной), если все ее миноры любого порядка неотрицательны (положительны). Наименьший из показателей χ наз. показателем О. м. Если A — О. м. с показателем χ, то при любом целом $k \geqslant \chi$ матрица A^k вполне положительна; натуральная степень О. м. и матрица $(A^{+})^{-1}$ — также О. м. Для того чтобы вполне неотрицательная матрица $A = \|a_{ik}\|_1^n$ была О. м., необходимо и достаточно, чтобы: 1) A была неособенной матрицей, 2) при $i=1, \ldots, n$ было выполнено $a_{i, i+1} > 0$, $a_{i+1, i} > 0$.

Основная теорема для О. м.: О. м. $A = \|a_{ik}\|_1^n$ всегда имеет n различных положительных собственных значений; у собственного вектора u^1, отвечающего наибольшему собственному значению λ_1, все координаты отличны от нуля и одного знака; у собственного вектора u^s, соответствующего s-му по величине собственному значению λ_s, имеется точно $s-1$ перемен знака; при любых действительных числах $c_g, c_{g+1}, \ldots, c_h$, $1 \leqslant g \leqslant h \leqslant n$, $\sum_{k=g}^{n} c_k^2 > 0$, в ряду координат вектора $u = \sum_{k=g}^{n} c_n u^k$ число перемен знака заключается между $g-1$ и $h-1$.

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, 2 изд., М.— Л., 1950. *В. И. Ломоносов.*

ОСЦИЛЛЯЦИОННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение, обладающее хотя бы одним осцилляционным (колеблющимся) решением. Имеются различные понятия осцилляционности решения. Наиболее распространены следующие: осцилляционность в точке (в качестве к-рой, как правило, берется $+\infty$) и осцилляционность в промежутке. Ненулевое решение уравнения

$$u^{(n)} = f(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)}), \quad n \geqslant 2, \tag{1}$$

где $f(t, 0, \ldots, 0) = 0$, наз. осцилляционным в точке $+\infty$ (в промежутке I), если оно имеет последовательность нулей, сходящуюся к $+\infty$ (соответственно имеет в I не менее n нулей с учетом их кратности). Осцилляционность уравнения (1) в $+\infty$ или в промежутке I понимается в соответствующем смысле.

Среди осцилляционных в $+\infty$ уравнений выделяют уравнения, обладающие т. н. свойствами A или B, т. е. в определенном смысле сходные с одним из уравнений

$$u^{(n)} = -u \quad \text{или} \quad u^{(n)} = u.$$

При этом уравнение (1) обладает свойством A, если каждое его решение, заданное в окрестности $+\infty$, при четном n является осцилляционным, а при нечетном n — либо осцилляционным, либо удовлетворяющим условию

$$\lim_{t \to +\infty} u^{(i-1)}(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Если же каждое решение уравнения (1), заданное в окрестности $+\infty$, при четном n является либо осцилляционным, либо удовлетворяющим условию (2) или

$$\lim_{t \to +\infty} |u^{(i-1)}(t)| = +\infty, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

а при нечетном n — либо осцилляционным, либо удовлетворяющим условию (3), то оно обладает свойством B.

Линейное уравнение

$$u^{(n)} = a(t)\, u \tag{4}$$

с локально суммируемым коэффициентом $a : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ обладает свойством A (свойством B), если

$$a(t) \leqslant 0 \ [a(t) \geqslant 0] \text{ при } t \geqslant t_0,$$
$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{n-1-\varepsilon} |a(t)| \, dt = +\infty,$$

или

$$a(t) \leqslant \frac{\mu_n - \varepsilon}{t^n} \left[a(t) \geqslant \frac{\nu_n + \varepsilon}{t^n} \right]$$

при $t \geqslant t_0$, где $\varepsilon > 0$, а μ_n — наименьший (ν_n — наибольший) из локальных минимумов (максимумов) многочлена $x(x-1)\ldots(x-n+1)$ (см. [1] — [5]).

Уравнение типа Эмдена — Фаулера

$$u^{(n)} = a(t) \, |u|^{\lambda} \operatorname{sign} u \ (\lambda > 0, \ \lambda \neq 1) \qquad (5)$$

с локально суммируемым неположительным (неотрицательным) коэффициентом $a : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ обладает свойством A (свойством B) тогда и только тогда, когда

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{\mu} |a(t)| \, dt = +\infty,$$

где $\mu = \min\{n-1, (n-1)\lambda\}$ (см. [4], [6], [7]).

В ряде случаев вопрос об осцилляционности уравнения (1) можно свести к аналогичному вопросу для эталонных уравнений вида (4) и (5) с помощью теорем сравнения (см. [11]).

При изучении осцилляционных свойств уравнений с отклоняющимся аргументом проявляются нек-рые специфич. особенности. Напр., если n нечетно, $\Delta > 0$ и для больших t соблюдается неравенство

$$a(t) \leqslant a_0 < -n! \, \Delta^{-n},$$

то все ненулевые решения уравнения

$$u^{(n)}(t) = a(t) \, u(t - \Delta)$$

являются осцилляционными в $+\infty$ (см. [10], [11]). В то же время при неположительном a и нечетном n уравнение без запаздывания (4) всегда имеет неосцилляционное решение.

Понятия осцилляционности и неосцилляционности в промежутке изучаются в основном для линейных однородных уравнений. Они имеют фундаментальное значение для теории краевых задач (см. [12]).

Лит.: [1] Kneser A., «Math. Ann.», 1893, Bd 42, S. 409—435; [2] Mikusinski J. G., «Colloq. Math.», 1949, v. 2, p. 34—39; [3] Кондратьев В. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1961, т. 10, с. 419—36; [4] Кигурадзе И. Т., «Матем. сб.», 1964, т. 65, № 2, с. 172—87; [5] Чантурия Т. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1976, т. 40, № 5, с. 1128—42; [6] Ličko I., Švec M., «Чехосл. матем. ж.», 1963, т. 13, с. 481—91; [7] Кигурадзе И. Т., «Arch. Math.», 1978, v. 14, № 1, p. 21—44; [8] Swanson C. A., Comparison and oscillation theory of linear differential equations, N. Y.— L., 1968; [9] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [10] Мышкис А. Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, 2 изд., М., 1972; [11] Коплатадзе Р. Г., Чантурия Т. А., Об осцилляционных свойствах дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Тб., 1977; [12] Левин А. Ю., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 2, с. 43—96. *И. Т. Кигурадзе.*

ОСЦИЛЛЯЦИОННОЕ ЯДРО — функция $K(x, s)$, $a \leqslant x, s \leqslant b$, такая, что для любых точек $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, среди к-рых (при $n = 2$) имеется по крайней мере одна внутренняя, матрица $\|K(x_i, x_k)\|_1^n$ является *осцилляционной матрицей*. *В. И. Ломоносов.*

π-ОТДЕЛИМАЯ ГРУППА — группа, у к-рой среди различных простых делителей каждого индекса ее композиционного ряда содержится не более одного простого числа из π (π — нек-рое множество простых чисел). Класс π-О. г. содержит класс *π-разрешимых групп*. Для конечных π-О. г. установлена справедливость π-силовских свойств (см. [1]). Именно, для любого множества $\pi_1 \subseteq \pi$ конечная π-О. г. G содержит π_1-холловскую подгруппу и любые две π_1-холловские подгруппы сопряжены в G. Любая π_1-подгруппа π-О. г. G содержится в нек-рой π_1-холловской подгруппе группы G (см. [2]).

Лит.: [1] Чунихин С. А., «Докл. АН СССР», 1948, т. 59, № 3, с. 443—45; [2] Hall P., «Proc. London Math. Soc.», 1956, v. 6, № 22, p. 286—304. *С. П. Струнков.*

ОТДЕЛИМОЕ ПОПОЛНЕНИЕ КОЛЬЦА — пополнение топологич. кольца $A/\bar{o}$, где A — топологич. кольцо, а $\bar{o}$ — замыкание в A нулевого идеала o. О. п. к. снова является топологич. кольцом и обозначается обычно $\hat{A}$. Всякий непрерывный гомоморфизм кольца A в полное отделимое кольцо B единственным образом продолжается до непрерывного гомоморфизма $\hat{A}\to B$.

В наиболее важном случае, когда топология кольца A линейна и задается фундаментальной системой идеалов $(\mathfrak{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, отделимое пополнение $\hat{A}$ канонически отождествляется с проективным пределом $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}(A/\mathfrak{A}_\lambda)$ дискретных колец $A/\mathfrak{A}_\lambda$. Аналогично устроено отделимое пополнение модулей. *В. И. Данилов.*

ОТДЕЛИМОСТИ АКСИОМА — условие, налагаемое на топологич. пространство и выражающее требование, чтобы те или иные дизъюнктные, т. е. не имеющие общих точек, множества были в нек-ром определенном смысле топологически отделены друг от друга. Простейшие, т. е. самые слабые из этих аксиом, касаются лишь одноточечных множеств, т. е. точек пространства. Это т. н. аксиомы T_0 (аксиома Колмогорова) и T_1. Дальнейшие суть T_2 (аксиома Хаусдорфа), T_3 (аксиома регулярности) и T_4 (аксиома нормальности), требующие, соответственно, чтобы всякие две различные точки (аксиома T_2), всякая точка и всякое не содержащее ее замкнутое множество(аксиома T_3), всякие два дизъюнктные замкнутые множества (аксиома T_4) были отделимы окрестностями, т. е. содержались в дизъюнктных открытых множествах данного пространства.

Топологич. пространство, удовлетворяющее аксиоме $T_i, i=2, 3, 4$, наз. T_i-пространством, T_2-пространство наз. хаусдорфовым, а T_3-пространство — регулярным; хаусдорфово T_4-пространство всегда регулярно и наз. нормальным.

Особое место занимает т. н. функциональная отделимость. Два множества A и B в данном топологич. пространстве X наз. функционально отделимыми в X, если существует такая определенная во всем пространстве действительная ограниченная непрерывная функция f, к-рая принимает во всех точках множества A одно значение a, а во всех точках множества B — нек-рое отличное от a значение b. При этом всегда можно предположить, что $a=0$, $b=1$, $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ во всех точках $x\in X$.

Два функционально отделимых множества всегда отделимы и окрестностями, обратное утверждение верно не всегда. Однако имеет место лемма Урысона: в нормальном пространстве всякие два дизъюнктные замкнутые множества функционально отделимы. Пространство, в к-ром всякая точка функционально отделима от всякого не содержащего ее замкнутого множества, наз. вполне регулярным. Вполне регулярное T_2-пространство наз. тихоновским.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977. *В. И. Зайцев.*

ОТДЕЛИМОСТЬ МНОЖЕСТВ — одно из основных понятий дескриптивной теории множеств (введенное Н. Н. Лузиным [1]). Служит важным инструментом для исследования дескриптивной природы множеств. Говорят, что множества A и A' отделимы при помощи множеств, обладающих свойствами P, если существуют обладающие свойством P множества B и B' такие, что $A\subset B$, $A'\subset B'$, $B\cap B'=\phi$.

Основополагающие результаты по отделимости принадлежат Н. Н. Лузину и П. С. Новикову. В дальнейшем не только появились многочисленные варианты теорем отделимости, но и само понятие О. м. было обобщено и получило новые формы. Одно из таких обобщений связано со следующей теоремой Новикова [2]: пусть $\{A_n\}$ — последовательность *A-множеств* полного сепарабельного метрич. пространства такая, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$, тогда существует последовательность $\{B_n\}$ *борелевских множеств* такая, что $A_n \subset B_n$, $n \geqslant 1$, и $\bigcap_{n=1} B_n = \phi$. Эта теорема и различные ее варианты и обобщения получили название теорем кратной (или обобщенной) отделимости.

Классич. результаты относятся к множествам, лежащим в полных сепарабельных метрич. пространствах. В хаусдорфовом пространстве X: 1) два непересекающихся аналитич. множества отделимы борелевскими множествами, порожденными системой G открытых множеств этого пространства [3] (если X — *Урысона пространство*, то «G открытых» можно заменить на «F замкнутых»; в хаусдорфовом пространстве этого сделать, вообще говоря, нельзя [4]); 2) пусть $\mathcal{H}$ — нек-рая система A-множеств, порожденных системой F; если A есть A-множество, порожденное системой $\mathcal{H}$, и B — аналитич. множество, $A \cap B = \phi$, то существует борелевское множество C, порожденное системой $\mathcal{H}$, такое, что $A \subset C$, $C \cap B = \phi$ (см. [5]).

В отличие от этих (и других) вариантов первого принципа отделимости многие формулировки второго принципа отделимости не зависят от топологии пространства, в к-ром лежат рассматриваемые множества. Одна из них [6]: пусть система $\mathcal{H}$ подмножеств данного множества замкнута относительно операции перехода к дополнению и содержит ϕ; пусть $\{A_n\}$ — произвольная последовательность *CA-множеств*, порожденных системой $\mathcal{H}$; тогда существует последовательность $\{C_n\}$ попарно непересекающихся CA-множеств, порожденных системой $\mathcal{H}$, такая, что $C_n \subset A_n$, $n \geqslant 1$, и $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (более точно, это — одна из формулировок принципа редукции, см. [7]).

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958; [2] Новиков П. С., «Докл. АН СССР», 1934, т. 3 [т. 4], № 3, с. 145—148; [3] Frolík Z., «Czechosl. Math. J.», 1970, v. 20, p. 406—67; [4] Ostaszewski A. I., «Proc. London Math. Soc.», 1973, v. 27, № 4, p. 649—66; [5] Rogers C. A., «J. London Math. Soc.», 1971, v. 3, № 1, p. 103—08; [6] его же, там же, 1973, v. 6, № 3, p. 491—503; [7] Куратовский К., Топология, [пер. с англ.], т. 1, М., 1966.

А. Г. Елькин.

ОТКОСА ЛИНИЯ — кривая, касательная к к-рой образует постоянный угол с нек-рым неизменным направлением. Пример: винтовая линия. Отношение кручения О. л. к кривизне О. л. постоянно. Сферич. индикатриса касательных к О. л. является окружностью. Если $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ — естественная параметризация О. л., то $(\boldsymbol{r}^{\mathrm{II}}, \boldsymbol{r}^{\mathrm{III}}, \boldsymbol{r}^{\mathrm{IV}}) = 0$ (см. [2]). Эволюты плоской кривой γ являются О. л., касательные к к-рым наклонены к плоскости кривой γ под постоянным углом (см. [1]). Для всякой О. л. существует неподвижно связанный с ее сопутствующим триэдром конус, вершина к-рого лежит на кривой, а образующие описывают развертывающиеся поверхности.

Лит.: [1] Бляшке В., Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна, пер. с нем., т. 1, М.— Л., 1935; [2] Forsyth A. R., Lectures on the differential geometry of curves and surfaces, Camb., 1912; [3] Appell P., «Arch. Math. Phys.», 1879, Bd 64, № 1, S. 19—23.

Е. В. Шикин.

ОТКРЫТОЕ МНОГООБРАЗИЕ — многообразие, не имеющее компактных компонент, т. е. не являющееся *замкнутым многообразием.* *М. И. Войцеховский.*

ОТКРЫТОЕ МНОЖЕСТВО топологического пространства — элемент топологии этого пространства. Подробнее, пусть топология τ топологич.

пространства (X, τ) определяется как такая система τ подмножеств множества X, что: 1) $X \in \tau$, $\phi \in \tau$, 2) если $O_i \in \tau$, $i=1, 2$, то $O_1 \cap O_2 \in \tau$, 3) если $O_\alpha \in \tau$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, то $\bigcup \{O_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\} \in \tau$; тогда открытыми множествами в пространстве (X, τ) считаются элементы топологии τ и только они. *Б. А. Пасынков.*

ОТКРЫТОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение одного топологич. пространства в другое, при к-ром образ каждого открытого множества открыт.

Проектирование топологич. произведений на сомножители — О. о. Открытость отображения можно толковать как вид непрерывности обратного к нему многозначного отображения. Взаимно однозначное непрерывное О. о. на — *гомеоморфизм.* В общей топологии О. о. применяются при классификации пространств. Важен вопрос о поведении топологич. инвариантов при непрерывных О. о. Все пространства с первой аксиомой счетности и только они являются образами метрич. пространств при непрерывных О. о. Метризуемое пространство, являющееся образом полного метрич. пространства при непрерывном О. о., метризуемо полной метрикой. Если паракомпакт является образом полного метрич. пространства при непрерывном О. о., то он метризуем. Счетнократное непрерывное О. о. компактов не повышает размерности. Но трехмерный куб можно непрерывно и открыто отобразить на куб любой большей размерности. Каждый бикомпакт является образом некоего одномерного бикомпакта при непрерывном О. о. с нульмерными прообразами точек.

Самостоятельное значение имеют непрерывные О. о., при к-рых прообразы всех точек бикомпактны, — т. н. открытые бикомпактные отображения. Пространства с равномерной базой и только они являются образами метрич. пространств при бикомпактных О. о. Важны замкнутые непрерывные О. о. Таковы все непрерывные О. о. бикомпактов в хаусдорфовы пространства. Непрерывные замкнутые О. о. сохраняют метризуемость. О. о. с дискретными прообразами точек играют существенную роль в теории функций одного комплексного переменного: таковы все голоморфные в области функции. Теорема об открытости голоморфных функций играет центральную роль при доказательстве принципа максимума модуля, при доказательстве фундаментальной теоремы о существовании корня у произвольного непостоянного многочлена над полем комплексных чисел.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, [пер. с англ.], т. 1—2, М., 1966—69; [2] Келдыш Л. В., в кн.: Тр. 3 Всесоюзного математического съезда, т. 3, М., 1958, с. 368—72; [3] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1, М., 1962. *А. В. Архангельский.*

ОТКРЫТОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, теорема об открытом отображении: линейный непрерывный оператор A, отображающий банахово пространство X на все банахово пространство Y, является открытым отображением, т. е. $A(G)$ открыто в Y для любого G, открытого в X; доказана С. Банахом (S. Banach). В частности, непрерывный линейный оператор A, отображающий взаимно однозначно банахово пространство X на банахово пространство Y, является гомеоморфизмом, т. е. A^{-1} — также линейный непрерывный оператор (теорема Банаха о гомеоморфизме).

Условиям теоремы об О. о. удовлетворяет, например, всякий ненулевой линейный непрерывный функционал, определенный на вещественном (комплексном) банаховом пространстве X со значениями в $\mathbb{R}$ (в $\mathbb{C}$).

Теорема об О. о. допускает следующее обобщение: непрерывный линейный оператор, отображающий совершенно полное топологич. векторное пространство X на *бочечное пространство* Y, есть открытое отображение. К теореме об О. о. примыкает теорема о замкнутом графике (см. *Замкнутый график*, теорема о замкнутом графике).

Лит.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Робертсон А.-П., Робертсон В.-Дж., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967.
В. И. Соболев.

ОТКРЫТОЕ ЯДРО — множество всех точек x подмножества A топологич. пространства X, для к-рых существует такое открытое в X множество U_x, что $x \in U_x \subset A$. О. я. множества A обозначается обычно $\operatorname{Int} A$ и представляет собой максимальное открытое в X множество, содержащееся в A. Имеет место равенство $\operatorname{Int} A = X - [X - A]$, где $[\ \ ]$ обозначает замыкание в пространстве X. О. я. множества топологич. пространства X есть открытое регулярное, или *каноническое множество*. Пространства, в к-рых открытые канонич. множества образуют *базу* топологии, наз. полурегулярными. Всякое регулярное пространство полурегулярно. Иногда О. я. наз. внутренностью множества. *В. И. Пономарев.*

ОТКРЫТО-ЗАМКНУТОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество топологич. пространства, одновременно открытое и замкнутое в нем. Топологич. пространство X несвязно тогда и только тогда, когда в нем имеется отличное от X и от ϕ О.-з. м. Если семейство всех О.-з. м. топологич. пространства является базой его топологии, то это пространство наз. индуктивно нульмерным. Всякая булева алгебра изоморфна булевой алгебре всех О.-з. м. подходящего индуктивно нульмерного бикомпакта. Особый класс нульмерных бикомпактов образуют т. н. экстремально несвязные бикомпакты, характеризующиеся тем, что в них замыкание любого открытого множества также открыто (и замкнуто). Всякая полная булева алгебра изоморфна булевой алгебре всех О.-з. м. подходящего экстремально несвязного бикомпакта.
В. И. Пономарев.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА — гомологическая алгебра, ассоциированная с парой абелевых категорий $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ и фиксированным функтором $\Delta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$. Функтор Δ предполагается аддитивным, точным и полным. Короткая точная последовательность объектов категории $\mathfrak{A}$

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

наз. допустимой, если точная последовательность

$$0 \longrightarrow \Delta A \longrightarrow \Delta B \longrightarrow \Delta C \longrightarrow 0$$

расщепляется в категории $\mathfrak{M}$. Посредством класса $\mathcal{E}$ допустимых точных последовательностей определяется класс $\mathcal{E}$-проективных (соответственно $\mathcal{E}$-инъективных) объектов как класс таких объектов P (соответственно Q), для к-рых функтор $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}}(P, -)$ (соответственно $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}}(-, Q)$) точен на допустимых коротких точных последовательностях.

Любой проективный объект P категории $\mathfrak{A}$ является $\mathcal{E}$-проективным, это не означает, однако, что в категории $\mathfrak{A}$ достаточно много относительно проективных объектов (т. е. что для любого объекта A из $\mathfrak{A}$ существует допустимый эпиморфизм $P \to A$ нек-рого $\mathcal{E}$-проективного объекта категории $\mathfrak{A}$). Если в категории $\mathfrak{A}$ достаточно много $\mathcal{E}$-проективных или $\mathcal{E}$-инъективных объектов, то обычные конструкции гомологич. алгебры позволяют строить в этой категории производные функторы, наз. относительными производными функторами.

Примеры. Пусть $\mathfrak{A}$ — категория R-модулей над ассоциативным кольцом R с единицей, $\mathfrak{M}$ — категория множеств, $\Delta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$ — функтор, «забывающий» структуру модуля. В этом случае все точные последовательности допустимы, и в результате получается «абсолютная» (т. е. обычная) гомологич. алгебра.

Если G — группа, то каждый G-модуль является, в частности, абелевой группой. Если R является алгеброй над коммутативным кольцом k, то каждый R-модуль является k-модулем. Если R и S — кольца и $R \supset S$, то каждый R-модуль является S-модулем. Во всех этих случаях имеется функтор из одной абелевой категории в другую, определяющий относительные производные функторы.

Лит.: [1] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [2] Eilenberg S., Moore J. C., Foundations of relative homological algebra, Providence, 1965.

В. Е. Говоров, А. В. Михалев.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ МЕТРИКА — ограничение метрики ρ на подмножество A метрич. пространства X, т. е. ограничение отображения ρ квадрата $X \times X$ на квадрат $A \times A \subset X \times X$. Это понятие позволяет рассматривать как метрич. пространство любое его подмножество.

Б. А. Пасынков.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА КОРНЕЙ связной редуктивной алгебраической группы G, определенной над полем k, — система $\Phi_k(S, G)$ ненулевых весов присоединенного представления максимального k-расщепимого тора S группы G в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ этой группы. Сами веса наз. корнями G относительно S. О. с. к. $\Phi_k(S, G)$, рассматриваемая как подмножество своей линейной оболочки L в пространстве $X(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, где $X(S)$ — группа рациональных характеров тора S, является *корневой системой*. Пусть $N(S)$ — нормализатор, а $Z(S)$ — централизатор S в G. Тогда $Z(S)$ является связной компонентой единицы группы $N(S)$; конечная группа $W_k(S, G) = N(S)/Z(S)$ наз. группой Вейля группы G над k, или относительной группой Вейля (о. г. В.). Присоединенное представление $N(S)$ в $\mathfrak{g}$ определяет линейное представление $W_k(S, G)$ в L. Это представление является точным и его образ есть *Вейля группа* системы корней $\Phi_k(S, G)$, что позволяет отождествить эти две группы. Ввиду сопряженности над k максимальных k-расщепимых торов в G О. с. к. $\Phi_k(S, G)$ и о. г. В. $W_k(S, G)$ не зависят, с точностью до изоморфизма, от выбора тора S и часто обозначаются просто $\Phi_k(G)$ и $W_k(G)$. В случае, когда G расщепима над k, О. с. к. и о. г. В. совпадают соответственно с обычной (абсолютной) системой корней и группой Вейля группы G. Пусть g_α — весовое относительно S подпространство в $\mathfrak{g}$, отвечающее корню $\alpha \in \Phi_k(S, G)$. Если G расщепима над k, то $\dim g_\alpha = 1$ для любого α и $\Phi_k(G)$ — приведенная система корней; в общем случае это не так: $\Phi_k(G)$ может быть неприведенной, а $\dim g_\alpha$ может быть больше 1. О. с. к. $\Phi_k(G)$ неприводима, если G проста над k.

О. с. к. играет важную роль в описании структуры и в классификации полупростых алгебраич. групп над k. Пусть G — полупроста и T — максимальный тор, определенный над k и содержащий S. Пусть $X(S)$ и $X(T)$ — группы рациональных характеров торов S и T с фиксированными согласованными отношениями порядка, Δ — соответствующая система простых корней группы G относительно T и Δ_0 — подсистема в Δ, состоящая из характеров, тривиальных на S. Пусть также Δ_k — система простых корней в О. с. к. $\Phi_k(S, G)$, определенная выбранным в $X(S)$ отношением порядка; она состоит из сужений на S характеров системы Δ. Группа Галуа $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ естественно действует на Δ, и набор данных $\{\Delta, \Delta_0$, действие Γ на $\Delta\}$ наз. k-индексом полупростой группы G. Роль k-индекса объясняется следующей теоремой: всякая полупростая группа над k однозначно с точностью до k-изоморфизма определяется своим классом относительно изоморфизма над k_s, своим k-индексом и своим *анизотропным ядром*. О. с. к. $\Phi_k(G)$ полностью определяется системой Δ_k и набором таких натуральных чисел n_α, $\alpha \in \Delta_k$ (равных 1 или 2), что $n_\alpha \alpha \in \Phi_k(G)$, но $(n_\alpha+1)\alpha\notin\Phi_k(G)$. В свою очередь, Δ_k и n_α, $\alpha\in\Delta_k$, могут быть восстановлены по k-индексу. В частности, два элемента из $\Delta\setminus\Delta_0$ имеют одно и то же ограничение на S тогда и только тогда, когда они лежат в одной орбите группы Γ; это определяет биекцию между Δ_k и множеством орбит группы Γ в $\Delta\setminus\Delta_0$.

Если $\gamma\in\Delta_k$, $O_\gamma\subset\Delta\setminus\Delta_0$ — соответствующая орбита и $\Delta(\gamma)$ — любая связная компонента в $\Delta_0\bigcup O_\gamma$, не все вершины к-рой лежат в Δ_0, то n_γ есть сумма коэффициентов при корнях $\alpha\in\Delta(\gamma)\bigcap O_\gamma$ в разложении старшего корня системы $\Delta(\gamma)$ по простым корням.

Если $k=\mathbb{R}$, $\overline{k}=\mathbb{C}$, то это О. с. к. естественно отождествляется с системой корней, а о. г. В. — с группой Вейля соответствующего симметрич. пространства.

Лит.: [1] Титс Ж., «Математика», 1968, т. 12, № 2, с. 110—143; [2] Борель А., Титс Ж., там же, 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; № 2, с. 3—31; [3] Tits J., «Proc. of Symposia in pure math.», 1966, v. 9, p. 33—62 (AMS). *В. Л. Попов.*

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ подмножества A топологич. пространства (X, τ) — система пересечений всевозможных открытых подмножеств пространства (X, τ) (т. е. элементов топологии τ) с множеством A. Часто О. т. наз. индуцированной топологией.

Подмножество топологич. пространства (X, τ), снабженное О. т., наз. подпространством пространства (X, τ). Подпространство T_i-пространства является T_i-пространством, $i=0, 1, 2, 3, 3^1/_2$. Подпространство метризуемого пространства метризуемо. Любое тихоновское пространство веса $\leqslant\theta$ гомеоморфно подпространству бикомпакта веса $\leqslant\theta$ (теорема Тихонова).
Б. А. Пасынков.

ОТНОСИТЕЛЬНО БИКОМПАКТНОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество M топологич. пространства X такое, что его замыкание $\overline{M}$ бикомпактно. *М. И. Войцеховский.*

ОТНОСИТЕЛЬНО ОТКРЫТОЕ (ЗАМКНУТОЕ) МНОЖЕСТВО, множество, открытое (замкнутое) относительно нек-рого множества E, — множество M топологич. пространства X такое, что

$$M=E\setminus(E\setminus M)\quad (M=E\bigcap\overline{M})$$

(черта сверху означает операцию замыкания). Для того чтобы нек-рое множество было открытым (замкнутым) относительно E, необходимо и достаточно, чтобы оно было пересечением M с нек-рым открытым (замкнутым) множеством. *М. И. Войцеховский.*

ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ПРИНЦИП — один из наиболее фундаментальных физич. законов, согласно к-рому любой процесс протекает одинаково в изолированной материальной системе, находящейся в состоянии покоя, и в такой же системе, находящейся в состоянии равномерного прямолинейного движения. Состояние движения или покоя определяется здесь по отношению к произвольно выбранной *инерциальной системе отсчета*; физически эти состояния полностью равноправны. Эквивалентная формулировка О. п.: законы физики имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета. О. п. вместе с постулатом о независимости скорости света в вакууме от движения источника света легли в основу специальной (частной) *относительности теории.* *БСЭ-3.*

ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ТЕОРИЯ — физическая теория, рассматривающая пространственно-временные свойства физич. процессов. Эти свойства являются общими для всех физич. процессов, поэтому их часто наз. просто свойствами *пространства-времени.* Свойства пространства-времени зависят от полей тяготения, действующих в данной его области. Свойства пространства-времени при наличии полей тяготения исследуются в общей О. т., наз. также теорией тяготения. В частной (специальной)

О. т. рассматриваются свойства пространства-времени в том приближении, в к-ром эффектами, связанными с полями тяготения, можно пренебречь. Ниже излагается частная О. т., об общей О. т. см. *Тяготения теория*. О. т. часто наз. также теорией относительности Эйнштейна по имени ее создателя А. Эйнштейна (см. [1], [2]).

Основные черты теории относительности. Специфические (релятивистские) эффекты, описываемые О. т. и отличающие ее от предшествующих физич. теорий, проявляются при скоростях движения тел, близких к скорости света в вакууме $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*. При таких скоростях, наз. релятивистскими, зависимость энергии E тела массы m от его скорости v описывается формулой

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1}$$

При скоростях v, много меньших c, формула (1) приобретает вид

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \tag{2}$$

Второй член справа в формуле (2) совпадает с формулой для кинетич. энергии в классич. механике, а первый член показывает, что покоящееся тело обладает энергией $E = mc^2$, наз. энергией покоя. В ядерных реакциях и процессах превращения элементарных частиц энергия покоя может переходить в кинетич. энергию частиц. Из формулы (1) вытекает, что энергия тел с ненулевой массой стремится к бесконечности при $v \to c$. Если $m \neq 0$, то скорость тела всегда меньше c. Частицы с $m = 0$ (фотоны и нейтрино) всегда движутся со скоростью света. Иногда говорят, что при релятивистских скоростях масса тела начинает зависеть от его скорости, и величину

$$m_{\text{дв}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

наз. массой движения тела, а m — его массой покоя. Из формулы (1) следует, что

$$E = m_{\text{дв}} c^2.$$

Скорость света в вакууме в О. т. является *предельной скоростью*, т. е. передача любых взаимодействий и сигналов из одной точки в другую происходит со скоростью, не превышающей скорости света.

Существование предельной скорости несовместимо с представлениями классич. механики и вызывает необходимость глубокой перестройки классич. пространственно-временных представлений.

Принцип относительности Эйнштейна и другие принципы инвариантности. В основе О. т. лежит принцип относительности, согласно к-рому любой физич. процесс протекает одинаково (при одинаковых начальных условиях) в изолированной материальной системе, находящейся в состоянии покоя по отношению к нек-рой произвольно выбранной инерциальной системе отсчета, и в такой же системе, находящейся в состоянии равномерного и прямолинейного движения относительно этой же инерциальной системы отсчета.

Справедливость принципа относительности означает, что различие между состоянием покоя и равномерного и прямолинейного движения не имеет физич. смысла. Говорят, что движущаяся система отсчета получается из системы отсчета, условно считающейся покоящейся, с помощью преобразования движения. Из принципа относительности вытекает, что физич. законы инвариантны относительно преобразований движения и имеют один и тот же вид во всех инерциальных системах отсчета.

Кроме принципа относительности, известны еще три типа преобразований, к-рые оставляют неизменным ход протекания физич. процессов: перенос (сдвиг) в пространстве, вращение в пространстве, перенос (сдвиг) во времени. Симметрии физич. законов относительно этих преобразований выполняются точно только в изолированных системах или им отвечают соответственно законы сохранения импульса, момента импульса и энергии.

Инерциальные системы отсчета и преобразования Лоренца. Инерциальные системы отсчета образуют в О. т. выделенный класс систем отсчета, в к-рых эффекты О. т. имеют наиболее простое описание.

Первичными понятиями О. т. являются понятия точечного события и светового сигнала. В данной инерциальной системе отсчета точечное событие можно характеризовать тремя пространственными координатами x, y, z в нек-рой декартовой системе координат и временной координатой t. Системы координат x, y, z, t в разных инерциальных системах отсчета связаны *Лоренца преобразованиями*. Иэ принципа относительности, условий симметрии и требования того, чтобы указанные преобразования образовывали группу, можно получить вид преобразований Лоренца. Если инерциальная система отсчета L' движется относительно инерциальной системы отсчета L со скоростью V так, что оси x и x' совмещены и направлены по V, оси y и y' и z и z' соответственно параллельны, начала координат в L и L' совпадают в момент $t=0$ и часы в системе L' в начале координат показывают при $t=0$ время $t'=0$, то преобразования Лоренца имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y'=y, \quad z'=z, \\ t' &= \frac{t-\frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Для получения всех преобразований Лоренца к преобразованиям (3) нужно добавить пространственные вращения вокруг начала координат. Преобразования Лоренца образуют группу, наз. группой Лоренца. Свойство инвариантности физич. законов при преобразованиях Лоренца наз. лоренц-инвариантностью или релятивистской инвариантностью.

Из преобразований Лоренца вытекает релятивистский закон сложения скоростей. Если частица движется в инерциальной системе отсчета L со скоростью v вдоль оси x, то скорость этой частицы в системе L' равна

$$v' = \frac{v-V}{1-\frac{vV}{c^2}}. \tag{4}$$

Формула (4) показывает, что скорость света не зависит от скорости (4) движения источника света.

Из преобразований Лоренца вытекают также основные эффекты О. т.: относительность одновременности, замедление времени и сокращение продольных размеров тел. Так, события A и B, одновременные в системе L ($t_A=t_B$) и происходящие в разных точках (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), оказываются неодновременными в L':

$$t'_A - t'_B = (x_2 - x_1)\frac{V^2}{c^2} \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \neq 0.$$

Далее, когда часы, покоящиеся в системе L в точке

(0, 0, 0), показывают время t, то время t' по часам в L', пространственно совпадающим с часами в L в этот момент, равно

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, с точки зрения наблюдателя в L' часы в L отстают. Однако в силу принципа относительности с точки зрения наблюдателя в L часы в L' также отстают. Размеры тел, покоящихся в L (т. н. собственная длина), при измерении в L' оказываются уменьшенными в $\sqrt{1-V^2/c^2}$ раз в направлении скорости V сравнительно с размерами в L:

$$l' = l\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

При малых скоростях v преобразования Лоренца (3) с точностью до величин, стремящихся к нулю при $V/c \to 0$, совпадают с преобразованиями Галилея:

$$x' = x - Vt,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t. \qquad (5)$$

Эти преобразования соответствуют повседневному опыту, в к-ром не встречаются движения тел с релятивистскими скоростями. В частности, преобразования Галилея сохраняют пространственные размеры тел и длительности физич. процессов. Преобразования (5) и различные их комбинации с пространственными поворотами образуют т. н. группу Галилея. Важным отличием преобразований Лоренца от преобразований Галилея является то, что в формулу преобразования временной координаты t входит пространственная координата x. В связи с этим в О. т. сформировалось представление, согласно к-рому пространственные и временны́е свойства физич. процессов нельзя рассматривать изолированно друг от друга. Это привело к возникновению понятия пространства-времени, т. е. объекта, геометрич. свойства к-рого определяют пространственные и временны́е свойства физич. процессов. В классич. механике Ньютона пространственные свойства физич. процессов определяются геометрич. свойствами трехмерного евклидова пространства, а временна́я переменная входит в уравнения как параметр. В частной О. т. адекватной моделью пространства-времени является четырехмерное *псевдоевклидово пространство* $E^4_{(1,\,3)}$, наз. пространством Минковского. Формирование понятия пространства-времени открыло путь к геометризации аппарата О. т., значительно развитой при разработке общей О. т.

Математический аппарат теории относительности и геометрия пространства Минковского. При аксиоматич. описании О. т. аксиомы, фиксирующие свойства первичных понятий О. т. (точечного события и светового сигнала), удается вычленить из приведенного выше неформального описания основных положений О. т. Эта система аксиом дополняется естественными с физич. точки зрения аксиомами, гарантирующими существование достаточно большого числа событий и световых сигналов, а также нек-рыми аксиомами непрерывности на множестве световых сигналов и точечных событий. Иными словами, эти аксиомы гарантируют, что каждый набор чисел (t, x, y, z) определяет точечное событие. Получающаяся при таком расширении система аксиом О. т. оказывается эквивалентной системе аксиом пространства Минковского. Таким образом, пространство Минковского может служить моделью пространства-времени частной О. т. Точечное событие интерпретируется в рассматриваемой модели пространства-времени как точка в пространстве Минковского, в связи с чем точки последнего принято наз. мировыми точками. Каждая прямоугольная система координат (t, x, y, z) в пространстве Минковского определяет нек-рую инерциальную систему отсчета, в связи с чем сами прямоугольные системы координат в О. т. принято наз. галилеевыми. Плоскость $t=\text{const}$ пространства Минковского наз. пространственным сечением, соответствующим данной системе координат. Линейный элемент пространства Минковского в прямоугольной системе координат (t, x, y, z) может быть представлен в виде

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Величину ds наз. элементом интервала, а величину

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

— квадратом интервала. (В качестве модели пространства-времени частной О. т. можно использовать и псевдоевклидово пространство $E^4_{(3,1)}$ с линейным элементом

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2.)$$

Преобразования, образующие общую группу Лоренца, в рассматриваемой модели являются преобразованиями, связывающими две галилеевы системы координат в пространстве Минковского. Эти преобразования сохраняют интервал и являются аналогом ортогональных преобразований в евклидовой геометрии. В частности, преобразованиям Лоренца можно придать вид

$$x' = \operatorname{ch}\psi + ct\operatorname{sh}\psi,$$
$$ct' = x'\operatorname{sh}\psi + ct\operatorname{ch}\psi,$$

где Ψ — угол поворота в плоскости (ct, x), имеющей индефинитную метрику

$$\psi = \operatorname{arc\,sh}\frac{V/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

По знаку квадрата интервала происходит классификация векторов в пространстве Минковского. Векторы, для к-рых $s^2>0$, наз. времениподобными; векторы, для к-рых $s^2<0$,— пространственноподобными; векторы, для к-рых $s^2=0$,— светоподобными. Если в пространстве Минковского выделена нек-рая точка (напр., начало координат), то его можно разбить на три области. Две из них, составленные из точек, соединенных с точкой 0 времениподобными векторами, наз. областями абсолютного будущего и абсолютного прошлого. Эти названия связаны с тем, что при любом преобразовании из полной группы Лоренца, связывающей данную галилееву систему координат с другой галилеевой системой координат (t', x', y', z'), событие A, лежащее в области абсолютного будущего, по-прежнему будет иметь большее значение временной координаты t', чем событие 0. Область, точки A к-рой соединяются с 0 пространственноподобными векторами, наз. областью абсолютного удаления. Эта область характеризуется тем, что не существует такого преобразования Лоренца, в результате к-рого точки A и 0 получают одинаковые пространственные координаты. Точки, лежащие на границе этих областей, образуют световой конус точки 0. Точки этого конуса соединены с 0 нулевыми векторами. Пространственно-временной истории всякой точечной частицы (материальной точки) соответствует нек-рая линия в пространстве Минковского, наз. мировой линией этой частицы. Точки этой линии определяют координаты частицы во все моменты времени. То, что скорости всех частиц не превосходят c, означает, что (в естественном предположении гладкости) все касательные векторы мировой линии являются либо времениподобными, либо изотропными. Первые из них соответствуют частицам с ненулевой, а вторые — с нулевой массой покоя. Натуральный параметр на мировой линии наз. собственным временем частицы. Физич. смысл собственного времени состоит в том, что оно является временем, отсчитываемым часами, к-рые движутся вместе с частицей.

Выражением закона инерции в рассматриваемой модели О. т. является то, что свободные, т. е. не подверженные действию сил, частицы имеют в качестве своих мировых линий времениподобные и изотропные прямые (т. е. геодезические) пространства Минковского. В частности, частицы с нулевой массой покоя имеют мировые линии, лежащие на нек-ром световом конусе, с чем и связано название последнего. В общей О. т. выражением закона инерции является т. н. *геодезических гипотеза*, согласно к-рой частица, не испытывающая действия иных сил, кроме гравитационных, движется по геодезической соответствующего пространства-времени. Световой сигнал, соединяющий данные точечные события, интерпретируется в рассматриваемой модели как отрезок изотропной геодезической, соединяющей соответствующие мировые точки.

Времениподобная геодезическая в пространстве Минковского, соединяющая данные мировые точки A и B, является кривой наибольшей длины среди всех времениподобных мировых линий, соединяющих эти точки. Это вытекает из обратного неравенства треугольника, согласно к-рому времениподобная наклонная короче своей времениподобной геодезической. С точки зрения О. т. максимальность длины времениподобной геодезической означает, что собственное время частицы, свободно движущейся от мировой точки A к мировой точке B, больше, чем собственное время любой другой частицы, мировая линия к-рой соединяет эти мировые точки. Это обстоятельство принято называть парадоксом близнецов.

При построении тензорных величин, выражающих физич. величины, как правило, в один тензорный объект в пространстве Минковского объединяются несколько соответствующих тензорных объектов классич. физики. Напр., вектор энергии-импульса составляется следующим образом: первой его компонентой в галилеевой системе координат является величина $\mathcal{E}/c$, а остальными тремя — компоненты вектора импульса (обозначение этой операции $(\mathcal{E}/c,\ p)$). Для того чтобы отличить тензоры пространства Минковского от тензоров на его пространственных сечениях, к-рые рассматривались в классич. физике, принято говорить о четырехмерных, или 4-тензорах. Примеры нек-рых физич. величин, являющихся 4-тензорами: 4-вектор

$$u^i=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),\quad i=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

наз. 4-скоростью. Этот вектор является касательным единичным вектором к траектории мировой частицы. Вектор

$$g^i=\left(\frac{\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad \frac{\boldsymbol{F}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),$$

где $\boldsymbol{F}$ — сила, является вектором 4-силы. Основные уравнения релятивистской динамики с использованием этих векторов могут быть переписаны в виде

$$g^i=\frac{dp^i}{ds}\equiv mc\frac{du^i}{ds}.$$

Роль теории относительности в современной физике. О. т. с высокой точностью подтверждена обширной совокупностью фактов и лежит в основе всех современных теорий, рассматривающих явления при релятивистских скоростях. Уже последовательная теория электромагнетизма — классич. электродинамика — возможна только на основе О. т. (исторически анализ основ классич. электродинамики, и в частности оптики движущихся тел, привел к построению О. т.). О. т. лежит в основе квантовой электродинамики, теорий сильного и слабого взаимодействия элементарных частиц. Квантовые законы движения и взаимопревращения элементарных частиц рассматриваются в квантовой теории поля.

Лит.: [1] Эйнштейн А., Собр. научных трудов, т. 1—4, М., 1965—67; [2] Einstein A., «Ann. Phys.», 1905, Bd 17, S. 891—921; [3] Minkowski H., «Phys. Z.», 1909, Bd 10, S. 104—11; [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973 (Теоретич. физика, т. 2); [5] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., Фейнмановские лекции по физике, пер. с англ., в. 2, М., 1965; [6] Паули В., Теория относительности, пер с нем., М.— Л., 1947; [7] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961; [8] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972; [9] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [10] Александров А. Д., «Вопросы философии», 1953, № 5, с. 225—45. *Д. Д. Соколов.*

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ГОМОЛОГИИ — группы гомологий $H_p^c(X, A; G)$ пары пространств (X, A). Они определяются факторкомплексом комплекса цепей X с коэффициентами в группе G по подкомплексу, состоящему из всех цепей с носителями в A. Эти группы обычно не изменяются при «вырезании», т. е. при замене пары (X, A) парой $(X\setminus U, A\setminus U)$, где U — содержащееся в A открытое подмножество X. Относительные когомологии $H^p(X, A; G)$ определяются подкомплексом комплекса цепей X, состоящим из всех коцепей с носителями в $X\setminus A$, в то время как факторкомплекс обычно определяет когомологии подмножества $A\subset X$.

Лит.: [1] Скляренко Е. Г., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 6, с. 90—118. *Е. Г. Скляренко.*

ОТНОШЕНИЕ — подмножество конечной декартовой степени $A^n=A\times A\times\ldots\times A$ данного множества A, т. е. подмножество систем $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из n элементов множества A.

Подмножество $R\subseteq A^n$ наз. n-местным, или n-арным, отношением в множестве A. Число n наз. рангом, или типом, отношения R. Подмножество $R\subseteq A^n$ наз. также n-местным, или n-арным, предикатом на множестве A. Запись $R(a_1, \ldots, a_n)$ означает, что $(a_1, \ldots, a_n)\in R$.

Одноместные О. наз. свойствами. Двуместные О. наз. бинарными, трехместные О.— тернарными и т. д.

Множество A^n и пустое подмножество ϕ в A^n наз. соответственно универсальным отношением и нуль-отношением ранга n в множестве A. Диагональ множества A^n, т. е. множество

$$\Delta=\{(a, a, \ldots, a)\mid a\in A\},$$

наз. отношением равенства в множестве A.

Если R и S суть n-местные О. в множестве A, то n-местными О. в A будут также следующие подмножества в A^n:

$$R\cup S,\ R\cap S,\ R'=A^n\setminus R \text{ и } R\setminus S.$$

Множество всех n-арных О. в множестве A относительно операций $\cup$, $\cap$ $'$ является *булевой алгеброй.* $(n+1)$-местное отношение F в A наз. функциональным, если для любых элементов $a_1, \ldots, a_n, a, b$ из A из того, что $(a_1, \ldots, a_n, a)\in F$ и $(a_1, \ldots, a_n, b)\in F$, следует $a=b$.

См. также *Бинарное отношение*, *Соответствие.*

Д. М. Смирнов.

ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ КРИТЕРИЙ — статистический критерий, статистика к-рого есть отношение наибольших значений функций правдоподобия, отвечающих проверяемой и множеству всех допустимых гипотез. Пусть случайная величина X принимает значения в выборочном пространстве $\{\mathfrak{X}, \mathscr{B}, \mathsf{P}_\theta\}$, $\theta \in \Theta$, а семейство мер $\mathscr{P} = \{\mathsf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ абсолютно непрерывно относительно нек-рой σ-конечной меры μ и $p_\theta(x) = d\mathsf{P}_\theta(x)/d\mu(x)$. Пусть по реализации случайной величины X необходимо проверить сложную гипотезу H_0, согласно к-рой неизвестное истинное значение θ_0 параметра θ принадлежит множеству $\Theta_0 \subset \Theta$, против сложной альтернативы $H_1: \theta_0 \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. Согласно О. п. к. с уровнем значимости α, $0 < \alpha < 1/2$, гипотезу H_0 следует отвергнуть, если в результате эксперимента окажется, что $\lambda(x) \leqslant \lambda_\alpha$, где $\lambda(X)$ — статистика О. п. к., определяемая следующим образом:

$$\lambda(X) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} p_\theta(X)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta} p_\theta(X)},$$

а λ_α — критич. уровень, к-рый находится из того условия, что *размер критерия*

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathsf{P}_\theta\{\lambda(X) \leqslant \lambda_\alpha\} =$$

$$= \sup_{\theta \in \Theta_0} \int_{\{x: \lambda(x) \leqslant \lambda_\alpha\}} p_\theta(x)\, \mu(dx)$$

равен α. В частности, если множество Θ содержит лишь две точки $\Theta = \{\mathsf{P}_0, \mathsf{P}_1\}$, а конкурирующим гипотезам, к-рые в данном случае являются простыми, отвечают, напр., плотности $p_0(\cdot)$ и $p_1(\cdot)$ соответственно, то в этом случае статистика О. п. к. выражается формулой

$$\lambda(X) = \frac{p_0(X)}{\max\{p_0(X), p_1(X)\}} = \min\left\{1, \frac{p_0(X)}{p_1(X)}\right\}.$$

Согласно О. п. к. с уровнем значимости α, гипотезу H_0 следует отвергнуть, если $p_0(X)/p_1(X) \leqslant \lambda_\alpha$, где число λ_α, $0 < \lambda_\alpha < 1$, определяется из условия

$$\mathsf{P}\{\lambda(X) < \lambda_\alpha \mid H_0\} =$$

$$= \int_{\{x: p_0(x) \leqslant p_1(x)\lambda_\alpha\}} p_0(x)\, \mu(dx) = \alpha.$$

О. п. к. предложен Ю. Нейманом и Э. Пирсоном (J. Neyman, E. Pearson, 1928). Ими же было доказано (1933), что среди всех критериев уровня, предназначенных для проверки простых гипотез, О. п. к. является наиболее мощным (см. *Неймана — Пирсона лемма*).

Лит.: [1] Neyman J., Pearson E. S., Joint statistical papers, Camb., 1967; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

ОТОБРАЖЕНИЕ однозначное — закон, по к-рому каждому элементу нек-рого заданного множества X ставится в соответствие вполне определенный элемент другого заданного множества Y (при этом X может совпадать с Y). Такое соотношение между элементами $x \in X$ и $y \in Y$ записывается в виде $y = f(x)$, $y = fx$ или $y = y(x)$. Пишут также $f: X \to Y$ и говорят, что отображение f *действует* из X в Y. Множество X наз. *областью определения отображения*, а множество $\{y = f(x), x \in X\} \subset Y$ наз. *множеством значений отображения*. Отображение $f: X \to Y$ наз. также *отображением множества X во множество Y* (или *на множество Y*, если $\{y = f(x), x \in X\} = Y$). Логически понятие «О.» совпадает с понятиями *функция*, *оператор*, *преобразование*.

Отображение $f: X \to Y$ порождает множество $\mathrm{Gr}_f = \{x, f(x) \mid x \in X\} \subset X \times Y$, наз. *графиком отображения*. Обратно, множество $M \subset X \times Y$ определяет однозначное О. если и только если для всех $u \in X$

существует $V \in Y$, притом только один такой, что $(u, v) \subset M$, тогда $f_M(u) = v$.

Два отображения f и g наз. равными, если области их определения совпадают и $f(x) = g(x)$ для любого $x \in X$. В этом случае совпадают и области значений этих О. Отображение f на X наз. постоянным, если $f(x) = a$ для любого $x \in X$. Сужением отображения $f: X \to Y$ на подмножество $A \subset X$ наз. отображение φ, заданное на множестве A равенством $\varphi(x) = f(x)$, $x \in A$; это сужение обозначается f_A. Расширением отображения (или продолжением) на множество $E \supset X$ наз. отображение F, определенное на E и удовлетворяющее равенству $F(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. Если заданы три множества X, Y, Z, на X определено отображение f со значениями в Y, а на Y задано отображение g со значениями в Z, то существует отображение h с областью определения X, принимающее значения в Z и определяемое равенством $h(x) = g[f(x)]$. Это О. наз. композицией отображений f и g, а f и g соответствующими отображениями, и обозначается $g \circ f$, причем порядок записи играет существенную роль (для функций действительного переменного принят термин суперпозиция). Отображение h наз. также сложным отображением, составленным из внутреннего отображения f и внешнего отображения g. Понятие сложного О. обобщается на любое конечное *число составляющих О.*

Отображение f, определенное на X и принимающее значения в Y, порождает новое О., заданное на подмножествах множества X и имеющее в качестве значений подмножества множества Y. Именно, если $A \subset X$, то

$$f(A) \overset{\text{def}}{=} \{y = f(x),\ x \in A\}.$$

Множество $f(A)$ наз. образом множества A. Если положить $A = \{x\}$, то получится исходное отображение $f(x)$, так что $f(A)$ есть расширение отображения $f(x)$ с множества X на множество $\mathfrak{P}(X)$ всех подмножеств множества X, если отождествлять одноэлементное множество с элементом, его составляющим. В случае $Y = X$ множество A наз. инвариантным подмножеством отображения f, если $f(A) \subset A$, а точка x наз. неподвижным элементом отображения f, если $f(x) = x$. Инвариантные множества и неподвижные элементы играют важную роль при решении функциональных уравнений вида $f(x) = a$ или $x - f(x) = a$.

Каждое отображение $f: X \to Y$ порождает О., заданное на подмножествах множества $f(X)$ и имеющее в качестве значений подмножества множества X. Именно, для каждого $B \subset f(X)$ через $f^{-1}(B)$ обозначается множество $\{x,\ f(x) \in B\}$, называемое полным прообразом множества B. Если $f^{-1}(y)$ для любого $y \in f(X)$ состоит из единственного элемента, то f^{-1} есть О. элемента, определенное на $f(X)$, принимающее значения в X и называемое обратным отображением к f. Существование обратного О. эквивалентно разрешимости уравнения $f(x) = y$, $y \in f(X)$.

Если множества X и Y наделены нек-рыми свойствами, то во множестве $F(X, Y)$ всех О. на X в Y могут быть выделены содержательные классы. Так, для частично упорядоченных множеств X и Y отображение f наз. изотонным, если $x < y$ влечет $f(x) \leqslant f(y)$. Для комплексных плоскостей X и Y выделяется класс голоморфных О. Для топологич. пространств X и Y естественным образом выделяется класс непрерывных О. этих пространств; строится развернутая теория *дифференцирования отображений*. Для О. скалярного аргумента и, в более общем случае, для О., определенных на пространстве с мерой, может быть введено понятие (сильной или слабой) измеримости и могут быть построены различные интегралы лебеговского типа (напр., *Бохнера интеграл*, *Даниеля интеграл*).

О. наз. многозначным отображением, если нек-рым значениям x соответствуют подмножества $Y_x \subset Y$, состоящие более чем из одного элемента. Таковы, напр., многолистные функции комплексного переменного, многозначные О. топологических пространств и др.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965; [2] его же, Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., 2 изд., М., 1968; [3] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981. *В. И. Соболев.*

ОТОБРАЖЕНИЕ ПЕРИОДОВ — отображение, сопоставляющее точке s базы S семейства $\{X_s\}$ алгебраич. многообразий над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел когомологии $H^*(X_s)$ слоя над этой точкой, снабженные *Ходжа структурой*. Полученная при этом структура Ходжа рассматривается как точка в многообразии модулей структур Ходжа данного типа.

Изучение О. п. восходит к исследованиям Н. Абеля (N. Abel) и К. Якоби (C. Jacobi) интегралов алгебраич. функций (см. *Абелев дифференциал*). Однако до недавнего времени глубоко были изучены лишь О. п., отвечающие семействам кривых.

Пусть $\{X_s\}$ есть семейство слоев $X_s = f^{-1}(s)$ гладкого проективного морфизма $f: X \to S$, где S — гладкое многообразие. Тогда когомологии $H^*(X_s, \mathbb{Z}) = V_{\mathbb{Z}}$ снабжены чистой, поляризованной структурой Ходжа, к-рая задается гомоморфизмом вещественных *алгебраических групп* $h: \mathbb{C}^* \to G_{\mathbb{R}}$, где $\mathbb{C}^*$ — мультипликативная группа $\mathbb{C}^*$ поля комплексных чисел, рассматриваемая как вещественная алгебраич. группа, а

$$G = \{g \in \mathrm{GL}(V),\ \psi(gx,\ gy) = \lambda(g)\,\psi(x,\ y)\}$$

— алгебраич. группа линейных преобразований пространства V, умножающих невырожденную (симметрическую или кососимметрическую) билинейную форму ψ на скалярный множитель; причем автоморфизм $\mathrm{Ad}\, h(i)$ группы $G_{\mathbb{R}}$ является инволюцией Картана и $h(\mathbb{R}^*)$ лежит в центре группы $G_{\mathbb{R}}$. Множество X_G гомоморфизмов $h: \mathbb{C}^* \to G_{\mathbb{R}}$, обладающих указанными свойствами, естественным образом снабжено $G_{\mathbb{R}}$-инвариантной структурой однородного кэлерова многообразия и наз. многообразием Гриффитса, а фактор $M_G = X_G / G_{\mathbb{Z}}$ является пространством модулей структур Ходжа. Гомоморфизм h задает разложение Ходжа

$$\mathfrak{G}_{\mathbb{C}} = \bigoplus \mathfrak{G}^{p,\ -p}$$

алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G, где $\mathfrak{G}^{p,\ -p}$ — подпространство в $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$, на к-ром $\mathrm{Ad}\, h(z)$ действует умножением на $\bar{z}^p z^{-p}$. Сопоставление $h \to P(h)$, где $P(h)$ — параболич. подгруппа в $G_{\mathbb{C}}$, алгебра Ли к-рой есть $\bigoplus_{p \geq 0} \mathfrak{G}^{p,\ -p}$, задает открытое плотное вложение многообразия X_G в компактное $G_{\mathbb{C}}$-однородное многообразие флагов $\check{X}_G$. В касательном пространстве

$$\mathfrak{G}_{\mathbb{C}} / \bigoplus_{p \geq 0} \mathfrak{G}^{p,\ -p}$$

к X_G в точке h выделено горизонтальное подпространство

$$\bigoplus_{p \geq -1} \mathfrak{G}^{p,\ -p} \Big/ \bigoplus_{p \geq 0} \mathfrak{G}^{p,\ -p}.$$

Голоморфное отображение в X_G или M_G наз. горизонтальным, если образ его касательного отображения лежит в горизонтальном подрасслоении.

Установлено, что О. п. $\Phi: S \to M_G$ горизонтально (см. [1], [3]). Особенности О. п. описываются теоремой Шмида о нильпотентной орбите, к-рая в случае, когда $S = \bar{S} \setminus \{0\}$ — кривая с выколотой точкой, утверждает, что если z — локальная координата на S, $z(0)=0$, то при $z \to 0$ $\Phi(z)$ асимптотически близко к

$$\exp\left(\frac{\log z}{2\pi i} N\right) a,$$

где $a \in \check{X}_G$, а $N \in \mathfrak{G}_{\mathbb{Q}}$ — нильпотентный элемент (см. [4]). Относительно группы монодромии

$$\Phi_*(\pi_1(S, s)) \subset G_{\mathbb{Z}}$$

известно, что ее образ полупрост во всяком рациональном представлении группы G, а преобразования обхода T вокруг дивизора с нормальными пересечениями $\bar{S} \setminus S$ в гладкой компактификации $\bar{S}$ многообразия S порождают квазиунипотентные (т. е. имеющие в качестве собственных значений корни из 1) элементы $\Phi_*(T) \in G_{\mathbb{Z}}$. Важность группы монодромии подчеркивает теорема жесткости (см. [1], [2], [4]): если над S имеются два семейства алгебраич. многообразий, то соответствующие О. п. Φ_1 и Φ_2 из S в M_G совпадают тогда и только тогда, когда $\Phi_1(s_0) = \Phi_2(s_0)$ в нек-рой точке $s_0 \in S$ и гомоморфизмы $\Phi_{i*}: \pi_1(S, s_0) \to G_{\mathbb{Z}}$, $i=1, 2$, совпадают.

Законченные результаты о строении ядра и образа О. п. относятся в основном к случаям кривых и *К3-поверхностей.* Если $\{X_s\}$ — семейство многообразий указанного типа и $\Phi(s) = \Phi(s')$, то $X_s \simeq X_{s'}$ (теорема Торелли), а для $K3$-поверхностей максимально возможный образ О. п. совпадает с M_G (см. [7]). В случае кривых образ О. п. частично описан (соотношения Шоттки — Юнга, см. [6], [8]). Существует гипотеза Гриффитса о том, что многообразие модулей допускает частичную аналитич. компактификацию, т. е. открытое вложение в такое аналитич. пространство $\bar{M}_G$, что О. п. $S \to M_G$ продолжается до голоморфного отображения $\bar{S} \supset S$ для всякой гладкой компактификации $\bar{S} \supset S$. Такая компактификация известна (1983) лишь для случая, когда X_G — симметрическая область [9].

Лит.: [1] Гриффитс Ф. А., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 3, с. 175—234; [2] Griffiths Ph. A., в кн.: Actes du Congrès international des mathématiciens (Nice), 1970, t. 1, P., 1971, p. 113—19; [3] Deligne P., Travaux de Griffiths, в кн.: Séminaire Bourbaki. 1969/70, B.— N. Y.— Hdlb., 1971, p. 213—35; [4] Schmid W., «Invent. math.», 1973, v. 22, p. 211—319; [5] Cattani E. H., Kaplan A. G., «Duke Math. J.», 1977, v. 44, № 1, p. 1—43; [6] Дубровин Б. А., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 2, с. 11—80; [7] Куликов В. А., там же, 1977, т. 32, в. 4, с. 257—58; [8] Мамфорд Д., «Математика», 1973, т. 17, № 4, с. 34—42; [9] Baily W., Borel A., «Ann. Math.», 1966, v. 84, p. 442—528. *А. И. Овсеевич.*

ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССЫ — важнейшие классы непрерывных отображений, рассматриваемые в общей топологии и ее приложениях. К ним относятся: открытые отображения — такие, что образ любого открытого множества является открытым множеством; замкнутые отображения — такие, при к-рых образ каждого замкнутого множества замкнут; бикомпактные отображения — для них прообраз любой точки является бикомпактным множеством; совершенные отображения — замкнутые бикомпактные отображения. Факторные отображения определяются требованием: множество в образе открыто в том и только в том случае, если его полный прообраз открыт. Важны также открытые бикомпактные отображения, псевдооткрытые **отображения** и уплотнения — последние определяются как взаимно однозначные непрерывные отображения на. Таким образом, при классификации отображений в общей топологии ограничения накладываются либо на поведение (при переходе к образу) открытых или замкнутых множеств, либо на свойства прообразов множеств. Второй подход приводит, в частности, к следующим О. к. Монотонные отображения — те, при к-рых прообраз каждой точки нульмерен. Конечнократные отображения характеризуются конечностью всех прообразов точек. Отображения, при к-рых прообраз каждого бикомпактного множества бикомпактен, наз. k-отображениями. Соединением ограничений первого и второго типа выделяются основные классы непрерывных отображений в общей топологии. Самими определениями О. к. естественно организуются в нек-рую иерархию, к-рая может быть положена в основу систематич. классификации топологич. пространств [1]. Эта классификация строится как результат решения вопросов следующих двух типов. Дан класс пространств $\mathcal{A}$, целесообразность выделения к-рого не вызывает сомнений, и пусть $\mathcal{B}$ — нек-рый класс отображений из нашей исходной иерархии. Требуется охарактеризовать посредством внутренних топологич. инвариантов образы пространств из класса $\mathcal{A}$ при всевозможных отображениях из класса $\mathcal{B}$. Вопросы второго типа аналогичны — требуется охарактеризовать прообразы пространств из класса $\mathcal{A}$ при отображениях из класса $\mathcal{B}$.

При решении вопросов указанных двух типов получаются совсем не очевидные теоремы общего характера. Напр., пространства с первой аксиомой счетности — это в точности образы метрич. пространств при непрерывных открытых отображениях. Пространства с равномерной базой и только они — образы метрич. пространств при открытых бикомпактных отображениях. Пространства Фреше — Урысона характеризуются как псевдооткрытые образы метрич. пространств, а секвенциальные пространства — это факторпространства метрич. пространств. Далее, прообразы метрич. пространств при совершенных отображениях — это в точности паракомпактные перистые пространства, а прообразами полных метрич. пространств являются паракомпактные пространства, полные по Чеху. Непрерывные образы пространств со счетной базой — пространства со счетной сетью. При систематич. следовании указанному пути получается единая взаимная классификация пространств и отображений.

Особую роль среди различных классов непрерывных отображений занимает класс факторных отображений. Важнейшей особенностью факторных отображений является то, что они могут служить средством для построения новых топологич. пространств. А именно, если дано отображение f топологич. пространства X на нек-рое множество Y (напр., если рассматривается естественное отображение π пространства X на множество всех элементов нек-рого разбиения этого пространства), то на множестве Y всегда можно ввести естественную топологию требованием, чтобы отображение f было факторным: множество $V \subset Y$ объявляется открытым в том и только в том случае, если его полный прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в пространстве X. Помимо уже названных, весьма важны *неприводимые отображения*, напр. в теории абсолютов. См. также *Бифакторное отображение*, *Многозначное отображение*.

Лит.: [1] Архангельский А. В., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 133—84. ***А. В. Архангельский.***

ОТОБРАЖЕНИЙ МЕТОД — то же, что *изображений метод*.

ОТОБРАЖЕНИЯ ГЛАВНАЯ СЕТЬ, основание отображения,— ортогональная сеть в области G n-мерного многообразия M (в частности, M может быть евклидовым пространством), к-рая переходит в сеть, также ортогональную, при диффеоморфизме $f: G \to G'$ области G на область G' того же или другого риманова многообразия M'. Направления, касательные к линиям О. г. с. в точке $x \in G$, являются главными направлениями эллипсоида деформации индуцированного отображения $f_*: T_x \to T'_{f(x)}$ касательного пространства T_x на касательное пространство $T'_{f(x)}$. При $n > 2$ О. г. с., вообще говоря, не является голономной. Если отображение f — конформное, то любая ортогональная сеть в области G служит О. г. с.

Лит.: Рыжков В. В., в сб.: Итоги науки, Серия Математика, в. 3— Геометрия. 1963, М., 1965. *В. Т. Базылев.*

ОТРАЖЕНИЕ — движение σ n-мерного односвязного пространства постоянной кривизны X^n (т. е. евклидова аффинного пространства E^n, сферы S^n или пространства Лобачевского Λ^n), множество неподвижных точек Γ к-рого является $n-1$ мерной гиперплоскостью. Множество Γ наз. зеркалом отображения σ; говорят также, что σ есть О. относительно Γ. Всякое О. однозначно определяется своим зеркалом. Порядок О. в группе всех движений X^n равен 2, то есть $\sigma^2 = \mathrm{id}_{X^n}$.

Пусть $X^n = E^n$ и $x \in \Gamma$. Выбор x в качестве начала координат позволяет отождествить евклидово аффинное пространство E^n с линейным евклидовым пространством V^n его параллельных переносов. Тогда отражение σ — линейное ортогональное преобразование пространства V^n, имеющее в нек-ром ортонормированном базисе матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & -1 \end{Vmatrix},$$

и наоборот, всякое ортогональное преобразование пространства V^n, имеющее в нек-ром ортонормированном базисе такую матрицу, является О. в E^n. Более общо: линейное преобразование φ произвольного векторного пространства W над полем k характеристики, отличной от 2, наз. линейным отражением, если $\varphi^2 = \mathrm{id}_W$ и ранг преобразования $1-\varphi$ равен 1. В этом случае подпространство W_1 неподвижных относительно φ векторов имеет в W коразмерность 1, а подпространство W_{-1} собственных векторов с собственным значением -1 имеет размерность 1 и $W = W_1 \oplus W_{-1}$. Если α — такая линейная форма на W, что $\alpha(w) = 0$ при $w \in W_1$, а $h \in W_{-1}$ — такой элемент, что $\alpha(h) = 2$, то φ задается формулой

$$\varphi w = w - \alpha(w)\, h, \quad w \in W.$$

Описание О. в произвольном односвязном пространстве X^n постоянной кривизны может быть сведено к описанию линейных О. следующим способом. Всякое такое пространство X^n вкладывается в виде гиперповерхности в действительное $(n+1)$-мерное векторное пространство V^{n+1} таким образом, что движения X^n продолжаются до линейных преобразований V^{n+1}, причем в подходящей системе координат в V^{n+1} уравнения указанной гиперповерхности записываются следующим образом:

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \quad \text{для} \quad S^n;$$

$$x_0 = 1 \ \text{для} \ E^n;$$

$$x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = 1 \ \text{ и } \ x_0 > 0 \ \text{для} \ \Lambda^n.$$

При этом вложении всякая гиперплоскость в X^n есть пересечение с X^n нек-рого n-мерного подпространства в V^{n+1}, а всякое О. в X^n индуцировано линейным О. в V^{n+1}.

Если в определении линейного О. отказаться от требования $\varphi^2 = \mathrm{id}_W$, то получается более общее понятие *псевдоотражения*. Если k — поле комплексных чисел, а φ — псевдоотражение конечного порядка (не обязательно равного 2), то φ наз. *комплексным отражением*. Комплексным О. наз. также всякий биголоморфный автоморфизм конечного порядка ограниченной симметрич. области в комплексном пространстве, множество неподвижных точек к-рого имеет комплексную коразмерность 1.

См. также *Отражений группа*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1972; [2] Винберг Э. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 5, с. 1072—112; [3] Gottschling E., «Comm. Pure and Appl. Math.», 1969, v. 22, p. 693—714; [4] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

В. Л. Попов.

ОТРАЖЕНИЙ ГРУППА — дискретная группа преобразований, порождаемая отражениями относительно гиперплоскостей. Наиболее часто рассматриваются О. г., состоящие из движений односвязного полного риманова многообразия постоянной кривизны, т. е. евклидова пространства E^n, сферы S^n или пространства Лобачевского L^n.

Истоками теории О. г. являются исследования правильных многогранников и правильных разбиений евклидовой плоскости и сферы («орнаментов»). Во 2-й пол. 19 в. эти исследования были распространены на n-мерный случай и, в связи с задачами теории функций комплексного переменного, на плоскость Лобачевского; были также описаны правильные разбиения пространства L^n на правильные многогранники. Группа симметрии любого правильного многогранника, а также группа симметрии правильного разбиения пространства на правильные многогранники являются О. г. В 1934 были перечислены (см. [1]) все О. г. в E^n и S^n(последние можно рассматривать как частный случай О. г. в E^{n+1}). Еще в 1925—27 в работах Г. Вейля (H. Weyl) и Э. Картана (E. Cartan) О. г. появились как ***Вейля группы*** полупростых групп Ли. Позднее было установлено, что группы Вейля — это в точности те О. г. в E^n, к-рые имеют единственную неподвижную точку и записываются в нек-ром базисе целочисленными матрицами, а аффинные группы Вейля — это все О. г. в E^n с ограниченным фундаментальным многогранником (см. *Дискретная группа* преобразований).

Основные результаты теории групп отражений. Пусть $X^n = S^n$, E^n или L^n. Всякая О. г. в X^n допускает в качестве образующих отражения r_i относительно гиперплоскостей H_i, $i \in I$, ограничивающих фундаментальный многогранник P. Относительно этой системы образующих она является *Кокстера группой* с определяющими соотношениями $(r_i r_j)^{n_{ij}} = 1$, где числа n_{ij} находятся следующим образом: если грани $H_i \cap P$ и $H_j \cap P$ смежны и угол между ними равен α_{ij}, то $n_{ij} = \frac{\pi}{\alpha_{ij}}$; если они не смежны, то $n_{ij} = \infty$ (и тогда гиперплоскости H_i и H_j не пересекаются). Обратно, любой выпуклый многогранник в пространстве X^n, все двугранные углы к-рого суть целые части π, является фундаментальным многогранником группы, порожденной отражениями относительно ограничивающих его гиперплоскостей.

Всякая О. г. в E^n является (как группа движений) прямым произведением тривиальной группы, действующей в евклидовом пространстве нек-рой размерности, и групп движений следующих двух типов: (I) конечная О. г., фундаментальный многогранник к-рой есть симплициальный конус, и (II) бесконечная О. г., фундаментальный многогранник к-рой есть симплекс. Группа типа (I) может рассматриваться как О. г. на сфере с центром в вершине фундаментального конуса; ее фундаментальным многогранником будет тогда сферич. симплекс. О. г. типа (I) однозначно определяется своей матрицей Коксгера, поэтому классификация таких групп совпадает с классификацией конечных групп Коксгера. О. г. типа (II) определяется своей матрицей Коксгера с точностью до гомотетии. Классификация таких групп с точностью до гомотетии совпадает с классификацией неразложимых параболич. групп Коксгера. Всякая О. г. в E^n, имеющая ограниченный фундаментальный многогранник, является (как группа движений) прямым произведением групп типа (II).

О. г. в E^n изучены значительно хуже. По многим причинам естественно выделить те из них, фундаментальный многогранник к-рых ограничен или выходит на абсолют лишь в конечном числе точек (это равносильно конечности объема). Ниже рассматриваются только такие группы. Они описаны более или менее явно только при $n=2$, 3.

О. г. в L^2 определяются k-угольником с углами

$$\frac{\pi}{n_1}, \ldots, \frac{\pi}{n_k}, \text{ где } \frac{1}{n_1}+\ldots+\frac{1}{n_k} < k-2$$

(если вершина бесконечно удаленная, то считается, что угол при ней равен нулю). Многоугольник с заданными углами всегда существует и зависит от $k-3$ параметров.

При $n \geqslant 3$ фундаментальный многогранник О. г. в L^n однозначно определяется своим комбинаторным строением и двугранными углами. Для $n=3$ получено исчерпывающее описание таких многогранников [5] и, тем самым, О. г. Для $n \geqslant 4$ известны лишь примеры и нек-рые общие способы построения О. г. в L^n (см. [6], [7]). Неизвестно (1983), существуют ли О. г. в L^n с ограниченным фундаментальным многогранником при $n \geqslant 8$ и с фундаментальным многогранником конечного объема при $n \geqslant 20$.

Наряду с О. г. в пространствах постоянной кривизны рассматриваются линейные О. г., действующие дискретно в открытом выпуклом конусе действительного векторного пространства. Это позволяет дать геометрич. реализацию всех групп Коксгера с конечным числом образующих (см. [3], [4]).

Всякую конечную О. г. можно рассматривать как линейную группу. Конечные О. г. характеризуются среди всех конечных линейных групп тем, что алгебры инвариантных многочленов этих групп обладают алгебраически независимыми системами образующих [4]. Напр., для группы всех перестановок базисных векторов такими образующими будут элементарные симметрич. многочлены. Пусть $m_1+1, \ldots, m_n+1$ — степени образующих инвариантов конечной О. г. G (n — размерность пространства); числа $m_1, \ldots, m_n$ наз. показателями группы G. Имеет место формула

$$(1+m_1t)\ldots(1+m_nt)=c_0+c_1t+\ldots+c_nt^n,$$

где c_k — число элементов группы G, для к-рых пространство неподвижных точек имеет размерность $n-k$. В частности, $m_1+\ldots+m_n$ равно числу отражений в группе G; $(m_1+1)\ldots(m_n+1)$ равно порядку группы. Если группа G неприводима, то собственные значения ее элемента Киллинга — Коксгера (см. *Коксгера группа*) равны $\exp\frac{2\pi i m_k}{h}$, где h — число Коксгера:

$$h=\max\{m_k\}+1.$$

Утверждения предыдущего абзаца, за исключением последнего, сохраняют силу для линейных групп над произвольным полем нулевой характеристики (см. [4]). Отражением в этом случае следует называть линейное преобразование, пространство неподвижных точек к-рого имеет размерность $n-1$. Перечислены [8] все конечные линейные О. г. над полем комплексных чисел. Найдены [9] конечные линейные О. г. над полями ненулевой характеристики.

Лит.: [1] Coxeter H. S. M., «Ann. Math.», 1934, v. 35, p. 588—621; [2] Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж., Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп, пер. с англ., М., 1980; [3] Tits J., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. 1962, Dursholm, [1963], p. 197—221; [4] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1972, гл. 4—6; [5] Андреев Е. М., «Матем. сб.», 1970, т. 81, с. 445—78; т. 83, с. 256—60; [6] Макаров В. С., в кн.: Исследования по общей алгебре, в. 1, Киш., 1968, с. 120—29; [7] Винберг Э. Б., «Матем. сб.», 1967, т. 72, с. 471—88; 1972, т. 87, с. 18—36; [8] Shephard G. C., Todd J. A., «Canad. J. Math.», 1954, v. 6, p. 274—304; [9] Сережкин В. Н., «Докл. АН СССР», 1976, т. 227, с. 574—75.

Э. Б. Винберг.

ОТРАЖЕНИЯ ПРИНЦИП — обобщение *симметрии принципа* для гармонич. функций на гармонич. функции от произвольного числа независимых переменных. Формулировки О. п. таковы.

1) Пусть G — область k-мерного евклидова пространства ($k \geqslant 1$), ограниченная жордановой поверхностью Γ (в частности, гладкой или кусочно гладкой поверхностью Γ без самопересечений), в состав к-рой входит $(k-1)$-мерная подобласть σ $(k-1)$-мерной гиперплоскости L. Если функция $U(x_1, \ldots, x_k)$ гармонична в G, непрерывна на $G \cup \sigma$ и всюду на σ равна нулю, то $U(x_1, \ldots, x_k)$ продолжается как гармонич. функция сквозь σ в область G^*, симметричную с G относительно L, с помощью равенства

$$U(x_1^*, \ldots, x_k^*) = -U(x_1, \ldots, x_k),$$

где точки $(x_1^*, \ldots, x_k^*) \in G^*$ и $(x_1, \ldots, x_k) \in G$ симметричны относительно L.

2) Пусть G — область k-мерного евклидова пространства ($k \geqslant 1$), ограниченная жордановой поверхностью Γ, в состав к-рой входит $(k-1)$-мерная подобласть σ $(k-1)$-мерной сферы Σ нек-рого радиуса $R>0$ с центром в нек-рой точке $M^0=(x_1^0, \ldots, x_k^0)$. Если $U(x_1, \ldots, x_k)$ гармонична в G, непрерывна на $G \cup \sigma$ и всюду на σ равна нулю, то $U(x_1, \ldots, x_k)$ продолжается как гармонич. функция сквозь σ в область G^*, симметричную с G относительно Σ (т. е. полученную из G посредством преобразования обратных радиусов — инверсии — относительно сферы Σ). Это продолжение осуществляется посредством взятого с обратным знаком *Кельвина преобразования* функции U относительно сферы Σ, именно:

$$U(x_1^*, \ldots, x_k^*) = \\ = -\frac{R^{k-2}}{r^{k-2}} U\left(x_1^0 + R^2 \frac{x_1^* - x_1^0}{r^2}, \ldots, x_k^0 + R^2 \frac{x_k^* - x_k^0}{r^2}\right),$$

где $(x_1^*, \ldots, x_k^*) \in G^*$, $r = \sqrt{(x_1^* - x_1^0)^2 + \ldots + (x_k^* - x_k^0)^2}$. При преобразовании обратных радиусов относительно упомянутой сферы Σ точка $M^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$ переходит в точку $M(x_1, \ldots, x_k)$ в соответствии с равенствами

$$x_1 - x_1^0 = R^2 \frac{x_1^* - x_1^0}{r^2}, \ldots, x_k - x_k^0 = R^2 \frac{x_k^* - x_k^0}{r^2},$$

так что если $M^* \in G^*$, то M принадлежит области G (где U задана), и если $M^* \in \sigma$, то $M = M^*$.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964, с. 272. *Е. П. Долженко.*

ОТРЕЗОК, сегмент, — множество точек на прямой, расположенных между двумя данными точками a, b и удовлетворяющих условию вида $a \leqslant x \leqslant b$; обозначают $[a, b]$. См. также *Интервал и сегмент.*

ОТРИЦАНИЕ — логическая операция, в результате к-рой из данного высказывания A получается новое высказывание «не A». В формализованных языках высказывание, получающееся в результате О. высказывания A, обозначается $\neg A$, $\sim A$, $\overline{A}$, $-A$, A' (читается: «не A», «неверно, что A», «A не имеет места»). Семантически О. высказывания A означает, что допущение A приводит к противоречию. В классической двузначной логике операции О. соответствует следующая *истинностная таблица*:

A	$\neg A$
И	Л
Л	И

В. Е. Плиско.

ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИИ, отрицательное изменение функции,— одно из двух слагаемых, сумма к-рых есть полное изменение или *вариация функции* на данном отрезке. Пусть $f(x)$ — функция действительного переменного, заданная на отрезке $[a, b]$ и принимающая конечные значения.

Пусть $\Pi = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и

$$N_{\Pi}(f) = -\sum\nolimits_i^{-} [f(x_i) - f(x_{i-1})],$$

где суммирование производится по тем номерам i, для к-рых разность $f(x_i) - f(x_{i-1})$ неположительна. Величина

$$N(f) \equiv N(f\colon [a, b]) = \sup_{\Pi} N_{\Pi}(f)$$

наз. отрицательной вариацией (отрицательным изменением) функции f на отрезке $[a, b]$. Всегда $0 \leqslant N(f) \leqslant +\infty$. См. также *Положительная вариация функции*.

Лит.: [1] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.— Л., 1934. *Б. И. Голубов.*

ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ — вид корреляционной зависимости между случайными величинами, при к-рой условные средние значения одной из них уменьшаются при возрастании значений другой величины. Об О. к. между величинами с *корреляции коэффициентом* ρ говорят в том случае, когда $\rho < 0$. См. *Корреляция*. *А. В. Прохоров.*

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ в соответствии с формулой

$$\mathsf{P}\{X = k\} = C_{r+k-1}^{k} p^r (1-p)^k \qquad (*)$$

при любых действительных значениях параметров $0 < p < 1$ и $r > 0$. Производящая функция и характеристич. функция О. б. р. задаются формулами

$$P(z) = p^r (1 - qz)^{-r}$$

и

$$f(t) = p^r (1 - qe^{it})^{-r},$$

где $q = 1 - p$. Математич. ожидание и дисперсия равны соответственно rq/p и rq/p^2. Функция распределения О. б. р. для значений $k = 0, 1, 2, \ldots$ определяется через значения функции *бета-распределения* в точке p следующим соотношением:

$$F(k) = \mathsf{P}\{X < k\} = \frac{1}{\mathrm{B}(r, k+1)} \int_0^p x^{r-1} (1-x)^k \, dx,$$

где $\mathrm{B}(r, k+1)$ — бета-функция.

Происхождение термина «О. б. р.» объясняется тем, что это распределение порождается биномом с отрицательным показателем, а именно, вероятности (*) являются коэффициентами разложения $p^r (1 - qz)^{-r}$ по степеням z.

О. б. р. встречается во многих приложениях теории вероятностей. При целом $r>0$ О. б. р. интерпретируется как распределение времени ожидания r-го «успеха» в схеме *Бернулли испытаний* с вероятностью «успеха» p; в такой форме оно наз. обычно *Паскаля распределением* и является дискретным аналогом *гамма-распределения.* При $r=1$ О. б. р. совпадает с *геометрическим распределением.* Часто О. б. р. появляется в задачах, связанных с рандомизацией параметров распределений, напр. если Y случайная величина, имеющая *Пуассона распределение* со случайным параметром λ, к-рый в свою очередь имеет гамма-распределение с плотностью

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} x^{\mu-1} e^{-\alpha x}, \ x>0, \mu>0,$$

то распределение Y будет О. б. р. с параметрами $r=\mu$ и $p=\alpha/(1+\alpha)$. О. б. р. служит предельной формой *Пойа распределения.*

Сумма независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, имеющих О. б. р. с параметрами p и $r_1, \ldots, r_n$, соответственно, имеет О. б. р. с параметрами p и $r_1+\ldots+r_n$. При больших r и малых q, когда $rq \sim \lambda$, О. б. р. приближается распределением Пуассона с параметром λ. Многие свойства О. б. р. определяются тем фактом, что оно представляет собой обобщенное распределение Пуассона.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967.

А. В. Прохоров.

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей случайной величины X с целыми неотрицательными значениями, заданное формулой

$$\mathsf{P}\{X=k\}=\frac{C_{k+m-1}^{k}\, C_{N-m-k}^{M-m}}{C_N^M}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-M, \qquad (*)$$

параметры N, M, m — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $m \leqslant M \leqslant N$. О. г. р. обычно возникает в схеме выбора без возвращения. Если в нек-рой генеральной совокупности объема N имеется M «отмеченных» и $N-M$ «неотмеченных» элементов и если выбор (без возвращения) производится до тех пор, пока число «отмеченных» элементов в выборке не достигает фиксированного числа m, то случайная величина X — число «неотмеченных» элементов в такой выборке — подчиняется О. г. р. (*). Случайная величина $X+m$ — объем выборки — также имеет О. г. р. Распределение (*) названо по аналогии с *отрицательным биномиальным распределением*, к-рое возникает подобным образом при выборе с возвращением.

Математич. ожидание и дисперсия О. г. р. равны соответственно

$$m\frac{N-M}{M+1}$$

и

$$m\frac{(N+1)(N-M)}{(M+1)(M+2)}\left[1-\frac{m}{M+1}\right].$$

При $N\to\infty$, $M\to\infty$, $N-M\to\infty$, так что $\frac{M}{N}\to p$, $\frac{N-M}{N}\to q$, $p+q=1$, О. г. р. стремится к отрицательному биномиальному распределению с параметрами m и p.

Функция распределения $F(n)$ О. г. р. с параметрами N, M, m связана с функцией *гипергеометрического распределения* $G(m)$ с параметрами N, M, n соотношением

$$F(n)=1-G(m-1).$$

Это позволяет при решении задач в математич. статистике, связанных с О. г. р., пользоваться таблицами гипергеометрич. распределения. О. г. р. применяется, например, при *статистическом контроле качества*.

Лит.: [1] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

А. В. Прохоров.

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — то же, что *показательное распределение*.

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — совместное распределение вероятностей случайных величин $X_1, \ldots, X_k$, принимающих неотрицательные целые значения $m=0, 1, 2, \ldots$, заданное формулой

$$\mathsf{P}\{X_1=m_1, \ldots, X_k=m_k\}=$$
$$=\frac{\Gamma(r+m_1+\ldots+m_k)}{\Gamma(r)\, m_1! \ldots m_k!}\, p_0^r p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k}, \qquad (*)$$

где $r>0$, $p_0, \ldots, p_k$ $(0<p_i<1,\ i=0, \ldots, k;\ p_0+\ldots+p_k=1)$ — параметры. О. п. р. является многомерным дискретным распределением — распределением случайного вектора $(X_1, \ldots, X_k)$ с неотрицательными целочисленными компонентами.

Производящая функция О. п.р. с параметрами r, $p_0, \ldots, p_k$ имеет вид

$$P(z_1, \ldots, z_k)=p_0^r\left(1-\sum_{i=1}^{k} z_i p_i\right)^{-r}.$$

О. п. р. возникает в следующей полиномиальной схеме. Производятся последовательные независимые испытания, и в каждом испытании возможны $k+1$ различных исходов с индексами $0, 1, \ldots, k$, к-рым соответствуют вероятности $p_0, p_1, \ldots, p_k$. Испытания продолжаются до r-го появления исхода с индексом 0 (здесь r — целое). Если X_i — число появлений исхода с индексом i, $i=1, \ldots, k$, за время до конца испытаний, то формула (*) выражает вероятность появления исходов с индексами $1, \ldots, k$, соответственно, равно $m_1, \ldots, m_k$ раз до r-го появления исхода 0. О. п. р. в указанном смысле служит обобщением *отрицательного биномиального распределения*, совпадая с последним при $k=1$.

Если случайный вектор $(X_0, \ldots, X_k)$ имеет *полиномиальное распределение* с параметрами $n>1$, $p_0, \ldots, p_k$ и параметр n сам является случайной величиной, имеющей отрицательное биномиальное распределение с параметрами $r>0$, $0<\pi<1$, то распределение вектора $(X_1, \ldots, X_k)$ при условии $X_0=r$ является О. п. р. с параметрами r, $p_0(1-\pi), \ldots, p_k(1-\pi)$.

А. В. Прохоров.

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ — голоморфное векторное расслоение E над комплексным пространством X, обладающее такой эрмитовой метрикой h, что функция $v \to h(v, v)$ на E строго псевдовыпукла вне нулевого сечения (обозначается $E<0$). Расслоение E отрицательно тогда и только тогда, когда сопряженное расслоение $E^*>0$ (см. *Положительное расслоение*). Если X — многообразие, то условие отрицательности можно выразить в терминах кривизны метрики h. Любое подрасслоение О. р. отрицательно. Расслоение E над комплексным многообразием наз. **отрицательным в смысле Накано**, если E^* положительно в смысле Накано. Голоморфное векторное расслоение E над компактным комплексным пространством X наз. **слабо отрицательным**, если его нулевое сечение обладает строго псевдовыпуклой окрестностью в E, т. е. если E^* слабо положительно. Всякое О. р. над X слабо отрицательно. Аналогично определяются также отрицательные и слабо отрицательные линейные пространства над пространством X.

Лит. см. при ст. *Положительное расслоение.* *А. Л. Онищик.*

ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТЬ в **непосредственном понимании** — двумерная поверхность трехмерного евклидова пространства, к-рая в каждой своей точке имеет отрицательную *гауссову кривизну* $K<0$. Простейшие примеры: однополостный гиперболоид (рис. 1, *а*), гиперболический параболоид (рис. 1, *б*), *катеноид*.

Непосредственное понимание О. к. п. можно обобщать, напр., по размерности самой поверхности или по размерности и по структуре объемлющего пространства.

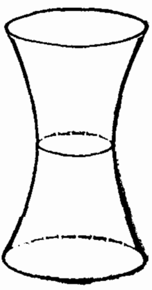


Рис. 1, *а*.

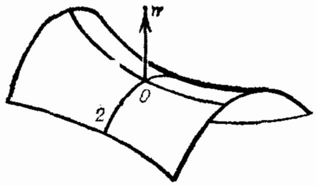


Рис. 1, *б*.

Локально О. к. п. имеют седловое строение. Это значит, что в достаточно малой окрестности любой своей точки О. к. п. похожа на седло (см. рис. 1, *б*, не интересуясь поведением поверхности вне изображенной ее части). Локальный седловой характер поверхности ясно усматривается на этом рисунке, где показаны главные сечения поверхности в произвольной точке O. Пусть $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ — их нормальные кривизны, т. е. главные кривизны в точке O. По классич. определению, гауссова кривизна в точке O есть число $K=\frac{1}{R_1R_2}$. Так как $K<0$, то главные кривизны имеют разные знаки, поэтому главные сечения имеют противоположные направления выпуклости; на рис. 1, *б* выпуклость сечения $O2$ направлена по нормали n, выпуклость другого — против нормали, что и соответствует седловому характеру поверхности. Топологич. строение О. к. п. в целом («глобальное») может быть весьма разнообразным. Напр., гиперболич. параболоид (рис. 1, *б*) топологически эквивалентен плоскости, однополостный гиперболоид (рис. 1, *а*) — цилиндрич. трубке. Пусть *два однополостных гиперболоида с параллельными осями* пересекаются по гиперболе (рис. 2, *а*). Пусть эти

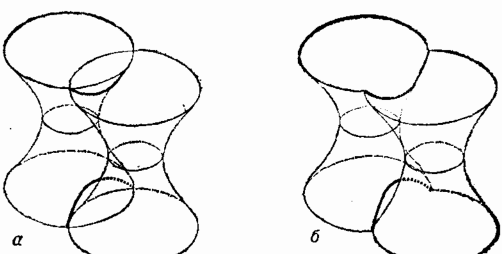


Рис. 2.

гиперболоиды не прозрачны и их невидимые части (т. е. части любого из них, лежащие внутри другого) отброшены. Получившаяся поверхность имеет отрицательную кривизну всюду, кроме точек указанной гиперболы. В точках этой гиперболы кривизны вообще нет (в классическом понимании), т. к. гипербола является ребром поверхности. Но поверхность вблизи ребра в данном случае можно загладить (см. [7]) так, чтобы получилась поверхность, к-рая имеет кривизну во всех точках, причем отрицательную (см. рис. 2, *б*). Она топологически эквивалентна тору с двумя проколами. Включая в конструкцию большее число однополостных гиперболоидов, можно построить О. к. п. сколь угодно сложного топологич. строения.

Поверхность наз. полной, если она является полным метрич. пространством с расстоянием в смысле ее внутренней геометрии. Во всех указанных примерах рассматривались полные поверхности. Идея построения полных О. к. п. разнообразных топологич. типов, исходя из нек-рых простейших (как изложено выше), принадлежит Ж. Адамару (J. Hadamard, [1]). Предложен принципиально другой пример (рис. 3) полной О. к. п. (см. [6] — [7]). Эта поверхность имеет всюду отрицательную кривизну и вся заключена внутри нек-рого шара. Она бесконечно ветвится, причем переменная ее точка, двигаясь по ветвям, может сколь угодно близко подойти к граничной сфере шара, но нигде не достигает этой сферы. Поверхность построена так, что при указанном движении переменная точка всегда проходит путь бесконечной длины. Тем самым обеспечивается полнота поверхности в смысле ее внутренней метрики. Этот пример показывает, что внутренне полная О. к. п. не обязательно уходит в бесконечность в пространстве, подобно поверхностям в примерах Адамара.

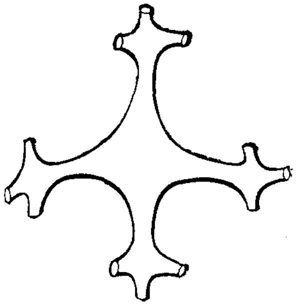


Рис. 3.

В приведенном примере повсеместное соблюдение условия $K<0$ удается обеспечить, допуская хотя бы слабую нерегулярность поверхности. Это значит, что поверхность предполагается гладкой (всюду класса C^1), но допускается, что в нек-рых изолированных точках *она не принадлежит* C^2; в таких точках требуется существование предельного значения кривизны. После дополнения предельными значениями кривизна всюду определена и непрерывна. Вопрос о протяженности поверхности и связь его с условием регулярности существенно дополняется следующими теоремами [8].

Если гауссова кривизна K полной поверхности класса C^2 удовлетворяет неравенству $-a^2 \leqslant K \leqslant 0$, где $a=\mathrm{const}$, то поверхность не может содержаться в шаре, радиус к-рого меньше $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Если на полной поверхности класса C^2, неограниченной во внутреннем смысле, гауссова кривизна $K \to 0$ на бесконечности, то поверхность не ограничена в пространстве (в этой теореме допускается перемена знака кривизны).

Особое внимание привлекали (и привлекают) постоянной О. к. п., к-рые имеют гауссову кривизну с одним и тем же численным значением во всех точках. Они замечательны уже тем, что их внутренняя геометрия локально совпадает с геометрией на плоскости Лобачевского (см. *Лобачевского геометрия*). Это значит, что для фигур, лежащих на постоянной О. к. п., осуществляются в точности те же соотношения, какие имеют место в планиметрии Лобачевского (при этом роль прямых играют геодезич. линии); напр., тригонометрич. формулы для треугольников на постоянной О. к. п. и соответствующие формулы в неевклидовой геометрии Лобачевского точно совпадают. Тем самым на постоянной О. к. п. получается локальная модель геометрии Лобачевского. Такая модель была построена Э. Бельтрами (E. Beltrami, 1868), что существенно содействовало признанию геометрии Лобачевского. Э. Бельтрами указал также важный пример О. к. п.; она наз. псевдосферой (рис. 4) и образована вращением трактрисы вокруг ее асимптоты (рис. 5). Характеристич. свойство трактрисы — отрезок касательной от точки прикосновения до асимптоты постоянно равен нек-рому числу a. Оказывается, что гауссова кривизна псевдосферы $K=-\frac{1}{a^2}$. Еще раньше, чем Э. Бельтрами, поверхности вращения отрицательной кривизны изучал Ф. Миндинг (F. Minding, 1839). Он нашел два вида периодических постоянной О. к. п. вращения (рис. 6), к-рые вместе с псевдосферой исчерпывают все

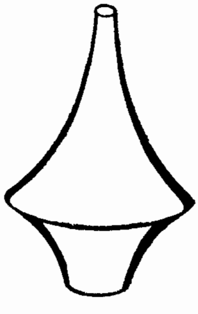


Рис. 4.

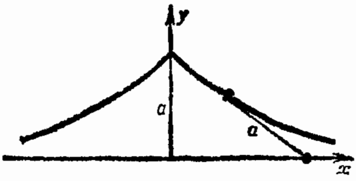


Рис. 5.

возможные постоянной *О. к. п.* (уравнения их см. в [3] и [5]).

Построение глобальной модели планиметрии Лобачевского на какой-нибудь постоянной О. к. п. вращения, напр. на псевдосфере, невозможно по двум причинам. Во-первых, на псевдосфере имеются нерегулярные точки; они составляют ребро возврата (рис. 4). Во-вторых, псевдосфера топологически эквивалентна трубке и значит даже с топологич. точки зрения отличается от плоскости Лобачевского. Но можно построить на регулярной О. к. п. вращения модель бесконечной части плоскости Лобачевского. С этой целью отсекается от псевдосферы плоскостью, перпендикулярной оси, бесконечная (сужающаяся) область U. Плоскость проводится так, чтобы она не содержала ребра возврата. В качестве U берется та часть псевдосферы, где ребра возврата нет. Далее рассматривается только U, к-рую для простоты также наз. псевдосферой; на ней нет особых точек. Пусть U' — универсальная накрывающая псевдосферу U поверхность. Это понятие можно наглядно ввести следующим образом. Берется бесконечно много одинаковых и совмещенных экземпляров псевдосферы U, к-рые различаются введением нумерации: . . ., U_{-2}, U_{-1}, U_0, U_1, . . . Затем все они разрезаются по какому-нибудь общему меридиану, а на каждой из них устанавливается левый и правый берег разреза так, чтобы все левые берега были совмещены (также — правые). Теперь для любого номера k, $-\infty<k<\infty$, левый берег U_k соединяется с правым берегом U_{k+1} (следовательно, правый берег U_k с левым берегом U_{k-1}). Так получится связная поверхность U', к-рая и является универсальной накрывающей поверхности U, она иногда наз. односвязной *оберткой* поверхности U. Универсальную накрывающую можно построить для любой поверхности, но наглядное описание ее конструкции будет далеко не так просто, как для псевдосферы. Существенно, что универсальная накрывающая всегда односвязна. Важно также, что на универсальную накрывающую можно перенести локальную внутреннюю геометрию накрываемой поверхности. Для этого достаточно учесть, что каждая точка p накрываемой поверхности имеет выпуклую окрестность $V(p)$, к-рая однолистно накрывается окрестностью $V'(p')$ накрывающей (здесь p' — точка,

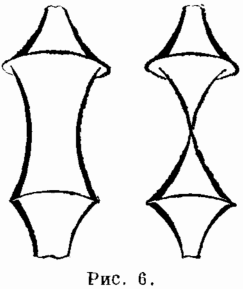


Рис. 6.

к-рая накрывает точку p; соответствие $p \to p'$ биективно). Геометрия $V(p)$ переносится на $V'(p')$ тождественно, т. е. расстояние между точками p_1', $p_2' \in V'$ принимается равным расстоянию между их прообразами. Вместе с тем определяется глобальная геометрия универсальной накрывающей, но она, как правило, будет совершенно отличаться от глобальной геометрии накрываемой.

На псевдосфере U меридианы, уходя в бесконечность, сближаются; кроме того, они ортогональны краю U. Поэтому край универсальной накрывающей есть кривая в плоскости Лобачевского, к-рая является ортогональной траекторией пучка параллельных по Лобачевскому (сближающихся) прямых. Эта кривая в геометрии Лобачевского наз. орициклом. Таким образом, с точки зрения своей внутренней геометрии универсальная накрывающая псевдосферы U есть внутренняя область орицикла в плоскости Лобачевского. Универсальная накрывающая U' псевдосферы U удобнее для построения модели геометрии Лобачевского, чем сама псевдосфера U. Напр., сколь угодно большой круг можно расположить на U', но в U слишком большой круг без перекрытий может не уместиться. Но даже U' недостаточно обширна, чтобы вместить любой объект геометрии Лобачевского, напр. полная прямая в U' не умещается. Иначе говоря, построить с помощью U' модель всей плоскости Лобачевского нельзя.

Д. Гильбертом (1900) был поставлен вопрос: не существует ли поверхности, внутренняя геометрия к-рой в целом совпадает с геометрией плоскости Лобачевского? Из простых соображений следует, что если такая поверхность есть, то она должна иметь постоянную отрицательную кривизну и быть полной. Далее, она должна быть односвязной, поскольку односвязна плоскость Лобачевского. Но на самом деле достаточно было бы найти любую полную поверхность постоянной отрицательной кривизны (согласно изложенному выше, универсальная накрывающая такой поверхности полна и односвязна). При этом имеются в виду только регулярные поверхности (хотя бы дважды непрерывно дифференцируемые в любой точке, т. е. класса C^2).

Уже в 1901 Д. Гильберт решил свою проблему (см. [2]), причем в отрицательном смысле: в трехмерном евклидовом пространстве не существует полной регулярной поверхности постоянной отрицательной кривизны. Эта теорема привлекала внимание геометров на протяжении ряда десятилетий и привлекает внимание до сих пор. Дело в том, что с ней и с ее доказательством связано много интересных вопросов (см. ниже). При этом наличие особых линий у поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны (см. рис. 4, 6) не случайно. Оно соответствует теореме Гильберта.

Доказательство теоремы Гильберта о поверхностях любого топологич. строения прежде всего интересно тем, что в нем существенно использовано понятие универсальной накрывающей поверхности. Оно сводит дело к поверхности с простейшей топологией, именно, к односвязной поверхности. По-видимому, теорема Гильберта была одним из ранних предложений математики, где это понятие уяснилось. После публикации первой статьи Д. Гильберта с доказательством его теоремы выражалось сомнение в справедливости этого доказательства. Замечания относились к необозримости поведения асимптотич. линий, к-рые по ходу дела рассматривались на поверхности ввиду сложности ее топологии. Предполагалось даже, что Д. Гильберт перерабатывал свое доказательство, чтобы уточнить его. Между тем доказательство Д. Гильберта с самого начала было безупречным. Вероятно, этих замечаний не было бы, если бы Д. Гильберт отчетливо сказал, что исследуется полное односвязное многообразие постоянной отрицательной кривизны, т. е. сама плоскость

Лобачевского, в предположении, что она изометрично и регулярно погружена в трехмерное евклидово пространство.

Интересным является также то, что в доказательстве Д. Гильберта неожиданно появляются чебышевские сети: так называется сеть, в каждом сетевом четырехугольнике к-рой противоположные стороны имеют равные длины (см. рис. 7). И вот оказывается, что асимптотич. сеть (к-рая определена и невырождена во всех точках на любой О. к. п.) в случае постоянной О. к. п.— чебышевская. Эту сеть можно принять в качестве координатной: $u=\mathrm{const}$, $v=\mathrm{const}$. Тогда линейный элемент получает чебышевский вид

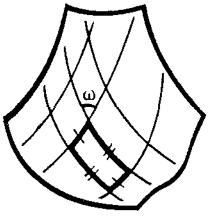


Рис. 7.

$$ds^2=du^2+2\cos\omega\, du\, dv+dv^2, \tag{1}$$

где ω — сетевой угол. Предполагая, что поверхность регулярна, полна и односвязна, и, пользуясь чебышевским характером сети, можно доказать, что u, v принимают все значения: $-\infty<u<\infty$, $-\infty<v<\infty$ и этим исчерпывают сеть; иначе говоря, асимптотич. сеть в целом гомеоморфна декартовой сети на евклидовой координатной плоскости (см. [9]). С другой стороны, в предположении, что гауссова кривизна постоянна, напр. $K=-1$, из (1) получается уравнение

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}=\sin\omega, \tag{2}$$

при этом из геометрич. соображений следуют ограничения

$$0<\omega<\pi. \tag{3}$$

Д. Гильберт показал, что уравнение (2) не может иметь регулярного на всей координатной плоскости решения $\omega=\omega(u, v)$, подчиненного условию (3), и тем самым полная плоскость Лобачевского не может быть регулярно и изометрично погружена в трехмерное евклидово пространство. Отсюда, как объяснялось выше, вытекает более общая формулировка этой теоремы: в трехмерном евклидовом пространстве невозможна полная регулярная постоянной О. к. п. (никакой топологич. структуры).

Во многих разделах математики случалось, что какое-нибудь утверждение или какой-нибудь вопрос играли особую роль в развитии всего раздела. В дифференциальной геометрии одним из таких утверждений была (и еще остается) теорема Гильберта. Ей посвящено много публикаций. Интерес к этой теореме вызван прежде всего сочетанием в ее доказательстве разнообразных идей и понятий (универсального накрытия, чебышевской сети). Позднее обнаружилась ее связь с физикой.

Оказалось, что уравнение (2), написанное в несколько ином виде и без ограничения (3), выражает условие на потенциал в т. н. эффекте Джозефсона из теории сверхпроводимости. Физики дали уравнению (2) название «синус-Гордона». Используя связь уравнения (2) с теорией О. к. п. (см. [13], [14]), находят в конечном виде нек-рые его решения, регулярные на всей плоскости.

С. Э. Кон-Фоссен высказал (см. [15]) предположение, что имеет место гораздо более общая теорема, чем теорема Гильберта, именно, что условие на гауссову кривизну $K=\mathrm{const}<0$ можно заменить условием $K\leqslant\mathrm{const}<0$. Однако до нач. 60-х гг. 20 в. не было найдено ни одной теоремы, к-рая включала бы теорему Гильберта как частный случай. Только в 1961 (см. [16]) была доказана корректность теоремы Гильберта, т. е.

была установлена теорема о переменной О. к. п., для к-рой теорема Гильберта является предельным случаем. Иначе говоря, те свойства постоянной О. к. п., к-рые вызывают эффект теоремы Гильберта (нарушение регулярности), и сам эффект возможно понимать в приближенном смысле. Для доказательства было найдено уравнение в случае переменной кривизны, к-рое обобщает уравнение (2). Именно,

$$k^2 \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{1}{K^2}\frac{\partial\omega}{\partial s_1}\right) = \{k^2 + A + \alpha\,|\operatorname{grad}\omega|\}\sin\omega, \qquad (4)$$

где ω имеет прежний смысл, $k^2 = -K$, дифференцирование ведется по дугам асимптотич. линий, A и α — величины, модули к-рых допускают внутреннюю оценку, т. е. оценку в зависимости только от погружаемой метрики. При $K = \mathrm{const}$ получается $A = 0$, $\alpha = 0$ и уравнение (4) превращается в уравнение (2).

В случае переменной кривизны найдено (см. [17]) уравнение

$$L_{s_2} L^*_{s_1}(\omega) = M \sin\omega, \qquad (5)$$

где L_{s_2} — линейный оператор, пропорциональный оператору дифференцирования по дуге асимптотич. линий второго семейства, $L^*_{s_1}$ — квазилинейный оператор похожей структуры. Существенно, что функция M при нек-рых условиях на метрику допускает внутреннюю оценку снизу положительным числом, благодаря чему и благодаря строению левой части уравнение (5) сходно с уравнением (2). Поэтому при таких условиях на метрику можно провести рассуждения, сходные с рассуждениями Д. Гильберта (хотя гораздо более сложные), и получить сходный результат. Таким путем впервые было получено обобщение теоремы Гильберта (см. [18]). Что касается условий на метрику, о к-рых только что говорилось, то они заключаются в требовании, чтобы гауссова кривизна K была отгорожена от нуля и медленно изменялась. Если предположить, что $K \leqslant -1$, то медленное изменение кривизны нужно понимать в том смысле, что первые и вторые производные от K по дуге любой геодезической достаточно малы. Достаточные оценки устанавливаются с таким расчетом, чтобы к уравнению (5) были применены указанные выше рассуждения, идущие от Д. Гильберта. Эти оценки (см. [19]) выражены с помощью положительных постоянных, обозначаемых h и Δ. Соответственно, получаемые метрики с медленно изменяющейся отрицательной кривизной наз. (h, Δ)-м е т р и к а м и (определение см. в [18] или в [19]); при этом метрики постоянной кривизны получаются при $\Delta = +\infty$. Таким образом, полная (h, Δ)-метрика не допускает регулярного изометрич. погружения в трехмерное евклидово пространство.

Вопрос о возможности обобщения теоремы Гильберта в том виде, как он ставился в 30-е гг. (без ограничений характера поведения кривизны, см. [12]), на указанных сейчас путях, т. е. с помощью дифференциальных уравнений теории поверхностей, завершить не удалось. Но решение этого вопроса получилось совсем на другом пути, именно, с помощью тщательного исследования граничных свойств сферич. образа О. к. п. Таким способом доказано (см. [19], [20]), что полная метрика с гауссовой кривизной $K \leqslant \mathrm{const} < 0$ не допускает регулярного изометрич. погружения в E_3. Тем самым вопрос решен точно в классич. постановке. Одновременно доказана теорема: в E_3 на всякой полной регулярной поверхности отрицательной гауссовой кривизны K имеет место равенство

$$\sup K = 0. \qquad (6)$$

Здесь достаточна регулярность C^2. Но в случае $C^{1,\,1}$ есть (см. [7]) контрпример (в виде слабо нерегулярной поверхности).

Кроме (6) получены также (см. [21]) другие равенства и оценки, универсальные в том смысле, что они относятся ко всем О. к. п. в E_3. Кроме того, метод доказательства (6) позволил получить теоремы, к-рые дают достаточные признаки, когда отображение плоскости в плоскость с отрицательным якобианом является не только локальным, но и глобальным диффеоморфизмом.

Несмотря на изложенные сейчас результаты, исследование (h, Δ)-метрик и других метрик с медленно изменяющейся кривизной (напр., q-метрик; см. [9]) не потеряло смысла. Дело в том, что в задачах погружения метрик с медленно изменяющейся отрицательной кривизной возникают эффекты, к-рые не имеют места в случае более общих метрик отрицательной кривизны (см., напр., теорему о простой зоне в [9]). Образно можно сказать, что чем медленнее изменяется кривизна, тем «труднее» метрике отрицательной кривизны быть погруженной в E_3. Для метрики постоянной кривизны это «явление» проявляется особенно заметно (см. усиленную теорему Гильберта в [9]). Что касается дифференциальных уравнений, к-рые отмечались в связи с вопросом о погружении (h, Δ)-метрик, то они существенно использовались и в других вопросах. Так, с их помощью установлен [7] ряд сильных теорем о связи между внутренними и внешними свойствами О. к. п.; в частности, теоремы о зависимости внешней регулярности кривизны О. к. п. от регулярности ее метрики (см. [7]).

Влияние регулярности метрики на внешнюю регулярность О. к. п. представляется особенно интересным, так как О. к. п. входят в нек-рый специальный класс поверхностей, к-рый может быть определен чисто геометрически (интересно, что чисто геометрич. определение допускает и класс выпуклых поверхностей). Поверхности этого класса наз. с е д л о в ы м и. Седловые поверхности в нек-ром смысле — антиподы выпуклых (см. [22] — [25]).

Теорема о невозможности в евклидовом пространстве полной О. к. п. $K \leqslant \text{const} < 0$ получает весьма усиленную форму в случае поверхности, к-рая однолистно проектируется на плоскость, т. е. может быть представлена как график функции $z=f(x, y)$. В этом случае существуют универсальные оценки протяженности поверхности, и полнота ее становится несущественной. Доказаны теоремы (см. [26]): 1) если на прямоугольник со сторонами a, b регулярно проектируется поверхность с гауссовой кривизной $K \leqslant -\alpha^2 = \text{const} < 0$, то неравенство $\sqrt{\alpha} \geqslant C_1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ влечет $a\sqrt{\alpha} \leqslant C_1 + \frac{C_2}{\varepsilon}$, где C_1, C_2— универсальные постоянные (напр., $C_1 = 4\pi$, $C_2 = 12\pi$); 2) если a, b и (для простоты) $\alpha = 1$, то $a \leqslant 18{,}9$.

Пусть дана метрика ds^2 с отрицательной гауссовой кривизной K и $k = \sqrt{-K}$. Пусть метрика ds^2 погружена в E_3 и l, m, n — приведенные коэффициенты получившейся второй квадратичной формы (приведенные — значит удовлетворяющие уравнению $ln - m^2 = -K$). В задаче о погружении l, m, n — неизвестные функции. В качестве новых неизвестных функций вводятся т. н. и н в а р и а н т ы Р и м а н а:

$$r = -\frac{m+k}{n}, \quad s = \frac{m-k}{n}.$$

Тогда основная система уравнений теории поверхностей примет симметричный вид

$$\left.\begin{aligned} r_x + s r_y &= A_0 + A_1 r + A_2 s + A_3 r^2 + A_4 rs + A_5 r^2 s, \\ s_x + r s_y &= A_0 + A_1 s + A_2 r + A_3 s^2 + A_4 rs + A_5 s^2 r, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

где $A_0, \ldots, A_5$ выражаются только через метрику ds^2.

Выше указывалось, что полная О. к. п. с $K \leqslant \text{const} < 0$ не допускает изометричного регулярного погружения в E_3. Поэтому полученные результаты о возможности изометрич. погружения двумерных многообразий отрицательной кривизны в E_3 по необходимости относятся к частям полных многообразий. Само многообразие предполагается односвязным. Так, доказано (см. [29], [30]), что каждый геодезич. круг на произвольном регулярном многообразии отрицательной кривизны $K \leqslant \text{const} < 0$ может быть регулярно изометрически погружен в E_3. Эта теорема получена как следствие более общей теоремы: при нек-рых естественных условиях регулярности на метрику полной О. к. п. с $K \leqslant \text{const} < 0$ каждая бесконечная эквидистантная полоса на этом многообразии может быть изометрично и регулярно погружена в E_3. Эта теорема в свою очередь получена как следствие теоремы о существовании в целом решений гиперболич. систем квазилинейных уравнений вида (7), причем $r \neq s$.

Построен пример односвязного многообразия знакопеременной кривизны, на к-ром есть геодезич. круг, не допускающий изометрич. погружения в E_3 (см. [10]). Доказано [31] при нек-рых ограничениях на полную метрику односвязной О. к. п. $K \leqslant \text{const} < 0$, что внутренняя область произвольного орицикла такого многообразия может быть изометрично погружена в E_3. Таким образом, для полных односвязных многообразий отрицательной кривизны $K \leqslant \text{const} < 0$ доказана возможность изометрич. погружения в E_3 всех компактных и некомпактных его частей, к-рые сходны с частями плоскости Лобачевского, изометрич. погружения к-рых известны из работ Ф. Миндинга и Э. Бельтрами.

Изучаются погружения метрики с гауссовой кривизной $K = \text{const} < 0$, т. е. погружения частей плоскости Лобачевского. Так, доказано, что каждый, даже бесконечно протяженный, многоугольник плоскости Лобачевского, может быть изометрически погружен в E_3.

Разнообразие топологич. типов полных О. к. п. в E_3 приводит к необходимости рассматривать различные подклассы этого слишком широкого класса, удовлетворяющие тем или иным дополнительным условиям. Весьма естественным является подкласс полных О. к.п., имеющих взаимно однозначное сферическое («однолистное») отображение (см. [33]). Если поверхность F из этого класса не имеет самопересечений, то она односвязна или двусвязна. Если такая поверхность F имеет рог, то, используя неограниченность седлового рога (см. [34]), можно получить ряд внешнегеометрич. свойств этой поверхности: F допускает задание уравнением $z = f(x, y)$ над областью, полученной из плоскости x, y удалением компактного выпуклого множества; F имеет предельный конус $A(F)$, состоящий из луча, соответствующего рогу, и выпуклого конуса, соответствующего чаше поверхности; замыкание F^* сферич. образа поверхности F имеет своим дополнением до сферы открытую полусферу и открытое выпуклое множество (рис. 8—10). Ряд аналогичных

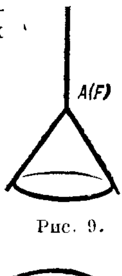


Рис. 9.

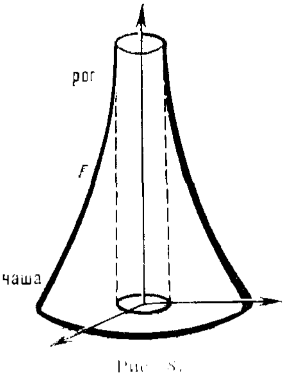


Рис. 8.

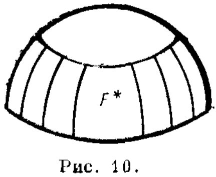


Рис. 10.

вопросов изучен и для других типов полных О. к. п. со взаимно однозначным сферич. отображением.

Другим интересным по своим свойствам и свойствам своего сферич. отображения классом является класс сужающихся О. к. п. (см. [36], [37]). Такой поверхностью, напр., является поверхность, заданная уравнением $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=a^2$. По ряду своих свойств сужающиеся О. к. п. напоминают замкнутые поверхности. Их сферич. образ можно рассматривать как риманову поверхность с краем, каждая компонента к-рого является сферич. ломаной, лежащей на одной из больших окружностей.

Иначе выглядит теория О. к. п. в псевдоевклидовом пространстве $E^3_{2,1}$. В этом пространстве О. к. п. являются выпуклыми; при этом кривизна понимается обычным образом, как кривизна метрики, индуцированной объемлющим пространством. Именно она предполагается отрицательной.

Единичная сфера пространства $E^3_{2,1}$ состоит из трех связных компонент L_1, L_2, L_3 (рис. 11). Компоненты L_1 и L_2 являются выпуклыми поверхностями, на к-рых индуцируется положительно определенная метрика постоянной отрицательной кривизны; эти поверхности дают известную интерпретацию геометрии Лобачевского. Поверхность L_3 седлообразная, на ней индуцируется индефинитная метрика постоянной положительной кривизны; метрика этой поверхности известна как двумерная метрика де Ситтера.

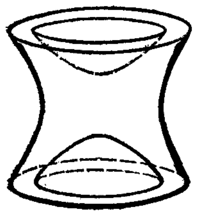


Рис. 11.

О. к. п. с дефинитной метрикой образуют в $E^3_{2,1}$ широкий и естественный класс поверхностей, обобщающих свойства поверхностей L_1 и L_2 так же, как поверхности положительной кривизны образуют в евклидовом пространстве класс, обобщающий сферу (см. [38]).

Исчерпывающим образом изучены свойства поверхностей с дефинитной метрикой и отрицательной кривизной, полная интегральная кривизна к-рых кончена. Свойства этих поверхностей аналогичны свойствам выпуклых поверхностей с кривизной, меньшей 2π, в евклидовом пространстве (класс поверхностей Оловянишникова). Именно, полная дефинитная метрика отрицательной кривизны и конечной интегральной кривизны $\tilde{K}$ и геодезич. луч γ на многообразии, несущем эту метрику, определяют единственным образом выпуклую поверхность с данным выпуклым предельным конусом полной кривизны $\tilde{K}$ без изотропных образующих и с данной образующей, к-рая является предельной для луча γ. Регулярность получаемых поверхностей определяется регулярностью метрики.

Полные О. к. п. с индефинитной метрикой также являются выпуклыми. Но свойства их отчасти сходны со свойствами седлообразных поверхностей в евклидовом пространстве. В частности, для них справедлива оценка $\sup K=0$. Такие поверхности должны были бы соответствовать компоненте L_3 единичной сферы пространства $E^3_{2,1}$; однако она не выпукла. Здесь играет определяющую роль не только знак гауссовой кривизны, но и знак определителя метрич. формы поверхности.

Лит.: [1] Hadamard J., «J. math. pures et appl.», 1898, v. 4, p. 27—73; [2] Hilbert D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1901, v. 2, p. 87—99; [3] Bianchi L., Lezioni di geometria differentiale, 3 ed., v. 1, pt 1, Bologna, 1927; [4] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [5] Норден А. П., Теория поверхностей, М., 1956; [6] Розендорн Э. Р., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 2, с. 149—56; [7] его же, там же, 1966, т. 21, в. 5, с. 59—116; [8] Аминов Ю. А., «Укр. геометр. сб.», 1973, в. 13, с. 3—9; [9] Ефимов Н. В., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 5, с. 3—58; [10] Позняк Э. Г., там же, 1973, т. 28, в. 4, с. 47—76; [11] Позняк Э. Г., Шикин Е. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 171—207; [12] Позняк Э. Г., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии, т. 8, М., 1977, с. 225—41; [13] Грибков И. В., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика. Механика», 1977, № 4, с. 78—83; [14] его же, «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 2, с. 191—92; [15] Кон-Фоссен С. Э., там же, 1936, в. 1, с. 33—76; [16] Ефимов Н. В., «Докл. АН СССР», 1961, т. 136, № 6, с. 1283—86; [17] Ефимов Н. В., Позняк Э. Г., там же, т. 137, № 1, с. 25—27; [18] их же, там же, № 3, с. 509—12; [19] Ефимов Н. В., там же, 1963, т. 150, № 6, с. 1206—09; [20] его же, «Матем. сб.», 1964, т. 64, № 2, с. 286—320; [21] его же, там же, 1968, т. 76, № 4, с. 499—512; [22] Шефель С. З., Исследования по геометрии седловых поверхностей, Новосиб., 1963; [23] его же, «Сиб. матем. ж.», 1964, т. 5, № 6, с. 1382—96; [24] его же, там же, 1967, т. 8, № 3, с. 705—14; [25] его же, «Докл. АН СССР», 1965, т. 162, № 2, с. 294—96; [26] Ефимов Н. В., «Матем. сб.», 1976, т. 100, № 3, с. 356—63; [27] его же, «Докл. АН СССР», 1953, т. 93, № 4, с. 609—11; [28] Heinz E., «Math. Ann.», 1955, Bd 129, H. 5, p. 451—54; [29] Позняк Э. Г., «Докл. АН СССР», 1966, т. 170, № 4, с. 786—89; [30] его же, «Укр. геометр. сб.», 1966, в. 3, с. 78—92; [31] Шикин Е. В., «Докл. АН СССР», 1974, т. 215, № 1, с. 61—63; [32] Рождественский Б. Л., там же, 1962, т. 143, № 1, с. 50—52; [33] Вернер А. Л., «Матем. сб.», 1967, т. 74, № 2, с. 218—40; 1968, т. 75, № 1, с. 112—39, т. 77, № 1, с. 136; [34] его же, «Сиб. матем. ж.», 1970, т. 11, № 1, с. 20—29; № 4, с. 750—769; [35] его же, «Матем. заметки», 1972, т. 12, № 3, с. 281—86; [36] Соколов Д. Д., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 1, с. 261—62; 1978, т. 33, в. 4, с. 227—28; 1979, т. 34, в. 3, с. 213—14; [37] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948; [38] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.

Н. В. Ефимов.

ОТСЧЕТА СИСТЕМА — совокупность системы координат и часов, связанных с телом, по отношению к к-рому изучается движение (или равновесие) каких-нибудь других материальных точек или тел. Любое движение является относительным, и движение тела следует рассматривать лишь по отношению к какому-либо другому телу (телу отсчета) или системе тел. Нельзя указать, напр., как движется Луна вообще, можно лишь определить ее движение по отношению к Земле или Солнцу и звездам и т. д.

Математически движение тела (или материальной точки) по отношению к выбранной О. с. описывается уравнениями, к-рые устанавливают, как изменяются с течением времени t координаты, определяющие положение тела (точки) в этой О. с. Напр., в декартовых координатах x, y, z движение точки определяется уравнениями

$$x=f_1(t),\ \ y=f_2(t),\ \ z=f_3(t),$$

наз. уравнениями движения.

Выбор О. с. зависит от целей исследования. При кинематич. исследованиях все О. с. равноправны. В задачах динамики преимущественную роль играют *инерциальные системы отсчета*, по отношению к которым дифференциальные уравнения имеют обычно более простой вид.

По материалам статьи Система отсчета из БСЭ-3.

ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКАЯ — функция от случайных величин, применяемая для оценки неизвестных параметров теоретич. распределения вероятностей. Методы теории О. с. служат основой современной теории ошибок; обычно в качестве неизвестных параметров выступают измеряемые физич. постоянные, а в качестве случайных величин — результаты непосредственных измерений, подверженные случайным ошибкам. Напр., если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково нормально распределенные случайные величины (результаты равноточных измерений, подверженных независимым нормально распределенным случайным ошибкам), то в качестве О. с. для неизвестного среднего значения a (приближенного значения измеряемой физич. постоянной) применяется среднее арифметическое

$$X=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n). \qquad (1)$$

О. с. как функция от случайных величин чаще всего задается теми или иными формулами, выбор к-рых определяется требованиями практики. При этом различают оценки точечные и оценки интервальные.

Точечные оценки. Точечной оценкой наз. такая О. с., значение к-рой представимо геометрически в виде точки в том же пространстве, что и значения неизвестных параметров (размерность пространства равна числу оцениваемых параметров). Именно точечные О. с. и используются как приближенные значения для неизвестных физич. величин. В дальнейшем для простоты предполагается, что оценке подлежит один единственный параметр; в этом случае точечная О. с. *представляет собой функцию от результатов наблюдений*, принимающую числовые значения.

Точечную О. с. наз. несмещенной, если ее математич. ожидание совпадает с оцениваемой величиной, т. е. если О. с. лишена систематич. ошибки. Среднее арифметическое (1) — несмещенная О. с. для математич. ожидания одинаково распределенных случайных величин X_i (не обязательно нормальных). В то же время выборочная дисперсия

$$\hat{s}^2=\frac{1}{n}\left[(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\ldots+(X_n-\overline{X})^2\right] \quad (2)$$

является смещенной О. с. для дисперсии $\sigma^2=\mathsf{D}X_i$, так как $\mathsf{E}\hat{s}^2=\left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma^2$; в качестве несмещенной О. с. для σ^2 обычно берут функцию

$$s^2=\frac{n}{n-1}\,\hat{s}^2.$$

См. также *Несмещенная оценка.*

За меру точности несмещенной О. с. α для параметра a чаще всего принимают дисперсию $\mathsf{D}\alpha$.

О. с. с наименьшей дисперсией наз. наилучшей. В приведенном примере среднее арифметическое (1) — наилучшая О. с. Однако если распределение вероятностей случайных величин X_i отлично от нормального, то О. с. (1) может и не быть наилучшей. Напр., если результаты наблюдений X_i распределены равномерно в интервале (b, c), то наилучшей О. с. для математич. ожидания $a=(b+c)/2$ будет полусумма крайних значений

$$\alpha=\frac{\min X_i+\max X_i}{2}\,. \quad (3)$$

В качестве характеристики для сравнения точности различных О. с. применяют эффективность — отношение дисперсий наилучшей оценки и данной несмещенной оценки. Напр., если результаты наблюдений X_i распределены равномерно, то дисперсии оценок (1) и (3) выражаются формулами

$$\mathsf{D}\overline{X}=\frac{(c-b)^2}{12n}$$

и (4)

$$\mathsf{D}\alpha=\frac{(c-b)^2}{2\,(n+1)\,(n+2)}\,.$$

Так как оценка (3) наилучшая, то эффективность оценки (1) в данном случае есть

$$e_n(\overline{X})=6n/(n+1)\,(n+2)\sim 6/n.$$

При большом количестве наблюдений n обычно требуют, чтобы выбранная О. с. стремилась по вероятности к истинному значению параметра a, т. е. чтобы для всякого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{|\alpha-a|>\varepsilon\}=0;$$

такие О. с. наз. *состоятельными* (пример состоятельной О. с. — любая несмещенная оценка, дисперсия к-рой при $n \to \infty$ стремится к нулю; см. также *Состоятельная оценка*). Поскольку важную роль при этом играет порядок стремления к пределу, то асимптотически наилучшими являются асимптотически эффективные О. с., то есть такие О. с., для к-рых при $n \to \infty$

$$\frac{\mathsf{E}(\alpha - a)}{\sqrt{\mathsf{E}(\alpha - a)^2}} \longrightarrow 0 \text{ и } e_n(\alpha) \longrightarrow 1.$$

Напр., если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ распределены одинаково нормально, то О. с. (2) представляет собой асимптотически эффективную оценку для неизвестного параметра $\sigma^2 = \mathsf{D}X_i$, так как при $n \to \infty$ дисперсия оценки $\widehat{s^2}$ и дисперсия наилучшей оценки $\widehat{s^2}n/(n-1)$ асимптотически эквивалентны:

$$\mathsf{D}\widehat{s^2} \big/ \mathsf{D}\left[\widehat{s^2}n/(n-1)\right] = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2, \quad \mathsf{D}\widehat{s^2} = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

и, кроме того,

$$\mathsf{E}(\widehat{s^2} - \sigma^2) = -\sigma^2/n.$$

Фундаментальное значение для теории О. с. и ее приложений имеет тот факт, что квадратичное отклонение О. с. для параметра a ограничено снизу нек-рой величиной (этой величиной Р. Фишер (R. Fischer) предложил характеризовать количество информации относительно неизвестного параметра a, содержащийся в результатах наблюдений). Напр., если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и одинаково распределены с плотностью вероятности $p(x; a)$ и если $\alpha = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — О. с. для нек-рой функции $g(a)$ от параметра a, то в широком классе случаев

$$\mathsf{E}\left[\alpha - g(a)\right]^2 \geqslant \frac{nb^2(a)\, I(a) + [g'(a) + b'(a)]^2}{nI(a)}, \tag{5}$$

где

$$b(a) = \mathsf{E}\left[\alpha - g(a)\right] \text{ и } I(a) = \mathsf{E}\left[\frac{\partial \ln p(X;\, a)}{\partial a}\right]^2.$$

Функцию $b(a)$ наз. **смещением**, а величину, обратную правой части неравенства (5), наз. **количеством информации** (по Фишеру) относительно функции $g(a)$, содержащейся в результате наблюдений. В частности, если α — несмещенная О. с. параметра a, то

$$g(a) \equiv a, \quad b(a) \equiv 0$$

и

$$\mathsf{E}\left[\alpha - g(a)\right]^2 = \mathsf{D}\alpha \geqslant 1/nI(a), \tag{6}$$

причем количество информации nIa в этом случае пропорционально количеству наблюдений (функцию $I(a)$ наз. **количеством информации**, содержащейся в одном наблюдении).

Основные условия, при к-рых справедливы неравенства (5) и (6), — гладкость оценки α как функции от X_i, а также независимость от параметра a множества тех точек x, где $p(x, a) = 0$. Последнее условие не выполняется, напр., в случае равномерного распределения, и поэтому дисперсия О. с. (3) не удовлетворяет неравенству (6) [согласно (4) эта дисперсия есть величина порядка n^{-2}, в то время как по неравенству (6) она не может иметь порядок малости выше, чем n^{-1}].

Неравенства (5) и (6) справедливы и для дискретно распределенных случайных величин X_i: нужно лишь в определении информации $I(a)$ плотность $p(x; a)$ заменить вероятностью события $\{X = x\}$.

Если дисперсия несмещенной О. с. α^* для параметра a совпадает с правой частью неравенства (6), то α^* — наилучшая оценка. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: дисперсия наилучшей О. с. может превышать $[nI(a)]^{-1}$. Однако если $n \to \infty$, то дисперсия наилучшей оценки $\mathsf{D}\alpha^*$ асимптотически эквивалентна правой части (6), т. е. $n\mathsf{D}\alpha^* \to 1/I(a)$. Таким образом, с помощью количества информации (по Фишеру) можно определить асимптотич. эффективность несмещенной О. с. α, полагая

$$e_\infty(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{D}\alpha^*}{\mathsf{D}\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nI(a)\ \mathsf{D}\alpha}. \qquad (7)$$

Особенно плодотворным информационный подход к теории О. с. сказывается тогда, когда плотность (в дискретном случае — вероятность) совместного распределения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ представима в виде произведения двух функций $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)q[y(x_1, x_2, \ldots, x_n); a]$, из к-рых первая не зависит от a, а вторая представляет собой плотность распределения нек-рой случайной величины $Z=y(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, наз. *достаточной статистикой*, или исчерпывающей статистикой.

Один из наиболее распространенных методов нахождения точечных О. с. — *моментов метод*. Согласно этому методу, теоретич. распределению, зависящему от неизвестных параметров, ставят в соответствие дискретное выборочное распределение, к-рое определяется результатами наблюдений X_i и представляет собой распределение вероятностей воображаемой случайной величины, принимающей значения $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с одинаковыми вероятностями, равными $1/n$ (выборочное распределение можно рассматривать как точечную О. с. для теоретич. распределения). В качестве О. с. для моментов теоретич. распределения принимают соответствующие моменты выборочного распределения; напр., для математич. ожидания a и дисперсии σ^2 метод моментов дает следующие О. с.: выборочное среднее (1) и выборочную дисперсию (2). Неизвестные параметры обычно выражаются (точно или приближенно) в виде функций от нескольких моментов теоретич. распределения. Заменяя в этих функциях теоретич. моменты выборочными, получают искомые О. с. Этот метод, часто приводящий на практике к сравнительно простым вычислениям, дает, как правило, О. с. невысокой асимптотической эффективности (см. выше пример оценки математического ожидания равномерного распределения).

Другой метод нахождения О. с., более совершенный с теоретич. точки зрения, — *максимального правдоподобия метод*, или наибольшего правдоподобия метод. Согласно этому методу, рассматривают функцию правдоподобия $L(a)$, к-рая представляет собой функцию неизвестного параметра a и получается в результате замены в плотности совместного распределения $p(x_1, x_2, \ldots, x_n; n)$ аргументов x_i самими случайными величинами X_i; если X_i независимы и одинаково распределены с плотностью вероятности $p(x; a)$, то

$$L(a) = p(X_1; a)\, p(X_2; a) \ldots p(X_n; a)$$

(если X_i распределены дискретно, то в определении функции правдоподобия L следует плотности заменить вероятностями событий $\{X_i = x_i\}$). В качестве О. с. максимального правдоподобия для неизвестного параметра a принимают такую величину α, для к-рой $L(\alpha)$ достигает наибольшего значения (при этом часто вместо L рассматривают т. н. логарифмическую функцию правдоподобия $l(\alpha) = \ln L(\alpha)$; в силу монотонности логарифма точки максимумов функций $L(\alpha)$ и $l(\alpha)$ совпадают). Примерами О. с. максимального правдоподобия являются оценки по *наименьших квадратов методу*.

Основное достоинство О. с. максимального правдоподобия заключается в том, что при нек-рых общих условиях эти оценки состоятельны, асимптотически эффективны и распределены приближенно нормально.

Перечисленные свойства означают, что если α есть О. с. максимального правдоподобия, то при $n \to \infty$

$$\mathsf{E}\alpha \sim a \text{ и } \mathsf{E}(\alpha - a)^2 \sim \mathsf{D}\alpha \sim \sigma_n^2(a) = \frac{1}{\mathsf{E}\left[\frac{d}{da} l(a)\right]^2}$$

(если X независимы, то $\sigma_n^2(a) = [nI(a)]^{-1}$). Таким образом, для функции распределения нормированной О. с. $(\alpha - a)/\sigma_n(a)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\alpha - a}{\sigma_n(a)} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \equiv \Phi(x). \quad (8)$$

Преимущества О. с. максимального правдоподобия оправдывают вычислительную работу по отысканию максимума функции L (или l). В нек-рых случаях вычислительная работа существенно сокращается благодаря следующим свойствам: во-первых, если α^* — такая О. с., для к-рой неравенство (6) обращается в равенство, то О. с. максимального правдоподобия единственна и совпадает с α^*, во-вторых, если существует достаточная статистика Z, то О. с. максимального правдоподобия есть функция Z.

Пусть, напр., $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и распределены одинаково нормально так, что

$$p(x;\ a,\ \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - a)^2\right\},$$

поэтому

$$l(a,\ \sigma) = \ln L(a,\ \sigma) =$$
$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2.$$

Координаты $a = a_0$ и $\sigma = \sigma_0$ точки максимума функции $l(a,\ \sigma)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial l}{\partial a} \equiv \frac{1}{\sigma^2}\sum(X_i - a) = 0,$$
$$\frac{\partial l}{\partial a} \equiv -\frac{n}{\sigma^3}\left[\sigma^2 - \frac{1}{n}\sum(X_i - a)^2\right] = 0.$$

Таким образом, $a_0 = \overline{X} = \Sigma X_i/n$, $\sigma_0^2 = \hat{s}^2 = \Sigma(X_i - \overline{X})^2/n$ и, значит, в данном случае О. с. (1) и (2) — оценки максимального правдоподобия, причем $\overline{X}$ — наилучшая О. с. параметра a, распределенная нормально ($\mathsf{E}\overline{X} = a$, $\mathsf{D}\overline{X} = \sigma^2/n$), а $\hat{s}^2$ — асимптотически эффективная О. с. параметра σ^2, распределенная при больших n приближенно нормально ($\mathsf{E}\hat{s}^2 \sim \sigma^2$, $\mathsf{D}\hat{s}^2 \sim 2\sigma^4/n$). Обе оценки представляют собой независимые достаточные статистики.

Еще один пример, в к-ром

$$p(x;\ a) = \{\pi[1 + (x - a)^2]\}.$$

Эта плотность удовлетворительно описывает распределение одной из координат частиц, достигших плоского экрана и вылетевших из точки, расположенной вне экрана (a — координата проекции источника на экран — предполагается неизвестной). Для указанного распределения математич. ожидание не существует, т. к. соответствующий интеграл расходится. Поэтому отыскание О. с. для a методом моментов невозможно. Формальное применение в качестве О. с. среднего арифметического (1) лишено смысла, т. к. $\overline{X}$ распределено в данном случае с той же плотностью $p(x;\ a)$, что и каждый единичный результат наблюдений. Для оценки a можно воспользоваться тем обстоятельством, что рассматриваемое распределение симметрично относительно точки $x = a$ и, значит, a — медиана теоретич. распределения. Несколько видоизменяя метод моментов, в качестве О. с. для a принимают т. н. выборочную медиану μ, к-рая при $n \geqslant 3$ является несмещенной О. с.

для a, причем если n велико, то μ распределена приближенно нормально с дисперсией

$$\mathsf{D}\mu \sim \pi^2/4n.$$

В то же время

$$l(a) = -n\ln\pi + \sum_{i=1}^{n} \ln[1+(X_i-a)^2],$$

поэтому $nI(a)=n/2$ и, значит, согласно (7) асимптотич. эффективность $e_\infty(\mu)$ равна $8/\pi^2 \approx 0,811$. Таким образом, для того чтобы выборочная медиана μ была столь же точной О. с. для a, как и оценка наибольшего правдоподобия α, нужно количество наблюдений увеличить на 25%. Если затраты на эксперимент велики, то для определения a следует воспользоваться О. с. α, к-рая в данном случае определяется как корень уравнения

$$\frac{\partial l}{\partial a} \equiv -2\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i-a}{1+(X_i-a)^2}=0.$$

В качестве первого приближения выбирают $\alpha_0=\mu$ и далее решают это уравнение последовательными приближениями по формуле

$$\alpha_{k+1}=\alpha_k+\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i-\alpha_k}{1+(X_i-\alpha_k)^2}.$$

См. также *Точечная оценка.*

Интервальные оценки. Интервальной оценкой наз. такая О. с., к-рая геометрически представима в виде множества точек, принадлежащих пространству параметров. Интервальную О. с. можно рассматривать как множество точечных О. с. Это множество зависит от результатов наблюдений и, следовательно, оно случайно; поэтому каждой интервальной О. с. ставится в соответствие вероятность, в к-рой эта оценка «накроет» неизвестную параметрич. точку. Такая вероятность, вообще говоря, зависит от неизвестных параметров; поэтому в качестве характеристики достоверности интервальной О. с. принимают коэффициент доверия — наименьшее возможное значение указанной вероятности. Содержательные статистич. выводы позволяют получать лишь те интервальные О. с., коэффициент доверия к-рых близок к единице.

Если оценивается один параметр a, то интервальной О. с. обычно является нек-рый интервал (β, γ) (т. н. доверительный интервал), конечные точки к-рого β и γ представляют собой функции от результатов наблюдений; коэффициент доверия ω в данном случае определяется как нижняя грань вероятности одновременного осуществления двух событий $\{\beta < a\}$ и $\{\gamma > a\}$, вычисляемая по всем возможным значениям параметра a:

$$\omega = \inf_a \mathsf{P}\{\beta < a < \gamma\}.$$

Если середину такого интервала $(\beta+\gamma)/2$ принять за точечную О. с. для параметра a, то с вероятностью не менее чем ω можно утверждать, что абсолютная погрешность этой О. с. не превышает половины длины интервала $(\gamma-\beta)/2$. Иными словами, если руководствоваться указанным правилом оценки абсолютной погрешности, то ошибочное заключение будет получаться в среднем менее чем в $100\,(1-\omega)\%$ случаев. При фиксированном коэффициенте доверия ω наиболее выгодны кратчайшие доверительные интервалы, для к-рых математич. ожидание длины $\mathsf{E}(\gamma-\beta)$ достигает наименьшего значения.

Если распределение случайных величин X_i зависит только от одного неизвестного параметра a, то построение доверительного интервала обычно осуществляется с помощью какой-либо точечной О. с. α. Для большинства практически интересных случаев функция распределения $\mathsf{P}\{\alpha < x\} = F(x;\ a)$ разумно выбранной О. с. α монотонно зависит от параметра a. В этих условиях для отыскания интервальной О. с. следует в $F(x;\ a)$ подставить $x=\alpha$ и определить корни $a_1=a_1(\alpha,\ \omega)$ и $a_2=a_2(\alpha,\ \omega)$ уравнений

$$F(\alpha;\ a_1)=\frac{1-\omega}{2} \text{ и } F(\alpha+0;\ a_2)=\frac{1+\omega}{2}, \qquad (9)$$

где

$$F(x+0;\ a)=\lim_{\Delta\to 0} F(x+\Delta^2;\ a)$$

[для непрерывных распределений $F(x+0;\ a)=F(x;\ a)$]. Точки с координатами $a_1(\alpha;\ \omega)$ и $a_2(\alpha;\ \omega)$ ограничивают доверительный интервал с коэффициентом доверия ω. Разумеется, интервал, построенный столь простым способом, во многих случаях может отличаться от оптимального (кратчайшего). Однако если α — асимптотически эффективная О. с. для a, то при достаточно большом количестве наблюдений такая интервальная О. с. практически несущественно отличается от оптимальной. В частности, это верно для О. с. наибольшего правдоподобия, т. к. она распределена асимптотически нормально (см. (8)). В тех случаях, когда решение уравнений (9) затруднительно, интервальную О. с. вычисляют приближенно с помощью точечной О. с. максимального правдоподобия и соотношения (8):

$$\beta\approx\beta^*=\alpha-x\sigma_n(\alpha) \text{ и } \gamma\approx\gamma^*=\alpha+x\sigma_n(\alpha),$$

где x — корень уравнения $\Phi(x)=(1+\omega)/2$.

Если $n\to\infty$, то истинный коэффициент доверия интервальной оценки $(\beta^*,\ \gamma^*)$ стремится к ω. В более общем случае распределение результатов наблюдений X_i зависит от нескольких параметров $a,\ b,\ldots$. В этих условиях указанные выше правила построения доверительных интервалов часто оказываются неприменимыми, т. к. распределение точечной О. с. α зависит, как правило, не только от a, но и от остальных параметров. Однако в практически интересных случаях О. с. α можно заменить такой функцией от результатов наблюдений X_i и неизвестного параметра a, распределение к-рой не зависит (или «почти не зависит») от всех неизвестных параметров. Примером такой функции может служить нормированная О. с. максимального правдоподобия $(\alpha-a)/\sigma_n(a,\ b,\ldots)$; если в знаменателе аргументы $a,\ b,\ldots$ заменить их оценками максимального правдоподобия $\alpha,\ \beta,\ldots$, то предельное распределение останется тем же самым, что и в формуле (8). Поэтому приближенные доверительные интервалы для каждого параметра в отдельности можно строить так же, как и в случае одного параметра.

Как уже отмечалось выше, если $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots$ — независимые и одинаково нормально распределенные случайные величины, то $\overline{X}$ и s^2 — наилучшие О. с. для параметров a и σ^2 соответственно. Функция распределения О. с. выражается формулой

$$\mathsf{P}\{\overline{X}<x\}=\Phi\left[\frac{\sqrt{n}\,(x-a)}{\sigma}\right]$$

и, следовательно, она зависит не только от a, но также и от σ. В то же время распределение **т. н.** отношения Стьюдента

$$\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-a)}{s}=\tau$$

не зависит ни от a, ни от σ, причем

$$\mathsf{P}\{|\tau|\leqslant t\}=\omega_{n-1}(t)=C_{n-1}\int_0^t\left(1+\frac{v^2}{n-1}\right)^{-n/2}dv,$$

где постоянная C_{n-1} выбирается так, чтобы выполнялось равенство $\omega_{n-1}(\infty)=1$. Таким образом, доверительному интервалу

$$\overline{X}-st/\sqrt{n}<a<\overline{X}+st/\sqrt{n}$$

соответствует коэффициент доверия $\omega_{n-1}(t)$.

Распределение оценки s^2 зависит лишь от σ^2, причем функция распределения О. с. s^2 задается формулой

$$\mathsf{P}\left\{s^2 < \frac{\sigma^2 x}{n-1}\right\} = G_{n-1}(x) = D_{n-1}\int_0^x v^{(n-3)/2}\, e^{-v/2}dv,$$

где постоянная D_{n-1} определяется условием $G_{n-1}(\infty)=1$ (так наз. χ^2-распределением с $n-1$ степенями свободы). Так как с ростом σ вероятность $\mathsf{P}\{s^2 < \sigma^2 x/(n-1)\}$ монотонно возрастает, то для построения интервальной О. с. применимо правило (9). Таким образом, если x_1 и x_2 — корни уравнений $G_{n-1}(x_1)=(1-\omega)/2$ и $G_{n-1}(x_2)=(1+\omega)/2$, то доверительному интервалу

$$(n-1)\, s^2/x_2 < \sigma^2 < (n-1)\, s^2/x_1$$

соответствует коэффициент доверия ω. Отсюда, в частности, следует, что доверительный интервал для относительной ошибки задается неравенствами

$$\frac{x_1}{n-1} - 1 < \frac{s^2-\sigma^2}{\sigma^2} < \frac{x_2}{n-1} - 1.$$

Подробные таблицы функций распределения Стьюдента $\omega_{n-1}(t)$ и χ^2-распределения $G_{n-1}(x)$ имеются в большинстве руководств по математич. статистике.

До сих пор предполагалось, что функция распределения результатов наблюдений известна с точностью до значений нескольких параметров. Однако в приложениях часто встречается случай, когда вид функции распределения неизвестен. В этой обстановке для оценки параметров могут оказаться полезными т. н. *непараметрические методы статистики* (т. е. такие методы, к-рые не зависят от исходного распределения вероятностей). Пусть, напр., требуется оценить медиану m теоретич. непрерывного распределения независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (для симметричных распределений медиана совпадает с математич. ожиданием, если, конечно, оно существует). Пусть $Y_1 \leqslant Y_2 \leqslant \ldots \leqslant Y_n$ — те же величины X_i, но расположенные в порядке возрастания. Тогда, если k — целое число, удовлетворяющее неравенствам $1 \leqslant k \leqslant n/2$, то

$$\mathsf{P}\{Y_k < m < Y_{n-k+1}\} = 1 - 2\sum_{r=0}^{k-1} C_n^r \left(\frac{1}{2}\right)^n = \omega_{n,k}.$$

Таким образом, (Y_k, Y_{n-k+1}) — интервальная О. с. для m с коэффициентом доверия $\omega=\omega_{n,k}$. Этот вывод верен при любом непрерывном распределении случайных величин X_i.

Выше отмечалось, что выборочное распределение — точечная О. с. для неизвестного теоретич. распределения. Более того, функция выборочного распределения $F_n(x)$ — несмещенная О. с. для функции теоретич. распределения $F(x)$. При этом, как показал А. Н. Колмогоров, распределение статистики

$$\lambda_n = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|$$

не зависит от неизвестного теоретич. распределения и при $n \to \infty$ стремится к предельному распределению $K(y)$, к-рое наз. распределением Колмогорова. Таким образом, если y — решение уравнения $K(y)=\omega$, то с вероятностью ω можно утверждать, что график функции теоретич. распределения $F(y)$ целиком «покрывается» полосой, заключенной между графиками функций $F_n(x) \pm y/\sqrt{n}$ (при $n \geqslant 20$ различие допредельного и предельного распределений статистики λ_n практически несущественно). Такую интервальную О. с. наз. доверительной зоной. См. также *Интервальная оценка*.

Статистические оценки в теории ошибок. Теория ошибок — раздел математич. статистики, посвященный численному определению неизвестных величин по результатам измерений. В силу случайного характера ошибок измерений и, быть может, случайной природы самого изучаемого явления не все такие результаты равноправны: при повторных измерениях нек-рые из них встречаются чаще, другие — реже.

В основе теории ошибок лежит математич. модель. согласно к-рой до опыта совокупность всех мыслимых результатов измерения трактуется как множество значений нек-рой случайной величины. Поэтому важную роль приобретает теория О. с. Выводы теории ошибок носят статистич. характер. Смысл и содержание таких выводов (как, впрочем, и выводов теории О.с.) проявляются лишь в свете закона больших чисел (пример такого подхода — статистич. толкование смысла коэффициента доверия, указанного выше).

Полагая результат измерения X случайной величиной, различают три основных типа ошибок измерений: систематические, случайные и грубые (качественные описания таких ошибок даны в ст. *Ошибок теория*). При этом ошибкой измерения неизвестной величины a наз. разность $X-a$, математич. ожидание этой разности $\mathsf{E}(X-a)=b$ наз. систематической ошибкой (если $b=0$, то говорят, что измерения лишены систематич. ошибок), а разность $\delta=X-a-b$ наз. случайной ошибкой ($\mathsf{E}\delta=0$). Таким образом, если приведено n независимых измерений величины a, то их результаты можно записать в виде равенств

$$X_i=a+b+\delta_i, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{10}$$

где a и b — постоянные, а δ_i — случайные величины. В более общем случае

$$X_i=a+(b+\beta_i)+\delta_i, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{11}$$

где β_i — не зависящие от δ_i случайные величины, к-рые равны нулю с вероятностью, весьма близкой к единице (поэтому всякое другое значение $\beta_i\neq 0$ маловероятно). Величину β_i наз. грубой ошибкой.

Задача оценки (и устранения) систематич. ошибки обычно выходит за рамки математич. статистики. Исключения составляют т. н. метод эталонов, согласно к-рому для оценки b производят серию измерений известной величины a (в этом методе b — оцениваемая величина и a — известная систематич. ошибка), а также дисперсионный анализ, позволяющий оценивать систематич. расхождения между несколькими сериями измерений.

Основная задача теории ошибок — отыскивание О. с. для неизвестной величины a и оценка точности измерений. Если систематич. ошибка устранена ($b=0$) и наблюдения грубых ошибок не содержат, то согласно (10) $X_i=a+\delta_i$ и, значит, в этом случае задача оценки a сводится к отысканию в том или ином смысле оптимальной О. с. для математич. ожидания одинаково распределенных случайных величин X_i. Как было показано в предыдущих разделах, вид такой О. с. (точечной или интервальной) существенно зависит от закона распределения случайных ошибок. Если этот закон известен с точностью до нескольких неизвестных параметров, то для оценки, а также для оценки a можно применять, напр., метод максимального правдоподобия; в противном случае следует сначала по результатам наблюдений X_i найти О. с. для неизвестной функции распределения случайных ошибок δ_i («непараметрическая» интервальная О. с. такой функции указана выше). В практич. работе часто довольствуются двумя О. с. $\overline{X}\approx a$ и $s^2\approx \mathsf{D}\delta_i$ (см. (1) и (2)). Если δ_i распределены одинаково нормально, то эти О. с. наилучшие; в других случаях эти оценки могут оказаться малоэффективными.

Наличие грубых ошибок усложняет задачу оценки параметра a. Обычно доля наблюдений, в к-рых $\beta_i\neq 0$

бывает невелика, а математич. ожидание ненулевых $|\beta_i|$ значительно превышает $\sqrt{\mathsf{D}\delta_i}$ (грубые ошибки возникают в результате случайного просчета, неправильного чтения показаний измерительного прибора и т. п.). Результаты измерений, содержащие грубые ошибки, часто бывают хорошо заметны, т. к. они сильно отличаются от других результатов измерений. В этих условиях наиболее целесообразный способ выявления (и устранения) грубых ошибок — непосредственный анализ измерений, тщательная проверка неизменности условий всех экспериментов, запись результатов «в две руки» и т. д. Статистич. методы выявления грубых ошибок следует применять лишь в сомнительных случаях.

Простейший пример таких методов — статистич. выявление одного резко выделяющегося наблюдения, когда подозрительным может оказаться либо $Y_1=\min X_1$, либо $Y_n=\max X_i$ (предполагается, что в равенствах (11) $b=0$ и закон распределения величин δ_i известен). Для того чтобы выяснить, обосновано ли предположение о наличии одной грубой ошибки, для пары Y_1, Y_n вычисляют совместную интервальную О. с. (доверительную область), полагая все β_i равными нулю. Если эта О. с. «накрывает» точку с координатами (Y_1, Y_n), то подозрение о наличии грубой ошибки следует считать статистически необоснованным; в противном случае гипотезу о присутствии грубой ошибки надо признать подтвердившейся (при этом обычно забракованное наблюдение отбрасывают, т. к. сколько-нибудь надежно оценить величину грубой ошибки по одному наблюдению статистически не представляется возможным).

Пусть, напр., a неизвестно, $b=0$ и δ_i независимы и распределены одинаково нормально (дисперсия неизвестна). Если все $\beta_i=0$, то распределение случайной величины

$$Z=\frac{\max|X_i-\overline{X}|}{\hat{s}}$$

не зависит от неизвестных параметров (О. с. $\overline{X}$ и $\hat{s}$ вычисляются по всем n наблюдениям согласно формулам (1) и (2)). Для больших значений

$$\mathsf{P}\{Z>z\}\approx n\left[1-\omega_{n-2}\left(z\sqrt{\frac{n-2}{n-1-z^2}}\right)\right],$$

где $\omega_r(t)$ — функция распределения Стьюдента, определенная выше. Таким образом, с коэффициентом доверия

$$\omega\approx 1-n\left[1-\omega_{n-2}\left(z\sqrt{\frac{n-2}{n-1-z^2}}\right)\right] \qquad (12)$$

можно утверждать, что при отсутствии грубой ошибки выполняется неравенство $Z<z$ или, что то же самое,

$$\overline{X}-z\hat{s}<Y_1<Y_n<\overline{X}+z\hat{s}.$$

(Погрешность оценки коэффициента доверия по формуле (12) не превышает $\omega^2/2$.) Поэтому если все результаты измерений X_i лежат в пределах $\overline{X}\pm z\hat{s}$, то нет оснований считать какое-нибудь измерение содержащим грубую ошибку.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975, гл. 33, 34; [2] Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике. (Общая часть), М., 1955; [3] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [4] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [5] Арлей Н., Бух К. Р., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, пер. с англ., М., 1951; [6] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1942, т. 6, № 1—2, с. 3—32.

Л. Н. Большев.

ОЧЕРЕДЕЙ ТЕОРИЯ — раздел *массового обслуживания теории.* О. т. изучает системы, в к-рых требования, застающие систему занятой, не теряются, а ожидают ее освобождения и затем обслуживаются в том или ином порядке (часто с предоставлением приоритета определенным категориям требований). Выводы О. т. используют для рационального планирования систем массового обслуживания. С математич. точки зрения задачи О. т. могут быть включены в теорию случайных процессов, а ответы часто бывают выражены в терминах преобразований Лапласа искомых характеристик. Применение методов О. т. необходимо даже в простейших случаях для правильного понимания статистич. закономерностей, возникающих в системах массового обслуживания.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, М., 1966; [2] Приоритетные системы обслуживания, М., 1973. *Ю. В. Прохоров.*

ОШИБОК ТЕОРИЯ — раздел математич. статистики, посвященный построению уточненных выводов о численных значениях приближенно измеренных величин, а также об ошибках (погрешностях) измерений. Повторные измерения одной и той же постоянной величины дают, как правило, различные результаты, т.к. каждое измерение содержит нек-рую ошибку. Различают три основных вида ошибок: систематические, грубые и случайные. Систематические ошибки все время либо преувеличивают, либо преуменьшают результаты измерений и происходят от определенных причин (неправильной установки измерительных приборов, влияния окружающей среды и т. д.), систематически влияющих на измерения и изменяющих их в одном направлении. Оценка систематич. ошибок производится с помощью методов, выходящих за пределы математич. статистики (см. *Наблюдений обработка*). Грубые ошибки возникают в результате просчета, неправильного чтения показаний измерительного прибора и т. п. Результаты измерений, содержащие грубые ошибки, сильно отличаются от других результатов измерений и поэтому часто бывают хорошо заметны. Случайные ошибки происходят от различных случайных причин, действующих при каждом из отдельных измерений непредвиденным образом то в сторону уменьшения, то в сторону увеличения результатов.

О. т. занимается изучением лишь грубых и случайных ошибок. Основные задачи О. т.: разыскание законов распределения случайных ошибок, разыскание оценок (см. *Оценка статистическая*) неизвестных измеряемых величин по результатам измерений, установление погрешностей таких оценок и установление грубых ошибок. Пусть в результате n независимых равноточных измерений нек-рой неизвестной величины μ получены значения $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Разности

$$\delta_1=Y_1-\mu, \ \ldots, \ \delta_n=Y_n-\mu$$

наз. истинными ошибками. В терминах вероятностной О. т. все δ_i трактуются как случайные величины; независимость измерений понимается как взаимная независимость случайных величин $\delta_1, \ldots, \delta_n$. Равноточность измерений в широком смысле истолковывается как одинаковая распределенность: истинные ошибки равноточных измерений суть одинаково распределенные случайные величины. При этом математич. ожидание истинных ошибок $b=\mathsf{E}\delta_1=\ldots=\mathsf{E}\delta_n$ наз. систематической ошибкой, а разности $\delta_1-b, \ \ldots, \ \delta_n-b$ — случайными ошибками. Таким образом, отсутствие систематич. ошибки означает, что $b=0$ и в этой ситуации $\delta_1, \ldots, \delta_n$ суть случайные ошибки. Величину $1/\sigma\sqrt{2}$, где σ — квадратичное отклонение, наз. мерой точности (при наличии систематич. ошибки мера точности выражается отношением $1/\sqrt{2(b^2+\sigma^2)}$). Равноточность измерений в узком смысле понимается как одинаковость меры точности всех результатов измерений. Наличие грубых ошибок означает нарушение равноточности (как в широком, так и в узком смысле) для нек-рых отдельных измерений. В качестве оценки неизвестной величины μ обычно берут арифметич. среднее из результатов измерений

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

а разности $\Delta_1=Y_1-\overline{Y}, \ldots, \Delta_n=Y_n-\overline{Y}$ наз. кажущимися ошибками. Выбор $\overline{Y}$ в качестве оценки для μ основан на том, что при достаточно большом числе n равноточных измерений, лишенных систематич. ошибки, оценки $\overline{Y}$ с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, сколь угодно мало отличается от неизвестной величины μ (см. *Больших чисел закон*); оценка $\overline{Y}$ лишена систематич. ошибки (оценки с таким свойством наз. несмещенными), дисперсия оценки есть

$$\mathsf{D}\overline{Y}=\mathsf{E}(\overline{Y}-\mu)^2=\sigma^2/n.$$

Опыт показывает, что практически очень часто случайные ошибки δ_i подчиняются распределениям, близким к нормальному (причины этого вскрыты т. н. *предельными теоремами* теории вероятностей). В этом случае величина $\overline{Y}$ имеет мало отличающееся от нормального распределение с математич. ожиданием μ и дисперсией σ^2/n. Если распределения δ_i в точности нормальны, то дисперсия всякой другой несмещенной оценки для μ, напр. медианы, не меньше $\mathsf{D}\overline{Y}$. Если же распределение δ_i отлично от нормального, то последнее свойство может не иметь места (см. пример в ст. *Рао — Крамера неравенство*).

Если дисперсия σ^2 отдельных измерений заранее неизвестна, то для ее оценки пользуются величиной

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2$$

($\mathsf{E}s^2=\sigma^2$, то есть s^2 — несмещенная оценка для σ^2). Если случайные ошибки δ_i имеют нормальное распределение, то отношение

$$t=\frac{(\overline{Y}-\mu)\sqrt{n}}{s}$$

подчиняется *Стьюдента распределению* с $n-1$ степенями свободы. Этим можно воспользоваться для оценки погрешности приближенного равенства $\mu\approx\tilde{Y}$ (см. *Наименьших квадратов метод*).

Величина $(n-1)s^2/\sigma^2$ при тех же предположениях имеет *«хи-квадрат» распределение* с $n-1$ степенями свободы. Это позволяет оценить погрешность приближенного равенства $\sigma\approx s$. Можно показать, что относительная погрешность не будет превышать числа q с вероятностью

$$\omega=F(z_2, n-1)-F(z_1, n-1),$$

где $F(z, n-1)$ — функция χ^2-распределения

$$z_1=\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}, \quad z_2=\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

Если нек-рые измерения содержат грубые ошибки, то предыдущие правила оценки μ и σ дадут искаженные результаты. Поэтому очень важно уметь отличать измерения, содержащие грубые ошибки, от измерений, подверженных лишь случайным ошибкам δ_i. Для случая, когда δ_i независимы и имеют одинаковое нормальное распределение, наиболее совершенный способ выявления измерений, содержащих грубые ошибки, предложен Н. В. Смирновым [3].

Лит.: [1] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [2] Большев Л. Н., Смир-

нов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М. 1968; [3] Смирнов Н. В., «Докл. АН СССР», 1941, т. 33, № 5, с. 346—49.
Л. Н. Большев.

ОШИБОЧНОГО ДЕКОДИРОВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТЬ — одна из возможных мер характеризации точности воспроизведения сообщений, передаваемых по *каналу связи* (см. также *Сообщений точность воспроизведения*). Пусть для передачи сообщения ξ, вырабатываемого источником сообщений и принимающего M различных возможных значений $1, \ldots, M$ с распределением вероятностей $p_m = \mathsf{P}\{\xi = m\}$, $m = 1, \ldots, M$, используется нек-рый канал связи. Тогда для фиксированных методов *кодирования и декодирования* (см. также *Информации передача*) О. д. в. $P_{e,m}$, $m = 1, \ldots, M$, определяется равенством

$$P_{e,m} = \mathsf{P}\{\tilde{\xi} \neq m \mid \xi = m\},$$

где $\tilde{\xi}$ — декодированное сообщение на выходе канала.

Средней О. д. в. P_e наз. величина

$$P_e = \mathsf{P}\{\tilde{\xi} \neq \xi\} = \sum_{m=1}^{M} p_m P_{e,m}.$$

Особый интерес представляет изучение оптимальной О. д. в. P_e^{opt}, определяемой равенством

$$P_{\text{e}}^{\text{opt}} = \inf P_e,$$

где нижняя грань берется по всевозможным методам кодирования и декодирования. Ввиду трудностей получения точного выражения для P_e^{opt}, связанных с тем обстоятельством, что в общем случае неизвестны оптимальные методы кодирования, интерес представляет изучение асимптотич. поведения P_e^{opt} при возрастании длительности передачи по каналу. Точнее, рассматривается следующая ситуация. Пусть для передачи используется отрезок длины N канала связи с дискретным временем и $R = (\ln M)/N$. Требуется изучить асимптотич. поведение P_e^{opt} при $N \to \infty$ и $R = \text{const}$ (это означает, что длительность передачи возрастает, а ее скорость остается постоянной). Если рассматриваемый отрезок канала является отрезком однородного *канала без памяти* с дискретным временем и конечными пространствами Y и $\tilde{Y}$ значений компонент сигналов на входе и выходе, то известны следующие верхние и нижние оценки $P_e^{\text{opt}}=P_e^{\text{opt}}(N, R)$:

$$\exp\{-N[E_{sp}(R-\alpha(N))+\beta(N)]\}\leqslant \leqslant P_e^{\text{opt}}(N, R)\leqslant \exp\{-NE_r(R)\}, \qquad (1)$$

где $\alpha(N)$ и $\beta(N)$ стремятся к нулю с ростом N, а функции $E_r(R)$ и $E_{sp}(R)$ определяются следующим образом:

$$E_r(R)=\max_{0\leqslant\rho\leqslant 1}\max_{q(\cdot)}[E_0(\rho, q(\cdot))-\rho R], \qquad (2)$$

$$E_{sp}(R)=\sup_{\rho>0}\max_{q(\cdot)}[E_0(\rho, q(\cdot))-\rho R], \qquad (3)$$

где

$$E_0(\rho, q(\cdot))=-\ln\sum_{\tilde{y}\in\tilde{Y}}\left[\sum_{y\in Y}q(y)\,q(y, \tilde{y})^{\frac{1}{1+\rho}}\right]^{1+\rho}.$$

Здесь $q(\cdot)=\{q(y),\ y\in Y\}$ — произвольное распределение вероятностей на Y, $q(y, \tilde{y})=\mathsf{P}\{\tilde{\eta}_k=\tilde{y}|\eta_k=y\}$, $y\in Y$, $\tilde{y}\in\tilde{Y}$, а η_k и $\tilde{\eta}_k$, $k=1, \ldots, N$,— компоненты сигналов на входе и выходе рассматриваемого канала без памяти. Известно, что $E_r(R)$ и $E_{sp}(R)$, определяемые формулами (2) и (3), являются положительными, выпуклыми вниз, монотонно убывающими функциями от R при $0\leqslant R<C$, где C — *канала пропускная способность*, причем $E_r(R)=E_{sp}(R)$ при $R\geqslant R_{cr}$, здесь R_{cr} — величина, определяемая переходной матрицей канала и называемая критической скоростью для данного канала без памяти. Таким образом, для значений R, $R_{cr}\leqslant R<C$, главные члены верхней и нижней оценок (1) для P_e^{opt} асимптотически совпадают, откуда следует, что для этого диапазона изменения R известно точное значение функции надежности канала $E(R)$, определяемой равенством

$$E(R)=\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{-\ln P_e^{\text{opt}}(N, R)}{N}.$$

Для значений R, $0\leqslant R<R_{cr}$, точное значение $E(R)$ для произвольных каналов без памяти неизвестно (1983), хотя оценки (1) и могут быть улучшены. Экспоненциальный характер убывания $P_e^{\text{opt}}(N, R)$ доказан для весьма широкого класса каналов.

Лит.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ПАДЕ АППРОКСИМАЦИЯ — наилучшая рациональная аппроксимация степенного ряда. Пусть

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \tag{1}$$

— произвольный степенной ряд (формальный или сходящийся), $n, m \geqslant 0$ — целые числа, $R_{n,m}$ — класс всех рациональных функций вида p/q, где p и q — многочлены от z, $\deg q \leqslant m$, $\deg p \leqslant n$, $q \not\equiv 0$. А п п р о к с и м а ц и е й П а д е типа (n, m) ряда (1) (функции f) наз. рациональная функция $\pi_{n,m} \in R_{n,m}$, имеющая максимально возможный в классе $R_{n,m}$ порядок касания с рядом (1) в точке $z=0$. Точнее, функция $\pi_{n,m}$ определяется условием

$$\sigma(f-\pi_{n,m})=\max\{\sigma(f-r),\ r\in R_{n,m}\},$$

где $\sigma(\varphi)$ — индекс первого из отличных от нуля коэффициентов ряда

$$\varphi=\sum \varphi_k z^k.$$

Функцию $\pi_{n,m}$ можно определить также как отношение $\pi_{n,m}=p/q$ любых многочленов p, $q\,(q\not\equiv 0)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\deg p\leqslant n,\quad \deg q\leqslant m,$$

$$(qf-p)(z)=A_{n,m}z^{n+m+1}+\ldots \tag{2}$$

При фиксированных n, m существует единственная П. а. $\pi_{n,m}$ ряда (1). Таблица $\{\pi_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$ наз. т а б л и ц е й П а д е ряда (1). Последовательности вида $\{\pi_{n,m}\}_{n=0}^{\infty}$ наз. с т р о к а м и т а б л и ц ы П а д е (нулевая строка совпадает с последовательностью многочленов Тейлора для f); $\{\pi_{n,m}\}_{m=0}^{\infty}$ — столбцами таблицы Паде; $\{\pi_{n+j,n}\}_{j=0}^{\infty}$ — диагоналями таблицы Паде. Наиболее важный частный случай $j=0$ — главная диагональ.

Вычисление функции $\pi_{n,m}$ сводится к решению системы линейных уравнений, коэффициенты к-рых выражаются через коэффициенты f_k, $k=0,1,\ldots, n+m$, заданного ряда. Если отличен от нуля о п р е д е л и т е л ь Г а н к е л я

$$\Delta_{n,m}=\begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1}\end{vmatrix},$$

то знаменатель $q_{n,m}$ функции $\pi_{n,m}$ определяется по формуле

$$q_{n,m}(z)=\frac{1}{\Delta_{n,m}}\left|\begin{array}{c:c} \Delta_{n,m} & \begin{matrix} f_{n+1}\\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{n+m}\end{matrix} \\ \hdashline z^m\ldots z & 1\end{array}\right|$$

(нормировка $q_{n,m}(0)=1$; явная формула может быть написана и для числителя функции $\pi_{n,m}$). При этом

$$(f-\pi_{n,m})(z)=A_{n,m}z^{n+m+1}+\ldots .$$

Последнее соотношение иногда принимают за определение П. а.; в этом случае П. а. могут не существовать для нек-рых (n, m). Для обозначения П. а. типа (n, m) заданного ряда f часто употребляется символ

$$[n/m] = [n/m]_f.$$

Для эффективного вычисления П. а. удобнее пользоваться не явными формулами, а рекурентными соотношениями, существующими в таблице Паде. Разработано большое количество алгоритмов для машинного вычисления П. а.; эти вопросы имеют особенно важное значение в связи с приложениями (см. [17], [18]).

Впервые общую задачу об интерполяции заданных значений функции в $n+m+1$ различных точках посредством рациональной функции класса $R_{n,m}$ рассмотрел О. Коши [1]; К. Якоби [2] распространил результаты О. Коши на случай кратных узлов интерполяции. Случай одного $(n+m+1)$-кратного узла интерполяции соответствует П. а. Понятие П. а. сформировалось в кон. 19 в. в рамках классич. теории непрерывных дробей (Г. Фробениус [3], А. Паде [4]). Фундаментальные результаты о диагональных П. а. были получены П. Л. Чебышевым, А. А. Марковым, Т. Стильтьесом (T. Stieltjes) в терминах непрерывных дробей; ими были обнаружены и исследованы связи диагональных П. а. с ортогональными многочленами, квадратурными формулами, проблемой моментов и другими вопросами классич. анализа (см. [7] — [9]). Начало изучению строк таблицы Паде было положено работами о радиусах мероморфности функции, заданной степенным рядом, и о сходимости строк таблицы Паде в кругах мероморфности (см. [5], [6]).

С нач. 20 в. П. а. становятся самостоятельным объектом анализа и составляют важную главу теории рациональных приближений аналитич. функций. Используя для своего построения локальные данные (коэффициенты степенного ряда), они позволяют изучать глобальные свойства соответствующей аналитич. функции (аналитич. продолжение, характер и расположение особенностей и т. п.) и вычислять значение функции за пределами круга сходимости степенного ряда.

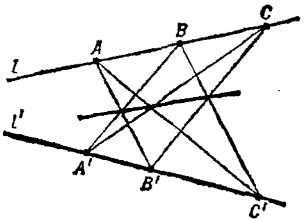
Наряду с классическими П. а. рассматриваются различные их обобщения: общие процессы интерполяции посредством рациональных функций со свободными полюсами (многоточечные аппроксимации Паде); рациональные аппроксимации рядов по заданной системе многочленов (напр., по ортогональным многочленам); совместные П. а. (аппроксимации Паде — Эрмита); рациональные аппроксимации (типа П. а.) степенных рядов от нескольких переменных и др.

Лит.: [1] Cauchy A.-L., Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, pt. 1 — Analyse algébrique, P., 1821; [2] Jacobi C. G. J., «J. reine und angew. Math.», 1846, Bd 30, S. 127—56; [3] Frobenius G., там же, 1881, Bd 90, S. 1—17; [4] Padé H., «Ann. scient. École norm. super.», 1892, t. 9, p. 1—93; [5] Hadamard J., «J. math. pures et appl.», 1892, t. 8, p. 101—86; [6] Montessus de Ballore B. de, «Bull. Soc. math. France», 1902, t. 30, p. 28—36; [7] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 3, М. — Л., 1948; [8] Марков А. А., Избр. труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, М. — Л., 1948; [9] Стилтьес Т., Исследования о непрерывных дробях, пер. с франц., Хар. — К., 1936; [10] Wall H. S., Analytic theory of continued fractions, Toronto — N. Y. — L., 1948; [11] Perron O., Die Lehre von den Kettenbrüchen, 3 Aufl., Bd 2, Stuttg., 1957; [12] The Padé approximant in theoretical physics, N. Y. — L., 1970; [13] Padé approximants and their applications, L. — N. Y., 1973; [14]

Padé approximants method and its applications to mechanics, B.— Hdlb.— N. Y., 1976; [15] B a k e r G. A., Essentials of Padé approximants, N. Y.— San Franc.— L., 1975; [16] Padé and rational approximation, N. Y.— [a. o.], 1977; [17] G i l e w i c z J., Approximants de Padé, B.— Hdlb.— N. Y., 1978; [18] Padé approximation and its applications, B.— Hdlb.— N. Y., 1979.

Е. А. Рахманов.

ПАППА АКСИОМА: если l и l' — две различные прямые, A, B, C и A', B', C' — тройки различных точек



прямых l и l' соответственно, отличных от точки пересечения прямых l и l', то точки пересечения прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, AC' и $A'C$ лежат на одной прямой. Выполнение П. а. эквивалентно коммутативности тела, соответствующего рассматриваемой проективной геометрии. *Дезарга предложение* является следствием П. а. (т е о р е м а Х е с с е н б е р г а), в то же время П. а. представляет собой вырожденный случай *Паскаля теоремы.* П. а. предложена Паппом (3 в.).

П. С. Моденов, А. С. Пархоменко.

ПАППЕРИЦА УРАВНЕНИЕ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка класса Фукса, имеющее ровно три особые точки:

$$w''+\left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right)w'+$$

$$+\left[\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right]\times$$

$$\times\frac{w}{(z-a)(z-b)(z-c)}=0,\ \alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1; \qquad (1)$$

здесь a, b, c — попарно различные комплексные числа, α, α' (β, β' и γ, γ') — характеристич. показатели в особой точке $z=a$ (соответственно $z=b$ и $z=c$). П. у. однозначно определяется заданием особых точек и характеристич. показателей. Для решений П. у. (1) используется обозначение Римана:

$$w=P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

Б. Риман исследовал [1] задачу: найти все многозначные аналитические в расширенной комплексной плоскости функции $w(z)$ со следующими свойствами: 1) функция $w(z)$ имеет ровно три особые точки a, b, c; 2) любые три ее ветви связаны линейным соотношением

$$A_1w_1(z)+A_2w_2(z)+A_3w_3(z)=0$$

с постоянными коэффициентами; 3) функция $w(z)$ имеет простейшие особенности в точках a, b, c, а именно: в окрестности точки $z=a$ существуют две ее ветви $\tilde{w}_1(z)$, $\tilde{w}_2(z)$ такие, что

$$\tilde{w}_1(z)=(z-a)^{\alpha}\varphi_1(z), \quad \tilde{w}_2(z)=(z-a)^{\alpha'}\varphi_2(z),$$

где $\varphi_j(z)$, $j=1, 2,$ — голоморфные в точке $z=a$ функции; и аналогично для точек b, c.

Б. Риман при нек-рых дополнительных предположениях относительно чисел α, α', . . ., γ' показал, что все такие функции выражаются через гипергеометрич. функции и что $w(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка с рациональными коэффициентами, но явно его не выписал (см. [1]). Это уравнение (уравнение (1)) было приведено Э. Папперицем [2]. Оно наз. также Р-уравнением Римана, уравнением Римана в форме Паппсрица, уравнением Римана, а его решения наз. Р-функциями.

Основные свойства решений П. у.

1) П. у. инвариантно относительно дробно-линейных преобразований: если $z_1=(Az+B)/(Cz+D)$ отображает точки a, b, c в точки a_1, b_1, c_1, то

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & z_1 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

2) Преобразование

$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^k\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^l w=\tilde{w}$$

переводит П. у. в П. у. с теми же особыми точками, но с другими характеристич. показателями:

$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^k\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^l P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}=$$

$$=P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha+k & \beta-k-l & \gamma+l & z \\ \alpha'+k & \beta'-k-l & \gamma'+l & \end{Bmatrix}.$$

3) *Гипергеометрическое уравнение*

$$z(1-z)\,w''+[C-(A+B+1)\,z]\,w'-ABw=0$$

есть частный случай П. у. и ему соответствует обозначение Римана

$$P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & A & 0 & z \\ 1-C & B & C-A-B & \end{Bmatrix}.$$

4) Всякое решение П. у. выражается через гипергеометрич. функции:

$$w(z)=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}\times$$

$$\times F\left\{\alpha+\beta+\gamma;\alpha+\beta'+\gamma;1+\alpha-\alpha';\frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}\right\}\quad(2)$$

в предположении, что $\alpha-\alpha'$ не есть целое отрицательное число. Если все разности $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ — нецелые числа, то, переставляя в (2) местами α и α' или γ и γ', получают четыре решения П. у. Кроме того, П. у. не меняется, если переставлять местами тройки (α, α', a), (β, β', b), (γ, γ', c); все эти перестановки приводят к 24 частным решениям П. у. (1), к-рые впервые были получены Э. Куммером [5].

Лит.: [1] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.—Л., 1948, с. 159—75; [2] Papperitz E., «Math. Ann.», 1885, Bd 25, S. 212—21; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1962—63; [4] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1950; [5] Kummer E., «J. reine und angew. Math.», 1836, Bd 15, S. 39—83, 127—72.

М. В. Федорюк.

ПАРАБОЛ МЕТОД — метод вычисления корней многочлена

$$P_n(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$$

с комплексными коэффициентами, основанный на интерполяции многочленами 2-й степени. П. м. позволяет найти все корни многочлена без предварительной информации о начальном приближении. Сходимость П. м. установлена лишь эмпирически. Вблизи простого корня скорость сходимости близка к квадратичной.

Вычислительная схема П. м. состоит в следующем. По произвольным комплексным числам z_0, z_1, z_2 как узлам интерполяции строится интерполяционный многочлен Лагранжа для $P_n(z)$. Это будет нек-рый многочлен 2-й степени. Находятся оба его корня и за z_3 берется ближайший к z_2. После этого вместо точек z_0, z_1, z_2 берутся точки z_1, z_2, z_3 и процесс повторяется. Эмпирически установлено, что последовательность $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots$, построенная таким образом, сходится к корню многочлена. Вычисленный корень выделяется, и далее метод применяется к многочлену меньшей степени.

Расчетные формулы П. м.: если z_{i-2}, z_{i-1}, z_i — исходная тройка чисел i-го шага, то в обозначениях

$$h = z - z_i,\ h_i = z_i - z_{i-1},\ h_{i-1} = z_{i-1} - z_{i-2},$$
$$\lambda = h/h_i,\quad \lambda_i = h_i/h_{i-1},\quad \delta_i = 1 + \lambda_i$$

интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид

$$L^{(i)}(\lambda) = \lambda^2 \delta_i^{-1}\left[P_n(z_{i-2})\lambda_i^2 - P_n(z_{i-1})\lambda_i\delta_i + P_n(z_i)\lambda_i\right] + \\ + \lambda\delta_i^{-1}\left[P_n(z_{i-2})\lambda_i^2 - P_n(z_{i-1})\delta_i^2 + \right. \\ \left. + P_n(z_i)(\lambda_i + \delta_i)\right] + P_n(z_i).$$

Корни $L^{(i)}(\lambda)$ находятся по формуле

$$\lambda = \frac{-2P_n(z_i)\delta_i}{g_i \pm \sqrt{g_i^2 - 4P_n(z_i)\delta_i\lambda_i[P_n(z_{i-2})\lambda_i - P_n(z_{i-1})\delta_i + P_n(z_i)]}},$$

где

$$g_i = P_n(z_{i-2})\lambda_i^2 - P_n(z_{i-1})\delta_i^2 + P_n(z_i)(\lambda_i + \delta_i).$$

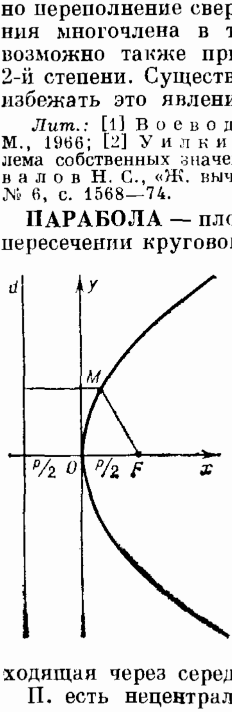
Из двух возможных значений λ берется наименьший по модулю и далее вычисляется

$$\lambda_{i+1} = \lambda;\ h_{i+1} = \lambda_{i+1}h_i;\ z_{i+1} = z_i + h_{i+1}.$$

При реализации описанного процесса на ЭВМ возможно переполнение сверху и снизу при вычислении значения многочлена в точке. Появление больших чисел возможно также при вычислении корней многочлена 2-й степени. Существует ряд приемов, имеющих целью избежать это явление (см. [1], [3]).

Лит.: [1] Воеводин В. В., Численные методы алгебры, М., 1966; [2] Уилкинсон Дж. Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [3] Бахвалов Н. С., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1971, т. 11, № 6, с. 1568—74.
Г. Д. Ким.

ПАРАБОЛА — плоская кривая, получающаяся в пересечении кругового конуса с плоскостью, не проходящей через вершину конуса и параллельной его образующей.



П. есть множество точек M плоскости, для каждой из к-рых расстояние до данной точки F (**ф о к у с а** П.) равно расстоянию до некрой данной прямой d (**д и р е к т р и с ы**). Расстояние p от фокуса П. до директрисы наз. **п а р а м е т р о м**. П. — симметричная кривая; точка пересечения П. с осью ее симметрии наз. **в е р ш и н о й** П., а ось симметрии — **о с ь ю** П. Эксцентриситет равен единице. **Д и а м е т р** П. — любая прямая, параллельная ее оси, и сама ось. Диаметр П. может быть определен как прямая, проходящая через середины параллельных хорд.

П. есть нецентральная *линия второго порядка*. Ее канонич. уравнение имеет вид

$$y^2 = 2px.$$

Уравнение касательной к П. в точке (x_0, y_0):

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Уравнение П. в полярных координатах ρ, φ:

$$\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}, \text{ где } 0 < \varphi < 2\pi.$$

П. обладает следующим оптическим свойством: световые лучи, исходящие из фокуса, после зеркального отражения от П. пойдут параллельно оси.

А. Б. Иванов.

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ПОДАЛГЕБРА — подалгебра конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем, содержащая какую-либо подалгебру Бореля, т. е. максимальную разрешимую подалгебру алгебры $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над произвольным полем k, то ее подалгебра $\mathfrak{p}$ наз. П. п., если $\mathfrak{p}\otimes_k \bar{k}$ — П. п. в $\mathfrak{g}\otimes_k \bar{k}$, где $\bar{k}$ — алгебраич. замыкание поля k. Если G — неприводимая линейная алгебраич. группа над полем характеристики 0 и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, то подалгебра $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$, тогда и только тогда является П. п. в $\mathfrak{g}$, когда она совпадает с алгеброй Ли нек-рой *параболической подгруппы* группы G.

Примерами П. п. в алгебре Ли всех квадратных матриц порядка n над полем k являются подалгебры вида $\mathfrak{p}(\mu)$ ($\mu = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ — произвольный набор натуральных чисел, сумма к-рых равна n), где алгебра $\mathfrak{p}(\mu)$ состоит из всех верхних треугольных блочных матриц, у к-рых диагональные блоки являются квадратными матрицами порядков $m_1, m_2, \ldots, m_s$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная конечномерная алгебра Ли над полем k характеристики 0, $\mathfrak{f}$ — максимальная диагонализируемая над k подалгебра в $\mathfrak{g}$, R — система k-корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{f}$, Δ — базис (множество простых корней) системы R и $\mathrm{Aut}_e\mathfrak{g}$ — группа элементарных автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. группа, порожденная автоморфизмами вида $\exp \operatorname{ad} x$, где x — нильпотентный элемент алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда всякая П. п. алгебры Ли $\mathfrak{g}$ переводится нек-рым автоморфизмом из группы $\mathrm{Aut}_e\mathfrak{g}$ в одну из стандартных параболических подалгебр вида

$$\mathfrak{p}_\Phi = \mathfrak{g}^0 + \sum\nolimits_{\alpha\in\Pi(\Phi)} \mathfrak{g}^\alpha,$$

где $\mathfrak{g}^0$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{f}$ в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^\alpha$ — корневое подпространство алгебры Ли $\mathfrak{g}$, отвечающее корню $\alpha\in R$, Φ — некоторое произвольное подмножество множества Δ, а $\Pi(\Phi)$ — множество тех корней из R, в разложении которых по простым корням из базиса Δ корни, принадлежащие множеству Φ, входят только с неотрицательными коэффициентами. Таким образом, число классов П. п., сопряженных относительно $\mathrm{Aut}_e\mathfrak{g}$, равно 2^r, где $r = |\Delta|$ есть k-ранг полупростой алгебры Ли $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. При этом если $\Phi_1\subseteq\Phi_2$, то $\mathfrak{p}_{\Phi_1}\supseteq\mathfrak{p}_{\Phi_2}$. В частности, $\mathfrak{p}_\phi = \mathfrak{g}$, а $\mathfrak{p}_\Delta$ — минимальная П. п. в $\mathfrak{g}$.

Максимальными П. п. исчерпываются все нередуктивные максимальные подалгебры конечномерных редуктивных алгебр Ли над полем характеристики 0 (см. [2], [3], [5]).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли, пер. с франц., М., 1978; [2] Карпелевич Ф. И., «Докл. АН СССР», 1951, т. 76, № 6, с. 775—78; [3] Морозов В. В., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 5, с. 191—94; [4] Mostow G. D., «Ann. Math.», 1961, v. 74, № 3, p. 503—17; [5] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1972, т. 16, № 3, с. 3—12.

В. Л. Попов.

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ПОДГРУППА — 1) П. п. линейной алгебраич. группы G, определенной над полем k, — замкнутая в *Зариского топологии* подгруппа $P\subset G$ такая, что факторпространство G/P является проективным алгебраич. многообразием. Подгруппа $P \subset G$ тогда и только тогда является П. п., когда она содержит какую-нибудь *Бореля подгруппу* группы G. Параболической подгруппой группы G_k k-рациональных точек группы G наз. подгруппа $P_k \subset G_k$, являющаяся группой k-рациональных точек нек-рой П. п. P в G и плотная в P в топологии Зариского. Если $\operatorname{char} k = 0$ и $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, то замкнутая подгруппа $P \subset G$ тогда и только тогда является П. п., когда ее алгебра Ли является *параболической подалгеброй в* $\mathfrak{g}$.

Пусть G — связная редуктивная линейная алгебраич. группа. Минимальные k-замкнутые (т. е. определенные над k) П. п. играют в теории таких групп для произвольного основного поля k ту же роль, что подгруппы Бореля для алгебраически замкнутого поля k (см. [1]). В частности, любые две минимальные k-замкнутые П. п. группы G сопряжены над k. Если две k-замкнутые П. п. группы G сопряжены над каким-нибудь расширением поля k, то они сопряжены и над k. Множество классов сопряженных П. п. (соответственно множество классов сопряженных k-замкнутых П. п.) группы G состоит из 2^r (соответственно 2^{r_k}) элементов, где r — ранг коммутанта (G, G) группы G, а r_k — его k-ранг, равный размерности максимального расщепимого над k тора в (G, G). Точнее, каждый такой класс определяется нек-рым произвольным подмножеством множества простых корней (соответственно простых k-корней) группы G аналогично тому, как каждая параболич. подалгебра редуктивной алгебры Ли сопряжена одной из стандартных подалгебр (см. [2], [4]).

Всякая П. п. P группы G связна, совпадает со своим нормализатором и допускает разложение Леви, т. е. может быть представлена в виде полупрямого произведения своего унипотентного радикала и нек-рой k-замкнутой редуктивной подгруппы, наз. подгруппой Леви группы P. Любые две подгруппы Леви в П. п. P сопряжены посредством рационального над k элемента группы P. Две П. п. группы G наз. противоположными, если их пересечение является подгруппой Леви в каждой из них. Замкнутая подгруппа группы G тогда и только тогда является П. п., когда она совпадает с нормализатором своего унипотентного радикала. Всякая максимальная замкнутая подгруппа группы G либо является П. п., либо имеет редуктивную связную компоненту единицы (см. [2], [4]).

П. п. в группе $\mathrm{GL}_n(k)$ невырожденных линейных преобразований n-мерного векторного пространства V над полем k исчерпываются подгруппами $P(\nu)$, состоящими из всех автоморфизмов пространства V, которые сохраняют фиксированный флаг типа $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_t)$ в V. При этом факторпространство $\mathrm{GL}_n(k)/P(\nu)$ совпадает с многообразием всех флагов типа ν в пространстве V.

В случае, когда $k = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$-замкнутые П. п. допускают следующую геометрич. интерпретацию (см. [5]). Пусть $G_{\mathbb{R}}$ — некомпактная полупростая вещественная группа Ли, совпадающая с группой вещественных точек полупростой алгебраич. группы G. Подгруппа группы $G_{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда является П. п., когда она совпадает с группой движений соответствующего некомпактного симметрич. пространства M, сохраняющих нек-рый k-пучок геодезич. лучей в M (два геодезич. луча в M считаются принадлежащими одному k-пучку, если расстояние между двумя точками, движущимися с одинаковыми постоянными скоростями вдоль этих лучей в бесконечность, стремится к конечному пределу).

2) П. п. системы Титса (G, B, N, S) — подгруппа группы G, сопряженная подгруппе, содержащей B. Каждая П. п. совпадает со своим нормализатором.

Пересечение любых двух П. п. содержит подгруппу группы G, сопряженную с $T=B\cap N$. В частности, П. п. системы Титса, связанной с редуктивной линейной алгебраич. группой G, — это то же, что П. п. группы G (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; [2] их же, там же, 1972, т. 16, № 3, с. 3—12; [3] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли, пер. с франц., М., 1978; [4] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980; [5] Карпелевич Ф. И., «Труды Моск. матем. об-ва», 1965, т. 14, с. 48—185.

В. Л. Попов.

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ РЕГРЕССИЯ, полиномиальная регрессия, — модель регрессии, в к-рой функции регрессии суть многочлены. Точнее, пусть $X=(X_1, \ldots, X_m)^T$ и $Y=(Y_1, \ldots, Y_n)^T$ — случайные векторы, принимающие значения $x=(x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, и пусть существует

$$\mathsf{E}\{Y \mid X\}=f(X)=(f_1(X), \ldots, f_n(X))^T$$

(т. е. существуют $\mathsf{E}\{Y_1|X\}=f_1(X), \ldots, \mathsf{E}\{Y_n|X\}=f_n(X)$). Регрессия наз. параболической, если компоненты вектора $\mathsf{E}\{Y|X\}=f(X)$ суть многочлены от компонент вектора X. Напр., в простейшем случае, когда Y и X — обычные случайные величины, уравнение П. р. имеет вид

$$y=\beta_0+\beta_1 X+\ldots+\beta_p X^p,$$

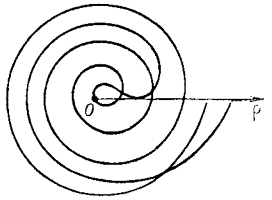
где $\beta_0, \ldots, \beta_p$ — коэффициенты регрессии. Частный случай П. р. — *линейная регрессия.* Добавлением к вектору X новых компонент можно всегда свести П. р. к линейной. См. *Регрессия, Регрессионный анализ.*

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Себер Дж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980.

М. С. Никулин.

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид

$$\rho=a\sqrt{\varphi}+l, \quad l>0.$$



Каждому значению φ соответствуют два значения $\sqrt{\varphi}$ — положительное и отрицательное. Кривая имеет бесконечно много двойных точек и одну точку перегиба (см. рис.). Если $l=0$, то кривая наз. *Ферма спиралью.* П. с. относится к т. н. алгебраич. спиралям (см. *Спирали*).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

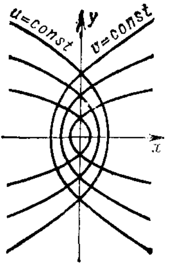
Д. Д. Соколов.

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ТОЧКА — точка регулярной поверхности, в к-рой соприкасающийся параболоид вырождается в параболич. цилиндр. В П. т. *Дюпена индикатриса* является парой параллельных прямых, гауссова кривизна равна нулю, одна из главных кривизн обращается в нуль, а для коэффициентов второй квадратичной формы справедливо равенство

$$LN-M^2=0.$$

Д. Д. Соколов.

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — числа u и v, связанные с прямоугольными координатами x и y формулами



$$x=u^2-v^2, \quad y=2uv,$$

где $-\infty<u<\infty$, $0\leqslant v<\infty$. Координатные линии: две системы взаимно ортогональных парабол с противоположно направленными осями.

Коэффициенты Ламе:

$$L_u=L_v=2\sqrt{u^2+v^2}.$$

Элемент площади:

$$d\sigma = 4\,(u^2+v^2)\,du\,dv.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad}_u f = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\operatorname{grad}_v f = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\operatorname{div} a = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\left(\frac{\partial a_u}{\partial u}+\frac{\partial a_v}{\partial v}\right)+\frac{1}{2\sqrt{(u^2+v^2)^3}}\,(u a_u + v a_v),$$

$$\Delta f = \frac{1}{4\,(u^2+v^2)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right).$$

Уравнение Лапласа допускает в П. к. разделение переменных.

Д. Д. Соколов.

ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР — цилиндрическая *поверхность второго порядка*, для к-рой направляющей служит парабола. Каноническое уравнение П. ц.:

$$y^2 = 2px.$$

А. Б. Иванов.

ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$u_t - \sum\nolimits_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,\ t)\,u_{x_i x_j} - \sum\nolimits_{i=1}^{n} a_i(x,\ t)\,u_{x_i} - a(x,\ t)\,u = f(x,\ t),$$

где $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ — положительно определенная квадратичная форма. Переменная t выделена и играет роль времени. Типичным примером П. т. у. является уравнение теплопроводности

$$u_t - \sum\nolimits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0.$$

А. П. Солдатов.

ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА УРАВНЕНИЕ; численные методы решения — методы решения уравнений параболич. типа на основе вычислительных алгоритмов. Для решения П. т. у. часто применяются приближенные численные методы, рассчитанные на использование быстродействующих ЭВМ. Наиболее универсальным является метод сеток (конечно-разностный метод).

Ниже рассмотрен метод сеток на примере уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\ t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

с краевыми условиями 1-го рода

$$u(0,\ t) = \mu_1(t),\ u(l,\ t) = \mu_2(t),\ u(x,\ 0) = u_0(x).$$

Вводится равномерная сетка узлов $(x_i,\ t_n)$,

$$x_i = ih,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N,\ hN = l,\ t_n = n\tau,\ n = 0,\ 1,\ \ldots;$$

и обозначения

$$y_i^n = y(x_i,\ t_n),\ y_{t,\,i} = (y_i^{n+1} - y_i^n)/\tau,$$

$$y_{\bar{x},\,i}^n = (y_i^n - y_{i-1}^n)/h,\ y_{x,\,i}^n = (y_{i+1}^n - y_i^n)/h,$$

$$y_{\bar{x}x,\,i}^n = (y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n)/h^2.$$

Метод сеток состоит в том, что уравнение (1) приближенно заменяется системой линейных алгебраич. уравнений (разностной схемой)

$$\left.\begin{aligned} y_{t,\,i}^n &= \sigma y_{\bar{x}x,\,i}^{n+1} + (1-\sigma)\,y_{\bar{x}x,\,i}^n + \varphi_i^n,\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\\ y_0^n &= \mu_1(t_n),\ y_N^n = \mu_2(t_n),\ y_i^0 = u_0(x_i), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где σ — числовой параметр и φ_i^n — сеточная аппроксимация функции $f(x,\ t)$, напр. $\varphi_i^n = f(x_i,\ t_n + 0{,}5\tau)$.

Система уравнений (2) решается по слоям, т. е. для каждого $n=0, 1, \ldots$ по известным значениям y_i^n, φ_i^n находятся новые значения y_i^{n+1}, $i=1, 2, \ldots, N-1$. Если $\sigma=0$ (явная схема), то y_i^{n+1} выражаются явным образом через y_i^n, φ_i^n. Если же $\sigma\neq 0$ (неявные схемы), то относительно y_i^{n+1}, $i=1, 2, \ldots, N-1$, возникает система уравнений, имеющая трехдиагональную матрицу. Эта система уравнений решается *прогонки методом.* Недостатком явной схемы является сильное ограничение на шаг τ, возникающее из условия устойчивости, а именно $\tau \leqslant 0{,}5\ h^2$. Неявные схемы при $\sigma \geqslant 0{,}5$ абсолютно устойчивы, т. е. устойчивы при любых шагах h и τ. Известны и другие разностные схемы для уравнения (1) (см. [1], [2]).

Если схема (2) устойчива и φ_i^n аппроксимирует $f(x, t)$, то при $h, \tau\to 0$ решение y_i^n разностной задачи сходится к решению $u(x_i, t_n)$ исходной задачи (см. [1]). Порядок точности зависит от параметра σ. Так, симметричная схема ($\sigma=0{,}5$, $\varphi_i^n=f(x_i, t_n+0{,}5\tau)$) имеет второй порядок точности по τ и по h, т. е. для каждого n выполняется оценка

$$\max_{0<i<N} |y_i^n-u(x_i, t_n)|\leqslant M(\tau^2+h^2)$$

с константой M, не зависящей от h и τ. При $\sigma=0{,}5-h^2/(12\tau)$ и специальном выборе φ_i^n схема (2) имеет точность $O(\tau^2+h^4)$. Для остальных σ — точность $O(\tau+h^2)$.

При решении П. т. у. на больших отрезках времени существенное значение имеет асимптотич. устойчивость разностной схемы. Решение уравнения (1) с $f(x, t)=0$, $\mu_1(t)=\mu_2(t)=0$ ведет себя при $t\to\infty$ как $e^{-\lambda_1 t}$, $\lambda_1=\pi^2/l^2$. Этим свойством обладает не всякая разностная схема, аппроксимирующая уравнение (1). Напр., симметричная схема ($\sigma=0{,}5$) асимптотически устойчива при условии $\tau\leqslant lh/\pi$. Построены схемы 2-го порядка точности, асимптотически устойчивые при любых τ, h, однако они не входят в семейство (2) (см. [3]).

Краевые условия 3-го рода

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)-\beta u(0, t)=\mu(t)$$

аппроксимируются с порядком $O(h^2)$ разностными уравнениями

$$\sigma\left(y_{x,0}^{n+1}-(\beta y_0^{n+1}+\mu^{n+1})\right)+(1-\sigma)\left(y_{x,0}^n-(\beta y_0^n+\mu^n)\right)=$$
$$=0{,}5h\left(y_{t,0}^n-\varphi_0^n\right),\ \mu^n=\mu(t_n).$$

Для уравнения теплопроводности в цилиндрич. и сферич. координатах

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r^m}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^m\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ m=1, 2,\quad 0<r<R,$$

вводятся сетки (r_i, t_n), где $t_n=n\tau$, $n=0, 1, \ldots$,

$$r_i=\left(i+\frac{m}{2}\right)h,\ i=0, 1, \ldots, N,\ h=\frac{R}{N+0{,}5m},\ m=1, 2,$$

и рассматриваются разностные уравнения (см. [4])

$$y_{t,i}^n=\Lambda_r^{(m)}(\sigma y_i^{n+1}+(1-\sigma)y_i^n),$$

где

$$\Lambda_r^{(m)}y_0^n=\frac{1}{r_0^m}\left(\bar r_1^m\frac{y_1^n-y_0^n}{h}\right),$$

$$\Lambda_r^{(m)}y_i^n=\frac{1}{r_i^m}\frac{1}{h}\left(\bar r_{i+1}^m\frac{y_{i+1}^n-y_i^n}{h}-\bar r_i^m\frac{y_i^n-y_{i-1}^n}{h}\right),$$

$$\bar r_i=0{,}5(r_i+r_{i+1})\text{ при } m=1,\ \bar r_i=\sqrt{r_ir_{i-1}}\text{ при } m=2,$$
$$i=1, 2, \ldots, N-1.$$

Для решения П. т. у. с переменными коэффициентами применяются однородные консервативные разностные схемы, выражающие на сетке законы сохранения, присущие исходному дифференциальному уравнению (см. [1], [5]). При построении разностных схем для П. т. у. с переменными коэффициентами применяются методы: баланса, вариационный, конечных элементов. Напр., для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x, t),\ 0<x<l,\ t>0,$$

используются разностные схемы с весами

$$y^n_{t,i}=(a(\sigma y^{n+1}+(1-\sigma)y^n)_{\bar{x}})_{x,i}+\varphi^n_i,$$

где

$$a=a^n_i=k(x_i-0{,}5h,\ t_n+0{,}5\tau).$$

Доказана сходимость и получены оценки погрешности однородных консервативных разностных схем для П. т. у. как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов (см. [1]).

Для решения систем уравнений параболич. типа, содержащих одну пространственную переменную, применяются те же разностные схемы, что и для одного уравнения. Вектор y^{n+1} решения на новом слое находится *матричной факторизации методом.*

При решении квазилинейного П. т. у. используются неявные абсолютно устойчивые разностные схемы. Решение y^{n+1} разностного уравнения находится итерационным методом с использованием прогонки. Напр., для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ k(u)>0, \tag{3}$$

применяют чисто неявную разностную схему

$$y^n_{t,i}=(a(y^{n+1}_i)\,y^{n+1}_{\bar{x}})_{x,i},$$
$$a(y^{n+1}_i)=0{,}5\,(k(y^{n+1}_i)+k(y^{n+1}_{i-1})),$$

к-рую решают с помощью итерационного метода (s — номер итерации):

$$y^{(s+1)}_i=y^n_i+\tau\,(a(y^{(s)}_i)\,y^{(s+1)}_{\bar{x}})_{x,i},\ s=0,\ 1,\ \ldots,\ m,$$
$$y^{(0)}_i=y^n_i,\quad y^{(m+1)}_i=y^{n+1}_i.$$

Решение $y^{(s+1)}_i$ на каждой итерации находится методом прогонки. При решении нелинейного П. т. у. нашли также применение схемы, основанные на идее *Рунге — Кутта метода.* Так, для уравнения (3) используется двухэтапный метод

$$y^{n+1/2}_i=y^n_i+0{,}5\tau\,(a(y^n_i)\,y^{n+1/2}_{\bar{x}})_{x,i},$$
$$y^{n+1}_i=y^n_i+0{,}5\tau\,(a(y^{n+1/2}_i)\,(y^{n+1}+y^n)_{\bar{x}})_{x,i}.$$

Тестирование и проверка качества разностных схем для нелинейного П. т. у. проводится путем сравнения с точными автомодельными решениями, такими, напр., как решение типа температурной волны (см. [6]).

При решении многомерного П. т. у. используются *переменных направлений методы*, к-рые позволяют свести решение многомерной задачи к решению последовательности одномерных задач (см. [1], [7] — [10]). Предложено и исследовано значительное число абсолютно устойчивых алгоритмов переменных направлений. Эти алгоритмы являются экономичными в том смысле, что число арифметич. действий, необходимых для вычисления решения на новом временно́м слое t_{n+1}, имеет порядок числа узлов пространственной сетки. Ниже рассмотрен пример схемы переменных направлений для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\ (x_1,\ x_2)\in G,\ t>0 \tag{4}$$

в прямоугольнике $G\{0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha=1,\ 2\}$. Вводится сетка

$$x_{ij}=(x_1^{(i)},\ x_2^{(j)}),\ x_1^{(i)}=ih_1,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ N_1,\quad h_1N_1=l_1,$$
$$x_2^{(j)}=jh_2,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ N_2,\ h_2N_2=l_2$$

и обозначения

$$y_{ij}^n=y(x_{ij},\ t_n),\ y_{ij}^{n+1/2}=y(x_{ij},\ t_n+0{,}5\tau),$$
$$\Lambda_1 y_{ij}^n=(y_{i+1,j}^n-2y_{i,j}^n+y_{i-1,j}^n)/h_1^2,$$
$$\Lambda_2 y_{ij}^n=(y_{i,j+1}^n-2y_{ij}^n+y_{i,j-1}^n)/h_2^2.$$

Уравнение (4) решается с помощью следующей разностной схемы

$$\frac{y_{ij}^{n+1/2}-y_{ij}^n}{0{,}5\tau}=\Lambda_1 y_{ij}^{n+1/2}+\Lambda_2 y_{ij}^n,$$
$$\frac{y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^{n+1/2}}{0{,}5\tau}=\Lambda_1 y_{ij}^{n+1/2}+\Lambda_2 y_{ij}^{n+1}.$$

Эти уравнения записываются при $i=1,\ \ldots,\ N_1-1$, $j=1,\ \ldots,\ N_2-1$ и доопределяются соответствующими граничными условиями. Из первого уравнения прогонкой по направлению x_1 для каждого $j=1,\ 2,\ \ldots,\ N_2-1$ находится $y_{ij}^{n+1/2}$, а затем из второго уравнения прогонкой по направлению x_2 для каждого $i=1,\ 2,\ \ldots,\ N_1-1$ находится y_{ij}^{n+1}. Таким образом, вычислительный алгоритм состоит в последовательном применении одномерных прогонок.

Теоретич. основой построения и исследования экономичных разностных схем для многомерного П. т. у. является метод суммарной аппроксимации (см. [1], [8], [9]). Обобщением методов переменных направлений явились аддитивные экономичные схемы с уравнениями на графах и векторные схемы (см. [11]).

В случае нерегулярных пространственных сеток разностные схемы для П. т. у. строятся методом конечных элементов и методом баланса (см. [12]).

Для решения сеточных уравнений, возникающих при аппроксимации многомерного П. т. у. неявными разностными схемами, применяются эффективные прямые и итерационные методы, разработанные для эллиптических разностных краевых задач: метод разделения переменных, использующий алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье, метод циклич. редукции, попеременно-треугольный итерационный метод и др. (см. [13]).

Лит.: [1] Самарский А. А., *Теория разностных схем*, М., 1977; [2] Сау льев В. К., Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, М., 1960; [3] Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973; [4] Фрязинов И. В., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1971, т. 11, № 5, с. 1219—28; [5] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [6] Самарский А. А., Соболь И. М., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1963, т. 3, № 4, с. 702—19; [7] Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967; [8] Самарский А. А., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 1, с. 25—56; [9] Яненко Н. Н., «Сиб. матем. ж.», 1964, т. 5, № 6, с. 1431—34; [10] Дьяконов Е. Г., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 4, с. 549—68; [11] Самарский А. А., Фрязинов И. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 6, с. 167—96; [12] Фрязинов И. В., «Дифференц. уравнения», 1980, т. 16, № 7, с. 1332—43; [13] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978. *А. В. Гулин.*

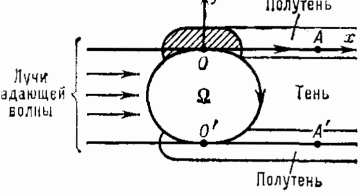
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОД — метод приближенного решения высокочастотных дифракционных задач (см. *Дифракции математическая теория*). Как правило, к П. у. м. приходится прибегать для нахождения волнового поля в тех областях, где *лучевой метод* применять нельзя из-за того, что поле лучей теряет в том или ином смысле регулярность. Пусть, напр., поставлена задача о падении плоской волны на идеально отражающее выпуклое тело. Волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\right)u=0. \qquad (1)$$

Здесь точка (x, y) пробегает внешность ограниченной выпуклой области Ω, на границе к-рой выполняется краевое условие Дирихле $u|_S=0$. Предполагается, что $\partial\Omega=S\in C^\infty$ и имеет всюду положительную кривизну. Решение u представимо в виде $e^{ikx}+u^0$, где u^0 удовлетворяет *излучения условиям*. Решение такой задачи существует и единственно.

В высокочастотном случае (k «велико») важно построить формальное коротковолновое решение этой задачи (т. е., грубо говоря, разложение, формально удовлетворяющее всем условиям задачи, достаточно далекие члены к-рого имеют сколь угодно высокий порядок малости при $k\to\infty$). Можно показать, что в рассматриваемом случае формальное решение будет асимптотич. разложением классич. решения.

Лучевой метод позволяет построить искомое коротковолновое разложение всюду, кроме области тени (см. рис.).



Выражение для волнового поля, построенное с помощью лучевого метода, теряет гладкость на границе тень—свет (полупрямые OA и $O'A'$ на рис.). В окрестности OA (и $O'A'$) коротковолновая асимптотика волнового поля уже не выражается лучевыми формулами. Окрестности OA (и $O'A'$) наз. обычно полутенью.

Ключевым моментом при построении формального решения поставленной выше задачи является рассмотрение окрестности точек касания O и O' лучей падающей волны и кривой $S=\partial\Omega$. Точка O принята за начало координат, положительная часть оси Ox отделяет область тени от освещенной области.

Пусть в окрестности O введены новые координаты s, n. Точка $M\notin S$ характеризуется ее расстоянием вдоль S от O. Считается, что $s>0$ (соответственно $s<0$) в области тени (соответственно в освещенной области). Если $M\in\Omega$, то точка M характеризуется ее расстоянием n от S и координатой s проекции M на S. В координатах s, n уравнение Гельмгольца имеет вид

$$\left(1+\frac{n}{\rho}\right)^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\left(1+\frac{n}{\rho}\right)\frac{\partial u}{\partial n}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\left(1+\frac{n}{\rho}\right)^{-1}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right]+k^2u=0 \qquad (2)$$

($\rho=\rho(s)>0$ — радиус кривизны S в точке s).
Используя ряд Маклорена для $\frac{1}{\rho}$:

$$\frac{1}{\rho}\sim\frac{1}{\rho}\Big|_{s=0}+s\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)_{s=0}+\ldots,$$

можно заменить все коэффициенты уравнения (2) их формальными разложениями по степеням s и n. В растянутых координатах

$$\sigma=\frac{k^{1/3}s}{\sqrt[3]{2}\rho^{2/3}},\ \nu=\sqrt[3]{\frac{2}{\rho_0}}k^{2/3}n,\ \rho_0=\rho(0),$$

полагая в уравнении (2)

$$u\sim e^{iks}(v_0(\sigma,\nu)+k^{-1/3}v_1(\sigma,\nu)+\ldots) \qquad (3)$$

и приравнивая нулю коэффициенты при последовательных степенях $k^{-1/3}$, приходят к типичной для метода пограничного слоя цепочке рекуррентных уравнений

$$L_0v_0=0,\ L_0v_1+L_1v_0=0,\ L_0v_2+L_1v_1+L_2v_0=0.$$

Здесь первое уравнение и есть «параболическое» уравнение, давшее название П. у. м.:

$$L_0 v_0 \equiv i\frac{\partial v_0}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial v^2}+\nu v_0=0. \qquad (4)$$

По существу уравнение (4) является уравнением типа Шрёдингера. В операторах L_j коэффициенты — полиномы от σ и ν. Для формального выполнения краевого условия $u|_S=0$ достаточно потребовать, чтобы $u_j|_S=0$. Роль других краевых условий играет требование, чтобы при больших $|\sigma|$, $\sigma<0$, ряд (3) формально переходил бы в разложение лучевого метода. Для v_0 можно вывести явную формулу (т. н. ф о р м у л у Ф о к а), имеющую вид интеграла Фурье

$$\int e^{i\sigma\zeta}\Phi(\nu,\ \zeta)\,d\zeta,$$

где Φ сравнительно просто выражается через функции Эйри. Методика склеивания (сращивания) асимптотич. разложений дает возможность получить формулы для волнового поля по всей области тени и полутени.

В случае волн соскальзывания и шепчущей галереи выводятся соответствующие «параболические» уравнения и их решения выражаются через функции Эйри. Развитие теории лазеров привело к необходимости рассматривать волны, сосредоточенные в окрестности изолированных лучей. Выделяя соответствующий фазовый множитель и проводя далее построения, аналогичные построениям метода пограничного слоя, приходят к «параболическому» уравнению, через решение к-рого выражается в первом приближении волновое поле. В этом случае «параболическое» уравнение будет уравнением Шрёдингера с квадратичным потенциалом. П. у. м. находит применение также при расчете волнового поля в световодах, в статистически неоднородных средах и во многих др. задачах. Аналоги П. у. м. используются в теории нелинейных волн.

Лит.: [1] Ф о к В. А., Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, М., 1970; [2] Б а б и ч В. М., Б у л д ы р е в В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [3] Б а б и ч В. М., К и р п и ч н и к о в а Н. Я., Метод пограничного слоя в задачах дифракции, Л., 1974.

В. М. Бабич.

ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ФУНКЦИИ, В е б е р а ф у н к ц и и, В е б е р а — Э р м и т а ф у н к ц и и,— решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\nu+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\right)y=0, \qquad (*)$$

к-рое получается в результате разделения переменных в волновом уравнении $\Delta u=k^2u$ в параболических цилиндрич. координатах. Наиболее часто используется решение

$$D_\nu(z)\equiv U\left(-\nu-\frac{1}{2},\ z\right)=2^{(\nu-1)/2}e^{-z^2/2}\,\Psi\left(\frac{1-\nu}{2},\ \frac{3}{2};\ \frac{z^2}{2}\right),$$

где $\Psi(a,\ b;\ z)$ — вырожденная гипергеометрич. функция. Уравнению $(*)$ удовлетворяют также $D_\nu(-z)$, $D_{-\nu-1}(\pm iz)$. Функции $D_\nu(z)$ и $D_{-\nu-1}(\pm iz)$ линейно независимы при любых ν, $D_\nu(z)$ и $D_\nu(-z)$ при $\nu\neq 0$, ±1, ±2 ... П. ц. ф.— целые функции от z. Функция $D_\nu(z)$ действительна при действительных ν и z.

Формулы дифференцирования ($n=1,\ 2,\ \ldots$):

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[e^{z^2/4}D_\nu(z)\right]=(-1)^n(-\nu)_n\,e^{z^2/4}D_{\nu-n}(z),$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[e^{-z^2/4}D_\nu(z)\right]=(-1)^n e^{-z^2/4}D_{\nu+n}.$$

Рекуррентные формулы:

$$D_{\nu+1}(z)-zD_\nu(z)+\nu D_{\nu-1}(z)=0,$$

$$D'_\nu(z)+\frac{z}{2}D_\nu(z)-\nu D_{\nu-1}(z)=0,$$

$$D'_\nu(z)-\frac{z}{2}D_\nu(z)+D_{\nu+1}(z)=0.$$

Асимптотика: при фиксированном ν $|\arg z| < 3\pi/4$ и $|z| \to \infty$

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-z^2/4}\left[\sum_{k=0}^{N} \frac{(-\nu/2)_k\,(1/2-\nu/2)_k}{k!}\left(\frac{z^2}{-2}\right)^{-k} + O\left(|z|^{-2N-2}\right)\right],$$

при ограниченном $|z|$, $|\arg(-\nu)| \leqslant \pi/2$ и $|\nu| \to \infty$

$$D_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[\frac{\nu}{2}\ln(-\nu) - \frac{\nu}{2} - \sqrt{-\nu}\,z\right]\times\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\nu|}}\right)\right].$$

П. ц. ф. связана с др. функциями следующими соотношениями. С многочленами Эрмита:

$$D_n(z) = 2^{-n/2} e^{-z^2/4} H_n(z/\sqrt{2}),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

с интегралом вероятности:

$$D_{-n-1}(z) = \frac{(-1)^n \sqrt{2}}{n!}\ e^{-z^2/4}\frac{d^n}{dz^n}\left(e^{z^2/2}\operatorname{erf}\frac{z}{\sqrt{z}}\right),\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

с функциями Бесселя:

$$D_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}}\ K_{1/4}\left(\frac{z^2}{4}\right).$$

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [2] Миллер Дж.-Ч.-П., Таблицы функций Вебера (функций параболического цилиндра), пер. с англ., М., 1968. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

ПАРАБОЛОИД — незамкнутая нецентральная *поверхность второго порядка.* Канонич. уравнения П.:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,\ p,\ q > 0,$$

— *эллиптический параболоид* (при $p = q$ называется П. вращения) и

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,\ p,\ q > 0,$$

— *гиперболический параболоид.* *А. Б. Иванов.*

ПАРАБОЛОИДАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ — числа u, v и w, связанные с прямоугольными координатами x, y и z формулами:

$$x = 2uw\cos v,\ y = 2uw\sin v,\ z = u^2 - w^2,$$

где $0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi$, $0 \leqslant w < \infty$. Координатные поверхности: две системы параболоидов вращения с противоположно направленными осями (u=const и w=const) и полуплоскости (v=const). Система П. к. — ортогональная.

Коэффициенты Ламе:

$$L_u = L_w = 2\sqrt{u^2 + w^2},\ L_v = 2uw.$$

Элемент площади поверхности:

$$d\sigma = 4\sqrt{(u^2 + w^2)\,u^2 w^2\,(du^2 + dw^2)\,dv^2 + (u^2 + w^2)(du\,dw)^2}.$$

Элемент объема:

$$dV = 8\,(u^2 + w^2)\,uw\,du\,dv\,dw.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad}_u \varphi = \frac{1}{2\sqrt{u^2 + w^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial u},\ \operatorname{grad}_v \varphi = \frac{1}{2uw}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

$$\operatorname{grad}_w \varphi = \frac{1}{2\sqrt{u^2 + w^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial w},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{2uw\sqrt{(u^2 + w^2)^3}}\left[wa_u\,(2u^2 + w^2) + ua_w\,(u^2 + 2w^2)\right] + \frac{1}{2\sqrt{u^2 + w^2}}\left(\frac{\partial a_u}{\partial u} + \frac{\partial a_w}{\partial w}\right) + \frac{1}{2uw}\frac{\partial a_v}{\partial v};$$

$$\operatorname{rot}_u \boldsymbol{a} = \frac{1}{2uw} \frac{\partial a_w}{\partial v} - \frac{1}{2w\sqrt{u^2+w^2}} \left(a_v + w \frac{\partial a_v}{\partial w} \right),$$

$$\operatorname{rot}_v \boldsymbol{a} = \frac{1}{2\sqrt{(u^2+w^2)^3}} (w\boldsymbol{a}_u - \boldsymbol{a}_w) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{u^2+w^2}} \left(\frac{\partial a_u}{\partial w} - \frac{\partial a_w}{\partial u} \right),$$

$$\operatorname{rot}_w \boldsymbol{a} = \frac{1}{2w(u^2+w^2)} \left(a_v + u \frac{\partial a_v}{\partial u} \right) - \frac{1}{2uv} \frac{\partial a_u}{\partial v};$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{4(u^2+w^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} + \frac{1}{w} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right].$$

Д. Д. Соколов.

ПАРАДОКС — то же, что *антиномия.*

ПАРАКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в любое открытое покрытие к-рого можно вписать локально конечное открытое покрытие. (Семейство γ множеств, лежащих в топологич. пространстве X, наз. л о к а л ь н о к о н е ч н ы м в X, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность в X, пересекающаяся лишь с конечным множеством элементов семейства γ; семейство γ множеств в п и с а н о в семейство λ множеств, если каждый элемент семейства γ содержится в нек-ром элементе семейства λ.) П а р а к о м п а к т о м наз. паракомпактное хаусдорфово пространство. Класс паракомпактов весьма широк — он включает все метрич. пространства (теорема Стоуна) и все бикомпакты. Однако не каждое локально бикомпактное хаусдорфово пространство паракомпактно.

Значение паракомпактности определяется отмеченной общностью этого понятия и рядом замечательных свойств паракомпактов. Прежде всего, каждое хаусдорфово П. п. нормально. Это позволяет строить на паракомпактах р а з б и е н и я е д и н и ц ы, подчиненные произвольному заданному открытому покрытию γ. Так называются семейства действительных неотрицательных непрерывных функций на пространстве, подчиненные следующим условиям: а) семейство носителей этих функций локально конечно и вписано в γ; б) в каждой точке пространства сумма значений всех тех функций семейства, к-рые отличны в ней от нуля (а таких функций конечное число), равна 1. Разбиения единицы являются основным средством построения погружений пространств в стандартные пространства. В частности, они используются для вложений многообразий в евклидовы пространства и при доказательстве теоремы о метризуемости каждого тихоновского пространства с σ-локально конечной базой. Кроме того, на разбиениях единицы в теории многообразий основаны методы, с помощью к-рых осуществляется единовременный синтез локальных построений, производимых в пределах отдельных карт (в частности, тех или иных векторных и тензорных полей). Поэтому одним из требований исходных в теории многообразий является требование паракомпактности, не являющееся лишним, т. к. существуют непаракомпактные связные хаусдорфовы многообразия.

В присутствии паракомпактности нек-рые локальные свойства пространства синтезируются и выполняются глобально. В частности, если паракомпакт локально метризуем, то он метризуем; если хаусдорфово пространство локально полно по Чеху и паракомпактно, то оно полно по Чеху. В *размерности теории* для паракомпактов удается получить ряд важных соотношений, не распространяющихся даже на нормальные пространства. Это не удивительно, т. к. одно из основных определений размерности — по Лебегу — связано с рассмотрением кратности открытых покрытий, что, несомненно, родственно идее локальной конечности, на к-рой основано определение паракомпактности.

Паракомпактность не наследуется произвольными подпространствами (в отличие от метризуемости), иначе, *напр.*, все *тихоновские пространства*, как подпространства бикомпактных, оказались бы паракомпактами. Но каждое замкнутое подпространство паракомпакта есть паракомпакт. Большим недостатком паракомпактности является отсутствие мультипликативности: произведение двух паракомпактов может паракомпактом не быть. С другой стороны, в классе хаусдорфовых пространств прообраз паракомпакта при совершенном отображении является паракомпактом, и образ паракомпакта при непрерывном замкнутом отображении является паракомпактом. К числу паракомпактов относятся, в частности, *Линделёфа пространства.* Для пространства всех непрерывных действительных функций на произвольном тихоновском пространстве, наделенном топологией поточечной сходимости, паракомпактность равносильна линделёфовости. Если банахово пространство в слабой топологии топологически порождается нек-рым лежащим в нем бикомпактом, то оно паракомпактно. Важный пример паракомпактов — полиэдры, стоящие за *CW*-комплексами.

В классе паракомпактов упрощаются критерии метризуемости. В частности, паракомпакт метризуем в том и только в том случае, если он обладает базой счетного порядка, т. е. базой, любая убывающая последовательность элементов к-рой, содержащих какую-либо точку $x \in X$, непременно образует базу в этой точке. Многообразны *паракомпактности критерии.* В частности, для тихоновского пространства X равносильны условия: а) X паракомпактно, б) в любое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное покрытие, в) в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать σ-локально конечное открытое покрытие, г) в любое открытое покрытие пространства X можно вписать к о н с е р в а т и в н о е з а м к н у т о е п о к р ы т и е, т. е. покрытие, объединение любого подсемейства к-рого замкнуто в X.

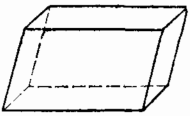
Важным является следующий критерий: тихоновское пространство X паракомпактно в том и только в том случае, если в каждое его открытое покрытие γ можно вписать нек-рое открытое покрытие λ з в е з д н о; последнее означает, что для каждой точки $x \in X$ объединение всех элементов покрытия λ, содержащих x, содержится в нек-ром элементе покрытия γ. Понятие звездной вписанности служит выражением идеи неограниченной дробимости пространства и может восприниматься как наиболее общая теоретико-множественная форма аксиомы треугольника.

Лит.: [1] К е л л и Д ж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] А р х а н г е л ь с к и й А. В., П о н о м а р е в В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [3] А р х а н г е л ь с к и й А., «Докл. АН СССР», 1961, т. 141, № 1, с. 13—15. *А. В. Архангельский.*

ПАРАКОМПАКТНОСТИ КРИТЕРИИ — следующие утверждения, равносильные для произвольного вполне *регулярного хаусдорфова пространства* X. 1) X паракомпактно. 2) В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное открытое покрытие. 3) В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать σ-л о к а л ь н о к о н е ч н о е о т к р ы т о е п о к р ы т и е, т. е. открытое покрытие, распадающееся на счетное множество локально конечных в X семейств множеств. 4) В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное покрытие (о строении элементов к-рого не предполагается ничего). 5) Каково бы ни было открытое покрытие γ пространства X, существует открытое покрытие этого пространства, звездно вписанное в γ. 6) В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать консервативное покрытие.

7) Каково бы ни было открытое покрытие γ пространства X, существует счетное семейство $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ открытых покрытий этого пространства такое, что для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности O_x найдутся $U \in \gamma$ и номер i, удовлетворяющие условию: каждый элемент покрытия λ_i, пересекающийся с O_x, содержится в U (т. е. вся звезда множества O_x относительно λ_i лежит в U). 8) Каково бы ни было открытое покрытие ω пространства X, существует непрерывное отображение f пространства X на нек-рое метрич. пространство Y, подчиненное условию: у каждой точки пространства Y существует окрестность, прообраз к-рой при f содержится в элементе покрытия ω. 9) Пространство X коллективно нормально и слабо паракомпактно. *А. В. Архангельский.*

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД — шестигранник, противоположные грани к-рого попарно параллельны. П. имеет 8 вершин, 12 ребер; его грани представляют собой попарно равные параллелограммы.



П. наз. прямым, если его боковые ребра перпендикулярны к плоскости основания (в этом случае 4 боковые грани — прямоугольники); прямоугольным, если этот П. прямой и основанием служит прямоугольник (следовательно, 6 граней — прямоугольники); П., все грани к-рого квадраты, наз. кубом. Объем П. равен произведению площади его основания на высоту. *БСЭ-3.*

ПАРАЛЛЕЛИЗМ АБСОЛЮТНЫЙ — поле реперов $e=(e_1, \ldots, e_n)$ на многообразии. П. а. определяет изоморфизм всех касательных пространств многообразия M, при к-ром отождествляются векторы касательных пространств T_pM и T_qM, имеющие одинаковые координаты относительно реперов e_p и e_q. Это задает на многообразии линейную связность ∇^e с нулевой кривизной. Параллельными полями относительно этой связности являются тензорные поля, имеющие постоянные координаты относительно поля реперов e (в частности, векторные поля $e_1, \ldots, e_n$ параллельны), а операция ковариантного дифференцирования тензорного поля T по направлению векторного поля X сводится к дифференцированию по направлению поля X координат поля T относительно e. Обратно, линейная связность ∇ с нулевой кривизной на односвязном многообразии M определяет П. а. e, если задан дополнительно репер e_p нек-рого касательного пространства T_pM. П. а. e получается из репера e_p разнесением с помощью параллельного переноса связности ∇ (параллельный перенос не зависит от выбора пути, соединяющего две данные точки многообразия, если связность имеет нулевую кривизну, а многообразие односвязно).

С точки зрения теории G-структур П. а. является $\{1\}$ — структурой, где $\{1\}$ — группа, состоящая из одной единицы. Интегрируемость такой структуры означает, что в окрестности любой точки многообразия существует система координат x^i, для к-рой $e_i=\partial/\partial x^i$, $i=1, \ldots, n$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы векторные поля $e_1, \ldots, e_n$ попарно коммутировали или, иначе говоря, чтобы тензор кручения $C=C^i_{jk}$ связности ∇^e, задаваемый формулой $[e_j, e_k]=C^i_{jk}e_i$, был тождественно равен нулю. П. а. наз. полным, если все векторные поля, имеющие постоянные координаты относительно поля реперов, полны или, что эквивалентно, если связность ∇_e геодезически полна. В интегрируемом случае для этого достаточно полноты векторных полей $e_1, \ldots, e_n$. Полный интегрируемый П. а. на односвязном многообразии M задает на M структуру аффинного пространства. Более обще, полный П. а. с ковариантно постоянным тензором кручения C ($C^i_{jk}=\mathrm{const}$) на односвязном многообразии M с отмеченной точкой задает на M структуру группы Ли со структурными константами C^i_{jk}, для к-рой поля e_i образуют базис пространства левоинвариантных полей.

Группа автоморфизмов П. а. есть группа Ли, свободно действующая на M. Известны необходимые и достаточные условия того, чтобы две П. а. были локально изоморфны (см. [3]). Они выражаются в терминах тензора кручения и его ковариантных производных.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [2] Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, пер. с англ., М., 1960; [3] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970. *Д. В. Алексеевский.*

ПАРАЛЛЕЛИЗУЕМОЕ МНОГООБРАЗИЕ — многообразие M размерности n, допускающее поле реперов $e=(e_1, \ldots, e_n)$, то есть n линейно независимых в каждой точке векторных полей $e_1, \ldots, e_n$. Поле e задает изоморфизм касательного расслоения τ: $TM \to M$ на тривиальное расслоение ε: $\mathbb{R}^n \times M \to M$, сопоставляющий касательному вектору $v \in T_pM$ его координаты относительно репера $e|_p$ и его начало. Поэтому П. м. можно также определить как многообразие, имеющее тривиальное касательное расслоение. Примерами П. м. являются открытые подмногообразия евклидова пространства, все трехмерные многообразия, пространство произвольной группы Ли, многообразие реперов произвольного многообразия. Сфера S^n является П. м. только при $n=1, 3, 7$. Для параллелизуемости 4-мерного многообразия необходимо и достаточно обращение в нуль его второго характеристич. класса Штифеля — Уитни. В общем случае равенство нулю всех характеристич. классов Штифеля — Уитни, Чжэня и Понтрягина является необходимым, но недостаточным условием для того, чтобы многообразие M было П. м. *Д. В. Алексеевский.*

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ — четырехугольник, у к-рого стороны попарно параллельны (см. рис., *а* — *г*). П. может быть также охарактеризован как выпуклый

а *б* *в* *г*

четырехугольник при любом из следующих признаков: 1) та и другая пара противоположных сторон состоит из равных отрезков; 2) одна пара противоположных сторон состоит из равных и параллельных отрезков; 3) при противоположных вершинах той и другой пары углы равны; 4) точка пересечения диагоналей делит каждую из них пополам. Различные виды П.: прямоугольник (*б*) — П., все углы к-рого прямые; ромб (*в*) — П., все стороны к-рого равны; квадрат (*г*) — равносторонний прямоугольник.

БСЭ-3.

ПАРАЛЛЕЛОТОП, параллелограммник, — множество точек, радиус-векторы к-рых имеют вид

$$h=\sum_{i=1}^{p} x^i a_i,$$

со всевозможными значениями $0 \leqslant x^i \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_p$ — фиксированные векторы n-мерного аффинного пространства A. Они наз. образующими параллелотопа и совпадают с нек-рыми ребрами П. Все остальные ребра П. им параллельны. Если образующие П. линейно независимы (зависимы), то П. наз. p-мерным, или невырожденным (вырожденным). Вырожденный П. является параллельной проекцией нек-рого p-мерного П. на плоскость размерности $k \leqslant p-1$. Невырожденный П. определяет несущую его p-мерную плоскость. Такой

П. при $p=2$ является параллелограммом, при $p=3$ — параллелепипедом.

Два невырожденных П. наз. **параллельными**, если параллельны несущие их плоскости. У параллельных П. можно сравнивать их p-мерные «объемы» (хотя в пространстве A может и не быть метрики). Количественной характеристикой отношения p-мерного «объема» П. с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_p$ к p-мерному «объему» параллельного П. с образующими $b_1, b_2, \ldots, b_p$ служит скаляр $\det(x_j^i)$, где (x_j^i) — $(p \times p)$-матрица перехода от $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ к $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, т. е.

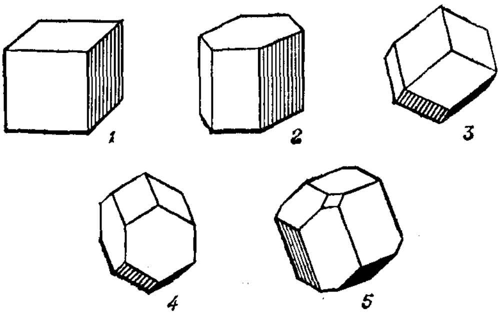
$$a_j = \sum_{i=1}^{p} x_j^i b_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Если в пространстве A определено скалярное произведение, то квадрат p-мерного объема П. с образующими $a_1, \ldots, a_p$ равен определителю $(p \times p)$-матрицы Грама с элементами (a_i, a_j).

Понятие П. тесно связано с понятием *поливектора*.

Лит.: [1] Широков П. А., Тензорное исчисление, Казань, 1961; [2] Беклемишев Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, 3 изд., М., 1976; [3] Пизо Ш., Заманский М., Курс математики. Алгебра и анализ, пер. с франц., М., 1971. *Л. П. Купцов.*

ПАРАЛЛЕЛОЭДР — многогранник, параллельным перенесением к-рого можно заполнить пространство так, чтобы многогранники не входили друг в друга



и не оставляли пустот между собой, т. е. образовать разбиение пространства. П. является, напр., куб или правильная 6-угольная призма. Топологически различных сеток ребер П. пять (см. рис.). Число их граней: 6, 8, 12, 12, 14. Для того чтобы многогранник был П., необходимо и достаточно, чтобы он был выпуклым многогранником одного из пяти указанных топологич. типов и чтобы все его грани имели центры симметрии. Центры П. образуют точечную решетку (см. *Вороного типы решеток*). *А. Б. Иванов.*

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПЕРЕНЕСЕНИЕ — изоморфизм слоев над концами x_0 и x_1 кусочно гладкой кривой $L(x_0, x_1)$ базы M гладкого расслоенного пространства E, определяемый нек-рой заданной в E *связностью*; в частности, линейный изоморфизм касательных пространств $T_{x_0}(M)$ и $T_{x_1}(M)$, определяемый вдоль кривой $L \in M$ нек-рой заданной на M *аффинной связностью*. Развитие понятия П. п. началось с обычного параллелизма на евклидовой плоскости E_2, для к-рой Ф. Миндинг (F. Minding, 1837) указал возможность обобщить ее на случай поверхности M в E_3 с помощью введенного им понятия развертывания кривой $L \in M$ на плоскость E_2. Это указание Миндинга послужило отправным пунктом для Т. Леви-Чивита [1], к-рый, оформляя аналитически П. п. касательного вектора на поверхности, обнаружил зависимость его только от метрики поверхности и на этой основе обобщил его сразу на случай n-мерного риманова пространства (см. *Леви-Чивита связность*). Г. Вейль [2] положил понятие П. п. касательного вектора в основу определения аффинной связности на гладком многообразии M. Дальнейшие обобщения этого понятия связаны с развитием общей теории связностей.

Пусть на гладком многообразии M задана аффинная связность с помощью матрицы локальных форм связности:

$$\omega^i = \Gamma^l_k(x)\,dx^k, \quad \omega^i_j = \Gamma^i_{jn}(x)\,\omega^k, \ \det\left|\Gamma^i_k\right| \neq 0.$$

Говорят, что вектор $X_0 \in T_{x_0}(M)$ получен параллельным перенесением из вектора $X_1 \in T_{x_1}(M)$ вдоль гладкой кривой $L(x_0, x_1) \in M$, если на L существует гладкое векторное поле X, соединяющее X_0 и X_1, такое, что $\nabla_Y X = 0$, где Y — поле касательного вектора кривой L, а $\nabla_Y X$ — ковариантная производная поля X относительно Y, определяемая формулой

$$\omega^i(\nabla_Y X) = Y\omega^i(X) + \omega^i_k(Y)\,\omega^k(X).$$

Таким образом, координаты $\zeta^i = \omega^i(X)$ поля X должны удовлетворять вдоль L системе дифференциальных уравнений

$$d\zeta^i + \zeta^k\omega^i_k = 0.$$

Из линейности этой системы следует, что П. п. вдоль L определяет нек-рый изоморфизм между $T_{x_0}(M)$ и $T_{x_1}(M)$. П. п. вдоль кусочно гладкой кривой определяется как суперпозиция П. п. вдоль ее гладких кусков.

Автоморфизмы пространства $T_x(M)$, определяемые П. п. вдоль замкнутых кусочно гладких кривых $L(x, x)$, образуют линейную *голономии группу* Φ_x; при этом Φ_x и $\Phi_{x'}$ всегда сопряжены между собой. Если Φ_x дискретна, т. е. ее компонента единицы одноэлементна, то говорят об аффинной связности с (локальным) абсолютным параллелизмом векторов, или о (локально) плоской связности. Тогда П. п. при любых x_0 и x_1 не зависит от выбора линии $L(x_0, x_1)$ из одного класса гомотопии; для этого необходимо и достаточно равенство нулю тензора кривизны связности.

На основе П. п. вектора определяется П. п. ковектора и, вообще, тензора. Говорят, что поле ковектора θ на L совершает параллельное перенесение, если для любого векторного поля X на L, совершающего П. п., функция $\theta(X)$ постоянна вдоль L. Вообще, говорят, что поле тензора T, напр. типа (2, 1), совершает параллельное перенесение вдоль L, если для любых X, Y и θ, совершающих П. п., функция $T(X, Y, \theta)$ постоянна вдоль L. Для этого необходимо и достаточно, чтобы компоненты T^i_{jk} удовлетворяли вдоль L системе дифференциальных уравнений

$$dT^i_{jk} = T^i_{lk}\omega^l_j + T^i_{jl}\omega^l_k - T^l_{jk}\omega^i_l.$$

После введения Э. Картаном [3] пространств проективной и конформной связностей в 1920-х гг. и общей концепции связности на многообразии понятие П. п. получило более общее содержание. В наиболее общем смысле оно понимается теперь при рассмотрении связностей в главных расслоенных пространствах или присоединенных к ним пространствах. Существует способ определения самого понятия связности с помощью понятия П. п., к-рое тогда определяется аксиоматически. Связность, однако, может быть задана *горизонтальным распределением* или нек-рым другим эквивалентным способом, напр. *связности формой*. Тогда для каждой кривой $L(x_0, x_1)$ базы M определяются ее горизонтальные поднятия как интегральные кривые горизонтального распределения над L. П. п. наз. тогда отображение, к-рое концам этих поднятий в слое над x_1 ставит в соответствие их другие концы в слое над x_0. Аналогично определяются понятия группы голономии и (локально) плоской связности; последняя также характеризуется равенством нулю *кривизны формы*.

Лит.: [1] Levi-Civita T., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1917, t. 42, p. 173—205; [2] Weyl H., Raum, Zeit, Materie, 5 Aufl., B., 1923; [3] Cartan E., «Acta math.», 1926, t. 48, p. 1—42; [4] Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, пер. с англ., М., 1960; [5] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967. *Ю. Г. Лумисте.*

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПОЛЕ, ковариантно постоянное поле,— поле тензоров A на многообразии M с линейной связностью ∇, инвариантное относительно *параллельного перенесения* вдоль кривых на M. Это означает, что для любых точек p, $q \in M$ тензор A_p (значение тензорного поля A в точке p) при параллельном перенесении в точку q вдоль любой гладкой кривой, соединяющей точки p и q, переходит в тензор A_q.

Поле тензоров A будет параллельным тогда и только тогда, когда его ковариантная производная по направлению любого векторного поля X тождественно равна нулю: $\nabla_X A = 0$ или, иначе, когда ковариантный дифференциал DA поля A равен нулю.

Множество $\Pi(M, \nabla)$ параллельных полей образует подалгебру алгебры всех тензорных полей на многообразии M, инвариантную относительно сверток тензорных полей и перестановок их индексов. Алгебра $\Pi(M, \nabla)$ естественным образом изоморфна алгебре тензоров в фиксированной точке p многообразия M, инвариантных относительно однородной группы голономии Γ_p связности ∇ в точке p. Для связности с полной группой голономии $\Gamma = GL(n, \mathbb{R})$, где $n = \dim M$, алгебра $\Pi(M, \nabla)$ порождается символом Кронекера δ^i_j, для римановой связности с группой голономии $O(n)$ — метрич. тензором $g = (g_{ij})$ и обратным к нему тензором $g^{-1} = (g^{ij})$, а для римановой связности с группой голономии $SO(n)$ — тензорами g, g^{-1} и n-формой объема. Описаны также образующие алгебры параллельных дифференциальных форм на произвольном пространстве линейной связности без кручения с любой неприводимой группой голономии [5].

Особый интерес представляют П. п. дифференциальных форм в римановом многообразии со связностью Леви-Чивиты. С каждой такой формой ω ассоциируется (с помощью операции свертки) ряд линейных операторов в пространстве дифференциальных форм, перестановочных с оператором Бельтрами — Лапласа Δ, напр. операторы внутреннего и внешнего умножения на форму ω или операторы ортогонального проектирования на инвариантные относительно группы голономии подпространства пространства дифференциальных форм. Изучение этих операторов позволяет получить оценки для размерностей пространств гармонич. форм различных степеней, т. е. (в компактном случае) для чисел Бетти многообразия M (см. [4]). Наиболее содержательная теория (см. *Ходжа теорема*) развита для кэлеровых и кватернионных римановых пространств, в к-рых всегда имеется П. п. 2-форм и, соответственно, 4-форм. Любая параллельная дифференциальная форма в римановом пространстве гармонична. В компактном симметрическом римановом пространстве верно и обратное: любая гармонич. форма параллельна. Поэтому кольцо вещественных когомологий компактного симметрич. пространства изоморфно кольцу параллельных дифференциальных форм.

Поле тензоров A является П. п. относительно нек-рой линейной связности ∇ тогда и только тогда, когда оно инфинитезимально однородно, т. е. когда в каждой точке p многообразия M существует репер, относительно к-рого тензор A_p имеет фиксированные координаты $A^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}$, не зависящие от точки p. В этом случае множество реперов, относительно к-рых тензоры A_p, $p \in M$, имеют координаты $A^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}$, образует G-структуру, т. е. главное подрасслоение $P(A)$ расслоения реперов со структурной группой G, являющейся стабилизатором точки A_p при действии группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ в пространстве тензоров. Поле A параллельно относительно любой связности в G-структуре $P(A)$. В частности, любое сечение расслоения $P(A)$ (если оно существует) задает связность с нулевой кривизной, относительно к-рой поле A параллельно.

Более сложным является вопрос о существовании связности без кручения, относительно к-рой данное инфинитезимально однородное поле параллельно. Если поле A является псевдоримановой метрикой, то такая связность (**связность Леви-Чивита**) всегда существует и единственна. Оказывается, что этот случай является исключительным: если для нек-рого тензорного поля A существует единственная связность без кручения, относительно к-рой оно параллельно, то структурная группа G G-структуры $P(A)$ является псевдоортогональной группой и, следовательно, с полем A канонич. образом ассоциируется псевдориманова метрика [7]. Для широкого класса инфинитезимально однородных тензорных полей A наличие связности без кручения, относительно к-рой поле параллельно, влечет за собой интегрируемость поля A, т. е. существование локальной системы координат, в к-рой координаты поля A постоянны. Это верно, напр., для почти комплексной структуры, почти симплектич. структуры и для любого поля A, для к-рого структурная группа G расслоения $P(A)$ неприводима и не принадлежит известному списку неприводимых групп голономии пространств линейной связности без кручения [5].

Лит.: [1] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 1—2, М., 1981; [2] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [3] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [4] Chern S. S., в кн.: Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz, N. Y., 1957, p. 103—21; [5] Berger M., «Bull. Soc. math. France», 1955, t. 83, p. 279—330; [6] Kobayashi S., Transformation groups in differential geometry, B.—Hdlb.—N. Y., 1972; [7] Kobayashi S., Nagano T., «J. Math. Soc. Japan», 1965, v. 17, № 1, p. 84—101.

Д. В. Алексеевский.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ АКСИОМА — аксиома, определяющая соотношение параллельности в различных геометриях. См. *Параллельные прямые*, *Пятый постулат.*

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ — диффеоморфные гладкие линии в пространстве, имеющие в соответствующих точках параллельные касательные. Таковы, напр., гладкие компоненты эквидистантных линий на плоскости (см. *Эквидистанта*) — они характеризуются тем, что расстояние между соответствующими точками равно расстоянию между соответствующими касательными. Пример П. л. в трехмерном пространстве: если две поверхности находятся в *Петерсона соответствии* и имеют общую сопряженную сеть, то линии этой сети имеют параллельные касательные. П. л. пространства E^n, имеющие параллельные нормали до порядка $m \leqslant n < n$, расположены в нек-ром подпространстве E^{n-m}.

Для линейного семейства плоских выпуклых П. л. (т. е. выпуклых линий, радиус-вектор к-рых линейно зависит от параметра ε) справедлива **теорема Брунна-Минковского:** площадь области, ими ограниченная, является вогнутой функцией параметра ε.

Обобщение понятия параллельности на случай линий, расположенных в группах Ли, получается с помощью понятия эквиполлентности векторов.

Д. Д. Соколов.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ — диффеоморфные, одинаково ориентированные поверхности F_1 и F_2, к-рые имеют в соответствующих точках параллельные касательные плоскости, причем расстояние h между соответствующими точками F_1 и F_2 постоянно и равно расстоянию между соответствующими касательными плоскостями. Радиус-векторы $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ П. п. F_1 и F_2 связаны соотношением: $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=h\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали, один и тот же для F_1 и F_2.

Таким образом, можно определить однопараметрич. семейство F_h поверхностей, параллельных данной $F=F_0$, причем регулярность F_h имеет место для достаточно малых значений h, удовлетворяющих неравенству

$$w(h)=1-2Hh+Kh^2>0.$$

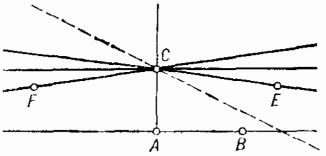
Значениям корней h_1 и h_2 уравнения $w(h)=0$ соответствуют поверхности F_{h_1} и F_{h_2}, являющиеся эволютами поверхности F, так что П. п. имеют общую эволюту. Средняя H_h и гауссова K_h кривизны поверхности F_h, параллельной F, связаны с соответствующими величинами H и K для F соотношениями

$$H_h=\frac{H-Kh}{w(h)},\ K_h=\frac{K}{w(h)},$$

линии кривизны П. п. соответствуют друг другу, так что между ними имеется соответствие Комбескюра, являющееся частным случаем *Петерсона соответствия.*

И. Х. Сабитов.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ в евклидовой геометрии — прямые, к-рые лежат в одной плоскости и не пересекаются. В *абсолютной геометрии* через точку, не лежащую на данной прямой, проходит хотя бы одна прямая, не пересекающая данную. В *евклидовой геометрии* существует только одна такая прямая. Этот факт равносилен *пятому постулату* Евклида (о параллельных). В *Лобачевского геометрии* в плоскости через точку C (см. рис.) вне данной прямой AB проходит бесконечное множество прямых, не пересекающих AB. Из них параллельными к AB наз. только две. Прямая CE наз. параллельной прямой AB в направлении от A к B, если 1) точки B и E лежат по одну сторону от прямой AC; 2) прямая CE не пересекает прямую AB; всякий луч, проходящий внутри угла ACE, пересекает луч AB. Аналогично определяется прямая CF, параллельная к AB в направлении от B к A.



БСЭ-3.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС — частный случай *движения*, при к-ром все точки пространства перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Иначе, если M — первоначальное, а M' — смещенное положение точки, то вектор $\overrightarrow{MM'}$ — один и тот же для всех пар точек, соответствующих друг другу в данном преобразовании.

На плоскости П. п. выражается аналитически в прямоугольной системе координат (x, y) при помощи формул

$$\tilde{x}=x+a,\qquad \tilde{y}=y+b,$$

где вектор $\overrightarrow{MM'}=(a, b)$.

Совокупность всех П. п. образует группу, к-рая в евклидовом пространстве является подгруппой группы движений, а в аффинном — подгруппой группы аффинных преобразований. *А. Б. Иванов.*

ПАРАМЕТРА ВАРИАЦИИ МЕТОД — метод приближенного решения нелинейных (и линейных) функциональных и операторных уравнений в банаховых пространствах $y=P(x)$, $x\in X$, $y\in Y$, а также для качественных исследований. П. в. м. состоит в том, что уравнение $P(x)=0$, где оператор $P(x)$ непрерывно дифференцируем по Фреше до нужного порядка, или нек-рый нелинейный функционал $\Phi(x)$, связанный с решением этого уравнения, обобщаются путем введения вспомогательного числового (или общего функционального) параметра λ, принимающего значения на конечном или бесконечном промежутке $\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*$, так: $F(x,\lambda)=0$, где $F(x,\lambda)$, $x\in X$, $\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*$,— оператор со значениями в Y, так что $P(x)=0$ получается при $\lambda=\lambda^*: F(x,\lambda^*)=P(x)$, а уравнение $F(x,\lambda_0)=0$ легко разрешается или известно его решение x_0. При этом предполагается, что оператор $F(x, \lambda)$ непрерывно дифференцируем (в смысле Фреше) по x и λ, т. е. существуют непрерывные частные производные $F'_x(x,\lambda)$ и $F'_\lambda(x,\lambda)$, и что существует непрерывный оператор $\Gamma(x,\lambda)=[F'_x(x,\lambda)]^{-1}$ из Y в X. Для построения решения $x(\lambda)$ уравнения $F(x,\lambda)=0$ на всем интервале $\lambda_0\leqslant\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*$ строится соответствующая дифференциальная задача (задача Коши) в предположении, что $x(\lambda)$ непрерывно дифференцируемая функция со значениями в X, определяемая этим уравнением:

$$F'_x(x,\lambda)\frac{dx}{d\lambda}+F'_\lambda(x,\lambda)=0,\ x(\lambda_0)=x_0, \tag{1}$$

или

$$\frac{dx}{d\lambda}=-\Gamma(x,\lambda)F'_\lambda(x,\lambda),\quad x(\lambda_0)=x_0. \tag{2}$$

Интервал $[\lambda, \lambda^*]$ разбивается точками $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<<\ldots<\lambda_n=\lambda^*$ на более мелкие подинтервалы длины $h_k=\lambda_k-\lambda_{k-1}$, $k=1, 2, \ldots, n$, и к задаче Коши (2) (или (1)) применяются методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с шагом h_k (или несколько таких методов). В результате для построения решения $x(\lambda)$ уравнения $F(x,\lambda)=0$ получаются П. в. м. соответствующих типов. Построенное значение $x(\lambda^*)$ будет решением уравнения $P(x)=0$.

Решение на каждом шаге линейных относительно $\frac{dx}{d\lambda}$ задач вида (1) или обращение линейных операторов $F'_x(x,\lambda)$ в (2), или последовательная аппроксимация обратного оператора $\Gamma(x,\lambda)$ проводятся различными методами или опять-таки П. в. м.

Шаги h_k выбираются различными способами, напр. из условия минимума нормы невязки $\|P(x_{k+1})\|$ как функции многих, вообще говоря, переменных. При этом эффективным является также совместный выбор h_k и свободных параметров метода численного интегрирования, напр. *Рунге — Кутта метода* s-го порядка точности, использование корней полиномов Чебышева и близких к ним и др.

Задача Коши (2) служит не только средством для определения приближенного решения рассматриваемого уравнения, но и для доказательства существования самого решения. Изучен ряд различных способов введения параметра λ. В качестве числового параметра λ может быть использован также и один из естественных параметров, содержащихся в рассматриваемой задаче.

В зависимости от способа введения параметра λ П. в. м. является прямым или итерационным методом. Совместное применение прямого и итерационного методов наз. комбинированным П. в. м. Напр., итерационный метод типа усовершенствованного метода

Эйлера — Коши с шагом $h_k=1$ (при $F(x, \lambda)=P(x)-(1-\lambda)P(x_0)$, $\lambda_0=0$ и $\lambda^*=1$) является методом 3-го порядка точности и имеет следующий вид:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{1}{2}\left[\Gamma(x_i)+\Gamma(x_i-\Gamma(x_i)\,P(x_i))\right]P(x_i),$$
$$i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \Gamma(x)=[P'(x)]^{-1}.$$

Каждый метод численного интегрирования порождает свой итерационный П. в. м. высокого порядка точности, *причем без привлечения производных* $P(x)$ порядка выше первой.

Использование методов численного интегрирования в прямом П. в. м. совместно с корректировкой результатов после каждого шага с помощью итерационного П. в. м. (комбинированный П. в. м.) представляет собой один из наиболее эффективных методов решения нелинейных задач.

П. в. м. достаточно хорошо разработан и исследован для широкого класса задач. Первоначально он был предложен для систем алгебраич. и трансцендентных уравнений, интегральных уравнений, дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными, а затем для решения более общих нелинейных и операторных уравнений. Изучены условия, при к-рых гарантируется разрешимость уравнения $P(x)=0$ и возможность построения его решения интегрированием задачи Коши (2) на интервале $[\lambda_0, \lambda^*]$ и установления области его расположения. Изучены условия сходимости и даны оценки погрешности. Исследованы также вопросы применения П. в. м. для обращения и псевдообращения линейных операторов, построения псевдорешений (и решений) линейных функциональных уравнений с минимальным уклонением по норме (в заданном подпространстве) от начального значения, суммирования операторных рядов и построения нек-рых классов проекторов, определения начальных приближений для итерационных процессов, решения операторных дифференциальных уравнений и задач линейной алгебры, для доказательства разрешимости нелинейных систем, связанных с вариационными задачами, и построения их решений, минимизации функционалов и многих других. Изучены обширные классы эффективных модификаций П. в. м., в том числе и с последовательной аппроксимацией обратного оператора $\Gamma(x, \lambda)$ или $\Gamma(x)$. Изучены также широкие классы задач ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. (Впрочем, случай ветвления может быть блокирован другим способом введения параметра λ или путем введения дополнительного параметра τ.) П. в. м. исследован также как метод «градиентного» типа, а также без предположения существования $\Gamma(x)$.

См. также *Продолжения по параметру метод*.

Лит.: [1] Давиденко Д. Ф., «Докл. АН СССР», 1953, т. 88, № 4, с. 601—02; [2] его же, «Укр. матем. ж.», 1955, т. 7, с. 18—28; [3] Гавурин М. К., «Изв. ВУЗов. Математика», 1958, № 5, с. 18—31; [4] Поляк Б. Т., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1964, т. 4, № 6, с. 995—1005; [5] Давиденко Д. Ф., «Докл. АН СССР», 1965, т. 162, № 3, с. 499—502; [6] Михлин С. Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966; [7] Kleinmichel H., «Math. Nachr.», 1968, Bd 37, H. 5/6, S. 313—43; [8] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [9] Лика Д. К., Шафиев Р. А., «Изв. АН Молд. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук», 1970, № 2, с. 13—18; [10] Жидков Е. П. [и др.], «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1973, т. 4, в. 1, с. 127—66; [11] Давиденко Д. Ф., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1975, т. 15, № 1, с. 30—47; [12] Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975; [13] Келлер Г., в кн.: Методы вычислительной и прикладной математики, в. 2, Новосиб., 1977, с. 6—36; [14] Давиденко Д. Ф., в кн.: Математическое программирование и смежные вопросы. Вычислительные методы, М., 1976, с. 187—212; [15] Коляда Ю. В., Сигорский В. П., «Кибернетика», 1980, № 3, с. 24—28.

Д. Ф. Давиденко.

ПАРАМЕТРИКСА МЕТОД — один из методов изучения краевых задач для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами с помощью интегральных уравнений.

Пусть в какой-либо области G n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ рассматривается эллиптич. дифференциальный оператор порядка m

$$L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{1}$$

В равенстве (1) символом α обозначен мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где α_j — неотрицательные целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$. Каждому оператору (1) сопоставляется однородный эллиптич. оператор

$$L_0(x_0, D) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x_0) D^\alpha$$

с постоянными коэффициентами, где $x_0 \in G$ — произвольная фиксированная точка. Пусть $\varepsilon(x, x_0)$ обозначает фундаментальное решение оператора $L_0(x_0, D)$, параметрически зависящее от x_0, тогда функция $\varepsilon(x, x_0)$ наз. **параметриксом** оператора (1) с особенностью в точке x_0.

В частности, для эллиптич. оператора 2-го порядка

$$L(x, D) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

в качестве параметрикса с особенностью в точке y может быть взята **функция Леви**:

$$\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\,\omega_n \sqrt{A(y)}} [R(x, y)]^{2-n}, & n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi \sqrt{A(y)}} \ln R(x, y), & n = 2. \end{cases} \tag{2}$$

В равенстве (2) $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, $A(y)$ — определитель матрицы $\|a_{ij}(y)\|$,

$$R(x, y) = \sum_{i, j=1}^{n} A_{ij}(y)(x_i - y_i)(x_j - y_j),$$

$A_{ij}(y)$ — элементы матрицы, обратной к матрице $\|a_{ij}(y)\|$.

Пусть S_{x_0} — интегральный оператор

$$(S_{x_0}\varphi)(x) = \int_G \varepsilon(x - y, x_0)\, \varphi(y)\, dy, \tag{3}$$

действующий на функциях из $C_0^\infty(G)$, и

$$T_{x_0} = S_{x_0}[L_0(x_0, D) - L(x, D)].$$

Поскольку, в силу определения фундаментального решения,

$$L_0(x_0, D) S_{x_0} = S_{x_0} L_0(x_0, D) = I,$$

где I — тождественный оператор, то

$$I = S_{x_0} L(x, D) + T_{x_0}.$$

Это равенство означает, что для каждой достаточно гладкой и финитной в области G функции φ справедливо представление

$$\varphi = S_{x_0} L(x, D)\varphi + T_{x_0}\varphi \tag{4}$$

и, кроме того, если

$$\varphi = S_{x_0} f + T_{x_0}\varphi,$$

то φ является решением уравнения

$$L(x, D)\varphi = f.$$

Таким образом, вопрос о локальной разрешимости уравнения $L\varphi = f$ сводится к вопросу об обратимости оператора $I - T_{x_0}$.

Если применять оператор T_{x_0} к функциям φ, к-рые обращаются в нуль вне шара радиуса R с центром в точке x_0, то при достаточно малом R норма оператора T_{x_0} может быть сделана меньше единицы. Тогда будет существовать оператор $(I-T_{x_0})^{-1}$ и, следовательно, оператор $E=(I-T_{x_0})^{-1}S_{x_0}$, к-рый является обратным к оператору $L(x, D)$. Оператор E является интегральным оператором, ядро к-рого представляет собой фундаментальное решение оператора $L(x, D)$.

Параметриксом иногда наз. не только функцию $\varepsilon(x, x_0)$, но и интегральный оператор S_{x_0} с ядром $\varepsilon(x, x_0)$, определенный равенством (3).

В теории псевдодифференциальных операторов вместо оператора S_{x_0} параметриксом оператора $L(x, D)$ наз. оператор S такой, что $I-L(x, D)S$ и $I-SL(x, D)$ являются интегральными операторами с бесконечно дифференцируемыми ядрами. Если же таким оператором является лишь оператор $I-SL$ (или $I-LS$), то S наз. левым (соответственно правым) параметриксом оператора $L(x, D)$. Иначе говоря, оператор S_{x_0} в равенстве (4) является левым параметриксом, если оператор T_{x_0} в этом равенстве имеет бесконечно дифференцируемое ядро. Если у оператора $L(x, D)$ существуют левый параметрикс S' и правый параметрикс S'', то каждый из этих операторов является параметриксом. Существование параметрикса доказано для гипоэллиптических псевдодифференциальных операторов (см. [3]).

Лит.: [1] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [2] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [3] Хёрмандер Л., в сб.: Псевдодифференциальные операторы, М., 1967.

Ш. А. Алимов.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ МЕТОД — метод в геометрич. теории функций комплексного переменного, использующий для решения экстремальных задач в классах функций представление этих классов с помощью интегралов, зависящих от параметров.

К таким классам относятся *Каратеодори класс*, класс однолистных звездообразных в круге функций, класс типично вещественных функций. Функции этих классов имеют параметрич. представление, содержащее интеграл Стилтьеса

$$\int_a^b g(z, t)\, d\mu(t)$$

с заданными действительными числами a, b и функцией $g(z, t)$ (ядро класса), $\mu(t)\in M_{a, b}$, где $M_{a, b}$ — класс функций, не убывающих на промежутке $[a, b]$, $\mu(b)-\mu(a)=1$ (μ — параметр класса).

Для классов функций, имеющих параметрич. представление с помощью интегралов Стилтьеса, получены вариационные формулы, к-рые при решении экстремальных задач в этих классах показывают, что экстремальная функция имеет вид

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k g(z, t_k),\ \lambda_k\geq 0,\ \sum_{k=1}^{m}\lambda_k=1,$$

где $t_k\in[a, b]$, причем указывается значение m (см. [1] гл. 11; [3]).

При нахождении областей значений функционалов и систем функционалов на таких классах иногда полезны следующие теоремы.

1) Множество B точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, допускающих представление

$$x_k=\int_a^b u_k(t)\, d\mu(t),\quad k=1, 2, \ldots n,$$

где $u_k(t)$ — фиксированные непрерывные на $[a, b]$ действительные функции и $\mu(t)\in M_{a, b}$, совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой $R(U)$ множества U точек

$$x_k = u_k(t), \quad k=1, 2, \ldots, n, \quad a \leqslant t \leqslant b$$

(теорема Рисса).

2) Каждая точка $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R(U) \subset \mathbb{R}^n$ может быть представлена в виде

$$x_k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_k(t_j), \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

где $\lambda_j > 0$, $j=1, 2, \ldots, m$, $\Sigma_{j=1}^{m}\lambda_j = 1$, $m \leqslant n+1$, а если $x \in \partial R(U)$, то $m \leqslant n$ (теорема Каратеодори).

3) Для того чтобы существовала, по крайней мере, одна неубывающая функция $\mu(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, такая, что

$$\int_a^b w_k(t)\, d\mu(t) = \gamma_k, \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

где

$w_1(t) \equiv 1$, $w_k(t) = u_k(t) + iv_k(t)$; $u_k(t), v_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, n$, — заданные действительные непрерывные на $[a, b]$ функции, $\gamma_1 > 0$, γ_k — заданные комплексные числа, необходимо и достаточно, чтобы всякий раз, когда при нек-рых комплексных числах $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} [\alpha_k w_k(t) + \bar{\alpha}_k \bar{w}_k(t)] \geqslant 0, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

имело место также и неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} [\alpha_k \gamma_k + \bar{\alpha}_k \bar{\gamma}_k] \geqslant 0$$

(теорема Рисса).

Приведенные теоремы позволили дать геометрич. и алгебраич. характеристики областей значений систем коэффициентов и отдельных коэффициентов на классах функций, регулярных и имеющих положительную действительную часть в круге (кольце), регулярных и типично вещественных в круге (кольце) и на нек-рых других классах (см. [1] Добавление; [4], [5]).

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Крейн М. Г., «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 4, с. 3—120; [3] Лебедев Н. А., Александров И. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1968, т. 94, с. 79—89; [4] Голузина Е. Г., там же, с. 33—46; [5] ее же, «Зап. науч. семинаров Ленингр. отделения Матем. ин-та АН СССР», 1972, т. 24, с. 29—62; 1974, т. 44, с. 17—40; 1980, т. 100, с. 17—25. *Е. Г. Голузина.*

ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ МЕТОД — метод теории функций комплексного переменного, возникший из *параметрического представления* однолистных функций и базирующийся большей частью на *Лёвнера уравнении* и его обобщениях (см. [1]). Самим К. Лёвнером (K. Löwner) П. п. м. использовался на классе S всех регулярных однолистных в единичном круге функций $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, для оценки коэффициентов разложений

$$w = z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

и

$$z = f^{-1}(w) = w + b_2 w^2 + \ldots + b_n w^n + \ldots$$

(см. *Бибербаха гипотеза*). Затем П. п. м. систематически применял Г. М. Голузин при решении проблем искажения, вращения, взаимного роста и других геометрич. характеристик отображения $w=f(z)$, связанных со значениями $f(z_0)$ и $f'(z_0)$ при фиксированном z_0, $|z_0| < 1$.

П. п. м. связан с теорией оптимальных процессов. Эта связь базируется на том факте, что аналитически все упомянутые выше задачи формулируются как экстремальные задачи для управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемой из уравнения Лёвнера. Использование принципа максимума Понтрягина (см. *Понтрягина принцип максимума*) и изучение свойств функции Понтрягина позволяют изучить ряд новых задач на классе S и его подклассах вплоть до их полного решения либо получить результаты, сравнимые (напр., в проблеме Бибербаха) с результатами, найденными другими методами (см. [1] п. 74).

Лит.: [1] Александров И. А., Параметрические продолжения в теории однолистных функций, М., 1976.

В. И. Попов.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — раздел теории обыкновенных дифференциальных уравнений, изучающий явление параметрич. резонанса.

Пусть S — нек-рая динамич. система, способная совершать лишь колебательные движения и описываемая *гамильтоновой системой линейной* (невозмущенным уравнением)

$$J\dot{x}=H_0x \quad \left(J=\begin{Vmatrix}0 & -I_k\\ I_k & 0\end{Vmatrix},\ H_0^*=H_0\right)$$

с постоянным действительным гамильтонианом H_0. Таким образом, $(2k\times 2k)$-матрица $J^{-1}H_0$ приводится к диагональному виду с чисто мнимыми элементами

$$i\omega_\nu \quad (\nu=\mp 1,\ \ldots,\ \mp k,\ \omega_{-\nu}=-\omega_\nu),$$

$|\omega_\nu|$ — собственные частоты системы. Пусть нек-рые параметры системы S начинают периодически изменяться с частотой $\vartheta>0$ и малыми амплитудами, значения к-рых определяются малым параметром $\varepsilon>0$. Если возбуждения не выводят из класса линейных гамильтоновых систем, то движение системы S будет описываться возмущенным уравнением

$$J\dot{x}=[H_0+\varepsilon H_1(\vartheta t)+\varepsilon^2H_2(\vartheta t)+\ldots]\,x, \tag{1}$$

где $H_j(s+2\pi)=H_j(s)=H_j(s)^*$, $j=1,\ 2,\ \ldots$, суть кусочно непрерывные, интегрируемые в $(0,2\pi)$ $(2k\times 2k)$-матрицы-функции, и ряд в правой части (1) сходится при $\varepsilon<r_0$, где r_0 не зависит от t.

Возникновение неограниченно возрастающих колебаний системы S при сколь угодно малом периодич. возмущении нек-рых ее параметров наз. **параметрическим резонансом**. Параметрич. резонанс имеет две существенные особенности: 1) спектр частот, при к-рых возникают неограниченно возрастающие колебания, не является точечным, а состоит из совокупности малых интервалов, длины к-рых зависят от амплитуды возмущений (т. е. от ε) и к-рые стягиваются в точку при $\varepsilon\to 0$; значения частот, к к-рым стягиваются эти интервалы, наз. **критическими**; 2) колебания нарастают не по степенному, а по экспоненциальному закону. Этим параметрич. резонанс намного «опаснее» (или «полезнее», в зависимости от задачи) обычного резонанса.

Пусть $i\omega_1,\ \ldots,\ i\omega_k$ — собственные значения 1-го рода, перенумерованные так, что $\omega_1\leqslant\omega_2\leqslant\ldots\leqslant\omega_k$. Тогда критическими могут быть лишь частоты вида

$$\vartheta_{jh}^{(m)}=\frac{1}{m}\,|\omega_j+\omega_h|,\ j,\ h=1,\ \ldots,\ k;\ m=1,\ 2,\ \ldots \tag{2}$$

Пусть собственные векторы f_ν матрицы $J^{-1}H_0$, для к-рых $J^{-1}H_0f_\nu=i\omega_\nu f_\nu$, $\nu=\mp 1,\ \ldots,\ \mp k$, нормированы так, что

$$i\,(Jf_\nu,\,f_\mu)=\delta_{\nu\mu}\operatorname{sign}\nu,\quad \nu,\ \mu=\mp 1,\ \ldots,\ \mp k,$$

где $\delta_{\nu\mu}$ — символ Кронекера, а

$$H_1(\vartheta t)\sim\sum e^{il\vartheta t}H_1^{(l)}.$$

Тогда области неустойчивости в первом приближении по ε определяются неравенствами

$$\vartheta_{jh}^{(m)}+\mu_1\varepsilon+\ldots<\vartheta<\vartheta_{jh}^{(m)}+\mu_2\varepsilon+\ldots, \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\mu_{1,2}=\frac{1}{m}\left(\chi_{-j-j}+\chi_{hh}\mp 2\,|\chi_{-jh}|\right),\\ \chi_{-j-j}=\left(H_1^{(0)}f_{-j},\,f_{-j}\right),\ \chi_{hh}=\left(H_1^{(0)}f_h,\,f_h\right),\\ \chi_{-jh}=\left(H_1^{(m)}f_{-j},\,f_h\right).\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Если $j=h$, то область неустойчивости отвечает **основному резонансу**, при $j\neq h$ — **комбинационному резонансу**. Величина $|\chi_{-jh}|$ характеризует «степень опасности» критич. частоты $\vartheta_{jh_j}^{(m)}$: чем больше эта величина, тем шире «клинышек» неустойчивости (3) с острием в точке $\vartheta_{jh}^{(m)}$. Установлена аналитич. зависимость границ областей неустойчивости от параметра ε и получены эффективные формулы для вычисления областей (3) во втором приближении (см. [3], [4]).

В часто встречающемся в приложениях случае, когда возмущенная система S описывается векторным уравнением 2-го порядка

$$\ddot{y}+[P_0+\varepsilon P_1(\vartheta t)+\varepsilon^2 P_2(\vartheta t)+\ldots]\,y=0,\tag{5}$$

где $P_0^*=P_0>0$ и $P_j(s)^*=P_j(s)=P_j(s+2\pi)$, $j=1, 2, \ldots$, собственные векторы и собственные значения (квадраты частот невозмущенной системы) матрицы P_0 определяют формулами

$$P_0 a_\varkappa=\omega_\varkappa^2 a_\varkappa,$$

$$(\omega_\varkappa+\omega_\lambda)(a_\varkappa,\,a_\lambda)=\delta_{\varkappa\lambda},\ \varkappa,\ \lambda=1,\ \ldots,\ k.$$

Пусть

$$P_1(\vartheta t)\sim\sum e^{il\vartheta t}P_1^{(l)}.$$

Тогда формулы (2) и (4) примут вид

$$\vartheta_{jh}^{(m)}=\frac{1}{m}(\omega_j+\omega_h),\ \chi_{-j-j}=\left(P_1^{(0)}a_j,\,a_j\right),$$

$$\chi_{hh}=\left(P_1^{(0)}a_h,\,a_h\right),\ \chi_{-jh}=\left(P_1^{(m)}a_j,\,a_h\right)$$

соответственно. В частности, в базисе $e_1,\ \ldots,\ e_k$, где P_0 диагональна:

$$P_0=\operatorname{diag}(p_1,\ \ldots,\ p_k)$$

и

$$P_1(\vartheta t)\sim\sum e^{il\vartheta t}\,\|\pi_{\varkappa\lambda}\|_1^k,$$

имеет место:

$$\omega_\varkappa=+\sqrt{p_\varkappa},\ a_\varkappa=\frac{1}{\sqrt{2\omega_\varkappa}}e_\varkappa,\ \varkappa=1,\ \ldots,\ k,$$

и, следовательно (см. [5]):

$$\chi_{-j-j}=\frac{1}{2\omega_j}\pi_{jj}^{(0)},\ \chi_{hh}=\frac{1}{2\omega_h}\pi_{hh}^{(0)},$$

$$\chi_{-jh}=\frac{1}{2\sqrt{\omega_j\omega_h}}\pi_{jh}^{(m)}.$$

Рассмотрен случай нелинейной зависимости коэффициентов уравнений (1) и (5) от параметра $1/\vartheta$ (см. [4]). Изучен параметрич. резонанс в линейных системах, близких к гамильтоновым (см. [6]). Здесь областям основного резонанса предшествуют области главного резонанса, а наряду с областями комбинационного резонанса появляются области комбинационно-разностного резонанса. Для параметрич. резонанса в линейных распределенных системах (см. [7]) получен ряд аналогичных результатов для операторных уравнений (1) в гильбертовом пространстве. Исследовался параметрич. резонанс для нек-рых классов систем с конечным числом степеней свободы, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями (см. [8]).

Лит.: [1] Крейн М. Г., в кн.: Памяти Александра Александровича Андронова, М., 1955, с. 413—98; [2] Якубович В. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 4, с. 602—05; [3] его же, в кн.: Методы вычислений, в. 3, Л., 1966, с. 51—69; [4] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972; [5] Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М., 1956; [6] Старжинский В. М., «Инженерный ж. Механ. тверд. тела», 1967, т. 3, с. 174—80; [7] Фомин В. Н., Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах, Л., 1972; [8] Шмидт Г., Параметрические колебания, пер. с нем., М., 1978.

В. М. Старжинский.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ в теории однолистных функций — представление однолистных функций, осуществляющих конформное отображение плоских областей на области канонич. вида (напр., на круг с концентрич. разрезами); оно возникает обычно следующим образом. Выбирается однопараметрич. семейство областей Q_t, $0 \leq t < T$, вложенных друг в друга, $Q_{t'} \subset Q_t$, $0 \leq t' < t < T$. Для области Q_0 предполагается известным ее конформное отображение f_0 на нек-рую канонич. область B_0. По известному отображению f_t области Q_t на область канонич. вида строится такое же отображение $f_{t+\varepsilon}$ для области $Q_{t+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ и мало. При непрерывном изменении параметра t на этом пути возникают дифференциальные уравнения, наиболее известными из к-рых являются *Лёвнера уравнение* и уравнение Лёвнера — Куфарева. В дискретном случае — для сеточных областей Q_t и натурального параметра t — переход от отображения f_t к отображению $f_{t+\varepsilon}$, $\varepsilon = 1$, осуществляется по рекуррентным формулам. Источником упомянутых формул и уравнений служит обычно формула Шварца (см. [1] с. 92) и ее обобщения (см. [2]). Не менее важным источником П. п. служат вариации Адамара (см. [3], [4]) для функций Грина $G_t(z, z')$, $z, z' \in Q_t$, указанного выше семейства областей. Метод Адамара наз. также методом инвариантного погружения (см. [5]) для эллиптических дифференциальных уравнений. Ниже показана связь П. п., вариаций Адамара и инвариантного погружения в простейшем (дискретном) случае.

Пусть Q — нек-рый набор целых комплексных чисел (сеточная область) и функция Грина $G_t(z, z')$ — экстремаль функционала Дирихле — Дугласа

$$I_t(g) = 2g(z') + \sum\nolimits_{k=0}^{1} \sum\nolimits_{z \in Q_0} \rho_k(t) \mid \nabla_k g(z) \mid^2$$

в классе R_0 всех действительных на Q функций $g(z)$. Здесь $Q_0 = \{z \mid z, z-1, z-i, z-1-i \in Q\}$,

$$\nabla_0 g(z) = g(z) - g(z-1-i),\ \nabla_1 g(z) = g(z-1) - g(z-i), \tag{1}$$

$$\rho_k(0) \equiv 1,\ \rho_k(t+1) = \rho_k(t) + N\delta^{\zeta}_{\zeta_t},$$

N — натуральное число, $\delta^{\zeta}_{\zeta_t}$ — символ Кронекера и $\zeta_t = (k_t, z_t)$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$,— нек-рый набор пар чисел; $\{z_t \mid t = 1, \ldots, T\}$ — граница области Q_t, $k_t = 0$ или 1. Нахождение экстремума функционала $I_t(g)$ — задача квадратичного программирования. Сравнение ее решений при t и $t+1$ дает основную формулу инвариантного погружения (вариацию Адамара):

$$G_{t+1}(z, z') = G_t(z, z') - \frac{1}{c_t} \nabla_{k_t} G_t(z_t, z) \nabla_{k_t} G_t(z_t, z'), \tag{2}$$

где $c_t = N^{-1} - \nabla_{k_t} \nabla'_{k_t} G_t(z_t, z_t) > 0$, символ ∇'_k означает разностные операторы (1) по второму аргументу функции Грина. Зная функцию $G_0(z, z')$, можно шаг за шагом (рекуррентно) получить по формуле (2) все функции

$G_t(z, z')$, $t=1, \ldots, T$. Достроив функцию Грина до сеточно аналитич. функции $f_T(z)=G_T(z, z')+iH_T(z, z')$ согласно уравнениям типа Коши — Римана

$$(-1)^k \nabla_{1-k} H = \rho_k \nabla_k G,$$

получают однолистное сеточно-квазиконформное отображение $w=\exp[2\pi f_T(z)]$ области Q_T в единичный круг. Ближайшим к началу координат будет образ точки z'. В пределе при $N \to \infty$ отображение сеточно-конформно и образом области Q_T служит круг с концентрич. разрезами. Получен непрерывный аналог формулы (2) (см. [6]). В случае, когда все области G_t односвязны и канонич. областью служит единичный круг B, удается, используя дробно-линейные автоморфизмы круга B, представить функцию Грина в явном виде

$$G_t(z, z') = \ln|1 - f_t(z)\overline{f_t(z')}| - \ln|f_t(z) - f_t(z')|$$

через функцию $f_t(z)$, отображающую Q_t на B с нормировкой $f(0)=0$, $0 \in Q_t$ для всех $t \in [0, T)$.

В терминах отображения $w=f_t(z)$ вариация Адамара сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (Лёвнера). По сравнению с вариацией Адамара это уравнение значительно проще, однако информация о границе области Q_t представлена в нем неявно — через управляющий параметр $\alpha(t)=\arg f_t(z_t)$, поскольку функция $f_t(z)$ заранее неизвестна. Тем не менее уравнение Лёвнера — основной инструмент П. п.

Были рассмотрены более общие однопараметрич. семейства областей Q_t, $0 \leqslant t < T$, не обязательно вложенных друг в друга (см. [7]). Возникающие при таких П. п. уравнения наз. уравнениями Куфарева — Лёвнера. Существуют также модификации уравнений Лёвнера и Куфарева — Лёвнера на те случаи, когда области Q_t обладают различного рода симметриями или иными геометрич. особенностями (см. [1]).

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Александров И. А., Сорокин А. С., «Сиб. матем. ж.», 1972, т. 13, № 5, с. 971—1001; [3] Hadamard J., *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibri des plaques élastiques encastrées*, P., 1908; [4] его же, Leçons sur le calcul des variations, v. 1, P., 1910; [5] Беллман Р., Энджел Э., Динамическое программирование и уравнения в частных производных, пер. с англ., М., 1974; [6] Попов В. И., «Докл. АН СССР», 1972, т. 207, № 5, с. 1048—50; [7] Куфарев П. П., «Матем. сб.», 1943, т. 13, № 1, с. 87—118. *В. И. Попов.*

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ функции — задание функции $y=f(x)$, определенной, напр., на отрезке $[a, b]$ с помощью пары функций $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, таких, что у функции $\varphi: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ существует такая однозначная обратная функция $\varphi^{-1}: [a, b] \to [\alpha, \beta]$, что $f=\psi \circ \varphi^{-1}$, т. е. для любого $x \in [a, b]$ имеет место

$$f(x) = \psi[\varphi^{-1}(x)].$$

Пример. Пара функций $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, является П. п. функции $y=\sqrt{1-x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Если в точке $t_0 \in [a, b]$ П. п. функции f дифференцируемо, т. е. функции φ и ψ дифференцируемы, и $\varphi'(t_0) \neq 0$, то параметрически представленная функция f дифференцируема в точке $x_0=\varphi(t_0)$ и $f'(x_0)=\psi'(t_0)/\varphi'(t_0)$. Если, кроме того, у функций φ и ψ в точке t_0 существуют производные порядка n, $n=2, 3, \ldots$, то и у функции f в точке x_0 существует производная порядка n, причем она является дробно-рациональной функцией от производных функций φ и ψ порядков k, $k=1, 2, \ldots, n$, в знаменателе к-рой стоит $(2n-1)$-я степень значения производной $\varphi'(t_0)$, напр.,

$$f''(x_0) = \frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0) - \psi'(t_0)\varphi''(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^3}.$$

Л. Д. Кудрявцев.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — раздел *математического программирования*, посвященный исследованию задач оптимизации, в к-рых условия допустимости и (или) целевая функция зависят от нек-рых детерминированных параметров. (Задачи, в к-рых эти параметры являются случайными, составляют предмет *стохастического программирования.*)

В общем виде задача П. п. заключается в максимизации целевой функции $f(x, \lambda)$ по всем $x=(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющим ограничениям

$$g_i(x, \lambda) \leqslant b_i(\lambda), \ i=1, \ldots, m, \tag{1}$$

где λ — вектор параметров, принадлежащий нек-рому заданному множеству параметров $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$. При любом фиксированном λ эта задача представляет собой обычную задачу математич. программирования. Пусть $\Lambda' \subset \Lambda$ — множество тех значений λ, при к-рых эта задача разрешима (множество разрешимости). Оптимальное решение $x^*=x_\lambda^*$ естественным образом является функцией от λ. Под решением задачи П. п. понимается семейство $\{x_\lambda^*\}$ при всех $\lambda \in \Lambda'$.

Источники задач П. п. довольно разнообразны. Это прежде всего стремление отразить определенный произвол, с к-рым нередко бывают определены все или нек-рые исходные данные практической оптимизационной задачи, либо охватить единой формулировкой несколько связанных между собой вариантов задачи (или целое семейство задач, напр., зависящих от времени). П. п. является наиболее адекватным способом постановки важной проблемы устойчивости решений задач оптимизации относительно вариаций тех или иных исходных данных. Наконец, с задачами П. п. тесно связана проблема нахождения множества оптимумов Парето в задачах многокритериальной оптимизации.

Если при любом фиксированном λ задача П. п. представляет собой задачу *линейного программирования* (*выпуклого программирования* и т. п.), то говорят о задаче линейного (соответственно выпуклого и т. п.) параметрического программирования. В общем виде проблематику П. п. можно охарактеризовать следующим образом. 1) Нахождение и выяснение свойств множеств разрешимости Λ'. 2) Нахождение областей устойчивости решений, характеризация их строения; анализ поведения неустойчивых задач. 3) Характеризация зависимости оптимального значения целевой функции от вектора параметров.

В полном своем объеме (т. е. для произвольных целевых функций, ограничений и областей изменения параметров Λ) эти задачи весьма трудны. Достаточно продвинуты в теоретическом и вычислительном отношении лишь нек-рые частные их классы. В основном это касается задач линейного П. п., в к-рых: либо а) целевая функция линейно зависит от одного скалярного ($\Lambda=\mathbb{R}^1$) параметра, либо б) правые части ограничений линейно зависят от одного параметра, либо в) целевая функция и правые части ограничений линейно зависят от двух независимых скалярных параметров или от одного и того же параметра, г) целевая функция линейно зависит от векторного параметра, д) правые части ограничений линейно зависят от векторного параметра. Случай зависимости от параметров матрицы ограничений задачи линейного программирования весьма сложен и пока (1983) исследован недостаточно. Для случая а), напр., решение указанных проблем 1) — 3) характеризуется следующим образом. Пусть требуется максимизировать

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j + \lambda c_j') x_j \tag{2}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \ i=1, \ldots, m; \ x_j \geqslant 0, \ j=1, \ldots, n,$$

где $\lambda \in \Lambda = \mathbb{R}^1$. Тогда существует такое разбиение Λ на конечное число открытых слева интервалов: $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{q} \Lambda^k$ (где интервал Λ^1 неограничен слева, Λ^q неограничен справа, причем возможен случай совпадения одного из них с Λ), что при всех $\lambda \in \Lambda^k$ соответствующая задача линейного П. п. разрешима, причем ва каждом интервале Λ^k, $k=1, \ldots, q$, она имеет один и тот же базис. Исключение могут составлять лишь интервалы Λ^1 и Λ^q, на к-рых целевая функция (2) может быть неограниченна. Таким образом, в данной задаче множество разрешимости Λ' представляет собой объединение всех Λ^k за возможным исключением Λ^1 и (или) Λ^q. Далее, оптимальное значение целевой функции на каждом Λ^k, $k=1, \ldots, q$, является выпуклой кусочно линейной функцией параметра λ.

Численные методы решения однопараметрических ($\Lambda=\mathbb{R}^1$) задач линейного П. п. представляют собой модификации *симплексного метода*; в случае многомерного пространства параметров приходится привлекать более сложные соображения.

Лит.: [1] Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Новые направления в линейном программировании, М., 1966; [2] Theorie der linearen parametrischen Optimierung, B., 1974.

А. А. Корбут.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ множества точек пространства — задание точек этого множества или их координат в виде значений функций нек-рых переменных, называемых параметрами.

Параметрич. задание прямой в n-мерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$x = x^{(0)} + at,\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}^n,\ -\infty < t < +\infty, \quad (1)$$

где $x^{(0)}$ и a — фиксированные векторы, $x^{(0)}$ — начальный вектор, а $a \neq 0$ — направляющий вектор, параллельный прямой. Если в $\mathbb{R}^n$ задан базис и координаты вектора x обозначаются через $x_1, \ldots, x_n$, то уравнение (1) в координатной форме имеет вид

$$x_k = x_k^{(0)} + a_k t,\ -\infty < t < +\infty,\ k=1, 2, \ldots, n.$$

Параметрич. задание m-мерной гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$x = x^{(0)} + a^{(1)} t_1 + \ldots + a^{(m)} t_m,\ x^{(0)} \in R^n, \quad (2)$$
$$a^{(j)} \in R^n,\quad -\infty < t_j < +\infty,\quad j=1, 2, \ldots, m,$$

где $x^{(0)}$ — начальный вектор, соответствующий нулевым значениям параметров t_j, а $a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$ — линейно независимая система m векторов, параллельных рассматриваемой гиперплоскости. В координатной форме уравнение (2) имеет вид

$$x_k = x_k^{(0)} + a_k^{(1)} t_1 + \ldots + a_k^{(m)} t_m,\ -\infty < t_j < +\infty,$$
$$j=1, 2, \ldots, m,\quad k=1, 2, \ldots, n.$$

Параметрич. задание m-мерной поверхности в $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$x = x(t) = x(t_1, \ldots, t_m),\quad t=(t_1, \ldots, t_m) \in E \subset \mathbb{R}^m, \quad (3)$$

где E — напр., замыкание нек-рой области m-мерного пространства $\mathbb{R}^m$, а $x: E \to \mathbb{R}^n$ — отображение нек-рого класса: непрерывное, дифференцируемое, непрерывно дифференцируемое, дважды дифференцируемое и т. д., в зависимости от чего рассматриваемая m-мерная поверхность также наз. соответственно непрерывной, дифференцируемой и т. д. В случае $m=1$ множество E является отрезком: $E=[a, b]$ и П. у. (3) превращается в П. у. кривой: $x=x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, в пространстве $\mathbb{R}^n$. Напр., $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, является П. у. на плоскости окружности единичного радиуса с центром в начале координат.

В качестве множества E, на к-ром задано рассматриваемое параметрич. представление, иногда вместо замыкания m-мерной области берутся подмножества пространства $\mathbb{R}^m$ другой природы. *Л. Д. Кудрявцев.*

ПАРЕТО РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное распределение вероятностей с плотностью

$$p(x)=\begin{cases} \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1}, & x_0<x<\infty, \\ 0, & x\leqslant x_0, \end{cases}$$

зависящей от параметров $x_0>0$ и $\alpha>0$. В такой «усеченной» трактовке П. р. выделяется как самостоятельное распределение из семейства *бета-распределений* 2-го рода с плотностью

$$\frac{1}{B(\mu,\ \alpha)}\frac{x^{\mu-1}}{(1+x)^{\mu+\alpha}},\quad \mu,\ \alpha>0,\ 0<x<\infty,$$

при $\mu=1$. Для любого фиксированного x_0 П. р. сводится преобразованием $x=\frac{x_0}{y}$ к бета-распределению 1-го рода. В системе *Пирсона кривых* П. р. принадлежит к распределениям «типа VI» и «типа XI». Математическое ожидание П. р. конечно при $\alpha>1$ и равно $\alpha x_0/(\alpha-1)$; дисперсия конечна при $\alpha>2$ и равна $\alpha x_0^2/(\alpha-1)^2\times(\alpha-2)$; медиана равна $2^{1/\alpha}x_0$. Функция распределения П. р. определена формулой

$$\mathsf{P}\{X<x\}=1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha},\quad x>x_0,\ \alpha>0.$$

П. р. получило широкое распространение в различных задачах экономич. статистики начиная с работ В. Парето (W. Pareto, 1897) о распределении доходов. Считалось, что П. р. достаточно хорошо описывает распределение доходов, превышающих нек-рый уровень, в том смысле, что это распределение должно иметь хвост порядка $1/x^{\alpha}$ при $x\to\infty$.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *А. В. Прохоров.*

ПАРИКМАХЕРА ПАРАДОКС — то же, что *антиномия* «деревенский парикмахер».

ПАРСЕВАЛЯ РАВЕНСТВО — равенство, выражающее квадрат нормы элемента в векторном пространстве со скалярным произведением через квадраты модулей коэффициентов Фурье этого элемента по нек-рой ортогональной системе элементов; так, если X — нормированное сепарабельное векторное пространство со скалярным произведением $(\cdot)$, $\|\cdot\|$ — соответствующая ему норма и $\{e_n\}$ — ортогональная в X система, $e_n\neq 0$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, то равенством Парсеваля для элемента $x\in X$ наз. равенство

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\|e_n\|^2, \tag{1}$$

где $a_n=\frac{(x,\ e_n)}{(e_n,\ e_n)}$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, — коэффициенты Фурье элемента x по системе $\{e_n\}$. Если эта система $\{e_n\}$ ортонормированная, то П. р. имеет вид

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2.$$

Выполнение П. р. для данного элемента $x\in X$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы ряд Фурье этого элемента по ортогональной системе $\{e_n\}$ сходился к самому элементу x по норме пространства X. Выполнение П. р. для любого элемента $x\in X$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы ортогональная система $\{e_n\}$ была полной системой в X. Отсюда следует, в частности:

если X — сепарабельное гильбертово пространство и $\{e_n\}$ — его ортонормированный базис, то П. р. по системе $\{e_n\}$ выполняется для каждого элемента $x\in X$;

если X — сепарабельное гильбертово пространство, $x \in X$, $y \in X$, $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в X, $a_n=(x, e_n)$ и $b_n=(y, e_n)$ — коэффициенты Фурье соответственно элементов x и y, то справедливо равенство

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}, \qquad (2)$$

наз. **обобщенным равенством Парсеваля**. В достаточно законченном виде вопрос о полноте систем функций, являющихся собственными функциями дифференциальных операторов, был изучен В. А. Стекловым [1].

П. р. обобщается и на случай несепарабельных гильбертовых пространств: если $\{e_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ нек-рое множество индексов), является полной ортонормированной системой гильбертова пространства X, то для любого элемента $x \in X$ справедливо П. р.

$$(x, x)=\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} |(x, e_\alpha)|^2,$$

причем сумма в правой части равенства понимается как

$$\sup_{\mathfrak{A}_0} \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} |(x, e_\alpha)|^2,$$

где верхняя грань берется по всевозможным конечным подмножествам $\mathfrak{A}_0$ множества $\mathfrak{A}$.

В случае, когда $X=L_2[-\pi, \pi]$ состоит из действительных функций, квадрат к-рых интегрируем по Лебегу на отрезке $[-\pi, \pi]$, $f \in L_2[-\pi, \pi]$, в качестве полной ортогональной системы взята тригонометрич. система функций и

$$f \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+b_n \sin nx,$$

равенство (1) имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2+b_n^2)$$

и наз. **классическим равенством Парсеваля**; оно было указано М. Парсевалем (M. Parseval, 1805).

Если $g \in L_2[-\pi, \pi]$ и

$$g \sim \frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n' \cos nx+b_n' \sin nx,$$

то равенство, аналогичное формуле (2), выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt=\frac{1}{2} a_0 a_0'+\sum_{n=1}^{\infty} (a_n a_n'+b_n b_n'). \qquad (3)$$

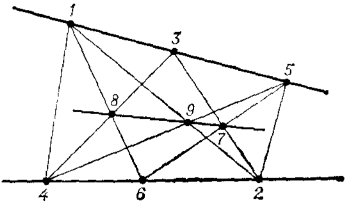
Классы K и K' действительных функций, определенных на отрезке $[-\pi, \pi]$, такие, что для всех $f \in K$ и $g \in K$ имеет место обобщенное П. р. (3), наз. дополнительными. Примером дополнительных классов являются пространства $L_p[-\pi, \pi]$ и

$$L_{p'}[-\pi, \pi], \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \qquad 1<p<+\infty.$$

Лит.: [1] Стеклов В. А., «Записки физико-математич. общества», сер. 8, 1904, т. 15, № 7, с. 1—32; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975; [3] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [4] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [5] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965; [6] Кириллов А. А., Гвишиани А. Д., Теоремы и задачи функционального анализа, М., 1979. *Л. Д. Кудрявцев.*

ПАРСЕВАЛЯ — ПЛАНШЕРЕЛЯ ФОРМУЛА — см. *Планшереля теорема.*

ПАСКАЛЕВА ГЕОМЕТРИЯ — геометрия плоскости, построенной над полем (коммутативным телом). Название этой геометрии связано с тем, что в этой геометрии на плоскости выполняется конфигурационное предложение Паппа — Паскаля: если точки 1, 3, 5 и 2, 4, 6 соответственно лежат на прямых (коллинеарны), то точки пересечения пар прямых (1, 2) и (4, 5), (2, 3) и (5, 6), (3, 4) и (6, 1) — точки 9, 7, 8 — также лежат на одной прямой при любом выборе системы образующих точек 1, 3, 5 на одной прямой и 2, 4, 6 — на другой прямой, отличной от первой (см. рис.). Важнейший частный случай этого предложения (в аффинной плоскости) утверждает: из того, что прямая (4, 3) параллельна (6, 5) и прямая (6, 1) параллельна (2, 3), следует параллельность прямых (2, 5) и (4, 1).



П. г. плоскости может быть построена над бесконечными или конечными полями, соответственно этому плоскость наз. бесконечной или конечной **п а с к а л е в о й п л о с к о с т ь ю.**

Впервые важную роль предложения Паскаля в построении геометрич. систем над бесконечными полями исследовал Д. Гильберт (D. Hilbert, см. [1]), к-рый устанавливал доказуемость предложения Паскаля при различных наборах аксиом из системы аксиом евклидова пространства. Д. Гильберт показал, что *Паскаля теорему* в бесконечной плоскости можно доказать с помощью плоскостных аксиом инцидентности, порядка, конгруэнтности, параллельности и непрерывности, причем было установлено, что без аксиом непрерывности в этом случае теорему Паскаля доказать нельзя.

Опираясь же на пространственные аксиомы системы Гильберта, теорему Паскаля можно доказать без аксиом конгруэнтности, но обязательно с применением аксиом непрерывности (исключение аксиом непрерывности в бесконечной плоскости приводит к *непаскалевой геометрии*). Возможность доказательства теоремы Паскаля аналогична в указанном смысле возможности доказательства *Дезарга предложения* с использованием пространственных аксиом, однако в доказательстве теоремы Паскаля проявляется особая роль аксиом непрерывности Архимеда в бесконечных плоскостях (см. *Неархимедова геометрия*).

Предложение Паппа — Паскаля проективно выполняется в нек-рой плоскости тогда и только тогда, когда умножение во всех натуральных телах этой плоскости обладает коммутативным свойством, или иначе: натуральное тело всякой паскалевой плоскости является полем и, наоборот, плоскость, построенная над полем, обладает П. г. Поэтому П. г. иногда наз. **г е о м е т р и е й с к о м м у т а т и в н ы м у м н о ж е н и е м.** Таким образом, в паскалевой плоскости конфигурационное предложение Паппа — Паскаля имеет алгебраич. инвариант, выражающий коммутативное свойство умножения в множестве, над к-рым построена эта плоскость.

В любой проективной плоскости теорема Паппа — Паскаля влечет за собой предложение Дезарга.

Конечная паскалева плоскость как конечная проективная плоскость существует только в случае, если число точек, лежащих на каждой прямой этой плоскости, есть p^s+1, где p — простое, s — натуральное число. Так как всякое конечное альтернативное тело является полем, то в конечной плоскости предложение Дезарга влечет за собой теорему Паппа — Паскаля, причем последняя является следствием т. н. малой теоремы Дезарга. Вместе с тем существуют конечные проективные плоскости, являющиеся непаскалевыми. Паскалева плоскость изоморфна двойственной себе плоскости.

Значение П. г. определяется ее ролью при исследовании независимости системы аксиом, в частности системы аксиом Гильберта евклидовой геометрии. При построении бесконечной плоскости на основе групп аксиом инцидентности, порядка и параллельности предложение Паппа — Паскаля должно рассматриваться как дополнительная аксиома. С другой стороны, с помощью комбинаций конечного числа конфигураций Паппа — Паскаля оказывается возможным решить задачи на построение, в к-рых используется лишь понятие инцидентности и, может быть, параллельности.

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Bieberbach L., Einleitung in die höhere Geometrie, Lpz., 1933; [3] Скорняков Л. А., «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 6, с. 112—54; [4] Dembowski P., Finite geometries, В.— [u. a.], 1968; [5] Reidemeister K., Grundlagen der Geometrie, В., 1930; [6] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969.

Л. А. Сидоров.

ПАСКАЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — дискретное распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k=0$, 1, 2, . . . в соответствии с формулой

$$\mathsf{P}\{X=k\}=C_{r+k-1}^{r-1}p^r(1-p)^k,$$

где $0<p<1$ и целое $r>0$ — параметры.

Производящая функция и характеристич. функция П. р. равны соответственно

$$P(z)=p^r(1-qz)^{-r}$$

и

$$f(t)=p^r(1-qe^{it})^{-r}, \quad q=1-p.$$

Математич. ожидание и дисперсия суть rq/p и rq/p^2.

П. р. с параметрами r и p возникает естественным образом в схеме *Бернулли испытаний* с вероятностью «успеха» p и вероятностью «неудачи» $q=1-p$ как распределение числа «неудач» до наступления r-го «успеха». При $r=1$ П. р. совпадает с *геометрическим распределением* с параметром p, а при $r>1$ — с распределением суммы независимых случайных величин, имеющих одинаковое геометрич. распределение с параметром p. В соответствии с этим сумма независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, имеющих П. р. с параметрами p и $r_1, \ldots, r_n$ соответственно, имеет П. р. с параметрами p и $r_1+\ldots+r_n$.

Функция распределения П. р. при $k=0, 1, 2, \ldots$ задается формулой

$$F(k)=\frac{1}{B(r,\ k+1)}\int_0^p x^{r-1}(1-x)^k\,dx,$$

где в правой части стоит значение функции *бета-распределения* в точке p ($B(r,\ k+1)$ — бета-функция). Используя это соотношение, можно доопределить $F(k)$ для всех действительных $r>0$. В таком обобщенном смысле П. р. наз. *отрицательным биномиальным распределением.*

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967.

А. В. Прохоров.

ПАСКАЛЯ ТЕОРЕМА: противоположные стороны шестиугольника, вписанного в линию 2-го порядка,

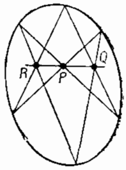


Рис. 1.

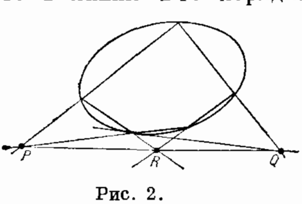


Рис. 2.

пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой (на прямой Паскаля, см. рис. 1). П. т. верна и в том случае, когда две или даже три соседних вершины совпадают (но не более чем по две в одной точке). В этом случае в качестве прямой, проходящей через две совпадающие вершины, принимается касательная к линии в этой точке. Касательная к линии 2-го порядка, проведенная в одной из вершин вписанного пятиугольника, пересекается со стороной, противоположной этой вершине, в точке, к-рая лежит на прямой, проходящей через точки пересечения остальных пар несмежных сторон этого пятиугольника (см. рис. 2).

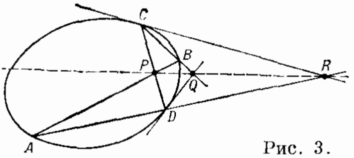


Рис. 3.

Если $ABCD$ — четырехугольник, вписанный в линию 2-го порядка, то точки пересечения касательных в вершинах C и D соответственно со сторонами AD и BC и точка пересечения прямых AB и CD лежат на одной прямой (см. рис. 3).

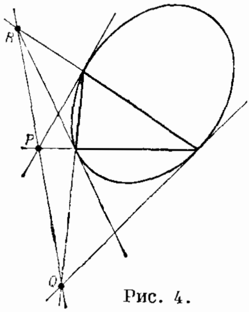


Рис. 4.

Точки пересечения касательных в вершинах треугольника, вписанного в линию 2-го порядка, с противоположными сторонами лежат на одной прямой (см. рис. 4).

П. т. двойственна *Брианшона теореме*.

П. т. установлена Б. Паскалем (B. Pascal, 1639). Частный случай П. т. для линии 2-го порядка, вырождающейся в пару прямых, был известен еще в древности (см. *Паппа аксиома*).

Лит.: [1] Глаголев Н. А., Проективная геометрия, 2 изд., М., 1963; [2] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978. *П. С. Моденов, А. С. Пархоменко.*

ПАСКАЛЯ ТРЕУГОЛЬНИК — таблица чисел, являющихся *биномиальными коэффициентами*. В этой таблице по боковым сторонам равнобедренного треугольника стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и справа:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{array}$$

В строке с номером $n+1$ выписаны коэффициенты разложения бинома $(a+b)^n$. Треугольная таблица, предложенная Б. Паскалем в «Трактате об арифметическом треугольнике» (1654), отличается от выписанной здесь поворотом на 45°. Таблицы для изображения биномиальных коэффициентов были известны и ранее.

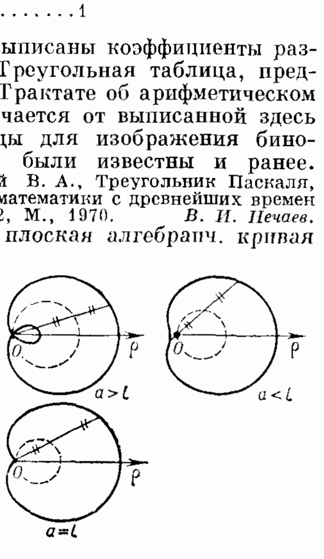
Лит.: [1] Успенский В. А., Треугольник Паскаля, 2 изд., М., 1979; [2] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 2, М., 1970. *В. И. Нечаев.*

ПАСКАЛЯ УЛИТКА — *плоская алгебраич. кривая* 4-го порядка; *конхоида* окружности диаметра a (см. рис.). Уравнение в прямоугольных координатах:

$$(x^2+y^2-ax)^2=l^2\,(x^2+y^2);$$

в полярных координатах:

$$\rho=a\cos\varphi+l.$$



Начало координат — двойная точка, изолированная при $a<l$, узловая при $a>l$, точка возврата при $a=l$ (в этом случае П. у.— *кардиоида*). Длина дуги выражается эллиптич. интегралом 2-го рода. Площадь, ограниченная П. у.:

$$S=\frac{\pi a^2}{2}+\pi l^2;$$

при $a>l$ площадь внутренней петли при вычислении по этой формуле считается дважды. П. у.— частный случай *Декартова овала*, она является эпитрохоидой (см. *Трохоида*).

П. у. названа по имени Э. Паскаля (E. Pascal, 1-я пол. 17 в.), впервые рассмотревшего ее.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ПАУЛИ МАТРИЦЫ — двурядные комплексные постоянные эрмитовы матрицы коэффициентов. Введены В. Паули (W. Pauli, 1927) для описания спинового механич. момента (спина $\hat{s}=\frac{\hbar}{2}\bar{\sigma}$) и магнитного момента ($\bar{\mu}=\frac{e\hbar}{2mc}\bar{\sigma}$) электрона. Это уравнение корректным образом в нерелятивистском случае описывает частицы со спином $\frac{1}{2}$ (в единицах $\hbar$) и может быть получено из *Дирака уравнения* при условии $\frac{v}{c}\ll 1$. В явном виде П. м. можно записать следующим образом:

$$\sigma_1=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix};\quad \sigma_2=\begin{Vmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{Vmatrix};\quad \sigma_3=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix}.$$

Их собственные значения равны ± 1. П. м. удовлетворяют следующим алгебраич. соотношениям:

$$\sigma_i\sigma_k+\sigma_k\sigma_i=2\delta_{ik},$$

$$\sigma_i\sigma_k-\sigma_k\sigma_i=2i\varepsilon_{ikl}\sigma_l.$$

Вместе с единичной матрицей $\sigma_0=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$ П. м. образуют полную систему матриц второго ранга, по к-рой может быть разложен произвольный линейный оператор (матрица) размерности 2. П. м. действуют на двухкомпонентные функции-спиноры ψ_A, $A=1, 2$, преобразующиеся при вращении системы координат по линейному двузначному представлению группы вращений. При повороте на бесконечно малый угол вокруг оси с единичным направляющим вектором $\boldsymbol{n}$, спинор ψ_A преобразуется по формуле

$$\psi_A=\left[\sigma_{AB}+\frac{1}{2}i\theta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})_{AB}\right]\psi'_B,$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}=\sigma_1 n_x+\sigma_2 n_y+\sigma_3 n_z.$$

Из П. м. можно образовать *Дирака матрицы* γ_α, $\alpha=0$, 1, 2, 3:

$$\gamma_0=\begin{Vmatrix}\sigma_0 & 0\\ 0 & -\sigma_0\end{Vmatrix};\quad \gamma_k=\begin{Vmatrix}0 & \sigma_k\\ -\sigma_k & 0\end{Vmatrix};\quad k=1,\ 2,\ 3.$$

П. м. изоморфны системе простейших гиперкомплексных чисел — кватернионов. Они используются всегда, когда элементарная частица имеет дискретный параметр, принимающий лишь два значения, напр. при описании изоспина нуклона (протон — нейтрон). Вообще П. м. используются не только для описания изотопич. пространства, но и в формализме группы внутренней симметрии SU (2). В этом случае П. м. являются генераторами двузначного представления группы SU (2) и обозначаются как τ_1, τ_2, τ_3. Иногда удобно пользоваться линейными комбинациями

$$\tau^+=\frac{1}{2}(\tau_1+i\tau_2)=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{Vmatrix};\ \tau^-=\frac{1}{2}(\tau_1-i\tau_2)=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{Vmatrix}.$$

В нек-рых случаях для релятивистски ковариантного описания двукомпонентных спинорных функций вместо П. м. вводятся связанные с ними матрицы S_α с помощью следующего изоморфизма:

$$S_0 S_0^* + \sigma_0 = 0; \quad S_i S_0^* = \sigma_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \qquad (1)$$

где знак (*) обозначает комплексное сопряжение. Матрицы S_α удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$S_\alpha S_\beta^* + S_\beta S_\alpha^* = 2\eta_{\alpha,\ \beta}, \qquad (2)$$

где $\eta_{\alpha,\ \beta}$ — компоненты метрич. тензора пространства Минковского с сигнатурой $+2$. Формулы (1) и (2) позволяют ковариантным образом обобщить П. м. на произвольное искривленное пространство

$$S_\alpha S_\beta^* + S_\beta S_\alpha^* = 2g_{\alpha\beta},$$

где $g_{\alpha\beta}$ — компоненты метрич. тензора искривленного пространства.

Лит.: [1] Паули В., Труды по квантовой теории, [пер. с нем., т. 1—2], М., 1975—77; [2] Нелипа Н. Ф., Физика элементарных частиц, М., 1977; [3] Бриль Д., Уилер Дж., в кн.: Новейшие проблемы гравитации, М., 1961, с. 381—427. *В. Г. Кречет.*

ПАША АКСИОМА — одна из аксиом порядка в *Гильберта системе аксиом* евклидовой геометрии. Формулировка аксиомы использует понятие «лежать внутри отрезка», причем отрезок здесь рассматривается как система двух различных точек A и B, принадлежащих одной прямой; точки, лежащие «между» точками A и B, наз. точками отрезка (или внутренними точками отрезка). Понятие «между» (лежать между) описывается группой аксиом порядка, куда входит и П. а., к-рая формулируется следующим образом: пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая в плоскости (ABC) этих трех точек, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; если при этом прямая проходит через одну из точек отрезка AB, то она должна пройти через одну из точек отрезка AC или через одну из точек отрезка BC.

П. а. является аксиомой *абсолютной геометрии*. С помощью других гильбертовых аксиом порядка можно доказать, что прямая a не может пересечь оба отрезка AC и BC. Аксиома сформулирована М. Пашем [1].

Лит.: [1] Pasch M., Vorlesungen über neuere Geometrie, Lpz., 1882; [2] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948. *Л. А. Сидоров.*

ПЕАНО АКСИОМЫ — система из пяти аксиом для натурального ряда N и функции S (прибавление 1) на нем, введенная Дж. Пеано (G. Peano, 1889):

(1) $0 \in N$;

(2) $x \in N \longrightarrow Sx \in N$;

(3) $x \in N \longrightarrow Sx \neq 0$;

(4) $x \in N \wedge y \in N \wedge Sx = Sy \longrightarrow x = y$;

(5) $0 \in M \wedge \forall x\ (x \in M \longrightarrow Sx \in M) \longrightarrow N \subseteq M$ для любого свойства M (аксиома индукции).

В первом варианте вместо 0 использовалась 1. Сходные аксиомы независимо предложил Р. Дедекинд (R. Dedekind, 1888). П. а. категоричны, т. е. любые две системы $(N,\ S,\ 0)$ и $(N',\ S',\ 0')$, удовлетворяющие П. а., изоморфны. Изоморфизм определяется функцией $f(x,\ x)$, где

$$f(0,\ 0) = 0', \quad f(Sx,\ Sx) = S'f(x,\ x);$$
$$f(x,\ Sy) = f(x,\ y); \ f(x,\ y) = 0 \text{ для } y < x.$$

Существование $f(x,\ y)$ для всех пар $(x,\ y)$ и взаимная однозначность при $x \leqslant y$ доказываются по индукции. П. а. позволяют развить теорию чисел, в частности ввести обычные арифметич. функции и доказать их свойства. Все аксиомы независимы, однако (3) и (4) можно объединить в одну:

$$x \in N \wedge y \in N \wedge x < y \longrightarrow x \neq y,$$

если определить $x<y$ как

$$\forall M\,[M(Sx)\wedge\forall z\,(M(z)\longrightarrow M(Sz))\longrightarrow M(y)].$$

Независимость доказывается предъявлением модели, в к-рой верны все аксиомы, кроме рассматриваемой. Для (1) такая модель — натуральный ряд, начиная с единицы; для (2) — множество $N\cup\{1/2\}$, где $S0=1/2$, $S(1/2)=1$; для (3) — множество $\{0\}$; для (4) — множество $\{0, 1\}$ с $S0=S1=1$; для (5) — множество $N\cup\{-1\}$.

Иногда под **арифметикой Пеано** понимают систему в языке 1-го порядка с функциональными символами S, $+$, $\cdot$, состоящую из аксиом

$$Sx\neq 0,\quad Sx=Sy\longrightarrow x=y,$$

определяющих равенств для $+$, $\cdot$ и схемы индукции

$$A(0)\wedge\forall x\,(A(x)\longrightarrow A(Sx))\longrightarrow\forall x A(x)$$

(см. *Арифметика формальная*).

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *Г. Е. Минц.*

ПЕАНО КРИВАЯ — непрерывный образ отрезка, заполняющий внутренность квадрата (или треуголь-

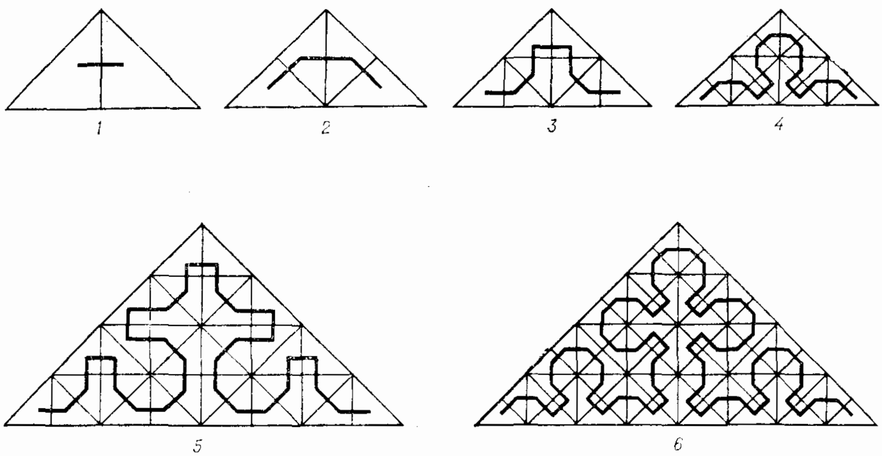


Рис. 1.

ника). Открыта Дж. Пеано [1]. П. к., рассматриваемая как плоская фигура, не есть множество, нигде не плотное на плоскости; она является жордановой, но не канторовой кривой, а потому не является линией. Построение П. к., заполняющей квадрат, см. в ст. *Линия*; оно принадлежит Д. Гильберту (D. Hilbert). На рис. 1 приведен аналог его построения для треугольника (первые шесть шагов) (другие конструкции см. в [2] и [3]).

Всякая П. к. имеет кратные точки — это «предложение имеет огромную принципиальную важность для геометрии, так как оно показывает, в чем именно кроется самая геометрическая сущность различия числа измерений плоскости и прямой» (Н. Н. Лузин). Не существует П. к., всякая точка к-рой была бы простой или двукратной, но существует П. к., имеющая самое большее лишь трехкратные точки (в счетном числе),— такова, напр., кривая, построенная самим Дж. Пеано; конструкция Д. Гильберта содержит четырехкратные точки (также в счетном числе).

С понятием П. к. связан любопытный факт существования пространственных простых дуг, проектирующихся на плоскость в виде сплошных площадей,— такова, напр., кривая $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=t$, где первые две функции задают П. к. Хотя эта дуга и может служить непроницаемой для дождя крышей, однако она вовсе не есть непрерывная поверхность.

Известный интерес представляют т. н. **правильные замкнутые кривые типа Пеано** — пределы последовательностей симметричных замкнутых кривых, соответствующих последовательностям триангуляций произвольного правильного многоугольника, каждая из к-рых является правильным (т. е. полученным делением на две равные части) подразделением предыдущей (пример — на рис. 2). При этом последовательность кривых можно выбрать так, чтобы предел площадей областей, ими ограниченных, был равен заданной величине (даже нулю или площади всей подразделяемой фигуры) (рис. 3). Кажется вероятным, что подобные картинки могут быть полезны при исследовании роста кристаллич. структур. Аналогично с помощью последовательностей триангуляций можно строить отображения прямой в плоскость, в частности «периодические» кривые типа Пеано.

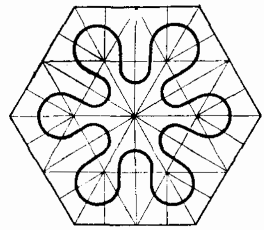


Рис. 2.

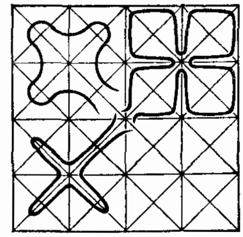


Рис. 3.

Существует аналог П. к., заполняющий многомерный и даже счетномерный куб (см. [3]).

Далеко идущее обобщение содержит **теорема Мазуркевича**: если X — континуум, то эквивалентны условия: а) пространство X локально связно, б) X — непрерывный образ интервала.

Лит.: [1] Peano G., «Math. Ann.», 1890, Bd 36, S. 157; [2] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [3] Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного, 2 изд., М., 1948. *М. И. Войцеховский.*

ПЕАНО ПРОИЗВОДНАЯ — одно из обобщений понятия производной. Пусть существует $\delta>0$ такое, что для всех t с $|t|<\delta$ имеет место

$$f(x_0+t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\ldots+\frac{\alpha_r}{r!}t^r+\gamma(t)\,t^r,$$

где $\alpha_0, \ldots, \alpha_r$ — постоянные и $\gamma(t)\to 0$ при $t\to 0$. Пусть $\gamma(0)=0$. Тогда число α_r наз. **обобщенной производной Пеано** порядка r функции f в точке x_0. Обозначение: $f_r(x_0)=\alpha_r$, в частности $\alpha_0=f(x_0)$, $\alpha_1=f'(x_0)$. Если существует $f_{(r)}(x_0)$, то существует и $f_{(r-1)}(x_0)$, $r\geqslant 1$. Если существует конечная обычная двусторонняя производная $f^{(r)}(x_0)$, то $f_{(r)}(x_0)=f^{(r)}(x_0)$. Обратное неверно при $r>1$: для функции

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \text{ и рационально},\\ 0, & x=0 \text{ или иррационально},\end{cases}$$

если определить $x<y$ как

$$\forall M\ [M\ (Sx) \wedge \forall z\ (M\ (z) \longrightarrow M\ (Sz)) \longrightarrow M\ (y)].$$

Независимость доказывается предъявлением модели, в к-рой верны все аксиомы, кроме рассматриваемой. Для (1) такая модель — натуральный ряд, начиная с единицы; для (2) — множество $N \bigcup \{1/2\}$, где $S0=1/2$, $S\ (1/2)=1$; для (3) — множество $\{0\}$; для (4) — множество $\{0,\ 1\}$ с $S0=S1=1$; для (5) — множество $N \bigcup \bigcup \{-1\}$.

Иногда под арифметикой Пеано понимают систему в языке 1-го порядка с функциональными символами S, $+$, $\cdot$, состоящую из аксиом

$$Sx \neq 0, \quad Sx = Sy \longrightarrow x = y,$$

определяющих равенств для $+$, $\cdot$ и схемы индукции

$$A\ (0) \wedge \forall x\ (A\ (x) \longrightarrow A\ (Sx)) \longrightarrow \forall x A\ (x)$$

(см. *Арифметика формальная*).

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

Г. Е. Минц.

ПЕАНО КРИВАЯ — непрерывный образ отрезка, заполняющий внутренность квадрата (или треуголь-

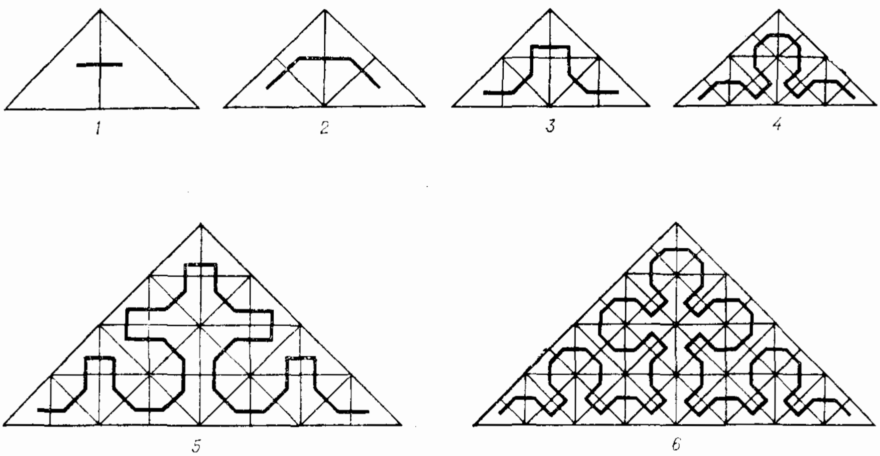


Рис. 1.

ника). Открыта Дж. Пеано [1]. П. к., рассматриваемая как плоская фигура, не есть множество, нигде не плотное на плоскости; она является жордановой, но не канторовой кривой, а потому не является линией. Построение П. к., заполняющей квадрат, см. в ст. *Линия*; оно принадлежит Д. Гильберту (D. Hilbert). На рис. 1 приведен аналог его построения для треугольника (первые шесть шагов) (другие конструкции см. в [2] и [3]).

Всякая П. к. имеет кратные точки — это «предложение имеет огромную принципиальную важность для геометрии, так как оно показывает, в чем именно кроется самая геометрическая сущность различия числа измерений плоскости и прямой» (Н. Н. Лузин). Не существует П. к., всякая точка к-рой была бы простой или двукратной, но существует П. к., имеющая самое большее лишь трехкратные точки (в счетном числе),— такова, напр., кривая, построенная самим Дж. Пеано; конструкция Д. Гильберта содержит четырехкратные точки (также в счетном числе).

С понятием П. к. связан любопытный факт существования пространственных простых дуг, проектирующихся на плоскость в виде сплошных площадей,— такова, напр., кривая $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=t$, где первые две функции задают П. к. Хотя эта дуга и может служить непроницаемой для дождя крышей, однако она вовсе не есть непрерывная поверхность.

Известный интерес представляют т. н. правильные замкнутые кривые типа Пеа-

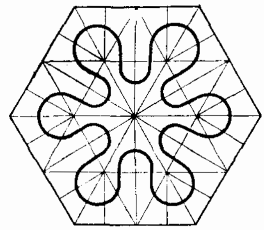


Рис. 2.

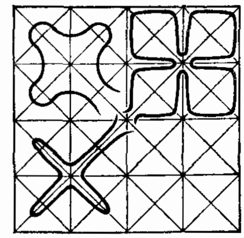


Рис. 3.

но — пределы последовательностей симметричных замкнутых кривых, соответствующих последовательностям триангуляций произвольного правильного многоугольника, каждая из к-рых является правильным (т. е. полученным делением на две равные части) подразделением предыдущей (пример — на рис. 2). При этом последовательность кривых можно выбрать так, чтобы предел площадей областей, ими ограниченных, был равен заданной величине (даже нулю или площади всей подразделяемой фигуры) (рис. 3). Кажется вероятным, что подобные картинки могут быть полезны при исследовании роста кристаллич. структур. Аналогично с помощью последовательностей триангуляций можно строить отображения прямой в плоскость, в частности «периодические» кривые типа Пеано.

Существует аналог П. к., заполняющий многомерный и даже счетномерный куб (см. [3]).

Далеко идущее обобщение содержит теорема Мазуркевича: если X — континуум, то эквивалентны условия: а) пространство X локально связно, б) X — непрерывный образ интервала.

Лит.: [1] Peano G., «Math. Ann.», 1890, Bd 36, S. 157; [2] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [3] Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного, 2 изд., М., 1948.

М. И. Войцеховский.

ПЕАНО ПРОИЗВОДНАЯ — одно из обобщений понятия производной. Пусть существует $\delta>0$ такое, что для всех t с $|t|<\delta$ имеет место

$$f\ (x_0+t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \frac{\alpha_r}{r!}\, t^r + \gamma\ (t)\ t^r,$$

где $\alpha_0, \ldots, \alpha_r$ — постоянные и $\gamma(t) \to 0$ при $t \to 0$. Пусть $\gamma(0)=0$. Тогда число α_r наз. обобщенной производной Пеано порядка r функции f в точке x_0. Обозначение: $f_r\ (x_0)=\alpha_r$, в частности $\alpha_0=f\ (x_0)$, $\alpha_1=f'\ (x_0)$. Если существует $f_{(r)}\ (x_0)$, то существует и $f_{(r-1)}\ (x_0)$, $r \geqslant 1$. Если существует конечная обычная двусторонняя производная $f^{(r)}\ (x_0)$, то $f_{(r)}\ (x_0)=f^{(r)}\ (x_0)$. Обратное неверно при $r>1$: для функции

$$f\ (x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \text{ и рационально}, \\ 0, & x = 0 \text{ или иррационально}, \end{cases}$$

имеет место $f_{(r)}(0)=0$, $r=1, 2, \ldots$, но не существует $f_{(1)}(x)=f'(x)$ при $x \neq 0$ (ибо $f(x)$ разрывна при $x \neq 0$). Следовательно, не существует обычная производная $f^{(r)}(0)$ при $r>1$.

Вводятся также и бесконечные обобщенные производные Пеано. Пусть для всех t с $|t|<\delta$ имеет место

$$f(x_0+t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\ldots+\frac{\alpha_{r-1}}{(r-1)!}t^{r-1}+\frac{\alpha_r(t)}{r!}t^r,$$

где $\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}$ — постоянные и $\alpha_r(t) \rightarrow \alpha_r$ при $t \rightarrow 0$ (α_r — число или символ ∞). Тогда α_r также наз. П. п. порядка r функции f в точке x_0. Введена Дж. Пеано (G. Peano). *А. А. Конюшков.*

ПЕАНО ТЕОРЕМА — одна из теорем существования решения обыкновенного дифференциального уравнения, установленная Дж. Пеано [1] и состоящая в следующем. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'=f(x, y). \qquad (*)$$

Тогда если функция f ограничена и непрерывна в области G, то через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) этой области проходит, по крайней мере, одна интегральная кривая уравнения (*). Может оказаться, что через нек-рую точку проходит более одной интегральной кривой, напр. для уравнения $y'=2\sqrt{y}$ существует бесконечное множество интегральных кривых, проходящих через точку (0, 0):

$$y(0), \quad -b \leqslant x \leqslant a,$$
$$y=-(x+b)^2, \quad x \leqslant -b,$$
$$y=(x-a)^2, \quad x \geqslant a,$$

где a, b — произвольные постоянные.

Имеются обобщения (в том числе многомерные) П. т. (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Peano G., «Math. Ann.», 1890, Bd 37, S. 182—228; [2] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970; [3] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970. *М. И. Войцеховский.*

ПЕЙДЖА ТЕОРЕМА — 1) П. т. о нулях L-функций Дирихле: пусть $L(s, \chi)$ — *Дирихле L-функция*, $s=\sigma+it$, χ — *Дирихле характер* по mod d, $d \geqslant 3$; существуют абсолютные положительные постоянные $c_1, \ldots, c_8$ такие, что

а) $L(s, \chi) \neq 0$ при $\sigma > 1-c_1/\log dt$, $t \geqslant 3$;

б) $L(s, \chi) \neq 0$ при $\sigma > 1-c_2/\log d$, $0 < t < 5$;

в) для комплексного χ mod d,

$$L(s, \chi) \neq 0 \text{ при } \sigma > 1-c_3/\log d, \ |t| \leqslant 5;$$

г) для действительного примитивного χ mod d,

$$L(\sigma, \chi) \neq 0 \text{ при } \sigma > 1-c_4/\sqrt{d}\log^2 d;$$

д) для $2<d \leqslant D$ существует не более одного $d=d_0$, $d_0>c_5\log^2 D/(\log\log D)^8$ и не более одного действительного примитивного χ_1 mod d_0, для к-рого $L(s, \chi_1)$ может иметь действительный нуль $\beta_1>1-c_6/\log D$, причем β_1 является однократным нулем и для всех β таких, что $L(\beta, \chi)=0$, $\beta>1-c_6/\log D$ с действительным χ mod d имеют $d \equiv 0 \pmod{d_0}$.

2) П. т. о $\pi(x; d, l)$ — числе простых чисел $p \leqslant x$, $p \equiv l \pmod d$, при $0<l \leqslant d$, l и d — взаимно простых. В обозначениях и при условиях п. 1 вследствие а) — в) и д) справедливо равенство

$$\pi(x; d, l)=\frac{\operatorname{li} x}{\varphi(d)}-E\frac{\chi(l)}{\varphi(d)}\sum_{n \leqslant x}\frac{n^{\beta_1-1}}{\log n}+$$
$$+O\left(xe^{-c_7\sqrt{\log x}}\right),$$

где $E=1$ или $E=0$, смотря по тому, существует β_1

или нет для данного d, и вследствие 2), для любого $d \ll (\log x)^{1-\delta}$ при фиксированном $\delta > 0$

$$\pi(x;\ d,\ l) = \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(d)} + O\left(xe^{-c_8\sqrt{\log x}}\right). \qquad (*)$$

Этот результат является единственным (1983), к-рый эффективен в том смысле, что, если значение δ задано, можно указать численные значения c_8 и постоянной, входящей в символ O. Замена оценки 2) оценкой Зигеля: $L(\sigma,\ \chi) \neq 0$ при $\sigma > 1 - c(\varepsilon)d^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ распространяет действие формулы (*) на существенно большие d, $d \ll (\log x)^A$, с любым фиксированным A, но при этом утрачивается эффективность оценок в формуле (*) — по заданному $\varepsilon > 0$ невозможно оценить $c_8 = c_8(\varepsilon)$ и $O = O_\varepsilon$.

П. т. установлены Э. Пейджем [1].

Лит.: [1] Page A., «Proc. London Math. Soc. Ser. 2», 1935, v. 39, № 2, p. 116—41; [2] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975; [3] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967.

А. Ф. Лаврик.

ПЕКЛЕ ЧИСЛО — один из критериев подобия для процессов конвективного теплообмена. П. ч. характеризует соотношение между конвективным и молекулярным процессами переноса тепла в потоке жидкости. П. ч.

$$\mathrm{Pe} = vl/a = C_p \rho v/(\lambda/l),$$

где l — характерный линейный размер поверхности теплообмена, v — скорость потока жидкости относительно поверхности теплообмена, a — коэффициент температуропроводности, C_p — теплоемкость при постоянном давлении, ρ — плотность и λ — коэффициент теплопроводности жидкости.

П. ч. связано с *Рейнольдса числом* Re и *Прандтля числом* Pr соотношением $\mathrm{Pe} = \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}$.

П. ч. названо по имени Ж. Пекле (J. Péclet).

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

ПЕЛЛЯ УРАВНЕНИЕ — диофантово уравнение вида

$$x^2 - dy^2 = 1, \qquad (1)$$

а также более общее уравнение

$$x^2 - dy^2 = c, \qquad (2)$$

где d — натуральное, $\sqrt{d}$ — иррациональное число, c — целое, неизвестные x и y — целые числа.

Если P_s/Q_s, $s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ — подходящие дроби разложения $\sqrt{d}$ в цепную дробь с периодом k, то положительные решения уравнения (1) имеют вид

$$x = P_{kn-1}, \quad y = Q_{kn-1},$$

где n — любое натуральное число такое, что kn четно.

Все решения уравнения (1) получаются из формулы

$$x + y\sqrt{d} = \pm\,(x_0 + y_0\sqrt{d})^n,$$

где n — любое целое, а $(x_0,\ y_0)$ решение с наименьшими положительными значениями неизвестных. Общее уравнение (2) либо совсем не имеет решений, либо — бесконечно много. При $c = -1$ решения существуют тогда и только тогда, когда k нечетно. При $c = 4$ уравнение (2) всегда имеет решения. С помощью решений П. у. при $c = \pm 1,\ \pm 4$ находятся единицы квадратичного поля $R(\sqrt{d})$. Решения П. у. используются при нахождении автоморфизмов бинарных квадратичных форм $Ax^2 + Bxy + Cy^2$; они позволяют по одному решению диофантова уравнения $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = n$ получить бесконечное множество решений.

Уравнение (1) изучалось У. Броункером (W. Brouncker, 1657), П. Ферма (P. Fermat) и Дж. Валлисом (J. Wallis). Л. Эйлер (L. Euler) по недоразумению связал его с именем Дж. Пелля (J. Pell).

Лит.: [1] Вальфиш А. З., Уравнение Пелля, Тб., 1952; [2] Гельфонд А. О., Решение уравнений в целых числах, 3 изд., М., 1978; [3] Le Veque W. J., Topics in number theory, L., 1961. *А. А. Бухштаб.*

ПЕНЛЕВЕ ПРОБЛЕМА — проблема характеризации *устранимых множеств* для класса ограниченных однозначных аналитич. функций комплексного переменного z. Пусть E — компактное множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ такое, что дополнение $CE = \mathbb{C} \setminus E$ есть область. Каковы минимальные условия на E, при выполнении к-рых любая ограниченная однозначная аналитич. функция в CE продолжается аналитически на E и, следовательно, является константой? П. Пенлеве [1] указал достаточное условие: линейная мера Хаусдорфа множества E (такие множества иногда наз. множествами Пенлеве) должна обращаться в нуль; однако его рассуждения содержали ряд неточностей (см. [2], [3]). Необходимое и достаточное условие на E состоит в том, чтобы *аналитическая емкость* E обращалась в нуль (теорема Альфорса). Построен пример множества нулевой аналитической емкости, но положительной линейной меры [5].

Лит.: [1] Painlevé P., Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm, [1895], P., 1897; [2] Zoretti L., «J. math. pure appl.», 1905, t. 1, p. 1—51; [3] его же, Leçons sur le prolongement analytique, P., 1911; [4] Ahlfors L., «Duke Math. J.», 1947, v. 14, p. 1—11; [5] Витушкин А. Г., «Докл. АН СССР», 1959, т. 127, № 2, с. 246—49. *Е. Д. Соломенцев.*

ПЕНЛЕВЕ ТЕОРЕМА — 1) П. т. о решениях аналитических дифференциальных уравнений: решения дифференциального уравнения $P(w', w, z) = 0$, где P — многочлен относительно неизвестной функции w и ее производной w' и w — аналитич. функция относительно независимого переменного z, не могут иметь подвижных (т. е. зависящих от произвольной постоянной) существенно особых точек и трансцендентных точек ветвления.

2) П. т. об аналитическом продолжении: если Γ — спрямляемая жорданова кривая, расположенная в области D на плоскости комплексного переменного z, и функция $f(z)$ непрерывна в D и аналитична на $D \setminus \Gamma$, то $f(z)$ — аналитич. функция и во всей области D (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Painlevé P., Sur les lignes singulières des fonctions analytiques, P., 1887; [2] его же, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm, [1895], P., 1897; [3] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950. *Е. Д. Соломенцев.*

ПЕНЛЕВЕ УРАВНЕНИЕ — общее название группы из шести специальных обыкновенных дифференциальных уравнений типа

$$w'' = R(w', w, z),$$

где R — рациональная функция от w' и w и аналитич. функция от z. Любое такое уравнение, имеющее лишь неподвижные критич. точки, может быть приведено к одному из 50 канонич. уравнений. Среди этих уравнений имеются линейные уравнения, уравнения Риккати и др. известные уравнения, а также 6 уравнений, называемые уравнениями Пенлеве и имеющие своими решениями трансцендентные функции Пенлеве — специальные функции, не сводящиеся к другим известным функциям. Расположенные в общепринятом порядке, П. у. имеют следующий вид (a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ — константы):

1) $w'' = 6w^2 + z$;

2) $w'' = 2w^3 + zw + a$;

3) $w'' = \dfrac{w'^2}{w} + e^z(aw^2 + b) + e^{2z}\left(cw^3 + \dfrac{d}{w}\right), \quad bd \neq 0$;

4) $w'' = \dfrac{w'^2}{2w} + \dfrac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - a)w + \dfrac{b}{w}$;

5) $w''=w'^2\left(\frac{1}{2w}+\frac{1}{w-1}\right)-\frac{w'}{z}+\frac{(w-1)^2}{z^2}\left(aw+\frac{b}{w}\right)+$

$$+c\,\frac{w}{z}+d\,\frac{w(w+1)}{w-1};$$

6) $w''=\frac{w'^2}{2}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w-z}\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{w-z}\right)w'+$

$$+\frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left[a+b\,\frac{z}{w^2}+c\,\frac{z-1}{(w-1)^2}+d\,\frac{z(z-1)}{(w-z)^2}\right].$$

Указанные результаты впервые получены в исследованиях П. Пенлеве (см. [1], [2]), к-рые были продолжены, уточнены и дополнены Б. Гамбье [3].

Лит.: [1] Painlevé P., «Bull. Soc. math. France», 1900, t. 28, p. 201—61; [2] его же, «Acta math.», 1902, t. 25, p. 1—85; [3] Gambier B., там же, 1910, t. 33, p. 1—55; [4] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950; [5] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Хар., 1939. *Н. Х. Розов.*

ПЕНТАСФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — вид однородных координат, связанных с декартовыми прямоугольными координатами формулами:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{Z_1}{N},\quad x=\frac{Z_2}{N},\quad y=\frac{Z_3}{N},\quad z=\frac{Z_4}{N}.$$

П. к. точки в 3-мерном евклидовом пространстве связаны соотношением

$$Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2-NZ_1=0. \qquad (*)$$

С помощью П. к. можно пополнить 3-мерное евклидово пространство до сферического, допуская элемент $N=0$. При этом соотношение (*) описывает положение этого 3-мерного сферич. пространства в 4-мерном проективном пространстве.

Существует 2-мерный аналог П. к.— тетрациклические координаты. Именно, пусть

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$$

— уравнение сферы в однородных координатах, где x_4 — радиус сферы. Числа x_1, x_2, x_3, x_4 являются П. к. той точки плоскости, к-рая соответствует точке сферы при стереографич. проекции сферы на плоскость.

Вполне аналогичные построения могут быть проведены в пространствах более высокой размерности, в результате чего получаются полисферические координаты. В 4-мерном случае они наз. гексасферическими координатами. Полисферич. координаты используются в конформной геометрии, при изучении многообразий фигур.

Лит.: [1] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1939; [2] Бушманова Г. В., Норден А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972. *Д. Д. Соколов.*

ПЕРВАЯ АКСИОМА СЧЕТНОСТИ — понятие теоретико-множественной топологии. Топологич. пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, если система окрестностей всякой его точки обладает счетной базой. Класс пространств, удовлетворяющих П. а. с., выделен Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorff, 1914); к этому классу принадлежат, напр., все метрич. пространства, пространство непрерывных функций на отрезке и др. Пространства, удовлетворяющие *второй аксиоме счетности*, удовлетворяют и П. а. с. Обратное неверно, напр. всякое несчетное пространство с дискретной топологией не удовлетворяет П. а. с.

М. И. Войцеховский.

ПЕРВАЯ ВАРИАЦИЯ — см. *Вариация функционала.*

ПЕРВАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА, метрическая форма, поверхности — квадратичная форма от дифференциалов координат на поверхности, к-рая определяет внутреннюю геометрию поверхности в окрестности данной точки.

Пусть поверхность задана уравнением

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v),$$

где u и v — внутренние координаты на поверхности;

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv$$

— дифференциал радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ вдоль выбранного направления $du : dv$ смещения из точки M в бесконечно близкую точку M' (см. рис. 1). Квадрат главной линейной части приращения длины дуги MM' выражается квадратом дифференциала $d\boldsymbol{r}$:

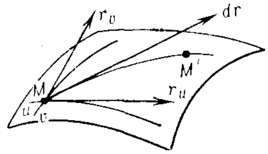


Рис. 1.

$$I = ds^2 = d\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{r}_u^2\,du^2 + 2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\,du\,dv + \boldsymbol{r}_v^2\,dv^2$$

и наз. **первой основной квадратичной формой поверхности.** Коэффициенты П. к. ф. обычно обозначают через

$$E = \boldsymbol{r}_u^2, \quad F = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v), \quad G = \boldsymbol{r}_v^2$$

или в тензорных символах

$$d\boldsymbol{r}^2 = g_{11}\,du^2 + 2g_{12}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2.$$

Тензор g_{ij} наз. основным, или метрическим, тензором поверхности. П. к. ф. является положительно определенной формой в обыкновенных точках поверхности:

$$EG - F > 0.$$

П. к. ф. характеризует метрич. свойства поверхности: знание П. к. ф. позволяет вычислять длины дуг на поверхности:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt,$$

где t — параметр на кривой; углы между кривыми на поверхности:

$$\cos(\widehat{dr\ \delta r}) =$$

$$= \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}},$$

где $du : dv$ и $\delta u : \delta v$ — направления векторов, касательных к кривым (см. рис. 2); площади областей на поверхности:

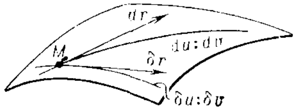


Рис. 2.

$$\sigma = \iint \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Вид коэффициентов П. к. ф. существенно зависит от выбора координат на поверхности. П. к. ф. имеет т. н. ортогональный вид:

$$E\,(u, v)\,du^2 + G\,(u, v)\,dv^2$$

в ортогональных координатах; канонический вид

$$du^2 + G^2\,dv^2$$

в полугеодезич. координатах; изотермический (изометрический) вид в изотермич. координатах

$$ds^2 = \lambda^2\,(u, v)\,(du^2 + dv^2).$$

Иногда поверхности характеризуются специальными видами П. к. ф. Напр., *Лиувилля поверхности* характеризуются следующим видом П. к. ф.:

$$[\varphi\,(u) + \psi\,(v)]\,(du^2 + dv^2).$$

П. к. ф. является инвариантом изгибания поверхности: полная кривизна поверхности в данной точке может быть вычислена через коэффициенты только П. к. ф. и их производные (теоремы Гаусса).

О связи П. к. ф. с другими квадратичными формами поверхности и лит. см. в ст. *Квадратичные формы поверхности.*

А. Б. Иванов.

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА — краевая задача специального вида; заключается в отыскании в области D переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ решения дифференциального уравнения

$$Lu=f \tag{1}$$

четного порядка $2m$ по заданным значениям всех производных порядка не выше m на границе S области D (или ее части). Эти условия обычно задаются в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^k u\Big|_S=\varphi_k, \quad 0\leqslant k\leqslant m-1, \tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к ∂D. Функции φ_k, $0\leqslant k\leqslant m-1$, наз. данными Дирихле, а сама задача (1), (2), если $S=\partial D$, — *Дирихле задачей.*

Для обыкновенного дифференциального уравнения

$$Lu\equiv u''+a_1u'+au=f \tag{3}$$

в области $D=(x_0<x<x_1)$ П. к. з. определяется краевым условием

$$u(x_0)=y_0, \quad u(x_1)=y_1.$$

Для линейного равномерно эллиптич. уравнения

$$Lu\equiv\sum\nolimits_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum\nolimits_{i=1}^{n} a_iu_{x_i}+au=f \tag{4}$$

П. к. з. (задача Дирихле) состоит в нахождении решений этого уравнения при условии

$$u\,|_{\partial D}=\varphi.$$

Если функции a_{ij}, a_i, a, f, φ и $(n-1)$-мерное многообразие ∂D достаточно гладки, то эта задача фредгольмова. В частности, когда мера D достаточно мала или когда $a\leqslant 0$ в D, П. к. з. однозначно разрешима. Условия гладкости могут быть значительно ослаблены как в отношении коэффициентов уравнения и данных Дирихле, так и в отношении границы ∂D.

Если (1) является системой $N>1$ уравнений относительно неизвестного N-компонентного вектора u, то П. к. з. ставится аналогичным образом. В этом случае между задачами Дирихле для систем (3) и (4) имеется существенное различие: если задача (3), (2) $(S=\partial D)$ всегда фредгольмова, то фредгольмовость задачи (4), (2) может нарушаться. Напр., однородная задача Дирихле для равномерно эллиптич. системы Бицадзе (см. [1])

$$u^1_{xx}-u^1_{yy}-2u^2_{xy}=0,$$

$$2u^1_{xy}+u^2_{xx}-u^2_{yy}=0$$

в круге $x^2+y^2<R^2$ имеет бесконечное число линейно независимых решений. Этот пример послужил отправным пунктом различных дополнительных условий на L (правильная эллиптичность, сильная эллиптичность), обеспечивающих фредгольмовость задачи Дирихле.

Для линейных параболич. уравнений П. к. з. ставится в цилиндре и носителем данных Дирихле служит его основание и боковая поверхность. Напр., для уравнения теплопроводности

$$Lu\equiv u_t-\sum\nolimits_{1}^{n} u_{x_ix_i}=0$$

решение ищется в области

$$D=\{0<t<T, \quad x=(x_1, \ldots, x_n)\in G\}$$

и носителем данных Дирихле $\varphi=u|_S$ служит

$$S=\{0\leqslant t\leqslant T, \quad x\in\partial G\}\cup\{t=0, \quad x\in\partial G\}.$$

Если граница ∂G — гладкое $(n-1)$-мерное многообразие, функция φ гладкая и выполнено условие согласования на $\{t=0, x\in\partial G\}$, то П. к. з. однозначно разрешима.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981; [2] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [3] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [4] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [5] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [6] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [7] Хермандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965.

А. П. Солдатов.

ПЕРВИЧНОЕ КОЛЬЦО — кольцо R, в к-ром произведение любых двусторонних идеалов P и Q равно нулевому идеалу в том и только в том случае, когда либо P, либо Q является нулевым идеалом. Другими словами, идеалы П. к. по умножению образуют полугруппу без делителей нуля. Кольцо R является П. к. тогда и только тогда, когда правый (левый) *аннулятор* любого его ненулевого правого (соответственно левого) идеала равен (0), а также тогда и только тогда, когда $aRb\neq 0$ для любых ненулевых $a, b\in R$. Центр П. к. является *областью целостности*. Любое *примитивное кольцо* первично. Если кольцо R не содержит ненулевых нильидеалов, то R — подпрямая сумма первичных колец. Класс П. к. играет важную роль в теории радикалов колец (см. [1]).

Существует следующее обобщение понятия П. к. Кольцо R наз. полупервичным, если оно не имеет ненулевых нильпотентных идеалов.

Лит.: [1] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М., Радикалы алгебр и структурная теория, М., 1979; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972. *К. А. Жевлаков.*

ПЕРВИЧНЫЙ ИДЕАЛ — такой двусторонний идеал I кольца A, что из включения $PQ\subseteq I$ для любых двусторонних идеалов P и Q кольца A следует, что либо $P\subseteq I$, либо $Q\subseteq I$. Для первичности идеала I кольца R необходимо и достаточно, чтобы множество $R\setminus I$ было m-системой, т. е. чтобы для любых $a, b\in R\setminus I$ существовал $x\in R$ такой, что $axb\in R\setminus I$. Идеал I кольца A первичен тогда и только тогда, когда факторкольцо по нему является *первичным кольцом*.

К. А. Жевлаков.

ПЕРВООБРАЗНАЯ, первообразная (примитивная) функция, для конечной функции $f(x)$ — такая функция $F(x)$, что всюду $F'(x)=f(x)$. Это определение является наиболее распространенным, но встречаются и другие, в к-рых ослаблены требования существования всюду конечной F' и выполнения всюду равенства $F'=f$; иногда в определении используют обобщения производной. Большинство теорем о П. касается их существования, нахождения и единственности. Достаточным условием для существования П. у заданной на отрезке функции f является непрерывность f; необходимыми условиями являются принадлежность функции f первому *Бэра классу* и выполнение для нее Дарбу свойства. У заданной на отрезке функции любые две П. отличаются на постоянную. Задачу нахождения F по F' для непрерывных F' решает *Римана интеграл*, для ограниченных F' — *Лебега интеграл*, для любой F' — узкий (а тем более широкий) *Данжуа интеграл* и *Перрона интеграл*.

Лит.: [1] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1, М., 1981; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975. *Т. П. Лукашенко.*

ПЕРВООБРАЗНЫЙ КОРЕНЬ — 1) П. к., примитивный корень, из единицы в поле K степени m — элемент ζ поля K такой, что $\zeta^m=1$ и $\zeta^r\neq 1$ для любого натурального $r<m$. Элемент ζ порождает циклич. группу $\mu(m)$ корней из единицы порядка m.

Если в поле K существует П. к. степени m, то m взаимно просто с характеристикой поля K. Алгебраически замкнутое поле содержит П. к. любой степени взаимно простой с характеристикой поля. Если ζ — П. к. степени n, то для любого k взаимно простого с n элемент ζ^k также является П. к. Число всех П. к. степени m равно значению функции Эйлера $\varphi(m)$.

В поле комплексных чисел П. к. степени m имеют вид

$$\cos\frac{2\pi k}{m}+i\sin\frac{2\pi k}{m},$$

где $0<k<m$ и k взаимно просто с m.

2) П. к. по модулю m — целое число g такое, что

$$g^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m \quad \text{и} \quad g^{\gamma}\not\equiv 1 \pmod m$$

при $1\leqslant\gamma\leqslant\varphi(m)-1$, где $\varphi(m)$ — функция Эйлера. Для П. к. g его степени $g^0=1, g, \ldots, g^{\varphi(m)-1}$ несравнимы между собой по модулю m и образуют приведенную систему вычетов по модулю m. Таким образом, для каждого числа a, взаимно простого с m, найдется показатель γ $(0\leqslant\gamma\leqslant\varphi(m)-1)$, для к-рого $a\equiv g^{\gamma} \pmod m$.

П. к. существуют не для всех модулей, а только для модулей m вида $m=2, 4, p^{\alpha}, 2p^{\alpha}$, где $p>2$ — простое число. В этих случаях *мультипликативные группы* приведенных классов вычетов по модулю m устроены наиболее просто: они являются циклич. группами порядка $\varphi(m)$. С понятием П. к. по модулю m тесно связано понятие *индекса* числа по модулю m.

П. к. для простых модулей p были введены Л. Эйлером (L. Euler), но существование П. к. для любых простых модулей p было доказано лишь К. Гауссом (C. Gauss, 1801).

Лит.: Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, пер. с лат. и нем., М., 1959; [3] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972.

Л. В. Кузьмин, С. А. Степанов.

ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ обыкновенного дифференциального уравнения — отличная от постоянной и непрерывно дифференцируемая функция, производная к-рой вдоль решений данного уравнения тождественно равна нулю. Для скалярного уравнения

$$y'=f(x, y) \tag{*}$$

П. и. есть функция $F(x, y)$, находящаяся в левой части общего решения $F(x, y)=C$, где C — произвольная постоянная. Таким образом, $F(x, y)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}f(x, y)=0$$

с частными производными 1-го порядка. П. и. может не существовать во всей области задания уравнения (*), однако в малой окрестности точки, в к-рой функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема, он всегда существует. П. и. определяется не единственным образом. Так, для уравнения $y'=-x/y$ П. и. является как функция x^2+y^2, так, напр., и функция $\exp(x^2+y^2)$.

Знание П. и. нормальной системы

$$\dot{x}=f(x, t), \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

позволяет понизить порядок этой системы на единицу, а отыскание n функционально независимых П. и. равносильно отысканию общего решения в неявном виде. Если $F_1(x, t), \ldots, F_n(x, t)$ — функционально независимые П. и., то всякий другой П. и. $F(x, t)$ можно представить в виде

$$F(x, t)=\Phi(F_1(x, t), \ldots, F_n(x, t)),$$

где Φ — нек-рая дифференцируемая функция.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974.

Н. Н. Ладис.

ПЕРЕВАЛА МЕТОД — метод вычисления асимптотики интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z)\, e^{\lambda S(z)}\, dz, \qquad (*)$$

где $\lambda > 0$, $\lambda \to +\infty$ — большой параметр, γ — контур в комплексной плоскости z, функции $f(z)$ и $S(z)$ голоморфны в области D, содержащей γ. Нули функции $S'(z)$ наз. **точками перевала** функции $S(z)$; точка перевала — седловая точка поверхности $U = \operatorname{Re} S(x+iy)$. Суть П. м. состоит в следующем. Контур γ деформируется в контур $\tilde{\gamma}$ с теми же концами, лежащий в D и такой, что $\max\limits_{z \in \tilde{\gamma}} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в точках перевала или на концах $\tilde{\gamma}$ (**перевальный контур**). Асимптотика интеграла $(*)$ по перевальному контуру вычисляется с помощью *Лапласа метода* и равна сумме вкладов от указанных точек максимума. Вклад $V_{z_0}(\lambda)$ от точки z_0 — это интеграл вида $(*)$, взятый по малой дуге контура $\tilde{\gamma}$, содержащей точку z_0. Если z_0 — внутренняя точка контура $\tilde{\gamma}$, z_0 — точка перевала и $S''(z_0) \neq 0$, то

$$V_{z_0}(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(z_0)}}\, e^{\lambda S(z_0)}\, [f(z_0) + O(\lambda^{-1})].$$

Перевальный контур обладает минимаксным свойством: на нем достигается

$$\min_{\gamma'} \max_{z \in \gamma'} \operatorname{Re} S(z),$$

где минимум берется по всем контурам γ', лежащим в D и имеющим те же концы, что и γ. Основная трудность при применении П. м.— отбор точек перевала, т. е. выбор перевального контура $\tilde{\gamma}$, отвечающего γ.

П. м. восходит к П. Дебаю [1]; идеи этого метода были высказаны ранее Б. Риманом (см. [2]). Вычисление вкладов от точек перевала и от концов контура см. в [3] — [9].

П. м.— по существу единственный метод, позволяющий вычислять асимптотику интегралов вида $(*)$. С его помощью вычислены асимптотики преобразований Лапласа, Фурье, Меллина, экспоненты от полинома, многих специальных функций.

Пусть $z \in \mathbb{C}^n$, γ — ограниченное многообразие с краем размерности n и класса C^∞, функции $f(z)$, $S(z)$ голоморфны в нек-рой области D, содержащей γ, и $dz = dz_1 \ldots dz_n$. Пусть $\max\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в одной точке z^0, к-рая является внутренней точкой γ и невырожденной точкой перевала функции $S(z)$, т. е. $\Delta_S(z^0) \equiv \det S''(z^0) \neq 0$. Тогда вклад от z^0 равен

$$F(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} (-\Delta_S(z^0))^{-1/2} e^{\lambda S(z^0)}\, [f(z^0) + O(\lambda^{-1})].$$

Лит.: [1] Debye P., «Math. Ann.», 1909, Bd 67, S. 535—58; [2] Риман Б., Сочинения, пер. с нем., М.— Л., 1948; [3] Эрдейи А., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1962; [4] Брейн Н. Г., Асимптотические методы в анализе, пер. с англ., М., 1961; [5] Евграфов М. А., Асимптотические оценки и целые функции, 2 изд., М., 1962; [6] Копсон Э.-Т., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1966; [7] Olver F. W. J., Asymptotics and special functions, N. Y.— [a. o.], 1974; [8] Рискстыньш Э. Я., Асимптотические разложения интегралов, т. 1—2, Рига, 1974—77; [9] Федорюк М. В., Метод перевала, М., 1977.

М. В. Федорюк.

ПЕРЕГИБА ТОЧКА — точка M плоской кривой, обладающая следующими свойствами: в точке M кривая имеет единственную касательную, в достаточно малой окрестности точки M кривая расположена внутри одной пары вертикальных углов, образуемых касательной и нормалью (см. рис. 1).

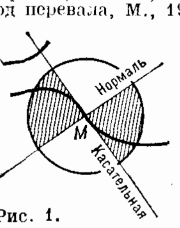


Рис. 1.

Пусть функция $f(x)$ определена в нек-рой окрестности точки x_0 и непрерывна в этой точке. Точка x_0 наз. точкой перегиба функции $f(x)$, если она является одновременно концом интервала строгой выпуклости вверх и концом интервала строгой выпуклости вниз. В этом случае точка $(x_0;\ f(x_0))$ наз. точкой перегиба графика функции, т. е. график функции $f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$ «перегибается» через касательную к нему в этой точке: при $x<x_0$ касательная лежит под графиком $f(x)$, а при $x>x_0$ — над графиком $f(x)$ (или наоборот) (см. рис. 2).

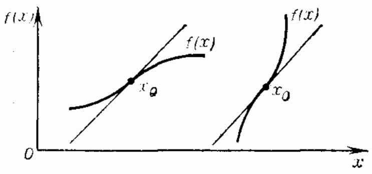


Рис. 2.

Необходимое условие существования П. т.: если функция $f(x)$, дважды дифференцируемая в нек-рой окрестности точки x_0, имеет в x_0 П. т., то $f''(x_0)=0$. Достаточное условие существования П. т.: если функция $f(x)$ в нек-рой окрестности точки x k раз непрерывно дифференцируема, причем k нечетно и $k\geqslant 3$, и $f^{(n)}(x_0)=0$ при $n=2, 3, \ldots, k-1$, а $f^{(k)}(x_0)\neq 0$, то функция $f(x)$ имеет в x_0 П. т.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [2] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1, М., 1981.

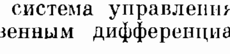
ПЕРЕГОРОДКА — замкнутое множество E топологич. пространства X, разбивающее X между данными множествами P и Q (или, др. словами, отделяющее P и Q в X), т. е. такое, что $X\setminus E=H_1\cup H_2$, где H_1 и H_2 дизъюнктны и открыты в $X\setminus E$, $P\subset H_1$, $Q\subset H_2$ (при этом оказывается, что P и Q открыты во всем X). П. наз. тонкой, если ее внутренность пуста. Всякое бинарное (т. е. состоящее из двух элементов) *разбиение* $\alpha=(A_1,\ A_2)$ пространства X определяет в X тонкую П.: $B=$граница $A_1=$граница A_2, причем $X\setminus B=O_1\cup O_2$, где O_i — открытое ядро A_i, $i=1, 2$. Верно и обратное. По существу понятие П. между множествами сводится к понятию *связности*. Но и обратно, пространство X несвязно, если $\varnothing$ есть П. между непустыми множествами.

М. И. Войцеховский.

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ линейной стационарной системы управления (системы автоматич. регулирования) — *Лапласа преобразование* отклика системы на воздействие единичной импульсной функции (дельта-функции) $\delta(t)$ при нулевых условиях в момент $t=0$ (сам этот отклик наз. функцией веса, импульсной переходной функцией или импульсной характеристикой системы). Эквивалентное определение: П. ф. есть отношение изображений по Лапласу (см. *Операционное исчисление*) выходного и входного сигналов с нулевыми начальными данными. П. ф. представляет собой дробно-рациональную функцию $W(p)$ комплексного переменного p; она является коэффициентом в линейном соотношении

$$Y(p)=W(p)\,U(p), \tag{1}$$

связывающем изображение по Лапласу $U(p)$ входа системы (воздействия, управления) $u(t)$ и изображение по Лапласу $Y(p)$ выхода системы (отклика, реакции) $y(t)$ с нулевыми начальными значениями. В теории управления соотношение (1) принято изображать графически (см. рис.).



Пусть, напр., система управления описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}, \quad a_n = 1 \qquad (2)$$

(в реальных системах, как правило, $m < n$). Тогда

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0}. \qquad (3)$$

Это же выражение можно получить, если, используя операторную форму записи уравнения (2) с помощью оператора дифференцирования p

$$A(p)\, y = B(p) u,$$

определить П. ф. как отношение входного оператора системы $B(p)$ к собственному оператору системы $A(p)$. П. ф. (3) системы (2) допускает следующее толкование: если выбрать управление $u = e^{st}$, где s — комплексное число такое, что $A(s) \neq 0$, то линейное неоднородное уравнение (2) имеет частное решение $y = W(s) e^{st}$.

П. ф. не следует путать с переходной функцией, к-рая представляет собой отклик системы на воздействие единичной ступенчатой функции

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

при нулевых начальных условиях.

П. ф. является одним из основных понятий теории линейных стационарных систем управления. Она не зависит от характера приложенных к системе управляющих воздействий, а определяется лишь параметрами самой системы и дает тем самым ее динамич. характеристику. Особую роль в теории управления играет функция $W(i\omega)$ чисто мнимого аргумента, наз. амплитудно-фазовой, или частотной, характеристикой системы. Понятие П. ф. обобщается и на линейные системы управления иных типов (матричные, нестационарные, дискретные, с распределенными параметрами и др.).

Лит.: [1] Ройтенберг Я. Н., Автоматическое управление, 2 изд., М., 1978; [2] Математические основы теории автоматического регулирования, М., 1971; [3] Калман Р., Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем, пер. с англ., М., 1971; [4] Бутковский А. Г., Характеристики систем с распределенными параметрами. Справочное пособие, М., 1979. *Н. Х. Розов.*

ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ МЕТОД — итерационный метод решения систем линейных или нелинейных уравнений, возникающих в разностных или проекционно-разностных методах при приближенном решении, напр., краевых задач для уравнений с частными производными эллиптич. типа.

Пусть, напр., имеются две пространственные переменные и последовательности квадратных сеток ω_h с шагом $h > 0$ и узлами $x_i \equiv (i_1 h, i_2 h)$, где $i \equiv (i_1, i_2)$ — вектор с целочисленными компонентами. Пусть Ω_h — множество узлов ω_h, в к-рых ищется решение разностной или проекционно-разностной задачи, записанной в виде операторного уравнения

$$L_h(u_h) = f_h$$

в евклидовом пространстве H_h, отождествляемом с пространством функций, заданных в узлах Ω_h; размерность H_h совпадает с числом точек N_h из Ω_h.

Пусть

$$A_h u_h(x_i) = \sum_{x_{i+j} \in \Omega_h} a_{i,j} u_h(x_{i+j}), \quad x_i \in \Omega_h, \qquad (1)$$

— линейные операторы, отображающие H_h в H_h. Среди операторов (1) имеются операторы, у к-рых ненулевые коэффициенты $a_{i,j}$ в (1) соответствуют лишь векторам сдвига $j \equiv (j_1, j_2)$ с $j_2 = 0$. Такие операторы наз. одномерными операторами, действующими по x_1, и обозначаются A_{h, x_1}; аналогично для векторов сдвига с $j_1=0$ определяются и одномерные операторы A_{h, x_2}, действующие по x_2.

Системы уравнений

$$A_{h, x_r} u_h = g_h, \quad r=1,\ 2,$$

расщепляются на отдельные подсистемы, каждая из к-рых связывает лишь значения $u_h(x_i)$ в узлах, лежащих на отдельных горизонтальных (для A_{h, x_1}) или вертикальных (для A_{h, x_2}) линиях сетки. Для П. н. м. характерно использование расщепляющихся операторов A_h, имеющих вид

$$R_h = A_{h, x_1} A_{h, x_2}.$$

Решение системы

$$A_{h, x_1} A_{h, x_2} u_h = g_h \tag{2}$$

тогда сводится к последовательному решению двух систем

$$A_{h, x_1} v_h = g_h, \tag{3}$$

$$A_{h, x_2} u_h = v_h, \tag{4}$$

в к-рых вначале решаются отдельные подсистемы на горизонтальных линиях сетки (в случае (3)), а затем осуществляется перемена направлений и решаются подсистемы на вертикальных линиях сетки (в случае (4)). При этом обычно операторы R_h выбираются такими, что на решение систем (3), (4), а следовательно, и (2), уходит только $O(N_h)$ арифметич. действий. Поэтому и каждая итерация в П. н. м. вида

$$R_h^{(n)} u_h^{(n+1)} = R_h^{(n)} u_h^{(n)} - \left(L_h\left(u_h^{(n)}\right) - f_h\right),\ n=0,\ 1,\ \ldots, \tag{5}$$

где верхний индекс n соответствует номеру итерации, обычно осуществляется с затратой $O(N_h)$ арифметич. действий.

Наиболее эффективные результаты для П. н. м. получаются для т. н. коммутативного случая, когда оператор L_h является самосопряженным положительно определенным оператором, а операторы $R_h^{(n)}$ — самосопряженные и перестановочные с L_h. В этом случае для любого $\varepsilon>0$ погрешность начального приближения можно уменьшить по норме в ε^{-1} раз за число итераций $M=O(|\ln\varepsilon||\ln h|)$. Коммутативный случай может встретиться только для краевых задач, в к-рых можно произвести разделение переменных, и, следовательно, область должна быть прямоугольником. Наиболее частым случаем метода (5) для уравнения

$$L_h u_h = (\Lambda_{h, x_1} + \Lambda_{h, x_2})\, u_h = f_h$$

является метод

$$\left[\prod_{r=1}^{2} \left(E_h + \tau_{r, h}^{(n)} \Lambda_{h, x_r}\right)\right] \left(u_h^{(n+1)} - u_h^{(n)}\right) = \\ = -\gamma_h^{(n)} \left(L_h u_h^{(n)} - f_h\right),$$

где E_h — тождественный оператор.

Наряду с подходом, в к-ром за счет выбора итерационных параметров стремятся минимизировать норму оператора перехода от нулевой итерации к итерации с фиксированным номером, используются и подходы, основанные на различных вариационных принципах.

П. н. м. часто используется в качестве внутреннего итерационного процесса в двухступенчатых итерационных методах, использующих операторы, эквивалентные по спектру и пригодные в случае переменных коэффициентов и нелинейных задач.

Лит.: [1] Peaceman D. W., Rachford H. H., «J. Soc. Industr. Appl. Math.», 1955, v. 3, № 1, p. 28—41; [2] Дьяконов Е. Г., Итерационные методы решения разностных аналогов краевых задач для уравнений эллиптического типа, К., 1970; [3] Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967; [4] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М.,

1971; [5] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980. *Е. Г. Дьяконов.*

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ — свойство динамич. системы (*каскада* $\{S^n\}$ или *потока* $\{S_t\}$) с конечной *инвариантной мерой* μ, состоящее в том, что для любых двух измеримых подмножеств A, B фазового пространства W мера

$$\mu\left((S^n)^{-1} A \cap B\right),$$

соответственно

$$\mu\left((S_t)^{-1} A \cap B\right),$$

стремится к

$$\mu(A)\,\mu(B)/\mu(W)$$

при $n \to \infty$, соответственно при $t \to \infty$. Если преобразования S, S_t обратимы, то в определении П. вместо прообразов множества A относительно этих преобразований можно брать образы S^nA, S_tA, что более наглядно. При наличии свойства П. говорят также, что система перемешивает, а в случае перемешивающего каскада $\{S^n\}$ о порождающем его эндоморфизме S пространства с мерой (W, μ) тоже говорят, что S перемешивает (обладает свойством П.; впрочем, в последнем случае под П. часто понимают не свойство объекта, а сам этот объект, то есть S).

В эргодич. теории наряду с П. рассматривают родственные свойства — кратное перемешивание и слабое перемешивание (см. [1]; последнее в старой литературе часто называли П. в широком смысле, или короче — просто П., а о П. говорили как о П. в сильном смысле). Рассматривают также свойство, промежуточное между П. и слабым П. (см. [2]). Все эти свойства сильнее *эргодичности*.

Имеется аналог П. для систем с бесконечной инвариантной мерой (см. [3]).

Лит.: [1] Халмош П. Р., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [2] Furstenberg H., Weiss B., в кн.: The structure of attractors in dynamical systems, B.— Hdlb.— N. Y., 1978, p. 127—32 (Lecture Notes in Math., № 668); [3] Krengel U., Sucheston L., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1969, Bd 13, № 2, S. 150—64. *Д. В. Аносов.*

ПЕРЕНОРМИРОВКА — процедура устранения расходимостей, присущих теории возмущений в лагранжевой формулировке *квантовой теории поля*. При построении формальных рядов теории возмущений в квантовой теории поля появляются выражения, не имеющие однозначного математич. смысла, связанные с т. н. ультрафиолетовыми расходимостями. Такие расходимости возникают из-за того, что коэффициенты этих рядов являются произведениями обобщенных функций, т. е. объектом, вообще говоря, не определенным корректно.

Удобно начинать рассмотрение с регуляризованной теории, в к-рой обобщенные функции заменены достаточно гладкими. Регуляризация вводит в теорию дополнительные параметры, не имеющие прямого физич. содержания. Но в регуляризованной теории уже возможно выделить из каждой коэффициентной функции ту ее часть, к-рая при снятии регуляризации порождает ультрафиолетовые расходимости. Собственно П. состоит в отбрасывании расходящихся вкладов в коэффициентные функции. После П. регуляризация снимается, т. е. регуляризующий параметр исключается соответствующим предельным переходом.

Идея П., предложенная X. Бете (см. [1]), состоит в том, что отбрасывание расходимостей должно производиться таким способом, чтобы оно сводилось к переопределению (П.) параметров исходного лагранжиана, т. е. затравочных масс, констант связи и нормировки полей. Точная формулировка перенормировочной процедуры в квантовой теории поля (R-операция) была дана Н. Н. Боголюбовым и О. С. Парасюком (см. [2]). Ими была доказана теорема (теорема Боголюбова — Парасюка) о конечности в смысле обобщенных функций из S' перенормированных выражений в каждом порядке теории возмущений. При этом П. сводится к добавлению к лагранжиану дополнительных членов — «контрчленов». Каждый контрчлен представляет собой нек-рую локальную операторную структуру с числовым коэффициентом, являющимся, вообще говоря, бесконечным рядом по затравочным константам связи. Эти коэффициенты конечны лишь при наличии регуляризации и обращаются в бесконечность при снятии ее. Таким образом, П. демонстрирует вспомогательный характер исходного лагранжиана. Физич. смысл придается лишь лагранжиану перенормированному. Его параметры, т. е. перенормированные массы, константы связи и т. д., к-рые конечны, можно идентифицировать с наблюдаемыми величинами.

Лагранжева формулировка теории возмущений возможна лишь для теорий, в к-рых число контрчленов, отличающихся по своей операторной структуре, конечно. Такие теории делятся на два класса — супернормируемые и перенормируемые. В супернормируемых теориях коэффициенты при контрчленах являются конечными рядами по константам связи, а в перенормируемых — эти ряды бесконечны. В этих теориях операторная структура контрчленов, как правило, та же, что и отдельных членов исходного лагранжиана. Их объединение и приводит к П. затравочных констант.

В классич. варианте П. есть R-операция Боголюбова — Парасюка (устранение расходимостей из каждой диаграммы, возникающей, напр., в разложении S-матрицы) и сводится к переопределению коэффициентной функции этой диаграммы следующим образом. Пусть M_γ — оператор, сопоставляющий коэффициентной функции диаграммы γ начальный отрезок ее разложения в ряд Маклорена по импульсам. Тогда коэффициентная функция $RG_\Gamma(p_1, \ldots, p_N)$ перенормированной диаграммы Γ запишется как

$$RG_\Gamma(p_1, \ldots, p_N) = \\ = \vdots \prod_{\gamma_j \in \{\gamma_i\}} (1 - M_{\gamma_i}) \vdots \; G_\Gamma(p_1, \ldots, p_N), \qquad (*)$$

где $\{\gamma_i\}$ — совокупность всех расходящихся поддиаграмм диаграммы Г, а символ $\vdots \ldots \vdots$ означает, во-первых, отбрасывание в получающемся из (*) при раскрытии скобок выражении всех членов, содержащих произведения $M_{\gamma_i} M_{\gamma_j}$, отвечающие паре поддиаграмм, для к-рых не выполняется ни одно из условий $\gamma_i \subset \gamma_j$, $\gamma_i \supset \gamma_j$, $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$, и, во-вторых, упорядочивание операторов M_{γ_i} таким образом, что M_{γ_i} стоит правее M_{γ_j}, если $\gamma_i \subset \gamma_j$.

Ограничения, накладываемые на процедуру П., не фиксируют ее полностью. Остающийся произвол имеет двоякий характер. Во-первых, требование конечности перенормированных выражений определяет лишь нек-рое минимальное число «вычитаний» в каждой расходящейся поддиаграмме, т. е. минимальное число выделяемых членов ряда Маклорена. П. будет по-прежнему приводить к конечным результатам, если число вычитаний увеличивать, соблюдая нек-рые условия согласования для вычитаний в различных поддиаграммах перенормируемой диаграммы. Во-вторых, вместо отрезка ряда Маклорена можно вычитать выражение, отличающееся от него многочленом по импульсам той же степени с конечными коэффициентами.

Указанный произвол приводит к эквивалентности различных процедур П., отличающихся по своей формулировке от R-операции. Их конкретный выбор обычно диктуется рассматриваемой задачей. Так, для теорий с калибровочной инвариантностью, была предложена П., получившая название размерной. Она базируется на регуляризации, использующей в качестве параметра отклонение размерности пространства-времени, в к-ром производятся вычисления, от физич. значения. Устранение расходимостей производится путем отбрасывания выражений, сингулярных по этому отклонению.

В других задачах пользуются аналитич. П. В ее основе лежит регуляризация, состоящая в замене пропагатора частицы, имеющего вид типа $(p^2-m^2+i0)^{-1}$ на $(p^2-m^2+i0)^{\lambda}$. Продолжение в комплексную область по параметрам λ осуществляет регуляризацию теории, а ультрафиолетовые расходимости выделяются как полюса по нек-рым линейным комбинациям этих параметров. Согласованное отбрасывание таких полюсов устраняет все расходимости.

В приложениях используются и другие схемы П. (см. [3]).

Лит.: [1] Bethe H. A., «Phys. Rev.», 1947, v. 72, p. 339—341; [2] Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С., «Докл. АН СССР», 1955, в. 100, № 1, с. 25; № 3, с. 429; [3] Завьялов О. И., Перенормированные диаграммы Фейнмана, М., 1979.

С. А. Аникин.

ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ТЕОРИЯ — исследование прохождения электромагнитного излучения, гамма-квантов, нейтронов и др. элементарных частиц через вещество с помощью линейного кинетического уравнения, или уравнения переноса (см. *Кинетическое уравнение*).

Задача определения поля излучения в атмосфере, рассеивающей свет по известным физич. законам, возникла в 80-е гг. 19 в. в связи с исследованиями по освещенности дневного неба. Кинетич. уравнение переноса излучения было найдено в нач. 20 в. для задачи о лучистом равновесии в звездных атмосферах. Физич. смысл уравнения переноса — баланс энергии, числа квантов, числа частиц в элементе фазового пространства координат и скоростей частиц:

$$\frac{d\Phi}{dt}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{\text{столкн.}}+S, \qquad (*)$$

где $\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$ — функция распределения частиц в точке $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ — скорость, t — момент времени, $\frac{d}{dt}$ — полная производная по траектории движения частицы, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{\text{столкн.}}$ — скорость изменения функции распределения за счет столкновения частиц с веществом (нейтронов с ядрами или квантов с атомами вещества), S — мощность источника частиц. Для электромагнитного излучения в качестве независимых переменных функции распределения, определяющей среднюю интенсивность излучения, входят вектор направления излучения и его частота. Одни и те же уравнения для описания распространения частиц и квантов получаются вследствие одинакового физич. смысла этих кинетич. уравнений — баланс энергии в фазовом пространстве.

Член, описывающий столкновения, является интегральным:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{\text{столкн.}}=\lambda\int\Sigma_S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}'\to\boldsymbol{v})\,\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}', t)\,dv'-$$

$$-\Sigma(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\,\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t),$$

а само уравнение переноса (кинетическое уравнение) — интегро-дифференциальным уравнением. Здесь Σ — полное сечение взаимодействия частиц с веществом в элементарном акте столкновения, $\Sigma_S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}'\to\boldsymbol{v})$ — сечение перехода (вероятность перехода) из скорости $\boldsymbol{v}'$ до рассеяния в скорость $\boldsymbol{v}$ после рассеяния (с учетом вероятности, что столкновение произойдет). Для свободного движения частиц полная производная от функции распределения по траектории движения имеет вид

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}\,\Phi.$$

Для полного определения решения необходимо задать начальное условие

$$\Phi|_{t=0}=f(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v})$$

и граничное условие. На границе тела (области пространства, внутри к-рой решается уравнение переноса) могут быть заданы, напр., условия **абсолютного** поглощения частиц

$$\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v},\ t)=0 \quad \text{при} \quad (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})<0,$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности (границе) тела. Возможны и более общие граничные условия, описывающие отражение частиц от границы или «прострел» частиц через вакуум (для невыпуклого тела, граничащего с вакуумом — областью, где нет столкновений). Математич. исследование уравнений переноса в односкоростном случае, т. е. в предположении, что изменяется лишь направление распространения излучения или частиц при постоянной энергии кванта или частицы, было проведено В. С. Владимировым [1] для случая $\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$. При изотропном рассеянии задача сводится к интегральному уравнению с положительным ядром, к к-рому применима теория вполне непрерывных операторов, оставляющих инвариантным конус в банаховом пространстве. При этом однородная задача имеет положительное собственное значение (стоящее множителем при интеграле столкновений), к-рое не больше модуля всякого другого собственного значения λ_i, и ему отвечает, по крайней мере, одна неотрицательная собственная функция (соответствующая λ_1). Эта теорема обобщается на случай анизотропного рассеяния. В широком классе случаев первое собственное значение задачи оказывается простым, а собственная функция, соответствующая ему,— положительной почти всюду в фазовом пространстве координат и направлений.

Таков, напр., случай, когда $\Sigma_S(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v}'\to\boldsymbol{v})>0$ почти всюду. Найдены условия, при к-рых для уравнения переноса с анизотропным рассеянием справедлива теория Гильберта — Шмидта, построен новый вариационный функционал для уравнений переноса с четной вероятностью перехода относительно переменной $\mu_0=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}')$. С помощью нового вариационного метода последовательно исследованы уравнения метода сферич. гармоник, к-рые вместе с краевыми условиями получаются применением прямого вариационного метода Галеркина к уравнению переноса, если в качестве пробных функций взять линейные комбинации сферич. функций, зависящих от направления распространения, умноженных на неизвестные функции пространственных координат. Вариационный принцип позволил отобрать наилучшие граничные условия для метода сферич. гармоник, ранее найденные эмпирически, из вдвое большего количества возможных линейно независимых условий на границе тела (для плоской геометрии) (см. [1]).

В нестационарном случае (см. [2]) при исследовании спектра собственное значение при переходе к интегральному уравнению (для изотропного рассеяния) нелинейно входит в ядро интегрального уравнения. Это обстоятельство приводит в конечном счете к тому, что число точек дискретного спектра оказывается конечным (а в некоторых случаях — нестационарная задача для тепловых нейтронов в малом блоке замедлителя — их вообще нет), кроме того, появляется сплошной спектр собственных значений.

В ряде случаев удается получить аналитическое решение уравнения переноса. Например, методом Винера — Хопфа решается задача Милна; метод разложения по сингулярным собственным функциям оператора переноса позволяет решить ряд одномерных задач [3].

В связи с потребностями инженерной практики были развиты оперативные численные методы решения уравнения переноса нейтронов для расчета критич. режима ядерного реактора (задача на собственные значения для уравнения (*) при $\partial\Phi/\partial t=0$). Одним из основных методов решения является метод сферич. гармоник, к-рый, однако, сложен для реализации на ЭВМ и, как, впрочем, и другие методы, медленно сходится (это объясняется наличием особенности в ядре интегрального уравнения переноса). См. *Переноса уравнения*; численные методы решения.

Лит.: [1] Владимиров В. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 61; [2] Шихов С. В., Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ, М., 1973; [3] Кейз К., Цвайфель П. Ф., Линейная теория переноса, пер. с англ., М., 1972; [4] Соболев В. В., Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., 1956. *В. А. Чуянов.*

ПЕРЕНОСА ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, образованная параллельным переносом кривой L_1 так, что нек-рая ее точка $M_0 \in L_1$ скользит по кривой L_2. Если $r_1(u)$ и $r_2(v)$ — радиус-векторы кривых L_1 и L_2 соответственно, то радиус-вектор П. п. есть

$$r=r_1(u)+r_2(v)-r_1(u_0),$$

где $r_1(u_0)=r_2(v_0)$ — радиус-вектор точки M_0. Линии $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ образуют *переноса сеть*. Каждая линейчатая поверхность имеет ∞^1 сетей переноса (Рейдемейстера теорема), развертывающаяся П. п. может быть только цилиндром или плоскостью. Если поверхность имеет две сети переноса, то несобственные точки касательных к линиям этих сетей лежат на алгебраич. кривой 4-го порядка. Инвариантным признаком П. п. является существование сопряженной чебышевской сети (сети переноса). Напр., изотропная сеть на минимальной поверхности есть сеть переноса, так что эта поверхность есть П. п. Можно также П. п. охарактеризовать тем, что одна из ее кривых (линия переноса) переходит в линию, лежащую на той же поверхности, под воздействием однопараметрич. группы параллельных переносов. Замена этой группы произвольной однопараметрич. группой G приводит к обобщенным поверхностям переноса (см. [1]).

Лит.: [1] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.
И. Х. Сабитов.

ПЕРЕНОСА СЕТЬ — сопряженная чебышевская сеть на двумерной поверхности аффинного (или евклидова) пространства. Поверхность, несущая П. с., наз. *переноса поверхностью*.

В расширенном пространстве имеет место теорема Ли: если поверхность несет две П. с., то касательные к линиям этих сетей высекают на несобственной плоскости кривую 4-го порядка (см. [1]).

Лит.: [1] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.
В. Т. Базылев.

ПЕРЕНОСА ТЕОРЕМА в теории диофантовых приближений — утверждение о связи разрешимости в целых числах одной системы неравенств с разрешимостью другой системы, определенным образом связанной с первой. Классич. примером линейных П. т. является принцип переноса Хинчина (см. *Диофантовы приближения*). Более общие линейные П. т. касаются связи между решениями в целых числах системы однородных линейных неравенств с неособой квадратной матрицей и решениями соответствующей системы с обратной транспонированной матрицей:

существование нетривиального решения одной системы гарантирует существование нетривиального решения другой, и наоборот. Подобные связи существуют между линейными однородными и неоднородными системами неравенств, при этом отсутствие нетривиальных решений однородной системы неравенств гарантирует существование решений соответствующих неоднородных систем, и наоборот. Известны такого рода связи и в случае нелинейных задач, но они менее определенно выражены и мало изучены. Принципиальные основы П. т. теории диофантовых приближений проясняются П. т. геометрии чисел: для выпуклых множеств устанавливаются связи между наличием целых точек в данном и взаимном к данному множествах.

Лит.: [1] Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961; [2] его же, Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965.

В. Г. Спринджук.

ПЕРЕНОСА УРАВНЕНИЯ; численные методы решения — методы решения интегро-дифференциальных уравнений, описывающих перенос частиц или излучения. Для стационарных задач уравнения имеют вид

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma\varphi = \int dv' \int d\Omega' \varphi w (x, \Omega, \Omega', v, v') + f, \quad (1)$$

где $x = (x, y, z)$, $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ — единичный вектор, $\varphi = \varphi(x, \Omega, v)$ — поток частиц в точке x, летящих со скоростью $v\Omega$; положительные функции Σ, w описывают взаимодействие частиц с веществом, а f — источник. Рассматривают две основные задачи: 1) найти решение уравнения (1) в (выпуклой) области $D(x, y, z)$ такое, что на ее границе Γ

$$\varphi (x, \Omega, v) = 0 \quad \text{при} \quad (\Omega, n) < 0, \quad (2)$$

где n — внешняя нормаль к Γ; 2) найти наибольшее собственное значение λ_1 и соответствующую собственную функцию задачи (1) — (2), в к-рой

$$f = \frac{1}{\lambda} \int dv' \int d\Omega' \varphi w_1 (x, \Omega, \Omega', v, v'). \quad (3)$$

Уравнение (1) содержит шесть независимых переменных; из-за существенной многомерности его сводят к более простым уравнениям. Заменяя в (1), (3) интеграл по v' квадратурной формулой с N членами и предполагая изотропность рассеяния, получают систему т. н. многоскоростных уравнений

$$\Omega\nabla\varphi_i + \Sigma_i\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} \Sigma_s^{ij} \varphi_{i0} + f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad (4)$$

где

$$\varphi_i = \varphi_i (x, \Omega), \quad \varphi_{i0} = \frac{1}{4\pi} \int \varphi_i \, d\Omega'$$

— нулевые моменты, а коэффициенты Σ_i, Σ_s^{ij}, f_i получены применением методов усреднения с использованием решений сопряженных задач. Для задачи 2) аналогично получают, что

$$f_i = \frac{1}{\lambda} \chi_i Q (\varphi) = \frac{1}{\lambda} \chi_i \sum_{j=1}^{N} \Sigma_{f_j} \varphi_{j0}. \quad (5)$$

Для $N = 1$ получают односкоростное уравнение

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma\varphi = \Sigma_s\varphi_0 + f \quad (6)$$

для функции $\varphi = \varphi(x, \Omega)$. Уравнение (6) для плоского слоя $0 \leqslant x \leqslant H$, когда решение зависит только от одной координаты x и одной угловой переменной μ, $|\mu| \leqslant 1$, имеет вид

$$\mu l \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi = c \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \varphi (x, \mu') \, d\mu' + f_1 (x, \mu), \quad (7)$$

где $l=1/\Sigma$, $c=\Sigma_S/\Sigma$, $f_1=f/\Sigma$. Характеристиками левой части (6) являются все прямые $x=x_0+\xi\Omega$, $x_0\in D$; вдоль каждой из них уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\Sigma\varphi=\Sigma_s\varphi_0+f. \tag{8}$$

Если в (6) сделать замену $u=(\varphi(x, \Omega)+\varphi(x, -\Omega))/2$, то оно принимает вид

$$[-l\Omega\nabla]^2 u+u=cu_0+F. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) минимизирует квадратичный функционал Владимирова:

$$G(u)=(l\Omega\nabla u,\ l\Omega\nabla u)+(u,\ u)-(cu_0,\ u)+$$
$$+\int_{\Gamma\times\Omega}|(\Omega,\ u)|\,u^2\,d\Omega\,d\Gamma-2\,(u, F), \tag{10}$$

где

$$(u,\ v)=\int_D\int_\Omega uv\,dx\,d\Omega.$$

Пусть краевые задачи записаны в операторной форме

$$L\varphi=S\varphi+f. \tag{11}$$

Характерным свойством задач переноса, используемым в численных алгоритмах, является то, что значение $L^{-1}\psi$ находится по заданному ψ прямым методом путем интегрирования (8) вдоль характеристик. Учитывая это, из (11) получают т. н. интегральное уравнение Пайерлса

$$S\varphi=SL^{-1}(S\varphi+f) \tag{12}$$

для нулевого момента $S\varphi$.

Для решения задач переноса существенное развитие получил метод сферических гармоник (являющийся вариантом метода Галеркина). Приближенное решение (P_n-приближение) находят в виде

$$\varphi^{(n)}(x,\ \Omega)=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\sum_{i=-k}^{k}\varphi_{ki}(x)\,Y_{ki}(\Omega), \tag{13}$$

где $\varphi_{ki}(x)$ — неизвестные функции, а $Y_{ki}(\Omega)$ — сферич. гармоники k-го порядка. Подставляя (13) в (6), умножая результат на Y_{ki} и интегрируя по Ω, получают систему уравнений с частными производными для определения $\varphi_{ki}(x)$. В P_1-приближении система имеет вид

$$\operatorname{div}\varphi_1+\Sigma\varphi_0=f_0,\quad \frac{1}{3}\nabla\varphi_0+\varphi_0+\Sigma\varphi_1=f_1,$$
$$2\,(\varphi_1,\ n)-\varphi_0\,|_\Gamma=0, \tag{14}$$

где $\varphi_0=\varphi_{00}$, $\varphi_1=(\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13})$. При $f_1\equiv0$ из (14) получают диффузионное приближение

$$-\operatorname{div}D\nabla\varphi_0+\Sigma\varphi_0=f_0,\quad 2D\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi_0\Big|_\Gamma=0, \tag{15}$$

где $D=1/(3\Sigma)$. Это — эллиптич. задача, решение к-рой находят, применяя вариационные или сеточные методы.

Для решения одномерных задач развиты аналитич. методы, основанные на разложении решения по обобщенным собственным функциям. Для нахождения значений функционалов от решений сложных многомерных задач применяют *Монте-Карло метод*.

Широкое распространение получили методы конечноразностных аппроксимаций уравнения переноса. Так, используя квадратурную формулу для области D, заменяют интегральное уравнение (12) системой линейных уравнений. В уравнениях (4), (5), (6), (8) для аппроксимации интегрального оператора применяют квадратурные формулы для сферы. Известны *Гаусса квадратурные формулы* для сферы до 35-го алгебраич. порядка точности. В методе характеристик через каждую точку пространственной сетки проводят семейство характеристик по направлениям, соответствующим узлам квадратуры для сферы, и заменяют дифференциальный оператор L в (8) разностным. Разностные уравнения S_n-метода получают интегрированием уравнения (6) по сеточной ячейке фазового пространства, предполагая линейность решения в пределах ячейки по независимым переменным. В методе Галеркина решение ищут в виде

$$\varphi=\sum_{n=1}^{N} g_n(\Omega)\,\varphi_n(x). \qquad (16)$$

Если $\varphi_n(x)$ заданы, то для определения $g_n(\Omega)$ получают систему вырожденных интегральных уравнений; если $\varphi_n(x)$ — финитные функции, то получают метод конечных элементов; если $g_n(\Omega)$ — заданные финитные функции и выражение (16) минимизирует функционал (10), то получают так наз. P_{NJ}-уравнения.

Итерационные методы решения разностных задач переноса обладают своей спецификой; она заключается в том, что сходимость итерационных методов, как правило, замедляется при $c\to 1$ ($c\leqslant 1$), а для нахождения следующего приближения φ^{k+1} используют только часть информации о предыдущем приближении φ^k существенно меньшей размерности — запоминают и используют лишь значения φ_0^k. В итерационных методах в качестве промежуточной операции (операции K) часто входит решение следующей задачи

$$L\Phi^k=S\varphi^k+f,\quad \Phi_0^k=\frac{1}{4\pi}\int\Phi^k\,d\Omega'. \qquad (17)$$

Тогда ошибка $\varphi-\Phi^k$ удовлетворяет (11) с независящим от Ω источником $S(\Phi^k-\varphi^k)$ и невязка тоже не зависит от Ω. Это свойство позволяет ускорить сходимость итераций. Пусть задана периодич. задача для уравнения (7) с постоянными коэффициентами, четным по μ источником и $H=2\pi$. Применительно к этой задаче ниже рассмотрены следующие итерационные методы. Для уравнения (7) строится сетка с N узлами по x и M угловыми направлениями по μ. Пусть

$$r(l)=l^{-1}\operatorname{arctg} l,\qquad 0\leqslant r(t)\leqslant 1,$$
$$\varepsilon_0^k=\varphi_0-\varphi_0^k=\sum\nolimits_n\varepsilon_n^k\exp(inx),$$
$$\|\varepsilon_0^k\|=\max_n|\varepsilon_n^k|.$$

Для сходящихся итерационных методов $\|\varepsilon_0^{k+1}\|\leqslant q\|\varepsilon_0^k\|$, где $0\leqslant q<1$. Пусть Ц$_0$ — цена (количество действий) операции K, Ц — цена полной итерации, а $\Delta=$Ц — Ц$_0$. Для различных методов имеют место следующие соотношения.

1) Простая итерация: $\varphi_0^{k+1}=\Phi_0^k$; для нее $\Delta=0$, $q=c$.

2) Метод Люстерника: для нек-рых k полагают в простой итерации

$$\varphi_0^{k+1}=\Phi_0^k+(\lambda_1-1)^{-1}(\Phi_0^k-\varphi_0^k),$$

где $\lambda_1>1$ — наибольшее собственное значение задачи $L\varphi=\lambda S\varphi$; тогда $\Delta=0(N)$, $q=cr(l)$ ($q\to 1$ при $c\to 1$, $l\to 0$).

3) Метод оценки итерационных отклонений: $\varphi_0^{k+1}=\Phi_0^k+W_0^k$, где W^k — решение уравнения

$$l\mu\frac{\partial W^k}{\partial x}+(1-c)\,W^k=c\,(\Phi_0^k-\varphi_0^k);$$

тогда

$$\Delta=O(NM),\qquad q=\max\left(cr(l),\ \frac{\pi\sqrt{2}\,c^2}{12}\right)$$

($q\to 1$ при $c\to 1$, $l\to 0$).

4) Метод с балансовыми множителями: $\varphi_0^{k+1}=\delta^k\Phi_0^k$, где

$$\delta^k=\frac{\int_0^H f_0\,dx}{\int_0^H (1-c)\,\Phi_0^k\,dx};$$

для него $\Delta=O(N)$, $q=cr(l)$ ($q\to 1$ при $c\to 1$, $l\to 0$).

5) Метод средних потоков (метод ребаланса):

$$\varphi^{k+1}(x,\ \mu)=(1+v^k(x))\,\Phi^k;$$

функцию v^k выбирают, чтобы минимизировать функционал (10) или чтобы минимизировать его на нек-ром конечномерном подпространстве: $v^k=\Sigma_i a_i\psi_i$, тогда a_i удовлетворяют определенной системе уравнений.

6) Метод квазидиффузии:

$$-l\frac{d}{dx}l\frac{d}{dx}D^k\varphi_0^{k+1}+(1-c)\,\varphi_0^{k+1}=f_0,$$

где

$$D^k=\left(\int_{-1}^{1}\Phi^k\mu^2\,d\mu\right)\Big/\Phi_0^k;$$

тогда $\Delta=O(NM)$.

7) Методы расщепления:

$$(I+\tau\Lambda_2)\,(I+\tau\Lambda_1)\,\varphi^{k+1}=$$
$$=(I+\tau\Lambda_2)\,(I-\tau\Lambda_1)\,\varphi^k+2\tau f,$$

где

$$\Lambda_1=I-\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}(\ldots)\,d\mu,\qquad \Lambda_2=l\mu\frac{d}{dx}.$$

Методы 4) — 6) — нелинейные, их сходимость может замедляться при $c\to 1$, $l\to 0$; метод 7) требует запоминания $\varphi^k(x,\ \mu)$ ($q\to 1$ при $c\to 1$, $l\to 0$).

8) *КР*-методы: поправку W^k определяют как решение в D краевой задачи

$$Q_nW^k=P_nc\left(W^k+\Phi_0^k-\varphi_0^k\right),\tag{18}$$

где Q_n, P_n — линейные дифференциальные операторы 2-го порядка, и полагают $\varphi_0^{k+1}=\Phi_0^k+W^k$. В одном из вариантов *КР*-метода уравнение (18) имеет вид

$$-\frac{g_k}{3}\left(l\frac{d}{dx}\right)^2W^k+(1-c)\,W^k=c\left(\Phi_0^k-\varphi_0^k\right).\tag{19}$$

Для уравнения (19) $\Delta=O(N)$; $q=0,186c$ при $g_k=0,843$, а при $g_k=(1+y_k)/2$, где y_k — корни многочлена Якоби $P^{(-1/2,\ 2(N+\beta)-2/3)}(y)$, $\beta>0$, среднегеометрическое за N итераций значение q близко к $0,15c$. В *КР*-методе сходимость итераций не замедляется при $c\to 1$, $l\to 0$.

Для решения многоскоростной задачи (4) применяют итерационный метод Зейделя:

$$\Omega\nabla\varphi_i^{k+1}+\Sigma_i\varphi_i^{k+1}=$$
$$=\sum_{j=1}^{i}\Sigma_s^{ij}\varphi_{j0}^{k+1}+\sum_{j=i+1}^{N}\Sigma_s^{ij}\varphi_{j0}+f,$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N,\tag{20}$$

а решение φ_i^{k+1} в каждом уравнении (20) находят итерационным методом для односкоростного уравнения.

Для решения многоскоростных задач на собственные значения (4), (5) к описанным двум итерационным циклам добавляют еще один внешний для нахождения максимального значения $\lambda=\lambda_1$ и соответствующей собственной функции φ. Если $x=Q(\varphi)$, $A=Q(L-S)^{-1}\chi$, то задача (4), (5) преобразуется в задачу

$$Ax=\lambda x.\tag{21}$$

Для нахождения λ_1 и φ применяют итерационные методы с чебышевскими параметрами

$$u^{k+1}=Ax^k-\beta_{k+1}x^k,\quad x^{k+1}=u^{k+1}/Q\,(u^{k+1}),\tag{22}$$

где

$$\beta_k = \frac{1}{2}\left(M + m + (M - m)\cos \pi\omega_k\right), \qquad (23)$$

$\omega_k \in [0, 1]$, M, m — параметры. Предполагая неотрицательность спектра, сначала находят λ_1 и λ_2 — наибольшие собственные значения (21), считая, что $m=0$, $M=a$, где $a \geqslant 0$ — оценка снизу для λ_1, и беря за ω_k T-последовательность (см. ниже). Значения λ_1, λ_2 определяют т. н. обобщенным методом Эйткена, учитывающим сдвиги β_k. После нахождения λ_1, λ_2 функцию φ находят по формулам (22), (23), полагая $M=\lambda_2$. Бесконечная T-последовательность образована, соответственно, из специальным образом упорядоченных корней многочленов Чебышева 1-го рода $T_{2\cdot 3^n}(\cos \pi\omega)$; начальный отрезок T-последовательности длины $2\cdot 3^n$ состоит из всех чисел вида $(2j_k-1)/4\cdot 3^n$, $1 \leqslant j_k \leqslant 2\cdot 3^n$,

$$\frac{1}{4}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{1}{12}, \ \frac{11}{12}, \ \frac{}{12}, \ \frac{7}{12}, \ \frac{1}{36}, \ \ldots,$$

Любой отрезок T-последовательности длины $2\cdot 3^n$ обеспечивает оптимальное в нек-ром смысле подавление ошибки и устойчивость в итерационном методе (22), (23).

Для решения нестационарных задач

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + L\varphi - S\varphi = f$$

применимы: метод характеристик в пространстве (x, t), метод Галеркина и конечноразностные методы, сводящиеся к явным и неявным по разностным схемам или к методам расщепления оператора. В случае неявных схем для нахождения решения на верхнем слое может быть применен KP-метод.

Лит.: [1] Владимиров В. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 61, с. 1—158; [2] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981; [3] Лебедев В. И., Финогенов С. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1976, т. 16, № 4, с. 895—907; [4] Лебедев В. И., там же, 1977, т. 17, № 1, с. 100—108.

В. И. Лебедев.

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ СИСТЕМА — система, число уравнений к-рой больше числа неизвестных. В линейном случае такие системы задаются прямоугольной $(m\times n)$-матрицей, $m<n$, где m — число уравнений, а n — число неизвестных. Для П. с. первоочередным является вопрос ее разрешимости, выражаемый в условиях совместности.

Напр., П. с. линейных алгебраич. уравнений

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

разрешима тогда и только тогда, когда ранги основной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ и расширенной матрицы, полученной приписыванием к A столбца свободных членов, совпадают.

Для П. с. линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} p_{ij}(D)\,u_j = f_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \qquad (1)$$

где p_{ij} — многочлен от одного (обыкновенное уравнение) или нескольких (уравнение с частными производными) переменных, а D — символ дифференцирования, условие совместности выражается в виде однородной системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum\nolimits_{i=1}^{m} q_{ki}(D)\,f_i = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \qquad (2)$$

где матрица q находится по матрице p с помощью алгебраич. соображений.

Для П. с. (1) дифференциальных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами

$p_{ij}=p_{ij}(x, D)$ отыскание условий совместности, имеющих вид (2) с $q_{ki}=q_{ki}(x, D)$, является значительно более трудной задачей.

Простейшим примером П. с. служит система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=f_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Условия совместности для этой системы, необходимые и достаточные для ее разрешимости, имеют вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}-\frac{\partial f_k}{\partial x_i}=0, \quad 1 \leqslant i,\ k \leqslant m.$$

Аналитич. функции многих комплексных переменных $u(z_1, \ldots, z_m)$ можно также рассматривать как решения П. с. уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}+i \frac{\partial u}{\partial y_j}\right)=0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

где $z_j=x_j+iy_j$.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 3 изд., М., 1970; [2] Паламодов В. В., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. 1968, М., 1969, с. 5—37.

А. П. Солдатов.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ множеств — одна из основных операций над множествами. Пусть имеется нек-рая (конечная или бесконечная) совокупность множеств $\{A_\alpha\}$ (индексы α служат для различения элементов данной совокупности). Тогда множество тех элементов, к-рые содержатся во всех данных множествах (множество элементов, общих всем множествам A_α) наз. пересечением этих множеств.

П. множеств обозначается $A=\bigcap A_\alpha$.

М. И. Войцеховский.

ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ТЕОРИЯ на алгебраическом многообразии — теория пересечений алгебраич. подмногообразий и циклов. Пусть X — гладкое алгебраич. многообразие размерности n над полем k, а Y и Z — подмногообразия X коразмерности i и j соответственно. Если Y и Z пересекаются трансверсально, то $Y \bigcap Z$ является гладким подмногообразием коразмерности $i+j$, к-рое обозначается $Y \cdot Z$. В общем случае паре (Y, Z) сопоставляется *алгебраический цикл* $Y \cdot Z$ коразмерности $i+j$. Идея его определения состоит в том, чтобы заменить Y и Z на эквивалентные в каком-то смысле циклы Y' и Z', находящиеся уже в общем положении, и взять затем пересечение Y' и Z'; конечно, при этом цикл $Y' \cdot Z'$ также определен с точностью до эквивалентности.

Пусть $A^i(X)$ — группа классов алгебраич. циклов коразмерности i на X по модулю рациональной эквивалентности; $A(X)=\bigoplus_{i \geqslant 0} A^i(X)$. Теория пересечений Чжоу состоит из построения трех частей:

а) структуры градуированного коммутативного кольца на $A(X)$ для каждого гладкого квазипроективного многообразия X;

б) гомоморфизма градуированных колец $f^*: A(Y) \to A(X)$ для каждого морфизма $f: X \to Y$ (обратный образ);

в) гомоморфизма групп $f_*: A(X) \to A(Y)$ степени $\dim Y - \dim X$ для каждого собственного морфизма $f: X \to Y$ (прямой образ).

При этом структуры а), б), в) связаны рядом соотношений, важнейшими из к-рых являются:

формула проекции: для собственного морфизма $f: X \to Y$ и циклов $\alpha \in A(X)$ и $\beta \in A(Y)$

$$f_*(\alpha \cdot f^*(\beta))=f_*(\alpha) \cdot \beta;$$

редукция к диагонали: если $\Delta: X \to X \times X$ — диагональный морфизм, а $\alpha, \beta \in A(X)$, то $x \cdot y=\Delta^*(\alpha \times \beta)$.

Кроме того, существует естественный гомоморфизм
$$c_1: \operatorname{Pic}(X) \longrightarrow A^1(X),$$
что позволяет построить теорию *Чжэня классов* со значениями в кольце Чжоу, и в частности характер Чжэня
$$\operatorname{ch}: K(X) \longrightarrow A(X) \otimes \mathbb{Q},$$
являющийся гомоморфизмом колец.

Проще всего определяется гомоморфизм прямого образа f_*. Пусть $Z \subset X$ — неприводимое подмногообразие; если $\dim f(Z) < \dim Z$, то $f_*(Z)=0$, если $\dim f(Z) = \dim Z$, то $f_*(Z)=d \cdot f(Z)$, где d — степень Z над $f(Z)$. По линейности определение продолжается на циклы и классы циклов. Гомоморфизм обратного образа f^* сводится к умножению циклов по формуле
$$f^*(\alpha) = p_*(\Gamma_f \cdot (X \times \alpha)),$$
где $p: X \times Y \to X$ — проекция, а $\Gamma_f \subset X \times Y$ — график f. Определение умножения циклов делается в два этапа. Пусть сначала Y и Z — неприводимые подмногообразия в X, к-рые пересекаются собственно (т. е. коразмерность $Y \cap Z$ равна сумме коразмерностей Y и Z). Каждой компоненте W пересечения $Y \cap Z$ приписывается нек-рое целое положительное число $i(Y, Z; W)$ — локальная кратность пересечения. Есть несколько определений числа $i(Y, Z; W)$, напр. Tor-формула Серра:
$$i(Y, Z; W) = \sum\nolimits_{k \geq 0} (-1)^k \, l\left(\operatorname{Tor}_k^A(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{b})\right),$$
где A — локальное кольцо $\mathcal{O}_{X, W}$, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеалы Y и Z, а l — длина A-модуля. После этого полагают
$$Y \cdot Z = \sum\nolimits_W i(Y, Z; W) \cdot W,$$
где W пробегает неприводимые компоненты $Y \cap Z$.

Второй этап — лемма Чжоу о сдвиге — состоит в утверждении, что для произвольных циклов Y, Z на квазипроективном многообразии X существует цикл Z', рационально эквивалентный Z, к-рый пересекается собственно с Y; более того, класс рациональной эквивалентности $Y \cdot Z'$ не зависит от Z'.

Наиболее интересен случай проективного многообразия X; применяя функтор прямого образа к структурному морфизму $X \to \operatorname{Spec} k$, получают отображение степени $\deg: A(X) \to \mathbb{Z}$. По существу, степень цикла — это число точек в нульмерной компоненте цикла. Композиция умножения со степенью позволяет численно измерять пересечение. Напр., если Y и Z имеют дополнительные размерности, то получается *пересечения индекс* (число) Y и Z. Аналогично, получается индекс пересечения n дивизоров $D_1, \ldots, D_n$:
$$(D_1, \ldots, D_n) = \deg(D_1 \cdot \ldots \cdot D_n).$$

Напр., кольцо Чжоу проективного пространства P^n порождается классом гиперплоскости H, причем $(H^n)=(H, \ldots, H)=1$. Поэтому если $D_1, \ldots, D_n$ — гиперповерхности степени $d_1, \ldots, d_n$, то $(D_1, \ldots, D_n) = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$ (теорема Безу). Степень проективного многообразия $Y \subset \mathrm{P}^n$ размерности k определяется как индекс пересечения Y с линейным подпространством P^{n-k} дополнительной размерности; если многообразия Y и Z пересекаются трансверсально, то степень $Y \cap Z$ есть произведение степеней Y и Z.

Для собственно пересекающихся эффективных дивизоров $(D_1, \ldots, D_n) \geq 0$, но в общем случае это уже неверно. Напр., для исключительной кривой E на поверхности $(E, E) = -1$.

Многими формальными свойствами теории колец Чжоу обладают другие теории: циклы по модулю алгебраической или численной эквивалентности, *K-теория*, теория сингулярных когомологий $H^*(\ ,\ \mathbb{Z})$

(в случае $k=\mathbb{C}$), теория *l-адических когомологий* (см. также *Вейля когомологии*). Это приводит к аксиоматич. построению теории пересечения как сопоставления каждому многообразию X (из нек-рой категории) кольца $C(X)$ и гомоморфизмов f^* и f_*, связанных рядом аксиом типа формулы проекции или редукции к диагонали (см. [1]). Сравнение различных П. т. приводит к полезным соотношениям. Напр., в комплексном случае понятие фундаментального цикла позволяет определить гомоморфизм теорий пересечений $A(X) \to H^*(X, \mathbb{Z})$, что позволяет использовать трансцендентные методы. Сравнение K-теории и теории Чжоу приводит к теореме Римана — Роха — Гротендика. Важную роль при этом играет поведение П. т. при моноидальном преобразовании (см. [2]). Другое применение П. т. относится к обоснованию исчислительной геометрии Шуберта (см. [3]). Эту ветвь геометрии можно рассматривать как теорию колец Чжоу различных многообразий, классифицирующих геометрич. объекты — многообразия Грассмана, многообразия флагов и т. д.

Лит.: [1] Anneaux de Chow et Applications, Séminaire Chevalley, Secr. Math., P., 1958; [2] Манин Ю. И., Лекции по алгебраической геометрии, ч. 2, М., 1971; [3] Проблемы Гильберта, М., 1969, с. 175—81; [4] Бальдассари М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [5] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, с. 3—93; [6] Théorie des intersections et théorème de Riemann — Roch, B.— Hdlb.— N.Y., 1971; [7] Algebraic geometry, Arcata 1974, Providence, 1975; Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981.

В. И. Данилов.

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ИНДЕКС — число точек пересечения n дивизоров на n-мерном алгебраич. многообразии с учетом кратностей этих точек. Точнее, пусть X есть n-мерное неособое алгебраич. многообразие над полем k, а $D_1, \ldots, D_n$ — эффективные дивизоры на X, пересекающиеся в конечном числе точек. Локальным индексом (или кратностью) пересечения этих дивизоров в точке $x \in X$ наз. целое число

$$(D_1, \ldots, D_n)_x = \dim_k A/(u_1, \ldots, u_n),$$

где u_i — локальные уравнения дивизора D_i в локальном кольце $A=\mathcal{O}_{X, x}$. В комплексном случае локальный индекс совпадает с вычетом формы $\frac{du_1}{u_1} \wedge \ldots \wedge \frac{du_n}{u_n}$, а также со степенью ростка отображения

$$(u_1, \ldots, u_n)\colon (X, x) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0).$$

Глобальный индекс пересечения $(D_1, \ldots, D_n)$ есть сумма локальных индексов по всем точкам пересечения $D_1 \cap \ldots \cap D_n$. Если это пересечение не пусто, то $(D_1, \ldots, D_n) > 0$.

См. также *Пересечений теория*. *В. И. Данилов.*

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ИНДЕКС — гомологический инвариант, характеризующий алгебраическое (т. е. учитывающее ориентацию) число точек пересечения двух подмножеств дополнительных размерностей в евклидовом пространстве или ориентированном многообразии (находящихся в *общем положении*). В случае неориентируемого многообразия в качестве кольца коэффициентов R для гомологий рассматривается $\mathbb{Z}_2$.

Пусть $X \supset A$, $Y \supset B$ — такие пары подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, что $A \cap Y = \varnothing = X \cap B$, и пусть $d\colon (X \times Y,\ (A \times Y) \cup (X \times B)) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$ — отображение, для к-рого $d(x, y) = x - y$. Индексом пересечения $\xi \circ \eta$ классов гомологий $\xi \in H_{n-i}(X, A)$, $\eta \in H_n(Y, B)$ наз. элемент $(-1)^i d_*(\xi \times \eta)$. Здесь d_* — индуцированное отображение гомологий, а $\xi \times \eta \in H_n(X \times Y,\ (A \times Y) \cup (X \cup B))$ — внешнее гомологич. произведение элементов ξ и η.

П. и. $\xi \circ \eta$ зависит лишь от тех частей классов ξ и η, носители к-рых попадают в произвольно малую окрестность V замыкания множества $X \cap Y$. В частности, $\xi\circ\eta=0$, если $X\cap Y=\varnothing$. Кроме того, если $V=\bigcup_i V_i$, $V_i\cap V_j=\varnothing$ при $i\neq j$, то определены соответствующие каждому открытому множеству V_i локальные П. и. ξ и η, сумма к-рых совпадает с $\xi\circ\eta$. Инвариант $\xi\circ\eta$ не меняется при гомеоморфизмах $\mathbb{R}^n$. Вместе с предшествующим свойством локальности это позволяет определить П. и. $\xi\circ\eta$ для компактных подмножеств ориентированного многообразия. Имеет место следующее соотношение антикоммутативности:

$$\xi\circ\eta=(-1)^{i(n-i)}\eta\circ\xi.$$

Если X и Y — векторные подпространства общего положения, $A=X\setminus 0$, $B=Y\setminus 0$, а ξ и η — образующие $R=H_{n-i}(X,\ A)=H_i(Y,\ B)$, то $\xi\circ\eta$ — образующая $H_n(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n\setminus 0)=R$. Так как выбор указанных образующих равносилен выбору ориентации в соответствующих евклидовых пространствах, это дает возможность определить П. и. $c\circ c'$ двух цепей дополнительных размерностей (в том числе сингулярных), для к-рых $|c|\cap|\partial c'|=\varnothing=|c'|\cap|\partial c|$ ($|c|$ — носитель, а ∂c — граница цепи c). При этом $c\circ c'=\xi\circ\eta$ для определяемых цепями c, c' классов гомологий $\xi\in H_{n-i}(X, A)$, $\eta\in H_i(Y, B)$, $|c|\subset X$, $|\partial c|\subset A$, $|c'|\subset Y$, $|\partial c'|\subset B$.

П. и. применяется для описания нек-рых соотношений двойственности в многообразиях.

Лит.: [1] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976. *Е. Г. Скляренко.*

ПЕРЕСТАНОВКА из n элементов — конечная последовательность длины n, все элементы к-рой различны, т. е. П.— это *размещение* без повторения из n элементов по n. Число перестановок равно $n!$

Обычно в качестве элементов П. берут элементы множества $Z_n=\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$; взаимно однозначное отображение π множества Z_n на себя определяет перестановку $\overline{\pi}=(\pi(1),\ \pi(2),\ \ldots,\ \pi(n))$. Отображение π наз. подстановкой Z_n. Многие задачи, связанные с перечислением П., формулируются в терминах подстановок, как, напр., задачи *о перечислении* П. с различными ограничениями на позиции переставляемых элементов (см., напр., [1], [2]). Перестановка $\overline{\pi}$ может рассматриваться как упорядоченное множество, состоящее из n элементов, если считать, что элемент $\pi(i)$ предшествует элементу $\pi(i+1)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Примеры. 1) Пара $\{\pi(i),\ \pi(j)\}$ образует в $\overline{\pi}$ инверсию, если $\pi(i)>\pi(j)$ при $i<j$. Если a_r — число П. из n элементов с r инверсиями, то

$$\sum\nolimits_{r=0}^{\binom{n}{2}} a_r x^r=\frac{(1-x)\,(1-x^2)\ldots(1-x^n)}{(1-x)^n}.$$

2) Если b_n — число таких перестановок $\overline{\pi}$ из n элементов, что $\pi(i)>\pi(i-1)$ при i четном и $\pi(i)<\pi(i-1)$ при i нечетном, то

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} b_n\frac{x^n}{n!}=\operatorname{tg}x+\sec x.$$

Иногда П. наз. отображения в себя конечного множества, т. е. *подстановки*.

Лит.: [1] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [2] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963. *В. М. Михеев.*

ПЕРЕСТАНОВОК КРИТЕРИЙ — статистический критерий, предназначенный для проверки гипотезы H_*, согласно к-рой плотность вероятности наблюдаемого случайного вектора $X=(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ принадлежит семейству всех n-мерных плотностей, симметричных относительно перестановок аргументов.

Пусть по реализации случайного вектора $X=(X_1,\ \ldots,\ X_n)$, принимающего значения $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, надлежит проверить гипотезу H_* о принадлежности плотности вероятности $p(x)$ случайного вектора X семейству

$\mathrm{H}_*=\{p(x)\}$ всех n-мерных плотностей $p(x)=p(x_1, \ldots, x_n)$, симметричных относительно перестановок аргументов $x_1, \ldots, x_n$, то есть

$$p(x)\in\mathrm{H}_* \Leftrightarrow p(x_1, \ldots, x_n)=p(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_n}),$$

где $r=(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ — произвольный вектор из пространства $\mathfrak{R}$ всех перестановок $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ вектора $(1, 2, \ldots, n)$. Пространство $\mathfrak{R}$ является множеством всех реализаций вектора рангов $R=(R_1, R_2, \ldots, R_n)$, естественным образом возникающим при построении вектора порядковых статистик $X^{(\cdot)}$, принимающего значения $x^{(\cdot)}$ в множестве $\mathfrak{X}^{(\cdot)}\subset\mathbb{R}^n$. При справедливости гипотезы H_* статистики $X^{(\cdot)}$ и R стохастически независимы, при этом

$$\mathsf{P}\{R=r\}=\frac{1}{n!}, \quad r\in\mathfrak{R}, \qquad (*)$$

а плотность вероятности вектора порядковых статистик $X^{(\cdot)}$ равна $n!p(x^{(\cdot)})$, $x^{(\cdot)}\in\mathfrak{X}^{(\cdot)}$.

Свойство (*) равномерной распределенности статистики R при справедливости гипотезы H_* и лежит в основе построения П. к.

Если $\Psi(x^{(\cdot)}, r)$ — функция, определенная на $\mathfrak{X}^{(\cdot)}\times\mathfrak{R}$ таким образом, что $0\leqslant\Psi\leqslant 1$, и для любого $r\in\mathfrak{R}$ она является измеримой относительно борелевской σ-алгебры пространства $\mathfrak{X}^{(\cdot)}$ и, кроме того, для нек-рого $\alpha\in(0,1)$

$$\frac{1}{n!}\sum_{r\in\mathfrak{R}}\Psi(x^{(\cdot)}, r)=\alpha \text{ почти всюду},$$

то статистич. критерий для проверки H_*, имеющий критич. функцию

$$\varphi(x)=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\Psi(x^{(\cdot)}, r),$$

наз. критерием перестановок. Если П. к. не является рандомизированным, то α следует выбирать кратным $1/n!$.

Наиболее мощный критерий для проверки H_* против простой альтернативы $q(x)$ ($q(x)$ — произвольная n-мерная плотность, не принадлежащая семейству H_*) может быть найден в семействе П. к.

Семейство П. к. и семейство критериев, инвариантных относительно изменения параметров сдвига и масштаба, играют большую роль при построении *ранговых критериев*. И, наконец, следует отметить, что в литературе по математич. статистике вместо термина П. к. часто употребляют термин «рандомизации критерий».

См. *Порядковая статистика*, *Инвариантный критерий*, *Критическая функция*.

Лит.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

М. С. Никулин.

ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СООТНОШЕНИЯ — правила перестановки произведения двух операторов рождения или уничтожения. Именно, для *уничтожения операторов* $\{a(f), f\in H\}$ и сопряженных к ним *рождения операторов* $\{a^*(f), f\in H\}$, где H — нек-рое гильбертово пространство, действующих в симметричном *Фока пространстве* $P(H)$ над пространством H, эти соотношения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &a(f_1)a(f_2)-a(f_2)a(f_1)=\\ &=a^*(f_1)a^*(f_2)-a^*(f_2)a^*(f_1)=0,\\ &a(f_1)a^*(f_2)-a^*(f_2)a(f_1)=-(f_1, f_2)E, \ f_1, f_2\in H, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H, а E — единичный оператор, действующий в $P(H)$. Соотношения (1) наз. также коммутационными соотношениями. В случае антисимметричного пространства Фока операторы рождения и уничтожения переставляются согласно правилам:

$$\left.\begin{aligned} &a(f_1)a(f_2)+a(f_2)a(f_1)=\\ &=a^*(f_1)a^*(f_2)+a^*(f_2)a^*(f_1)=0,\\ &a(f_1)a^*(f_2)+a^*(f_2)a(f_1)=(f_1, f_2)E, \ f_1, f_2\in H, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

к-рые наз. антикоммутационными соотношениями.

В случае бесконечномерного пространства H кроме операторов рождения и уничтожения, действующих в пространствах Фока над H, существуют и другие, не эквивалентные им, неприводимые представления коммутационных и антикоммутационных соотношений, т. е. другие семейства операторов, действующих в каком-нибудь гильбертовом пространстве и удовлетворяющих правилам перестановки (1) или (2) (см. [1], [2]). В случае конечномерного гильбертова пространства H все неприводимые представления как соотношений (1), так и соотношений (2) унитарно эквивалентны.

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965; [2] Gårding L., Wightman A., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1954, v. 70, № 7, p. 617—26.

Р. А. Минлос.

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ — линейные операторы B и T, из к-рых T — общего вида, а B — ограничен, такие, что

$$BT \subseteq TB \tag{1}$$

(запись $T \subseteq T'$ означает, что T' является *расширением* T). Отношение перестановочности обозначается $B \cup T$ и подчиняется следующим правилам:

1) если $B \cup T_1$, $B \cup T_2$, то $B \cup (T_1+T_2)$, $B \cup T_1T_2$;
2) если $B_1 \cup T$, $B_2 \cup T$, то $(B_1+B_2) \cup T$, $B_1B_2 \cup T$;
3) если T^{-1} существует, то из $B \cup T$ следует $B \cup T^{-1}$;
4) если $B \cup T_n$, $n=1, 2, \ldots$, то $B \cup \lim T_n$;
5) если $B_n \cup T$, $n=1, 2, \ldots$, то $\lim B_n \cup T$ при условии, что $\lim B_n$ ограничен, а T замкнут.

Если оба оператора определены на всем пространстве, то условие (1) сводится к обычному:

$$BT = TB, \tag{2}$$

причем ограниченность B не требуется. Обобщение условия (2) оправдано тем, что, напр., даже ограниченный оператор B не будет перестановочным со своим обратным B^{-1}, если этот последний определен не на всем пространстве.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979. *М. И. Войцеховский.*

ПЕРЕСТРОЙКА, сферическая перестройка, на многообразии типа $(\lambda, n-\lambda)$ — переход от одного $(n-1)$-мерного многообразия M_1 к другому многообразию M_2, состоящий в изъятии вложенной в M_1 сферы размерности $\lambda-1$ и замене ее вложенной сферой размерности $n-\lambda-1$. Подробнее см. *Ручек теория.* *М. И. Войцеховский.*

ПЕРЕХОД С ЗАПРЕЩЕНИЯМИ для цепи Маркова — множество траекторий *Маркова цепи*, к-рые на рассматриваемом отрезке времени ни разу не попадают в фиксированное множество состояний. Пусть, напр., $\xi(t)$ — цепь Маркова с дискретным временем и множеством состояний S, а H — «запрещенное» множество состояний. Тогда вероятности переходов с запрещениями ${}_Hp_{ij}(t)$ суть

$${}_Hp_{ij}(t) = \mathsf{P}\{\xi(k) \notin H\ (k=1, \ldots, t-1),$$
$$\xi(t)=j \mid \xi(0)=i\},\ i,\ j \in S.$$

Свойства вероятностей П. с з. ${}_Hp_{ij}(t)$ во многом аналогичны свойствам обычных *переходных вероятностей* $p_{ij}(t)$, так как семейства матриц $P(t)=\|p_{ij}(t)\|_{i,\ j\in S}$ и $P_H(t)=\|{}_Hp_{ij}(t)\|_{i,\ j\in S\setminus H}$, $t \geqslant 0$, образуют полугруппы по умножению; однако если $\sum_{j\in S} p_{ij}(t)=1$, то $\sum_{j\in S} {}_Hp_{ij}(t) \leqslant 1$. К изучению тех или иных свойств вероятностей П. с з. фактически сводятся исследование распределения момента первого попадания цепи Маркова в фиксированное множество, доказательство предельных теорем для *ветвящихся процессов* при условии невырождения и т. п.

Лит.: [1] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964. *А. М. Зубков.*

ПЕРЕХОДНАЯ ФУНКЦИЯ, вероятность перехода,— семейство мер, используемых в теории марковских процессов для определения распределения процесса в будущие моменты времени по известным состояниям в предшествующие моменты. Пусть измеримое пространство $(E, \mathscr{B})$ таково, что σ-алгебра $\mathscr{B}$ содержит все одноточечные подмножества из E, и пусть T — подмножество действительной прямой R. Функция $P(s, x; t, B)$, заданная при $s, t \in T, s \leqslant t, x \in E$ и $B \in \mathscr{B}$, наз. переходной функцией в измеримом пространстве $(E, \mathscr{B})$, если: а) при фиксированных s, x, t она является мерой на $\mathscr{B}$, причем $P(s, x; t, B) \leqslant 1$; б) при фиксированных s, t, B она является $\mathscr{B}$-измеримой функцией точки x; в) $P(s, x; s, \{x\}) \equiv 1$ и для всех s, предельных для T в правой топологии прямой R,

$$\lim_{s \downarrow t,\ t \in T} P(s, x; t, E) = 1;$$

г) при всех $x \in E$, $B \in \mathscr{B}$ и $s \leqslant t \leqslant u$ из T выполняется уравнение Колмогорова — Чепмена:

$$P(s, x; u, B) = \int_E P(s, x; t, dy) P(t, y; u, B) \quad (*)$$

(в нек-рых случаях требование в) опускают или ослабляют). П. ф. наз. марковской переходной функцией, если $P(s, x; t, E) \equiv 1$, и субмарковской переходной функцией в противоположном случае. Если E не более чем счетно, П. ф. задают с помощью матрицы вероятностей перехода

$$P^{st} = \| p_{xy}(s, t) \|$$

(см. *Переходные вероятности*, *Переходных вероятностей матрица*). Нередко оказывается, что при любых допустимых s, x и t мера $P(s, x; t, \cdot)$ обладает плотностью $p(s, x; t, \cdot)$ относительно нек-рой меры. Если при этом выполнен следующий вариант уравнения $(*)$:

$$p(s, x; u, z) = \int_E P(s, x; t, dy)\, p(t, y; u, z)$$

для любых x, z из E и $s \leqslant t \leqslant u$ из T, то функцию $p(s, x; t, y)$ наз. переходной плотностью.

При широких условиях (см. [1], [2]) с П. ф. $P(s, x; t, B)$ можно связать марковский процесс $X = (x_t, \zeta, \mathscr{F}_t^s, \mathsf{P}_{s,x})$, для к-рого $\mathsf{P}_{s,x}\{x_t \in B\} = P(s, x; t, B)$ (в случае марковской П. ф. этот процесс не обрывается). Наоборот, марковское свойство случайного процесса, как правило, позволяет сопоставить ему П. ф. (см. [3]).

Пусть T однородно в том смысле, что совокупность значений $t-s$ при $s \leqslant t$ из T образует полугруппу $\tilde{T}$ в R относительно сложения (напр., $T = R$, $T = \{t \in R : R : t \geqslant 0\}$, $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$). Если при этом П. ф. $P(s, x; t, B)$ зависит лишь от разности $t-s$, т. е. если $P(s, x; t, B) = P(t-s, x, B)$, где $P(t, x, B)$ — функция от $t \in \tilde{T}$, $x \in E$, $B \in \mathscr{B}$, подчиненная соответствующему варианту условий а) — г), то $P(s, x; t, B)$ наз. однородной переходной функцией. Последнее название присваивается и функции $P(t, x, B)$, для к-рой $(*)$ принимает форму

$$P(t+s, x, B) = \int_E P(t, x, dy) P(s, y, B),$$

$$s, t \in \tilde{T},\ x \in E,\ B \in \mathscr{B}.$$

Для нек-рых целей (напр., при регуляризации П. ф.) оказывается необходимым расширить определение П. ф. Напр., считают заданным семейство измеримых пространств $(E_t, \mathcal{B}_t)$, $t \in T$, а П. ф. относительно этого семейства определяют как функцию $P(s, x; t, B)$, где $s, t \in T$, $s \leqslant t$, $x \in E_s$, $B \in \mathcal{B}_t$, удовлетворяющую подходящей модификации условий а) — г).

Лит.: [1] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [3] Кузнецов С. Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, № 2, с. 389—93. *М. Г. Шур.*

ПЕРЕХОДНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ — вероятности перехода *Маркова цепи* $\xi(t)$ на отрезке времени $[s, t]$ из состояния i в состояние j:

$$p_{ij}(t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(s) = i\}, \ s < t.$$

Ввиду основного свойства цепи Маркова для любых состояний $i, j \in S$ (где S — множество всех состояний цепи) и любых $s < t < u$

$$p_{ij}(s, u) = \sum\nolimits_{k \in S} p_{ik}(s, t)\, p_{kj}(t, u).$$

Обычно рассматриваются однородные цепи Маркова, для к-рых П. в. $p_{ij}(s, t)$ зависят от длины отрезка $[s, t]$, но не от его положения на оси времени:

$$p_{ij}(s, t) = p_{ij}(t - s).$$

Для любых состояний i, j однородной цепи Маркова с дискретным временем последовательность $p_{ij}(n)$ сходится по Чезаро, т. е. существует

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum\nolimits_{k=1}^{n} p_{ij}(k) \geqslant 0.$$

При нек-рых дополнительных условиях (а также для цепей с непрерывным временем) пределы существуют и в обычном смысле. См. *Маркова цепь эргодическая*, *Маркова цепи положительный класс состояний*.

П. в. $p_{ij}(t)$ цепи Маркова с дискретным временем определяются значениями $p_{ij}(1)$, $i, j \in S$; для любых $t > 0$, $i \in S$

$$\sum\nolimits_{j \in S} p_{ij}(t) = 1.$$

В случае цепей Маркова с непрерывным временем обычно предполагается, что П. в. удовлетворяют дополнительным условиям: все $p_{ij}(t)$ измеримы как функции $t \in (0, \infty)$,

$$\lim_{t \downarrow 0} p_{ij}(t) = 0 \ (i \neq j), \ \lim_{t \downarrow 0} p_{ii}(t) = 1, \ i, j \in S.$$

При этих предположениях существуют плотности вероятностей перехода

$$\lambda_{ij} = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(p_{ij}(t) - p_{ij}(0)) \leqslant \infty, \ i, j \in S; \qquad (1)$$

если все λ_{ij} конечны и $\sum_{j \in S} \lambda_{ij} = 0$, $i \in S$, то П. в. $p_{ij}(t)$ удовлетворяют системам дифференциальных уравнений Колмогорова — Чепмена

$$p'_{ij}(t) = \sum\nolimits_{k \in S} \lambda_{ik} p_{kj}(t), \ p'_{ij}(t) = \sum\nolimits_{k \in S} \lambda_{kj} p_{ik}(t) \qquad (2)$$

с начальными условиями $p_{ii}(0) = 1$, $p_{ij}(0) = 0$, $i \neq j$, $i, j \in S$ (см. также *Колмогорова уравнение*, *Колмогорова — Чепмена уравнение*).

При задании цепи Маркова плотностями перехода (1) ее П. в. $p_{ij}(t)$ удовлетворяют условиям

$$p_{ij}(t) \geqslant 0, \ \sum\nolimits_{j \in S} p_{ij}(t) \leqslant 1, \ i, j \in S, \ t > 0;$$

цепи, для к-рых $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) < 1$ при нек-рых $i \in S$ и $t > 0$, наз. **нерегулярными** (тогда имеет место **неединственность решения систем (2)**); если $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$ для всех $i \in S$ и $t > 0$, то цепь наз. **регулярной**.

Пример. Цепь Маркова $\xi(t)$ с множеством состояний $\{0, 1, \ldots\}$ и плотностями перехода

$$\lambda_{i, i+1} = -\lambda_{ii} = \lambda_i > 0, \ \lambda_{ij} = 0, \ i \neq j \neq i + 1$$

(т. н. **процесс чистого размножения**) нерегулярна тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^{-1} < \infty.$$

Пусть

$$\tau_{0n} = \inf \{t > 0 : \xi(t) = n \ (\xi(0) = 0)\},$$
$$\tau = \lim_{n \to \infty} \tau_{0n},$$

тогда

$$\mathsf{E}\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1}$$

и при $\mathsf{E}\tau < \infty$ имеет место $\mathsf{P}\{\tau < \infty\} = 1$, т. е. траектория цепи $\xi(t)$ «с вероятностью 1 за конечное время уходит в бесконечность» (см. также *Ветвящихся процессов регулярность*).

Лит.: [1] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964. *А. М. Зубков.*

ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МАТРИЦА — матрица $P_t = \|p_{ij}(t)\|$, элементами к-рой являются переходные вероятности за время t однородной *Маркова цепи* $\xi(t)$ с не более чем счетным множеством состояний S:

$$p_{ij}(t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}, \ i, j \in S.$$

П. в. м. $\|p_{ij}(t)\|$ цепей Маркова с дискретным временем и регулярных цепей Маркова (см. *Переходные вероятности*) с непрерывным временем при любых $t > 0$, $i, j \in S$ удовлетворяют условиям

$$p_{ij}(t) \geqslant 0, \ \sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1,$$

т. е. являются *стохастическими матрицами*, для нерегулярных цепей

$$p_{ij}(t) \geqslant 0, \ \sum_{j \in S} p_{ij}(t) \leqslant 1,$$

такие матрицы наз. **полустохастическими**.

В силу основного свойства однородной цепи Маркова:

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s)\, p_{kj}(t),$$

семейство матриц $\{P_t, \ t > 0\}$ образует полугруппу по умножению; в случае, когда время дискретно, эта полугруппа однозначно определяется матрицей P_1.

А. М. Зубков.

ПЕРЕХОДНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПОЛУГРУППА — полугруппа операторов, порождаемых *переходной функцией* марковского процесса. По переходной функции $P(t, x, A)$ однородного марковского процесса $X = (x_t, \zeta, \mathcal{F}_t, \mathsf{P}_x)$ в фазовом пространстве $(E, \mathcal{B})$ можно построить нек-рые полугруппы линейных операторов P^t, действующих в том или ином банаховом пространстве $\mathbb{B}$ (см., напр., [1]). Чаще всего в роли $\mathbb{B}$ берут пространство $\mathbb{B}(E)$ ограниченных действительных функций f на E с равномерной нормой (а для феллеровского процесса X — пространство $\mathbb{C}(E)$ непрерывных функций с той же нормой) или пространство $\mathrm{V}(E)$ конечных счетно аддитивных функций φ на $\mathcal{B}$ с полной вариацией в качестве нормы. В первых двух случаях полагают

$$P^t f(x) = \int_E f(y)\, P(t, x, dy);$$

в третьем

$$P^t \varphi(A) = \int_E P(t, y, A)\, \varphi(dy)$$

(здесь f и φ принадлежат соответствующим пространствам, $x \in E$, $A \in \mathcal{B}$). Во всех этих случаях выполнено полугрупповое свойство: $P^t P^s = P^{t+s}$, $s, t \geqslant 0$, и любая из трех полугрупп $\{P^t\}$ наз. **полугруппой переходных операторов**.

В дальнейшем речь идет только о первом случае. Инфинитезимальный оператор A полугруппы $\{P^t\}$ (он же — инфинитезимальный оператор процесса) определяется обычным образом:

$$Af = \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(P^t f - f)$$

для всех тех $f \in \mathbb{B}(E)$, для к-рых указанный предел существует как предел в $\mathbb{B}(E)$. Предполагая, что $P(t, x, A)$ при $A \in \mathscr{B}$ является измеримой функцией пары переменных (t, x), вводят резольвенту R^α процесса X, $\alpha > 0$:

$$R^\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P^t f\, dt,\ f \in \mathbb{B}(E). \qquad (*)$$

Если $\|P^t f - f\| \to 0$ при $t \downarrow 0$, то $Ag = \alpha g - f$, где $g = R^\alpha f$. При определенных предположениях интеграл (*) существует и при $\alpha = 0$, причем $g = R^0 f$ удовлетворяет «уравнению Пуассона»

$$Ag = -f$$

(по этой причине, в частности, $R^0 f$ наз. потенциалом функции f).

Знание инфинитезимального оператора позволяет найти важные характеристики исходного процесса; более того, вопросы классификации марковских процессов сводятся к описанию соответствующих им инфинитезимальных операторов (см. [2], [3]). Немаловажно и то обстоятельство, что инфинитезимальный оператор входит в уравнения, позволяющие находить средние значения различных функционалов от процесса. Так, при нек-рых предположениях функция

$$v(t, x) = \mathsf{E}_x \left[\exp\left\{\int_0^{t\wedge\zeta} c(x_s)\, ds\right\} f(x_{t\wedge\zeta})\right],\ t \geqslant 0,\ x \in E,$$

является единственным не слишком быстро растущим по t решением задачи $v'_t = Av + cv$, $v(0, x) = f(x)$, где E_x — математич. ожидание, отвечающее P_x, а $t \wedge \zeta = \min(t, \zeta)$.

Оператор A родственен характеристическому оператору $\mathfrak{A}$ (см. [2]). Пусть X — непрерывный справа марковский процесс в топологич. пространстве E. Для борелевской функции f полагают

$$\mathfrak{A} f(x) = \lim_{U \downarrow x} \left[\frac{\mathsf{E}_x f(x_\tau) - f(x)}{\mathsf{E}_x \tau}\right],$$

если предел существует для всех $x \in E$, где U пробегает систему окрестностей точки x, стягивающихся к x, и где τ — момент первого выхода X из U (при $\mathsf{E}_x\tau = \infty$ дробь, стоящую под знаком предела, приравнивают нулю). Во многих случаях вычисление Af сводится к вычислению $\mathfrak{A} f$.

Лит.: [1] Feller W., «Ann. Math.», 1952, v. 55, p. 468—519; [2] Дынкин Е. Б., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973. *М. Г. Шур.*

ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ОПЕРАТОР — отображение множества всех множеств натуральных чисел в себя (т. е. отображение $2^{\mathbb{N}}$ в $2^{\mathbb{N}}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел), определяемое следующим образом. Пусть W_z — рекурсивно перечислимое множество с гёделевым номером z, D_u — конечное множество натуральных чисел с канонич. индексом u (то есть $D_u = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ и $2^{x_1} + 2^{x_2} + \ldots + 2^{x_n} = u$), $\langle x, u\rangle$ — номер упорядоченной пары, состоящей из чисел x и u, при нек-ром фиксированном взаимно однозначном рекурсивном кодировании пар. С каждым рекурсивно перечислимым множеством W_z связана процедура, преобразующая любое множество натуральных чисел B в нек-рое множество натуральных чисел A. А именно, если число $\langle x, u\rangle$ принадлежит множеству W_z и конечное множество D_u содержится в множестве B, то x относится к множеству A. Иными словами,

$$A=\{x \mid (\exists u)\,(\langle x,\ u\rangle \in W_z \& D_u \subseteq B)\}.$$

Эта процедура позволяет из любого пересчета множества B эффективно получить пересчет множества A. Она наз. П. о. и обозначается Φ_z. Если для нек-рого П. о. Ψ имеет место $\Psi(B)=A$, то говорят, что A с в о д и т с я п о п е р е ч и с л и м о с т и к B ($A \leqslant_e B$).

Если Φ и Ψ суть П. о., то их композиция $\Phi\Psi$ также есть П. о. Если Ψ — П. о. и $A \subseteq B$, то $\Psi(A) \subseteq \Psi(B)$. Если $x \in \Psi(A)$, то $x \in \Psi(D)$ для нек-рого конечного множества $D \subseteq A$. Каждый П. о. Ψ имеет неподвижную точку, а именно, существует такое рекурсивно перечислимое множество A, что $\Psi(A)=A$, и если $\Psi(B)=B$, то $A \subseteq B$.

Лит.: [1] Р о д ж е р с Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972. *В. Е. Плиско.*

ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ПРОБЛЕМА — *алгоритмическая проблема*, в к-рой для заданного множества A требуется построить алгоритм, перечисляющий A, т. е. такой алгоритм $\mathfrak{A}$, к-рый применим ко всякому натуральному числу и перерабатывает его в элемент из A, причем любой элемент из A получается в результате применения $\mathfrak{A}$ к нек-рому натуральному числу; иными словами, $A=\bigcup_{i=0}^{\infty}\{\mathfrak{A}(i)\}$. П. п. для множества A разрешима тогда и только тогда, когда A — непустое *перечислимое множество*. *В. Е. Плиско.*

ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ТЕОРИЯ — раздел *комбинаторного анализа*, в к-ром изучаются и разрабатываются методы решения перечислительных задач. Эти задачи, как правило, сводятся к подсчету числа элементов конечного множества, обладающих определенными свойствами, или их классов эквивалентности. К таким методам относятся, напр., *включения и исключения принцип* и различные его обобщения. Теория перечисления Пойа (см. *Пойа теорема*) часто позволяет преодолевать трудности при подсчете разных объектов, когда их приходится рассматривать как неразличимые. Основным инструментом при решении перечислительных задач являются производящие функции; они также играют существенную роль при получении асимптотич. соотношений (см. [1] — [3]).

Для получения производящих функций в комбинаторике широко применяются алгебры формальных степенных рядов и различные символич. методы (см. [1], [2], [4]). В основе общего подхода к разработке методов получения производящих функций лежит тот факт, что многие дискретные объекты обладают естественной упорядоченностью (см. [1], [5]). Ниже в качестве примера даны построения алгебр инцидентности и показано, как с их помощью решаются нек-рые перечислительные задачи.

Пусть задано частично упорядоченное множество X с отношением порядка $\leqslant$ и пусть X локально конечно, т. е. любой его сегмент

$$[x,\ y]=\{z : x \leqslant z \leqslant y;\ x,\ y,\ z \in X\}$$

конечен.

А л г е б р о й и н ц и д е н т н о с т и $I(X)$ наз. совокупность функций $f(x, y)$, $x, y \in X$, принимающих действительные значения и таких, что $f(x, y)=0$ при $x \nleqslant y$. Сумма двух таких функций и умножение на число определяются обычным образом, а произведение $f*g=h$ вводится соотношением

$$h(x,\ y)=\sum\nolimits_{x \leqslant z \leqslant y} f(x,\ z)\,g(z,\ y).$$

Умножение оказывается ассоциативным и дистрибутивным относительно сложения. Алгебра $I(X)$ обладает единицей

$$\delta=\delta(x,\ y)=\begin{cases} 1 & \text{при } x=y, \\ 0 & \text{при } x \neq y. \end{cases}$$

В алгебре $I(X)$ выделяют два элемента: дзета-функцию $\zeta=\zeta(x,\ y)$ ($\zeta(x,\ y)=1$ при $x\leqslant y$) и обратную ей функцию Мёбиуса $\mu=\zeta^{-1}$. Справедливо утверждение: если локально конечное частично упорядоченное множество X содержит свою наибольшую нижнюю грань, функция $f(x)$ определена для всех $x\in X$ и $g(x)=\sum_{y\leqslant x}f(y)$ для всех $x\in X$, то для всех $x\in X$

$$f(x)=\sum_{y\leqslant x}g(y)\,\mu(y,\ x)$$

(теорема обращения Мёбиуса).

Если $X=B$ — множество всех конечных подмножеств нек-рого счетного множества, а $x\leqslant y$ означает, что $x\subseteq y$, то при $x\subseteq y$

$$\mu_B(x,\ y)=(-1)^{|y|-|x|},$$

а обращение Мёбиуса есть не что иное, как принцип включения и исключения.

Если $X=D$ — множество натуральных чисел и $x\leqslant y$ означает, что x делит y, то при $x\leqslant y$ имеем $\mu_D(x,\ y)=\mu\left(\frac{y}{x}\right)$, где $\mu(n)$ — теоретико-числовая *Мёбиуса функция.*

Редуцированной алгеброй инцидентности $R(X)$ наз. подалгебра $I(X)$, к-рой принадлежат все функции $I(X)$, принимающие равные значения на эквивалентных сегментах. При этом отношение эквивалентности сегментов обладает тем свойством, что если $f(x,\ y)=f(u,\ v)$ и $g(x,\ y)=g(u,\ v)$ для $[x,\ y]\sim[u,\ v]$, то и

$$(f*g)(x,\ y)=(f*g)(u,\ v).$$

Это будет, напр., выполняться, если эквивалентными считать изоморфные сегменты. К алгебре $R(X)$ всегда принадлежат дзета-функция и функция Мёбиуса.

Если $X=N_0=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ с естественной упорядоченностью чисел, то алгебра $I(N_0)$ изоморфна алгебре верхнетреугольных бесконечных матриц. Если к $R(N_0)$ отнести все такие функции $f\in I(N_0)$,что $f(m,\ n)=f(m',\ n')$ при $n-m=n'-m'=k$, то имеет место взаимно однозначное соответствие

$$f\leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_kx^k,\quad g\leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k,$$

где $a_k=f(m,\ n)$, $g_k=(m,\ n)$ при $n-m=k$, так что

$$f*g\leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k,\quad c_k=\sum_{s=0}^{k}a_sb_{k-s}.$$

Таким образом, алгебра $R(N_0)$ изоморфна алгебре формальных степенных рядов и

$$s\leftrightarrow(1-x)^{-1},\ \mu\leftrightarrow 1-x.$$

Если $X=B$, то алгебра $R(B)$ изоморфна алгебре экспоненциальных степенных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!}$$

и $s\leftrightarrow e^x$, $\mu\leftrightarrow e^{-x}$, где $[x,\ y]\sim[u,\ v]$ при $|y\setminus x|=|v\setminus u|$.

Если $X=D$ и рассматриваются $f(m,\ n)=f(m',\ n')$ при $\frac{n}{m}=\frac{n'}{m'}$, то алгебра $R(D)$ оказывается изоморфной алгебре рядов Дирихле и

$$\zeta\leftrightarrow\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\ \mu\leftrightarrow\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Пример. Пусть $c(x,\ y)$ — число цепей вида $x<x_1<\ldots<x_{l-1}<y$ в X, тогда $(\zeta-\delta)^k(x,\ y)$ — число таких цепей длины k (то есть $l=k$). Поэтому

$$c(x,\ y)=\sum_{k=0}^{\infty}(\zeta-\delta)^k(x,\ y)=$$
$$=[\delta-(\zeta-\delta)]^{-1}(x,\ y)=(2\delta-\zeta)^{-1}(x,\ y).$$

Рассмотрим эту формулу в $R(X)$ при $X=N_0$, B, D. В случае $X=N_0$ и $y-x=n$ число $c(x, y)=c_n$ есть число упорядоченных разбиений (композиций) n. В $R(N_0)$ полученная формула имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{1}{2-(1-x)^{-1}},$$

следовательно $c_n=2^{n-1}$, $n>0$.

В случае $X=B$ число $c(x, y)=c_n$ есть число упорядоченных разбиений n-элементного множества, $|x \setminus y|=n$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n = \frac{1}{2-e^x}.$$

В случае $X=D$ число $c(x, y)=c_n$ есть число упорядоченных разложений на множители $n=y/x$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \frac{1}{2-\zeta(1)}.$$

Лит.: [1] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [2] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; [3] Перечислительные задачи комбинаторного анализа. Сб. переводов, М., 1979; [4] Rota G.-C., Mullin R., в кн.: Graph theory and its applications, N. Y.— L., 1970, p. 167—213; [5] Rota G.-C., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1964, Bd 2, H. 4, S. 340—68; [6] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970. *В. М. Михеев.*

ПЕРЕЧИСЛИМОЕ МНОЖЕСТВО — множество, возникающее в результате развертывания какого-либо конструктивного порождающего процесса. Такой процесс можно мыслить как процесс вычисления значений нек-рого алгоритма с исходными данными в виде натуральных чисел, и потому, напр., определению П. м. натуральных чисел можно придать следующий точный вид: множество натуральных чисел наз. перечислимым, если существует такая *частично рекурсивная функция*, что это множество является множеством ее значений.

Всякое *разрешимое множество* натуральных чисел является П. м. Обратное неверно: можно указать пример неразрешимого П. м. Этот факт, установленный в 1936 А. Чёрчем (A. Church), является одним из фундаментальных результатов общей *алгоритмов теории*. На нем основаны (или могут быть основаны) все известные отрицательные решения *алгоритмических проблем*. Если какое-либо множество и его дополнение суть П. м., то это множество разрешимо (теорема Поста). Изучение и классификация П. м. являются предметом исследований алгоритмич. теории множеств.

Лит.: [1] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960. *Н. М. Нагорный.*

ПЕРИМЕТР — 1) П. плоской области, ограниченной спрямляемой кривой,— полная длина границы области.

2) П. измеримого множества A в n-мерном евклидовом (или римановом) пространстве — нижний предел $(n-1)$-мерной площади границы многогранников P_i (или множеств P_i с C^1-гладкой границей), сходящихся к A по объему, т. е. так, что $\operatorname{Vol}((A \setminus P_i) \cup \cup (P_i \setminus A)) \to 0$ при $i \to \infty$.

Лит.: [1] Caccioppoli R., «Rand. Accad. naz. Lincei. Ser. 8», 1952, № 1, p. 3—11, № 2, p. 137—46; [2] Gorgi E. de, там же, Ser. 1, 1958, 5, № 2, p. 33—34. *В. А. Залгаллер.*

ПЕРИОД группы — наименьшее общее кратное порядков элементов данной группы (предполагается, что группа периодическая и порядки всех ее элементов ограничены в совокупности). П. группы наз. также показателем группы. *О. А. Иванова.*

ПЕРИОД функции $f(x)$ — число $T \neq 0$ такое, что при любом $x \in X \subset \mathbb{R}$ (или $X \subset \mathbb{C}$) числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат множеству X и выполняется равенство

$$f(x+T)=f(x).$$

Числа $\pm nT$, где n — любое натуральное число, также являются П. функции $f(x)$. У функции $f=\text{const}$ на оси или на плоскости любое число $T \neq 0$ будет П.; для функции Дирихле

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x \text{ — рациональное,}\\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное,}\end{cases}$$

любое рациональное число $T \neq 0$ будет П. Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $\psi(x)=f(ax+b)$, где a и b — постоянные и $a \neq 0$, имеет период $\frac{T}{a}$. Если действительная функция $f(x)$ с действительным аргументом непрерывна на X (и не равна тождественно постоянной), то она имеет наименьший период $T_0>0$ и всякий другой действительный П. кратен T_0. Существуют функции с комплексным аргументом, у к-рых имеются два некратных с мнимым частным П.; таковы, напр., *эллиптические функции.*

Аналогично определяется П. функции, определенной на нек-рой абелевой группе. *А. А. Конюшков.*

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа, каждый элемент к-рой имеет конечный порядок. Всякая периодич. абелева группа разлагается в прямую сумму примарных групп по различным простым числам. Об условиях конечности П. г. см. *Бёрнсайда проблема* о периодических группах. *О. А. Иванова.*

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, в к-рой каждая моногенная подполугруппа конечна (другими словами, каждый элемент имеет конечный порядок). Всякая П. п. имеет идемпотенты. Множество K_e всех элементов П. п., нек-рая (зависящая от элемента) степень к-рых равна данному идемпотенту e, наз. классом кручения, соответствующим этому идемпотенту. Множество G_e всех элементов из K_e, для к-рых e служит единицей, является $\mathcal{H}$-классом (см. *Грина отношения эквивалентности*), наибольшей подгруппой в K_e и идеалом в подполугруппе $\langle K_e\rangle$, порожденной K_e; таким образом $\langle K_e\rangle$ будет гомогруппой (см. *Минимальный идеал*). П. п. с единственным идемпотентом наз. унипотентной. Унипотентность П. п. S эквивалентна каждому из следующих условий: S есть идеальное расширение группы при помощи *нильполугруппы*, S есть подпрямое произведение группы и нильполугруппы.

Разбиение П. п. на классы кручения играет определяющую роль при изучении многих вопросов для периодич. полугрупп. Произвольный класс кручения не обязательно является подполугруппой: минимальный контрпример — пятиэлементная *Брандта полугруппа* B_2, изоморфная *рисовской полугруппе матричного типа* над единичной группой с единичной сэндвич-матрицей 2-го порядка. В П. п. S все классы кручения будут подполугруппами тогда и только тогда, когда S не содержит подполугруппы, являющейся идеальным расширением унипотентной полугруппы при помощи B_2; в этом случае разбиение S на классы кручения не обязательно будет *связкой*. Известны различные (в том числе необходимые и достаточные) условия, при к-рых П. п. есть связка классов кручения; это, очевидно, имеет место для коммутативных полугрупп, это верно для П. п. с двумя идемпотентами [3].

В любой П. п. отношения Грина $\mathcal{D}$ и $\mathcal{J}$ совпадают; 0-простая П. п. будет вполне 0-простой. Для П. п. S следующие условия эквивалентны: 1) S — *архимедова полугруппа*, 2) все идемпотенты из S попарно не сравнимы относительно естественного частичного порядка (см. *Идемпотент*), 3) S есть идеальное расширение вполне простой полугруппы при помощи нильполугруппы. Известно много условий, эквивалентных тому, что П. п. S разлагается в связку (а тогда и в полурешетку) архимедовых полугрупп;

среди них: 1) для любого $a \in S$ и для любого идемпотента $e \in S$, если $e \in SaS$, то $e \in Sa^2S$ (см. [5]); 2) в S каждый регулярный $\mathcal{D}$-класс есть подполугруппа; 3) каждый *регулярный элемент* из S является групповым.

Пусть S — бесконечная П. п., E_S — множество всех ее идемпотентов. Если E_S конечно, то S содержит бесконечную унипотентную подполугруппу, если E_S бесконечно, то S содержит бесконечную подполугруппу, являющуюся *нильпотентной полугруппой* или полугруппой идемпотентов [4].

Важный подкласс П. п. составляют *локально конечные полугруппы*. Более широкий класс составляют квазипериодич. полугруппы (S наз. квазипериодической, если нек-рая степень каждого ее элемента лежит в подгруппе $G \subseteq S$). Многие свойства П. п. переносятся на квазипериодич. полугруппы.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Просвиров А. С., «Матем. зап. Уральск. ун-та», 1971, т. 8, № 1, с. 77—94; [4] Шеврин Л. Н., «Изв. вузов. Математика», 1974, № 5, с. 205—15; [5] Putcha M., «Semigroup Forum», 1973, v. 6, № 1, p. 12—34; [6] Schwarz St., «Чехосл. матем. ж.», 1953, т. 3, с. 7—21.

Л. Н. Шеврин.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ТОЧКА динамической системы — точка траектории периодич. движения динамич. системы f^t ($t \in \mathbb{R}$ или $t \in \mathbb{Z}$), заданной на пространстве S, т. е. такая точка $x \in S$, что найдется число $T>0$, для к-рого $f^T x = x$, но $f^t x \neq x$ при $t \in (0, T)$. Это число T наз. периодом точки x (иногда периодами наз. также все целые кратные числа T).

Траектория П. т. наз. замкнутой траекторией, или циклом. При употреблении последних терминов часто отвлекаются от конкретной параметризации множества точек траектории параметром t, рассматривая тот или иной класс эквивалентных параметризаций: если f^t — непрерывное действие группы $\mathbb{R}$ на топологич. пространстве S, то цикл рассматривают как окружность, топологически вложенную в S; если f^t — дифференцируемое действие группы $\mathbb{R}$ на дифференцируемом многообразии S, то цикл рассматривают как окружность, гладко вложенную в S.

Если x — П. т. (а S — метрич. пространство), то ее *α-предельное множество* A_x и ω-предельное множество Ω_x совпадают с ее траекторией (понимаемой как множество точек). Это свойство в определенной мере выделяет П. т. среди всех точек, не являющихся неподвижными. А именно, если пространство, на к-ром задана динамич. система f^t, является полным метрическим и точка x такова, что $\Omega_x = \{f^t x\}_{t \in \mathbb{R}}$, то x — неподвижная или периодич. точка динамич. системы f^t.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949.

В. М. Миллионщиков.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ТРАЕКТОРИЯ автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — траектория *периодического решения* этой системы; обычно подразумевается, что это решение не сводится к константе, т. е. траектория не сводится к одной точке (*равновесия положению*). Синоним П. т.— замкнутая траектория (поскольку она является замкнутой кривой).

Д. В. Аносов.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция, имеющая *период*.

1) Пусть функция $f(x)$ определена на $X \in \mathbb{R}$ и имеет период T. Для получения графика $f(x)$ достаточно график функции $f(x)$ на $[a, a+T] \cap X$, где a — нек-рое число, переместить вдоль $\mathbb{R}$ на $\pm T$, $\pm 2T$, ... Если П. ф. $f(x)$ с периодом T имеет конечную производную $f'(x)$, то $f'(x)$ является П. ф. с тем же периодом. Пусть $f(x)$ интегрируема на любом отрезке и имеет период T. Первообразная $F = \int_0^x f(t)dt$ имеет период T, если

$\int_0^T f(t)dt=0$, в противном случае первообразная П. ф. непериодическая, такова, напр., первообразная функции $f(x)=\cos x+1$. *А. А. Конюшков.*

2) П. ф. комплексного переменного z — однозначная аналитич. функция $f(z)$, имеющая только изолированные особые точки во всей плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}$, для к-рой существует число $p\neq 0$, называемое периодом функции $f(z)$, такое, что

$$f(z+p)=f(z),\ z\in\mathbb{C}.$$

Любая линейная комбинация периодов данной П. ф. $f(z)$ с целочисленными коэффициентами также является периодом $f(z)$. Все периоды данной П. ф. $f(z)\neq\neq\mathrm{const}$ составляют дискретную абелеву группу по сложению, называемую группой периодов функции $f(z)$. Если базис этой группы состоит из одного единственного основного, или примитивного, периода $2\omega=2\omega_1\neq 0$, т. е. если любой период p есть целое кратное 2ω, то $f(z)$ наз. *однопериодической функцией*. В случае базиса, состоящего из двух основных периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$, $\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_3)\neq 0$, имеем *двоякопериодическую функцию*. Если П. ф. $f(z)$ отлична от константы, то базис ее группы периодов не может состоять более чем из двух основных независимых периодов (теорема Якоби).

Любая полоса вида

$$\{z=(\tau e^{i\alpha}+t)\,2\omega\colon\ -\infty<\tau<\infty,\ 0\leqslant t<1,\ 0<\alpha\leqslant\pi/2\},$$

где 2ω — один из основных периодов П. ф. $f(z)$, или ей конгруэнтная, наз. полосой периодов функции $f(z)$; обычно принимают $\alpha=\pi/2$, т. е. рассматривают полосу периодов, стороны к-рой перпендикулярны основному периоду 2ω. В каждой полосе периодов П. ф. принимает любое свое значение и притом одинаково часто.

Любая целая П. ф. $f(z)$ во всей плоскости $\mathbb{C}$ разлагается в ряд Фурье

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\frac{\pi i k}{\omega}z}, \qquad (*)$$

$$a_k=\frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f(t)\,e^{\frac{-\pi i k}{\omega}t}\,dt,$$

к-рый сходится равномерно и абсолютно на прямой $\{z=t\omega\colon -\infty<t<\infty\}$ и вообще на любой сколь угодно широкой полосе конечной ширины, параллельной этой прямой. Случай, когда целая П. ф. $f(z)$ стремится к определенному конечному или бесконечному пределу в каждом из двух концов полосы периодов, характеризуется тем, что ряд (*) содержит лишь конечное число членов, то есть $f(z)$ есть тригонометрич. полином.

Любая мероморфная П. ф. $f(z)$ во всей плоскости $\mathbb{C}$ с основным периодом 2ω представима в виде отношения двух целых П. ф. с тем же периодом, т. е. в виде отношения двух рядов вида (*). В частности, класс всех тригонометрич. функций можно описать как класс таких мероморфных П. ф. с периодом 2π, к-рые в каждой полосе периодов имеют лишь конечное число полюсов и стремятся к определенному пределу в каждом конце полосы периодов.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968. *Е. Д. Соломенцев.*

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ обыкновенного дифференциального уравнения или системы — решение, периодически зависящее от независимого переменного t. Для П. р. $x(t)$ (в случае системы x — вектор) имеется такое число $T\neq 0$, что

$$x(t+T)=x(t) \text{ при всех } t\in\mathbb{R}.$$

Всевозможные такие T наз. **периодами** данного **П. р.**; при этом из непрерывности $x(t)$ следует, что либо $x(t)$ не зависит от t, либо всевозможные периоды являются целочисленными кратными одного из них — **минимального периода** $T_0>0$. Говоря о П. р., часто подразумевают, что имеет место второй случай, а о T_0 говорят просто как о периоде.

П. р. рассматривают обычно для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части к-рых либо не зависят от t (*автономная система*):

$$\dot{x}=f(x),\ x\in U, \tag{1}$$

где U — область в $\mathbb{R}^n$, либо зависят от t периодически:

$$\dot{x}=f(t,\ x),\ f(t+T_1,\ x)=f(t,\ x),\ x\in U. \tag{2}$$

(У систем с иным характером зависимости правых частей от t чаще всего нет П. р.) В случае системы (2) период T_0 П. р. обычно совпадает с периодом T_1 правой части или является целочисленным кратным T_1; другие T_0 возможны лишь в исключительных случаях. П. р. с периодом $T_0=kT_1$, $k>1$, описывают субгармонич. колебания (см. *Вынужденные колебания*) и потому сами иногда наз. **субгармоническими П. р.** (или **субгармониками**).

Система (2) определяет *последования отображение* F (зависящее от выбора начального момента t_0): если $x(t,\ \xi)$ — решение системы (2) с начальным значением $x(t_0,\ \xi)=\xi$, то

$$F(\xi)=x(t_0+T_1,\ \xi).$$

Свойства системы (2) тесно связаны со свойствами F; в частности, значение при $t=t_0$ П. р. с периодом kT_1 является при $k=1$ неподвижной точкой отображения F, а при $k>1$ — его периодич. точкой периода k, т. е. неподвижной точкой для итерации F^k. Изучение П. р. в значительной степени сводится к исследованию соответствующей неподвижной (или периодической) точки отображения последования.

Для автономной системы (1) используется следующая модификация этой конструкции: в фазовом пространстве в какой-либо точке траектории рассматриваемого П. р. (она является замкнутой кривой) берут какое-нибудь локальное сечение, т. е. гладкую площадку П коразмерности 1, трансверсальную к этой траектории, и рассматривают отображение, переводящее точку $\xi\in\Pi$ в первую по времени точку пересечения с П исходящей из ξ траектории системы (1).

Поведение решений, близких к данному П. р., описывается в линейном приближении соответствующей системой *уравнений в вариациях*. Коэффициенты этой линейной системы в данном случае периодически зависят от t, и поэтому можно говорить о соответствующих *монодромии операторе* и *мультипликаторах*. О последних говорят как о **мультипликаторах данного П. р.** Линейное приближение определяет свойства П. р. (устойчивость, инвариантные многообразия) примерно в той же степени, как и для *равновесия положений*.

П. р. автономной системы (1) имеют нек-рые специфич. особенности: один из мультипликаторов всегда равен единице (если П. р. не сводится к константе), что приходится, в частности, учитывать при исследовании устойчивости этих П. р. (см. *Андронова — Витта теорема*); период может измениться при малом возмущении, что приходится учитывать в *возмущений теории*.

Отыскание П. р. и исследование их свойств представляет интерес не только с чисто математич. точки зрения, но и потому, что при математич. описании реальных физич. систем их периодич. режимы обычно соответствуют П. р. (см. *Автоколебания*, *Вынужденные колебания*, *Колебаний теория*, *Нелинейные колебания*, *Релаксационное колебание*). Однако эта задача очень трудна — так, не имеется никаких общих методов, к-рые позволили бы устанавливать, существуют ли П. р. у конкретной системы. В различных случаях используются различные соображения и методы. Многие из них относятся к *возмущений теории* (*гармонического баланса метод*, *Крылова — Боголюбова метод усреднения*, *Малого параметра метод*), к к-рой примыкает также исследование *бифуркаций*; другие — к *качественной теории дифференциальных уравнений*. Последняя, в частности, устанавливает особую роль П. р. для системы (1) при $n=2$: в этом случае П. р. вместе с нек-рыми другими типами решений полностью определяют поведение всех решений вообще (см. также *Предельный цикл*). В связи с этим имеется ряд специальных результатов о П. р. таких систем (напр., о П. р. *Ван дер Поля уравнения* и его обобщений или модификаций — *Льенара уравнения*, *Рэлея уравнения*).

Д. В. Аносов.

ПЕРИОДОГРАММА — функция $I_N(\lambda)$, $-\infty<\lambda<\infty$, N — целое положительное, определяемая по выборке $X(1), \ldots, X(N)$ стационарного случайного процесса $X(t)$, $t=0, \pm 1, \ldots$, следующим образом:

$$I_N(\lambda)=(2\pi N)^{-1}\,|\,d_N^{(X)}(\lambda)\,|^2,$$

где

$$d_N^{(X)}(\lambda)=\sum\nolimits_{t=1}^{N}\exp\{-it\lambda\}\,X(t).$$

П. является периодической по λ функцией с периодом 2π. Дифференцируемая спектральная плотность $f(\lambda)$ стационарного процесса $X(t)$ со средним $c=\mathsf{E}X(t)$ может быть оценена с помощью П. при $\lambda\neq 0 \pmod{2\pi}$

$$\mathsf{E}I_N(\lambda)=f(\lambda)+(2\pi N)^{-1}\frac{\sin^2\dfrac{N\lambda}{2}}{\sin^2\dfrac{\lambda}{2}}c^2+O(N^{-1}).$$

В то же время П. не является состоятельной оценкой $f(\lambda)$ (см. [1]). Состоятельные *спектральной плотности оценки* могут быть получены на основе нек-рых дальнейших построений, использующих асимптотическую некоррелированность П. разных частот $\lambda_1\neq\lambda_2$, так что осреднение $I_N(x)$ по близким к λ частотам может привести к асимптотически состоятельной оценке. В случае n-мерного случайного процесса $X(t)=\{X_k(t)\}_{k=\overline{1,n}}$ матрица периодограммы $I_N(\lambda)$ определяется своими элементами

$$I_N^{(i,\,j)}(\lambda)=(2\pi N)^{-1}\,d_N^{X_i}(\lambda)\,\overline{d_N^{X_j}(\lambda)}.$$

Наряду с периодограммой $I_N(\lambda)$, к-рую еще наз. П. 2-го порядка, иногда рассматривают П. m-го порядка

$$I_N^{(k_1\,\ldots\,k_m)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=(2\pi)^{-m+1}N^{-1}\prod\nolimits_{j=1}^{m}d_N^{X_{k_j}}(\lambda_j),$$

$$\sum\nolimits_{j=1}^{m}\lambda_j=0 \pmod{2\pi},$$

к-рые используют для построения оценок спектральных плотностей m-го порядка (см. *Спектральный семиинвариант*).

Лит.: [1] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974.

И. Г. Журбенко.

ПЕРИСТОЕ ПРОСТРАНСТВО — вполне регулярное хаусдорфово пространство, обладающее оперением в нек-ром своем хаусдорфовом бикомпактном расширении. Оперением подпространства X топологич. пространства Y в Y наз. счетная система $\mathscr{P}$ семейств открытых множеств в Y такая, что для каждой точки $x\in X$ пересечение ее звезд $\mathrm{St}_\gamma(x)$ относительно семейств $\gamma\in\mathscr{P}$ по всем $\gamma\in\mathscr{P}$ содержится в X. При этом звезда $\mathrm{St}_\gamma(x)$ точки x относительно семейств множеств γ есть объединение всех элементов семейства γ, содержащих x. Если пространство X обладает оперением в нек-ром своем *бикомпактном расширении*, то оно имеет оперение и в каждом бикомпактном хаусдорфовом расширении. Если множество X является пересечением убывающей последовательности U_1, U_2, . . . множеств, открытых в объемлющем X пространстве Y, то система $\{U_1\}$, $\{U_2\}$, . . . составляет оперение подпространства X в Y. В частности, если пространство полно по Чеху, т. е. является множеством типа G_δ в нек-ром своем бикомпактно хаусдорфовом расширении, то это — П. п. Все метрич. пространства являются перистыми. Таким образом, понятие П. п. является одновременным обобщением понятий локально бикомпактного пространства и метрич. пространства.

Класс П. п. устойчив относительно операций: произведение (в счетном числе) П. п. является П. п., перистость сохраняется при переходах к замкнутому подпространству и к подпространству типа G_δ. Прообраз П. п. при совершенном отображении является П. п. (в классе тихоновских пространств). Предположение пространства перистым обеспечивает его правильное поведение во многих существенных отношениях. Всякое П. п. является k-пространством. Каждое счетное П. п. обладает счетной базой. Более того, если в П. п. есть счетная сеть, то в нем есть и счетная база (и это пространство метризуемо). При непрерывном отображении на П. п. вес не может увеличиваться. Важно, что в присутствии перистости принципиально меняется поведение нек-рых других фундаментальных свойств. В частности, произведение паракомпактных П. п. является паракомпактным П. п., хотя паракомпактность сама по себе не мультипликативна. Далее, произведение финально компактных П. п. является финально компактным П. п., хотя финальная компактность не мультипликативна. Понятие перистости позволило охарактеризовать те пространства, к-рые могут быть совершенно отображены на метрич. пространства. А именно, для того чтобы существовало совершенное отображение тихоновского пространства X на нек-рое метрич. пространство, необходимо и достаточно, чтобы X было паракомпактным П. п. (теорема Архангельского). Образ паракомпактного П. п. при совершенном отображении является паракомпактным П. п. (теорема Филиппова); однако известен пример совершенного отображения П. п. на неперистое тихоновское пространство. Важными примерами непаракомпактных П. п. служат непаракомпактные локально бикомпактные пространства и неметризуемые моровские пространства — тихоновские пространства со счетной измельчающейся последовательностью открытых покрытий. Для пространств топологич. групп из перистости следует паракомпактность. Для групп справедлив простой критерий перистости: пространство топологич. группы является перистым в том и только в том случае, если в нем имеется непустой бикомпакт, обладающий счетной определяющей системой окрестностей (теорема Пасынкова). В присутствии перистости существенно упрощаются критерии метризуемости. В частности, если паракомпактное П. п. X взаимно однозначно и непрерывно отображается на метрич. пространство, то X метризуемо. На этой основе доказывается, что тихоновское пространство X метризуемо в том и только в том случае, если оно является паракомпактным П. п. с диагональю типа G_δ; последнее условие означает, что множество $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ представимо как пересечение счетного семейства открытых в пространстве $X \times X$ множеств. Приведенные и другие результаты позволяют считать перистость одним из основных общих свойств метрич. пространств и бикомпактов наряду с паракомпактностью.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Архангельский А. В., «Матем. сб.», 1965, т. 67, № 1, с. 55—88; [3] Филиппов В. В., «Докл. АН СССР», 1967, т. 176, № 3, с. 533—35; [4] Пасынков Б. А., там же, 1965, т. 161, № 2, с. 281—84. *А. В. Архангельский.*

ПЕРИФЕРИЧЕСКИ БИКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, обладающее *базой* открытых множеств с бикомпактными границами. Вполне регулярное П. б. п. X имеет *бикомпактные расширения* с нульмерными (в смысле размерности ind) *наростами*. Если всякий бикомпакт $A \subset X$ допускает вложение в другой бикомпакт $B \subset X$, для к-рого в X имеется счетная фундаментальная система окрестностей (напр., когда X метризуемо), периферич. бикомпактность X равносильна существованию у X бикомпактных расширений с нульмерными наростами. *Е. Г. Скляренко.*

ПЕРМАНЕНТ $(m \times n)$-матрицы $A = \|a_{ij}\|$ — функция

$$\operatorname{per} A = \sum\nolimits_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{m\sigma(m)},$$

где a_{ij} — элементы из коммутативного кольца, суммирование производится по всем взаимно однозначным отображениям σ из $\{1, 2, \ldots, m\}$ в $\{1, 2, \ldots, n\}$. Если $m=n$, то σ — всевозможные подстановки, и П. представляет собой частный случай матричной функции Шура

$$d_{\chi}^{H}(A) = \sum\nolimits_{\sigma \in H} \chi(\sigma) \prod\nolimits_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

при $H = S_n$, $\chi \equiv 1$, где χ — характер степени 1 на подгруппе H симметрической группы S_n (при $H = S_n$, $\chi(\sigma) = \pm 1$, в зависимости от четности σ, получается определитель).

П. применяется в линейной алгебре, теории вероятностей и комбинаторике. В комбинаторике П. можно интерпретировать следующим образом: число систем различных представителей для заданного семейства подмножеств конечного множества есть П. матрицы инцидентности для *инцидентности системы*, связанной с этим семейством.

Наибольший интерес представляют П. матриц из нулей и единиц ((0,1)-матриц), матриц с неотрицательными действительными элементами, в частности дважды стохастических матриц (у к-рых суммы элементов по любой строке и любому столбцу равны 1) и комплексных эрмитовых матриц. Из основных свойств П. следует отметить теорему о разложении (аналог теоремы Лапласа для определителей) и теорему Бине — Коши, дающую представление П. произведения двух матриц через сумму произведений П., образованных из сомножителей. Для П. комплексных матриц полезно представление их в виде скалярного произведения на классах симметрии вполне симметричных тензоров (см., напр., [3]). Один из наиболее эффективных способов вычисления П. дает формула Райзера:

$$\operatorname{per} A = \sum\nolimits_{t=0}^{m-1} (-1)^t \sum\nolimits_{X \in \Lambda_{m-t}} \prod\nolimits_{i=1}^{m} r_i(X),$$

где Λ_k — совокупность подматриц размера $m \times k$ квадратной матрицы A, $r_i = r_i(X)$ — сумма элементов в i-й строке X, $i, k = 1, \ldots, m$. Ввиду сложности вычисления П. важны его оценки. Ниже приведены нек-рые из оценок снизу.

а) Если A есть (0, 1)-матрица с $r_i(A) \geqslant t$, $i = 1, \ldots, m$, то

$$\operatorname{per} A \geqslant t\,!/(t-m)\,!$$

при $t \geqslant m$,

$$\operatorname{per} A \geqslant t\,!,$$

если $t < m$ и $\operatorname{per} A > 0$.

б) Если A есть (0, 1)-матрица порядка n, то

$$\operatorname{per} A \geqslant \prod_{i=1}^{n} \{r_i^* + i - n\},$$

где $r_1^* \geqslant r_2^* \geqslant \ldots \geqslant r_n^*$ — суммы элементов в строках A, расположенные в порядке невозрастания, $\{r_i^* + i - n\} = \max(0, r_i^* + i - n)$.

в) Если A — положительно полуопределенная эрмитова матрица порядка n, то

$$\operatorname{per} A \geqslant \frac{n!}{s(A)^n} \prod_{i=1}^{n} |r_i|^2,$$

где $s(A) = \Sigma_{i,j} a_{ij}$, если $s(A) \neq 0$.

Оценки П. сверху:

1) для (0, 1)-матрицы порядка n

$$\operatorname{per} A \leqslant \prod_{i=1}^{n} (r_i!)^{1/r_i};$$

2) для вполне неразложимой матрицы порядка n с неотрицательными целыми элементами

$$\operatorname{per}(A) \leqslant 2^{s(A)-2n} + 1;$$

3) для комплексной нормальной матрицы с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

$$|\operatorname{per} A| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^n.$$

Наиболее известной проблемой в теории П. являлась гипотеза Ван дер Вардена: П. дважды стохастич. матрицы порядка n ограничен снизу величиной $n!/n^n$, и это значение достигается лишь для матрицы, составленной из дробей $1/n$. Положительное решение этой проблемы было получено в 1980 (см. [4]).

Из применений П. следует отметить связь с известными *комбинаторными задачами* о встречах, об исполнителях, с *Фибоначчи числами*, с перечислением *латинских квадратов* и троек Штейнера, с нахождением числа 1-факторов и линейных подграфов в *графе*; дважды стохастич. матрицы связаны с нек-рыми вероятностными моделями. Интересны физич. применения П., среди к-рых наиболее важна проблема димеров, возникающая при изучении *адсорбции* двухатомных молекул поверхностного слоя: через П. (0, 1)-матрицы простого строения выражается число способов объединения атомов вещества в двухатомные молекулы. Известны также применения П. в статистич. физике, теории кристаллов, физич. химии.

Лит.: [1] Райзер Г. Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [2] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [3] Минк Х., Перманенты, пер. с англ., М., 1982; [4] Егорычев Г. П., Решение проблемы Ван дер Вардена для перманентов, Красноярск, 1980; [5] Фаликман Д. И., «Матем. заметки», 1981, т. 29, в. 6, с. 931—38.

В. Е. Тараканов.

ПЕРМУТАТОР — собственное значение λ стохастич. ядра такое, что оно отлично от единицы и $|\lambda| = 1$. Неотрицательная непрерывная функция $K(x, y)$, заданная на компактном множестве Ω конечномерного пространства, наз. стохастическим ядром, если

$$\int_\Omega K(x, y)\, dy = 1, \quad x \in \Omega.$$

Собственные значения такого ядра удовлетворяют условию $|\lambda| \leqslant 1$. В теории операторов П. наз. оператор $A: E \to E$, если область его значений $A(E)$ конечномерна и в этой области существует такой базис $e_1, \ldots, e_n$, что $Ae_j = e_{k_j}$, $j = 1, \ldots, n$.

Лит.: [1] Интегральные уравнения, М., 1968.

Б. В. Хведелидзе.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР к данной прямой (плоскости) — прямая, пересекающая данную прямую (плоскость) под прямым углом.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ — прямые, составляющие прямой угол (в пространстве такие прямые не должны обязательно пересекаться). Прямая l и плоскость α наз. взаимно перпендикулярными, если l перпендикулярна ко всякой прямой, лежащей на α. Об обобщении понятия перпендикулярности см. ст. *Ортогональность*.

ПЕРРОНА ИНТЕГРАЛ — обобщение понятия интеграла Лебега. Функция $f(x)$ наз. интегрируемой на $[a, b]$ в смысле Перрона, если существуют функции $M(x)$ (мажоранта) и $m(x)$ (миноранта) такие, что

$$M(a)=0,\ \underline{D}M(x)\geqslant f(x),\ \underline{D}M(x)\neq-\infty,$$

$$m(a)=0,\ \overline{D}m(x)\leqslant f(x),\ \overline{D}m(x)\neq+\infty$$

($\underline{D}$ и $\overline{D}$ — нижняя и верхняя производные) для $x\in[a, b]$ и нижняя грань значений $M(b)$ мажорант $M(x)$ равна верхней грани значений $m(b)$ минорант $m(x)$; их общее значение наз. интегралом Перрона от $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается

$$(P)\int_a^b f(x)\,dx.$$

П. и. восстанавливает функцию по ее точной конечной производной; он эквивалентен *Данжуа интегралу* узкому. П. и. для ограниченных функций ввел О. Перрон [1], окончательное определение дал Х. Бауэр [2].

Лит.: [1] Perron O., «Sitzungsber. Heidelberg. Acad. Wiss.», 1914, Bd V A., S. 1—16; [2] Bauer H., «Monatsh. Math. und Phys.», 1915, Bd 26, S. 153—98; [3] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [4] Виноградова И. А., Скворцов В. А., Итоги науки. Математический анализ, 1970, М., 1971.
Т. П. Лукашенко.

ПЕРРОНА МЕТОД — метод решения *Дирихле задачи* для *Лапласа уравнения*, основанный на свойствах *субгармонических функций* (и супергармонич. функций). Первоначальное изложение этого метода было дано О. Перроном [1], существенное развитие получено в работах Н. Винера [3] и М. В. Келдыша [4].

Пусть Ω — конечная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant2$, с границей $\Gamma=\partial\Omega$, $f=f(y)$ — действительная функция на Γ, $-\infty\leqslant f(y)\leqslant+\infty$. Пусть Φ — (непустое) семейство всех супергармонич. функций $v(x)$, $x\in\Omega$, в широком смысле (т. е. функция $v(x)\equiv+\infty$ принадлежит Φ), ограниченных снизу и таких, что

$$\liminf_{x\to y} v(x)\geqslant f(y),\ y\in\Gamma,$$

и пусть

$$\overline{H}_f(x)=\overline{H}_f(x;\ \Omega)=\inf\{v(x):\ v\in\Phi\},\ x\in\Omega,$$

— нижняя огибающая семейства Φ. Наряду с Φ рассматривается (непустое) семейство Ψ всех субгармонич. функций $u(x)$, $x\in\Omega$, в широком смысле (функция $u(x)\equiv-\infty\in\Psi$), ограниченных сверху и таких, что

$$\limsup_{x\to y} u(x)\leqslant f(y),\ y\in\Gamma,$$

и пусть

$$\underline{H}_f(x)=\underline{H}_f(x;\ \Omega)=\sup\{u(x):\ u\in\Psi\},\ x\in\Omega,$$

— верхняя огибающая семейства Ψ.

Относительно функции $\overline{H}_f$ (и $\underline{H}_f$) имеются только три возможности: $\overline{H}_f(x)\equiv+\infty$, $\overline{H}_f(x)\equiv-\infty$, $\overline{H}_f(x)$ — гармонич. функция, причем всегда

$$\underline{H}_f(x)\leqslant\overline{H}_f(x),\ x\in\Omega.$$

Функция $f(y)$, $y\in\Gamma$, наз. разрешимой, если обе огибающие $\overline{H}_f$ и $\underline{H}_f$ конечны и совпадают. В этом случае гармонич. функция $H_f(x)=\overline{H}_f(x)=\underline{H}_f(x)$ есть обобщенное решение задачи Дирихле для функции $f(y)$, $y\in\Gamma$ (в смысле Винера — Перрона).

Для того чтобы функция $f(y)$, $y\in\Gamma$, была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы она была интегрируемой по гармонич. мере на Γ (теорема Брело). Любая непрерывная конечная функция $f(y)$, $y\in\Gamma$, разрешима (теорема Винера).

Точка $y_0\in\Gamma$ наз. **регулярной граничной точкой**, если для любой непрерывной конечной функции $f(y)$, $y\in\Gamma$, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{x\to y_0} H_f(x)=f(y_0).$$

Регулярность всех точек $y\in\Gamma$ равносильна существованию классич. решения $w_f(x)$ задачи Дирихле для любой непрерывной конечной функции $f(y)$, $y\in\Gamma$, причем в этом случае $H_f(x)\equiv w_f(x)$; область Ω, все граничные точки к-рой регулярны, иногда наз. также **регулярной**. Для того чтобы точка $y_0\in\Gamma$ была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы существовал *барьер* в y_0.

Точки $y_0\in\Gamma$, не являющиеся регулярными, наз. **иррегулярными граничными точками**. Напр., иррегулярными граничными точками являются изолированные точки и при $n\geqslant 3$ вершины достаточно сильно заостренных входящих в область Ω острий (пример Лебега). Множество всех иррегулярных точек Γ есть множество типа F_σ емкости нуль.

Пусть имеется последовательность областей Ω_k, $\overline{\Omega}_k\subset\Omega_{k+1}$, такая, что $\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k$, и непрерывная конечная функция $f(y)$, $y\in\Gamma$, продолжена непрерывно на окрестность Γ. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} H_f(x;\ \Omega_k)=H_f(x;\ \Omega),\ x\in\Omega,$$

равномерно внутри Ω; в случае регулярных областей Ω_k здесь получается конструкция обобщенного решения задачи Дирихле по Винеру. Рассмотрим теперь для области Ω без внутренней границы произвольную последовательность областей G_k, $\partial G_k\to\Gamma$, $G_k\supset\overline{\Omega}$. В этом случае, вообще говоря,

$$\lim_{k\to\infty} H_f(x;\ G_k)\neq H_f(x;\ \Omega).$$

Задача Дирихле устойчива в области Ω или в замкнутой области $\overline{\Omega}$, если

$$\lim_{k\to\infty} H_f(x;\ G_k)=H_f(x;\ \Omega)$$

соответственно для всех $x\in\Omega$ или для всех $x\in\overline{\Omega}$. Для устойчивости задачи Дирихле в области Ω необходимо и достаточно, чтобы множества всех иррегулярных точек дополнений $C\Omega$ и $C\overline{\Omega}$ совпадали; для устойчивости в замкнутой области — чтобы дополнение $C\overline{\Omega}$ не имело иррегулярных точек (теоремы Келдыша, см. [4], где построен также пример регулярной области Ω, внутри к-рой задача Дирихле неустойчива).

См. также *Верхних и нижних функций метод.*

Лит.: [1] Perron O., «Math. Z.», 1923, Bd 18, S. 42—54; [2] Петровский И. Г., «Успехи матем. наук», 1941 [1940], в. 8, с. 107—14; [3] Wiener N., «J. Math. and Phys.», 1924, v. 3, p. 24—51, 127—46; 1925, v. 4, p. 21—32; [4] Келдыш М. В., «Успехи матем. наук», 1941 [1940], в. 8, с. 171—231; [5] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964. *Е. Д. Соломенцев.*

ПЕРРОНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — ортогональное (унитарное) преобразование

$$x^i=\sum\nolimits_{j=1}^{n} u_j^i(t)\,y^j,\ i=1,\ \ldots,\ n, \tag{1}$$

гладко зависящее от t и преобразующее линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^i=\sum\nolimits_{j=1}^{n} a_j^i(t)\,x^j,\ i=1,\ \ldots,\ n, \tag{2}$$

в систему треугольного вида

$$\dot{y}^i = \sum\nolimits_{j=i}^{n} p_j^i(t)\, y^j,\ i=1,\ \ldots,\ n. \qquad (3)$$

Введено О. Перроном [1]. Справедлива теорема Перрона: для всякой линейной системы (2) с непрерывными коэффициентами $a_j^i(t)$ существует П. п.

П. п. строится с помощью процесса ортогонализации Грама — Шмидта (при каждом t) системы векторов $x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)$, где $x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)$ — какая-либо *фундаментальная система решений* системы (2), причем различные фундаментальные системы дают, вообще говоря, различные П. п. (см. [1], [2]). Для систем (2) с ограниченными непрерывными коэффициентами все П. п. являются *Ляпунова преобразованиями.*

Если матричнозначная функция $\|a_j^i(t)\|$, $i, j=1, \ldots, n$, является *рекуррентной функцией*, то найдется рекуррентная матричнозначная функция $\|u_j^i(t)\|$, $i, j=1, \ldots, n$, такая, что (1) есть П. п., приводящее систему (2) к треугольному виду (3), причем функция

$$\left\| p_j^i(t) \right\|,\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

рекуррентна.

Лит.: [1] Perron O., «Math. Z.», 1930, Bd 32, S. 465—73; [2] Diliberto S. P., «Ann. Math. Studies», 1950, v. 20, p. 1—38; [3] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [4] Изобов Н. А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146. *В. М. Миллионщиков.*

ПЕРРОНА — СТИЛТЬЕСА ИНТЕГРАЛ — обобщение понятия *Перрона интеграла* от функции одного действительного переменного. Конечная функция $f(x)$ наз. интегрируемой в смысле Перрона — Стилтьеса относительно конечной функции $G(x)$ на $[a,\ b]$, если на $[a,\ b]$ существуют мажоранта $M(x)$ и миноранта $m(x)$ функции $f(x)$ относительно $G(x)$ на $[a,\ b]$ с $M(x)=m(a)=0$ такие, что в каждой точке $x\in[a,\ b]$

$$M(x+\beta)-M(x-\alpha)\geqslant f(x)\,(G(x+\beta)-G(x-\alpha)),$$
$$m(x+\beta)-m(x-\alpha)\leqslant f(x)\,(G(x+\beta)-G(x-\alpha))$$

при всех достаточно малых $\alpha\geqslant0$ и $\beta\geqslant0$, кроме того, нижняя грань чисел $M(b)$, где $M(x)$ — произвольная мажоранта $f(x)$ относительно $G(x)$, и верхняя грань чисел $m(b)$, где $m(x)$ — произвольная миноранта $f(x)$ относительно $G(x)$, равны между собой. Общее значение этих двух граней наз. П.—С. и. от $f(x)$ относительно $G(x)$ на $[a,\ b]$ и обозначается

$$(P-S)\int_a^b f(x)\,dG(x).$$

Такое обобщение интеграла Перрона ввел О. Уорд [1].

Лит.: [1] Ward A. J., «Math. Z.», 1936, Bd 41, S. 578—604; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Виноградова И. А., Скворцов В. А., в кн.: Математический анализ. 1970, М., 1971, с. 65—107. *Т. П. Лукашенко.*

ПЕРРОНА — ФРОБЕНИУСА ТЕОРЕМА: пусть действительная квадратная $(n\times n)$-матрица A, рассматриваемая как оператор в пространстве $\mathbb{R}^n$, не имеет инвариантных координатных подпространств (такая матрица наз. неразложимой) и неотрицательна (т. е. все ее элементы неотрицательны). И пусть $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ — ее собственные значения, занумерованные так, что

$$|\lambda_1|=\ldots=|\lambda_h|>|\lambda_{h+1}|\geqslant\ldots\geqslant|\lambda_n|,\ 1\leqslant h\leqslant n.$$

Тогда:

1) число $r=|\lambda_1|$ — простой положительный корень характеристич. многочлена матрицы A;

2) существует собственный вектор матрицы A с положительными координатами, соответствующий r;

3) числа $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_h$ совпадают с точностью до нумерации с числами $r,\ \omega r,\ \ldots,\ \omega^{h-1}r$, где $\omega=e^{2\pi i/h}$;

4) произведение любого собственного значения матрицы A на ω есть собственное значение матрицы A;

5) при $h>1$ найдется перестановка строк и столбцов, приводящая матрицу A к виду

$$\begin{Vmatrix} 0 & A_1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \quad \ldots 0 & A_{h-1} \\ A_h & 0 & 0 \quad \ldots 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где A_j — матрицы порядка nh^{-1}.

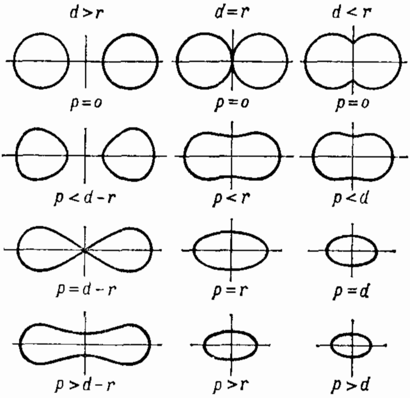
О. Перрон доказал в [1] утверждения 1) и 2) для положительных матриц, а в полном объеме приведенную теорему доказал Ф. Фробениус в [2].

Лит.: [1] Perron O., «Math. Ann.», 1907, Bd 64, S. 248—263; [2] Frobenius G., «Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Akad. Wiss.», 1912, S. 456—77; [3] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967. *Д. А. Супруненко.*

ПЕРСЕЯ КРИВАЯ, спирическая кривая,— плоская алгебраич. кривая 4-го порядка; является линией пересечения поверхности тора плоскостью, параллельной его оси (см. рис.). Уравнение в прямоугольных координатах:

$$(x^2+y^2+p^2+d^2-r^2)^2=4d^2(x^2+p^2),$$

где r — радиус окружности, описывающей тор, d — расстояние от начала координат до ее центра, p — расстояние от оси тора до секущей плоскости. К П. к.

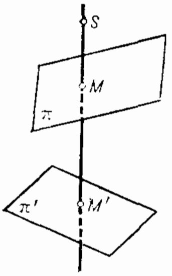


относятся: *Бута лемниската*, *Кассини овал* и *Бернулли лемниската*.

П. к. названа по имени древнегреч. геометра Персея (2 в. до н. э.), исследовавшего ее в связи с изучением различных способов задания кривых.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

ПЕРСПЕКТИВА с центром S — отображение плоскости π в плоскость π', при к-ром каждой точке M плоскости π ставится в соответствие точка M' пересечения прямой SM с плоскостью π' (если прямая SM не параллельна плоскости π'; см. рис.).



В проективной геометрии П. определяется следующим образом: пусть V и V' — собственные подпространства одинаковой размерности проективного пространства Ω, T — подпространство максимальной размерности, не имеющее общих точек ни с V, ни с V'. Пусть U — подпространство, содержащееся в V, и W — подпространство минимальной размерности, содержащее U и T, а U' — пересечение W и V'. Соответствие, при к-ром каждому подпространству

U, содержащемуся в V, ставится в соответствие подпространство U', содержащееся в V', наз. перспективным отображением пространства V на пространство V' с центром перспективы T.

П. есть *коллинеация*. Если подпространства V и V' пересекаются, то каждая точка подпространства $V \cap V'$ сама себе соответствует.

Если в пространствах V и V' введены проективные координаты, то перспективное соответствие может быть задано линейным отображением.

Лит.: [1] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [2] Глаголев Н. А., Проективная геометрия, 2 изд., М., 1963. *П. С. Моденов.*

ПЕРЦЕНТИЛЬ — одна из числовых характеристик распределения вероятностей; частный случай *квантили*. Именно, П. определяется как квантиль K_p, соответствующая значениям p, равным $j/100$ для $j=0, 1, 2, \ldots, 99$. Для непрерывной строго монотонной функции распределения $F(x)$ j-я перцентиль представляет собой решение уравнения

$$F(x) = \frac{j}{100},$$

$j=0, 1, 2, \ldots, 99$. В математич. статистике П. дают хорошее представление о виде функции распределения. П. также наз. процентилями, или центилями. *А. В. Прохоров.*

ПЕТЕЛЬ ПРОСТРАНСТВО — снабженное компактно открытой топологией пространство ΩX всех петель в точке $*$ топологич. пространства X с отмеченной точкой $*$. П. п. является слоем *Серра расслоения* (E, p, X) над пространством X (здесь E — *путей пространство*). *А. Ф. Харшиладзе.*

ПЕТЕРА — ВЕЙЛЯ ТЕОРЕМА — теорема об аппроксимации функций на компактной топологич. группе *представляющими функциями*. Пусть π пробегает семейство Σ представителей всех классов эквивалентности неприводимых непрерывных унитарных представлений компактной группы G. Пусть $\dim \pi$ — размерность представления π и $u_{ij}^{(\pi)}$ — его матричные элементы в нек-ром ортонормированном базисе. П.— В. т. утверждает, что функции вида

$$\sqrt{\dim \pi}\; u_{ij}^{(\pi)} \quad (\pi \in \Sigma)$$

образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathscr{L}_2(G)$ суммируемых с квадратом функций относительно меры Хаара на G (мера всей группы считается равной 1). Алгебра всех представляющих комплексных функций на G, совпадающая с множеством конечных линейных комбинаций функций $u_{ij}^{(\pi)}$ $(\pi \in \Sigma)$, равномерно плотна в пространстве всех непрерывных комплексных функций на G.

В случае, когда $G=T$ — группа вращений плоскости,— это утверждение совпадает с элементарной теоремой об аппроксимации периодических непрерывных функций тригонометрич. многочленами.

В качестве следствия из П.— В. т. выводится, что совокупность линейных комбинаций характеров неприводимых представлений группы G плотна в алгебре всех непрерывных функций на G, построенных на классах сопряженных элементов. Другое следствие состоит в том, что для любого элемента $a \in G$, $a \neq e$, найдется такое неприводимое непрерывное представление φ группы G, что $\varphi(a) \neq E$; если же G — компактная группа Ли, то G допускает точное линейное представление.

Из П.— В. т. вытекает также следующее, более общее, утверждение (см. [5], [6]). Пусть дано непрерывное линейное представление φ компактной группы G в пространстве Фреше E, тогда подпространство представляющих элементов пространства E плотно в E. При этом элемент $v \in E$ наз. представляющим, или сферическим, или почти инвариантным, если орбита $\varphi(G)v$ порождает в E конечномерное подпространство. Это, в частности, применимо к случаю, когда E — пространство сечений нек-рого класса гладкости гладкого векторного G-расслоения, напр. пространство тензорных полей определенного типа и заданного класса гладкости на гладком многообразии с гладким действием компактной группы Ли G.

П.— В. т. была доказана в 1927 Ф. Петером (F. Peter) и Г. Вейлем (H. Weyl) (см. [1]).

Лит.: [1] Петер Ф., Вейль Г., «Успехи матем. наук», 1936, в. 2, с. 144—60; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 1, М., 1975; [4] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948; [5] Palais R. S., Stewart T. E., «Amer. J. Math.», 1961, v. 83, № 4, p. 623—44; [6] Mostow G. D., «Ann. Math.», 1961, v. 73, № 1, p. 20—48. *А. Л. Онищик, А. И. Штерн.*

ПЕТЕРСОНА ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, обладающая сопряженной сетью конических или цилиндрич. линий, являющейся главным основанием изгибания (см. *Изгибание на главном основании*). Напр., П. п. является *каналовая поверхность*, *переноса поверхность*, *вращения поверхность*. *Вращений индикатриса* П. п. есть прямой коноид (в частности, для каналовой поверхности ею является геликоид, для поверхности переноса — гиперболич. параболоид). Впервые рассмотрена К. М. Петерсоном как пример поверхности, допускающей изгибание на главном основании.

И. Х. Сабитов.

ПЕТЕРСОНА СООТВЕТСТВИЕ — соответствие двух поверхностей, при к-ром их касательные плоскости в соответствующих точках параллельны. В общем виде рассмотрено К. М. Петерсоном [1] в связи с задачей изгибания на главном основании. Напр., в П. с. находятся поверхность и ее сферич. образ, поверхность и ее индикатриса вращения, присоединенные минимальные поверхности.

Если поверхности S и S^* имеют общую параметризацию, то их третьи квадратичные формы равны. Главная сеть асимптотич. сетей S и S^* сопряжена на каждой из них. Эта сеть определяется однозначно, если асимптотич. сети не имеют общих семейств линий; вырождается, если эти сети связанные; становится неопределенной, если эти сети соответствуют друг другу. Соответствующие касательные к линиям главной сети на S и S^* параллельны.

Если главную сеть принять за координатную (u, v), то радиус-векторы x и x^* поверхностей S и S^* связаны уравнениями

$$\overset{*}{x}_u = \rho x_u, \quad \overset{*}{x}_v = \sigma x_v,$$

причем функции ρ, σ удовлетворяют системе уравнений

$$\rho_v E - \sigma_u F = \frac{\sigma-\rho}{2}, \ \rho_v F - \sigma_u G = \frac{\sigma-\rho}{2} G_u,$$

то есть ρ, σ зависят только от метрики F (E, F, G — коэффициенты ее первой квадратичной формы). Естественно поэтому применение П. с. к паре изометричных поверхностей S, $\tilde{S}$: оно дает другую пару изометричных поверхностей S^*, $\tilde{S}^*$ с теми же нормалями $n = n^*$, $\tilde{n} = \tilde{n}$ соответственно. Кроме того, оказывается, что диаграммы поворота этих поверхностей одни и те же и что основание изометрии новых поверхностей имеет то же сферич. изображение, как и первоначальных. Напр., сфере и изометричной ей поверхности положительной постоянной кривизны отвечают при П. с. изометричные поверхности с соответствующими линиями кривизны — т. н. поверхности Бонне.

В частности, если основание изометрии S и S^* было главным основанием, то оно и остается таковым. Это — т. н. преобразование Петерсона поверхности, изгибаемой на главном основании в поверхность того же типа. Имеется обобщение этого преобразования на случай семейства *сетей* (см. [2]).

Специальный случай П. с., при к-ром главная сеть является сетью кривизны одновременно на S и на S^*, наз. соответствием Комбескюра.

Если П. с. является конформным, то либо одна из поверхностей минимальная, а другая — сфера (то есть П. с. — сферич. отображение), либо обе поверхности минимальные, а вектор конформного отображения удовлетворяет уравнению Лапласа, либо поверхности подобны, либо обе поверхности изотермические и находятся в соответствии Комбескюра.

Имеется многомерное обобщение П. с. (см. [4]).

Лит.: [1] Петерсон К. М., «Матем. сб.», 1866, т. 1, с. 391—438; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963; [3] Фиников С. П., Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М.— Л., 1937; [4] Широков П. А., Широков А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959. *М. И. Войцеховский.*

ПЕТЕРСОНА — КОДАЦЦИ УРАВНЕНИЯ — уравнения, составляющие вместе с уравнением Гаусса (см. *Гаусса теорема*) необходимые и достаточные условия интегрируемости системы, к к-рой сводится задача восстановления поверхности по ее первой и второй квадратичным формам (см. *Бонне теорема*). П. — К. у. имеют вид

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2}+\Gamma^1_{i1}b_{12}+\Gamma^2_{i1}b_{22}=\frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1}+\Gamma^1_{i2}b_{11}+\Gamma^2_{i2}b_{21},$$

где b_{ij} — коэффициенты второй квадратичной формы, Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля 2-го рода.

Уравнения впервые найдены К. М. Петерсоном в 1853, переоткрыты Г. Майнарди (G. Mainardi, 1856) и Д. Кодацци (D. Codazzi, 1867).

Лит.: [1] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, М., 1956. *А. Б. Иванов.*

ПЕТЛЯ — замкнутый *путь*. Подробнее, петля f — непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в топологич. пространство X такое, что $f(0)=f(1)$. Совокупность всех П. пространства X с отмеченной точкой $*$ таких, что $f(0)=f(1)=*$, образует *петель пространство*.

М. И. Войцеховский.

ПЕТРИ СЕТЬ — математическая модель дискретных динамич. систем, в том числе информационных систем (параллельных программ, операционных систем, ЭВМ и их устройств, сетей ЭВМ), ориентированная на качественный анализ и синтез таких систем (обнаружение блокировок, тупиковых ситуаций и узких мест, автоматич. синтез параллельных программ и компонентов ЭВМ и др.). Введена К. Петри (С. Petri) в 60-х гг. 20 в. П. с. — это набор $N=(T, P, F, M_0)$, где T — конечное множество символов, наз. переходами, P — конечное множество символов, наз. местами, $P\cap T=\phi$, F — функция инцидентности:

$$F\colon T\times P\cup P\times T\longrightarrow\{0, 1\},$$

M_0 — начальная разметка мест:

$$M_0\colon P\longrightarrow\{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Неформально П. с. представляют размеченным ориентированным графом со множеством вершин $T\cup P$ (см. рис.). Из вершины-места $p\in P$, изображаемой кружком, ведет дуга в вершину-переход $t\in T$, изображаемую прямоугольником, тогда и только тогда, когда

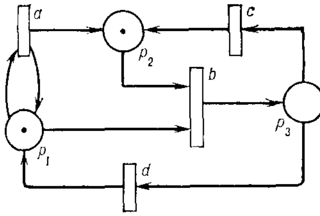
$$F(p, t)=1$$

(p — входное место перехода t; на рис. $P=\{p_1, p_2, p_3\}$, $T=\{a, b, c, d\}$). Из вершины-перехода t ведет дуга в вершину-место p тогда и только тогда, когда

$$F(t, p)=1$$

(p — выходное место перехода t). Место p помечается разметкой $M_0(p) \neq 0$, часто изображаемой соответствующим числом точек (фишек).

Динамика поведения моделируемой системы описывается в терминах функционирования П. с. Сеть функционирует в дискретном времени, переходя от разметки к разметке.



Каждая разметка — это функция $M: P \to \{0, 1, 2, \ldots\}$; смена разметок (начиная с M_0) происходит в результате срабатывания переходов сети. Переход $t \in T$ может сработать при разметке M, если для любого $p \in P$

$$M(p) - F(p, t) \geqslant 0,$$

т. е. если каждое его входное место имеет хотя бы одну фишку. В результате срабатывания t при разметке M последняя сменяется разметкой M' по правилу: для любого $p \in P$

$$M'(p) = M(p) - F(p, t) + F(t, p),$$

т. е. переход t изымает по фишке из каждого своего входного места и посылает по фишке в каждое свое выходное место. Если может сработать несколько переходов, то срабатывает один, любой из них. Сеть останавливается, если при нек-рой разметке (тупиковая разметка) ни один из ее переходов не может сработать. При одной и той же начальной разметке П. с. может порождать, в силу недетерминированности ее функционирования, различные последовательности срабатываний ее переходов. Эти последовательности образуют слова в алфавите T, а множество всевозможных слов, порождаемых П. с., наз. ее *языком*. Две П. с. эквивалентны, если они порождают один и тот же язык.

Исследования по П. с. развиваются в двух направлениях. Математич. теория сетей разрабатывает методы формального анализа их свойств. Среди наиболее интересных проблем следует отметить задачи распознавания тупиковых ситуаций в сетях, задачи распознавания эквивалентности сетей по порождаемым языкам, оценки сложности анализа сетей, сравнение выразительной мощности различных подклассов П. с. и их обобщений. Установлено, что проблема тупиковых ситуаций разрешима, изучены свойства класса языков, порождаемых П. с. Этот класс строго содержится в классе рекурсивно перечислимых языков, строго включает класс регулярных языков и частично пересекается с классом контекстно свободных языков. Второе направление — применение П. с. как основы прикладных моделей дискретных динамич. систем в информатике, экономике, цифровой технике и т. п.

В отличие от *автоматов конечных*, в терминах к-рых описываются глобальные изменения состояний систем, П. с. концентрирует внимание на локальных событиях (им соответствуют переходы), локальных условиях (им соответствуют места) и на локальных связях между событиями и условиями. Поэтому в терминах П. с. более адекватно, чем с помощью автоматов, моделируется поведение распределенных асинхронных систем.

Лит.: [1] Peterson J. L., Petri net theory and the modeling of systems, Englewood-Cliffs, 1981; [2] Котов В. Е., «Кибернетика», 1980, № 5, с. 10—18; [3] Апериодические автоматы, М., 1976; [4] Net theory and applications, B., 1980.

В. Е. Котов.

ПЕТТИСА ИНТЕГРАЛ — интеграл от векторнозначной функции по скалярной мере, являющийся т. н. слабым интегралом. Введен Б. Петтисом [1].

Пусть $F(X, E, \mathfrak{B}, \mu)$ — векторное пространство функций $x(t)$, $t \in E$, со значениями в банаховом пространстве X, заданных на множестве $(E, \mathfrak{B}, \mu)$ со счетно аддитивной мерой μ на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ подмножеств E. Функция $x(t)$ наз. слабо измеримой, если для любого $f \in X^*$ измерима скалярная функция $f[x(t)]$. Функция $x(t)$ интегрируема по Петтису на измеримом подмножестве $M \subset E$, если для любого $f \in X^*$ интегрируема на M функция $f[x(t)]$ и существует элемент $x(M) \in X$ такой, что

$$f[x(M)] = \int_M f[x(t)]\, d\mu.$$

Тогда

$$\int_M x(t)\, d\mu \overset{\text{def}}{=} x(M)$$

и наз. интегралом Петтиса. Такой интеграл для случая $E = (a, b)$ с обычной мерой Лебега был впервые введен И. М. Гельфандом [2].

Лит.: [1] Pettis B., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1938, v. 44, № 2, p. 277—304; [2] Гельфанд И. М., «Зап. Науково-дослід. інст. матем. и мех. Харків. матем. тов.», 1936, т. 13, в. 1, с. 35—40; [3] Hildebrandt T., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 59, p. 111—39; [4] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., М., 1962.

В. И. Соболев.

ПИ, число π, — отношение длины окружности к диаметру; представляется бесконечной непериодической десятичной дробью

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\ldots$$

Разыскание пределов нек-рых арифметич. последовательностей, составляемых по простым законам, часто приводило к числу π. Примером может служить ряд Лейбница

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots,$$

к-рый, однако, очень медленно сходится. Существуют значительно быстрее сходящиеся ряды, пригодные для вычисления π.

Возможность чисто аналитич. определения числа π имеет принципиальное значение и для геометрии. Так, в неевклидовой геометрии π также участвует в нек-рых формулах, но уже не как отношение длины окружности к диаметру (это отношение в неевклидовой геометрии не является постоянным). Средствами анализа, среди к-рых решающую роль сыграла формула Эйлера

$$e^{2\pi i} = 1,$$

была окончательно выяснена и арифметич. природа числа π. В кон. 18 в. И. Ламберт (J. Lambert) и А. Лежандр (A. Legendre) установили, что π — иррациональное число, а в 19 в. Ф. Линдеман (F. Lindemann) доказал, что π является трансцендентным числом.

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

ПИКА ТЕОРЕМА, инвариантная форма леммы Шварца, — обобщение *Шварца леммы*, состоящее в следующем. Пусть $w = f(z)$ — ограниченная регулярная аналитич. функция в единичном круге $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $|f(z)| \leqslant 1$, $|z| < 1$. Тогда для любых точек z_1 и z_2 круга Ω неевклидово расстояние $d(w_1, w_2)$ их образов $w_1 = f(z_1)$ и $w_2 = f(z_2)$ не превосходит неевклидова расстояния $d(z_1, z_2)$, то есть

$$d(w_1, w_2) \leqslant d(z_1, z_2), \quad |z_1| < 1, \quad |z_2| < 1. \qquad (1)$$

Кроме того, имеет место неравенство

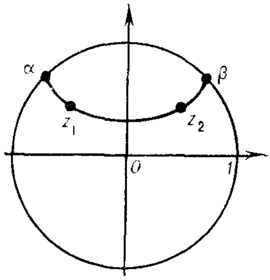
$$\frac{|dw|}{1 - |w|^2} \leqslant \frac{|dz|}{1 - |z|^2}, \quad dw = f'(z)\, dz, \quad |z| < 1, \qquad (2)$$

между элементами неевклидовой длины (дифференциальная форма П. т., или леммы Шварца). Знаки равенства в (1) и (2) имеют место только в том случае, когда $w=f(z)$ есть дробно-линейная функция, отображающая круг Ω на себя.

Неевклидово, или гиперболическое, расстояние $d(z_1, z_2)$ есть расстояние в геометрии Лобачевского между точками z_1 и z_2, когда круг Ω принимается в качестве плоскости Лобачевского, а прямыми Лобачевского служат дуги окружностей, ортогональных единичной окружности (модель Пуанкаре); при этом

$$d(z_1, z_2)=\frac{1}{2}\ln(\alpha, \beta, z_1, z_2)=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{|1-\bar{z}_1 z_2|+|z_1-z_2|}{|1-\bar{z}_1 z_2|-|z_1-z_2|},$$

где $(\alpha, \beta, z_1, z_2)$ — двойное отношение точек z_1, z_2 и определяемых этими точками точек пересечения α, β прямой Лобачевского, проходящей через z_1 и z_2, с единичной окружностью (см. рис.).



Неевклидова длина образа $f(L)$ любой спрямляемой кривой $L\subset\Omega$ при отображении $w=f(z)$ не превосходит неевклидовой длины L.

П. т. была установлена Г. Пиком (см. [1]); дальнейшим ее обобщением является *гиперболической метрики принцип*. В геометрич. теории функций из этих теорем выводятся оценки различных функционалов, связанных с отображающей функцией (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Pick G., «Math. Ann.», 1916, Bd 77, S. 1—6; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Каратеодори К., Конформное отображение, пер. с англ., М.— Л., 1934.

Е. Д. Соломенцев.

ПИКАРА ГРУППА — группа классов обратимых пучков (или линейных расслоений). Более точно, пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — окольцованное пространство. Пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{L}$ наз. обратимым, если он локально изоморфен структурному пучку $\mathcal{O}_X$. Множество классов изоморфных обратимых пучков на X обозначается $\mathrm{Pic}(X)$. Тензорное произведение $\mathcal{L}\otimes\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}'$ определяет на множестве $\mathrm{Pic}(X)$ операцию, превращающую его в абелеву группу, наз. группой Пикара пространства X. Группа $\mathrm{Pic}(X)$ естественно изоморфна группе когомологий $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, где $\mathcal{O}_X^*$ — пучок обратимых элементов в $\mathcal{O}_X$.

Для коммутативного кольца A группой Пикара $\mathrm{Pic}A$ наз. группа классов обратимых A-модулей; $\mathrm{Pic}A\cong\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}\,A)$. Для кольца Крулля A группа $\mathrm{Pic}A$ тесно связана с *классов дивизоров группой* этого кольца.

П. г. полного нормального алгебраич. многообразия обладает естественной алгебраич. структурой (см. *Пикара схема*). Связная компонента нуля группы $\mathrm{Pic}(X)$ обозначается $\mathrm{Pic}^0(X)$ и наз. многообразием Пикара для X; это — алгебраич. группа (абелево многообразие, если многообразие X гладко). Факторгруппа $\mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}^0(X)$ наз. группой Нерона — Севери и имеет конечное число образующих; ранг ее наз. числом Пикара. В комплексном случае, когда X — гладкое проективное многообразие над $\mathbb{C}$, группа $\mathrm{Pic}^0(X)$ изоморфна факторгруппе пространства $H^0(X, \Omega_X^1)$ голоморфных 1-форм на X по решетке $H^1(X, \mathbb{Z})$.

Лит.: [1] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968. *В. И. Данилов.*

ПИКАРА МНОГООБРАЗИЕ полного гладкого алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем — абелево многообразие $\mathfrak{P}(X)$, параметризующее факторгруппу $\mathrm{Div}^a(X)/P(X)$ группы $\mathrm{Div}^a(X)$ дивизоров, алгебраически эквивалентных нулю, по группе главных дивизоров $P(X)$, т. е. дивизоров рациональных функций. С точки зрения теории пучков П. м. параметризует множество классов изоморфных обратимых пучков с нулевым классом Чжэня, т. е. $\mathfrak{P}(X)$ совпадает со связной компонентой единицы $\mathrm{Pic}^0(X)$ *Пикара группы* $\mathrm{Pic}(X)$ многообразия X. Структура абелева многообразия на группе $\mathfrak{P}(X)=$ $=\mathrm{Div}^a(X)/P(X)$ однозначно характеризуется следующим свойством: для любого алгебраич. семейства дивизоров D на X с базой S существует такое регулярное отображение $\varphi: S \to \mathfrak{P}(X)$, для к-рого $D(s)-$ $-D(s_0) \in \varphi(s)$, где s_0 — нек-рая фиксированная точка из S_0 (см. [2]). Размерность $q=\dim\mathfrak{P}(X)$ наз. иррегулярностью многообразия X.

Классической пример П. м.— *Якоби многообразие* гладкой проективной кривой. Другим примером может служить двойственное абелево многообразие (см. [3]).

В случае, когда X — гладкое проективное комплексное многообразие, $\mathfrak{P}(X)$ можно отождествить с группой обратимых аналитич. пучков на X, имеющих нулевой класс Чжэня [4]. Более того, многообразие Пикара $\mathfrak{P}(X)$ в этом случае изоморфно факторгруппе пространства $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ по решетке $H^1(X, \mathbb{Z})\subset H^1(X, \mathcal{O}_X)$. В частности, иррегулярность q многообразия X совпадает с $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)=\dim H^0(X, \Omega_X^1)$, где Ω_X^1 — пучок регулярных 1-форм. Последний результат верен также в случае неособых проективных кривых над любым алгебраически замкнутым полем и в случае полных гладких многообразий над алгебраически замкнутым полем характеристики 0; для произвольной характеристики имеет место лишь неравенство Игузы: $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)\geqslant q$ (известен пример гладкой алгебраич. поверхности F иррегулярности 1 с $\dim H^1(F, \mathcal{O}_F)=2$; см. [6]). Как видно отсюда, П. м. тесно связано с теорией одномерных дифференциальных форм. Начало исследования таких форм на римановых поверхностях положил Э. Пикар [1]; он доказал конечномерность пространства $H^0(X, \Omega_X^1)$ всюду регулярных форм.

Понятие П. м. может быть обобщено на случай полного нормального многообразия X. Изучалось также многообразие Пикара $\mathfrak{P}_c(X)$, соответствующее дивизорам Картье и обладающее, в отличие от $\mathfrak{P}(X)$, хорошими функториальными свойствами [9]. Многообразие $\mathfrak{P}_c(X)$ было построено для полных нормальных многообразий X (см. [5]), а также для произвольных проективных многообразий [8].

Лит.: [1] Picard E., «C. r. Acad. Sci.», 1884, t. 99, p. 961—963; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [3] Мамфорд Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [4] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1—2, М., 1982; [5] Chevalley C., «Amer. J. Math.», 1960, v. 82, p. 435—90; [6] Igusa J.-I., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1955, v. 41, № 11, p. 964—67; [7] Matsusaka T., «Jap. J. Math.», 1951, v. 21, № 2, p. 217—36; [8] Seshadri C., «Ann. mat. pura ed appl.», 1962, v. 57, p. 117—42; [9] его же, «Math. Ann.», 1965, Bd 158, № 3, S. 293—96. *В. В. Шокуров.*

ПИКАРА СХЕМА — естественное обобщение в рамках теории схем понятия *Пикара многообразия* $\mathfrak{P}(X)$ гладкого алгебраич. многообразия X. Для определения П. с. произвольной S-схемы X рассматривается относительный функтор Пикара $\mathrm{Pic}_{X/S}$ на категории Sch/S схем над схемой S. Значение этого функтора на S-схеме S' есть группа

$$H^0\left(S', R^1_{fpqc}f'_*\left(G_{m,\, X'}\right)\right),$$

где $f': X\times_S S' \to S'$ есть морфизм замены базы, $R^1_{fpqc}f'_*(G_{m,\, X'})$ — пучок на топологии Гротендика

S'_{fpqc} строго плоских квазикомпактных морфизмов, ассоциированный с предпучком

$$T \longrightarrow H^1(T_{fpqc}, G_m) = H^1(T_{et}, G_m),$$

а G_m обозначает стандартный мультипликативный пучок. Если функтор Пикара $\mathrm{Pic}_{X/S}$ представим на (Sch/S), то представляющая его S-схема наз. **относительной схемой Пикара** S-схемы X и обозначается $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$. В случае, когда X — алгебраич. схема над нек-рым полем k, имеющая рациональную k-точку,

$$\mathrm{Pic}_{X/k}(S') = \mathrm{Pic}(X \times_k S')/\mathrm{Pic}(S')$$

для любой k-схемы S' (см. [3]); в частности, $\mathrm{Pic}_{X/k}(k) = \mathrm{Pic}(X)$ отождествляется с группой k-рациональных точек $\mathrm{Pic}_{X/k}(k)$ схемы $\mathrm{Pic}_{X/k}$, если таковая существует.

Если $f: X \rightarrow S$ — проективный морфизм с геометрически целостными слоями, то схема $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ существует и является локально конечно представленной отделимой групповой S-схемой. Если $S = \mathrm{Spec}(k)$, то связная компонента единицы $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/k}$ схемы $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ является алгебраической k-схемой и соответствующая приведенная k-схема $(\mathrm{Pic}^0_{X/k})_{\mathrm{red}}$ есть в точности многообразие Пикара $\mathfrak{P}_c(X)$ (см. [4]). Нильпотентные элементы в локальных кольцах схемы $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/k}$ дают много дополнительной информации о П. с. и позволяют объяснить ряд патологий в алгебраич. геометрии над полем характеристики $p > 0$. С другой стороны, над полем характеристики 0 схема $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/k}$ всегда приведена (см. [6]). Известно также, что схема $\mathrm{Pic}_{F/k}$ приведена, если F — гладкая алгебраич. поверхность и $H^2(F, \mathcal{O}_F) = 0$ (см. [5]).

Для любого собственного плоского морфизма f: $X \rightarrow S$ (конечно представленного, если база S нётерова), для к-рого $f'_*(\mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{O}_{S'}$, при любой замене базы $f': X' = X \times_S S' \rightarrow S$ функтор $\mathrm{Pic}_{X/S}$ является алгебраич. пространством над S (см. [1]). В частности, функтор $\mathrm{Pic}_{X/S}$ представим, если базисная схема S есть спектр локального артинова кольца.

Лит.: [1] Artin M., в сб.: Global analysis. Papers in Honor of K. Kodaira, Tokyo, 1969, p. 21—77; [2] Chevalley C., «Amer. J. Math.», 1960, v. 82, p. 435—90; [3] Grothendieck A., в кн.: Séminaire Bourbaki, 1961—1962, année 14, [P., 1962], p. 232/01—232/19; [4] его же, «Publ. math. Inst. hautes études scient.», 1960, № 4, p. 1—168; [5] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраических поверхностях, пер. с англ., М., 1968; [6] Oort F., «Invent. math.», 1966, v. 2, № 1, p. 79—80; [7] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 47—112. *В. В. Шокуров.*

ПИКАРА ТЕОРЕМА — 1) П. т. о поведении аналитической функции $f(z)$ комплексного переменного z в окрестности существенно особой точки a — название результата классич. теории функций, явившегося отправным пунктом многочисленных глубоких исследований и состоящего из двух частей. а) **Малая теорема Пикара**: всякая целая функция $f(z) \neq \neq \mathrm{const}$ принимает любое конечное комплексное значение, за исключением, быть может, одного. б) **Большая теорема Пикара**: всякая однозначная аналитич. функция $f(z)$ в произвольной окрестности изолированной существенно особой точки a принимает любое конечное комплексное значение, за исключением, быть может, одного.

Впервые эта теорема опубликована Э. Пикаром [1], [2]. Она существенно дополняет *Сохоцкого теорему*. Малая П. т. есть следствие большой П. т. Из большой П. т. непосредственно следует, что любое конечное комплексное значение, за исключением, быть может, одного, принимается в произвольной окрестности существенно особой точки бесконечно часто. Для мероморфной функции в конечной плоскости $\mathbb{C}: |z|<\infty$ П. т. принимает вид: если точка $a=\infty$ — существенно особая для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции $F(z)$, то в произвольной окрестности точки a функция $F(z)$ принимает любое комплексное значение из расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}: |z|\leqslant\infty$, за исключением, быть может, двух, и притом бесконечно часто. Как показывают примеры целой функции $e^z\neq 0$ и мероморфной функции $\operatorname{tg} z\neq i, -i$, все эти утверждения точные. Фигурирующие в П. т. исключительные значения наз. пикаровскими исключительными значениями.

П. т. существенно дополняется *Иверсена теоремой* и *Жюлиа теоремой*, к-рые показывают соответственно, что пикаровские исключительные значения являются *асимптотическими значениями* и что существуют лучи Жюлиа L, исходящие из существенно особой точки a и такие, что неисключительные значения принимаются бесконечно часто даже в любом сколь угодно малом секторе с вершиной a и осью симметрии L.

Для современных исследований, связанных с П. т., характерны следующие два направления. Пусть E — множество существенно особых точек мероморфной функции $F(z)$, то есть $F(z)$ — мероморфная функция в нек-рой окрестности любой точки $z_0\notin E$, и предельное множество $C(z_0; F)$ функции $F(z)$ в точке $z_0\in E$ не сводится к одному значению. Пусть $R(a; F)$, $a\in E$,— множество тех значений $w\in\overline{\mathbb{C}}$, к-рые в любой окрестности точки a принимаются бесконечно часто. Тогда П. т. утверждает, что если a — изолированная точка E, то дополнение

$$CR(a; F)=\overline{\mathbb{C}}\setminus R(a; F)$$

обладает свойством Пикара, т. е. состоит не более чем из двух точек. В. В. Голубев в 1916 установил, что если емкость множества E равна нулю, $\operatorname{cap} E=0$, то $CR(a; F)$ имеет емкость нуль для всех $a\in E$. Вопрос о том, каковы минимальные условия на E, чтобы множество $CR(a; F)$ для всех $a\in E$ обладало свойством Пикара, пока (1983) полностью не решен. Примеры показывают, что, с одной стороны, условие $\operatorname{cap}E=0$ не является достаточным, а с другой — что имеется множество E, $\operatorname{cap} E>0$, вне к-рого не существует мероморфных трансцендентных функций, выпускающих четыре значения (см. [4], [5], [8]).

Второе направление связано с обобщениями П. т. для аналитич. функций $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 1$. При $n=1$ П. т. можно формулировать и так: любое голоморфное отображение $f: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, выпускающее по крайней мере две точки, постоянно. Однако в 1922 П. Фату (P. Fatou) построил пример невырожденного голоморфного (и даже биголоморфного) отображения $f: \mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, для к-рого множество исключительных значений $\mathbb{C}^2\setminus f(\mathbb{C}^2)$ содержит непустое открытое множество. Это означает, что П. т. (и даже теорему Сохоцкого) непосредственно нельзя распространить на случай $n>1$. Обобщения П. т. все же возможны, если отправляться, напр., от другой ее формулировки, несколько искусственной при $n=1$: любое голоморфное отображение $F: \mathbb{C}\to\mathbb{C}P$ в комплексную проективную плоскость $\mathbb{C}P=\overline{\mathbb{C}}$, выпускающее по крайней мере три гиперплоскости (т. е. точки при $n=1$), постоянно. Верна, в частности, такая теорема Грина: любое голоморфное отображение $F: \mathbb{C}^m\to\mathbb{C}P^n$, выпускающее по крайней мере $2n+1$ гиперплоскостей в общем положении, постоянно (см. [3], [6], [8].

2) П. т. об униформизации алгебраических кривых: если алгебраич. кривая $\Phi(z, w)=0$ имеет род $g>1$,

то не существует ни одной пары мероморфных функций $z=f(t)$, $w=h(t)$ таких, что $\Phi(f(t), h(t))\equiv 0$. Иными словами, униформизация алгебраич. кривых рода $g>1$ при помощи мероморфных функций невозможна. Напротив, в случае $g=1$ униформизация всегда осуществима при помощи (мероморфных) эллиптич. функций. Установлена Э. Пикаром [7].

Лит.: [1] Picard E., «C. r. Acad. sci.», 1879, t. 88, p. 1024—1027; t. 89, p. 662—65; [2] его же, «Ann. Ecole norm. super.», 1880, t. 9, p. 145—66; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [4] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [5] Ловатер А., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259; [6] Гриффитс Ф., Кинг Дж., Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий, пер. с англ., М., 1976; [7] Picard E., «Acta math.», 1887—88, v. 11, p. 1—12; [8] Шабат Б. В., *Распределение значений голоморфных отображений*, М., 1982. *Е. Д. Соломенцев.*

ПИРАМИДА — многогранник, одной из граней к-рого служит многоугольник (основание П.), а остальные грани (боковые) суть треугольники с общей вершиной (вершина П.) (см. рис. 1, 2). В зависимости от числа боковых граней П. делятся на треугольные,

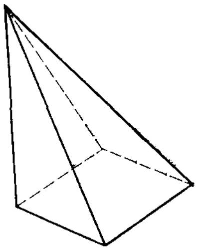


Рис. 1.

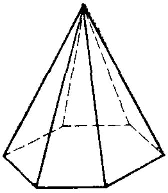


Рис. 2.

четырехугольные и т. д. Отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины П. на плоскость ее основания (а также его длина), наз. *высотой* П. Объем П. вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{3}HS,$$

где H — высота, S — площадь основания, П. наз. правильной (см. рис. 2), если в основании ее лежит правильный многоугольник и высота П. проходит через центр основания. Боковые грани правильной П. суть равные между собой равнобедренные треугольники; высота каждого из этих треугольников наз. апофемой правильной П. (апофема основания П. служит проекцией апофемы П. на плоскость основания).

Рассекая П. плоскостью, параллельной ее основанию, получают две части: П., подобную данной, и т. н. усеченную П. (см. рис. 3). Многоугольник, полученный от пересечения П. и секущей плоскости, наз. верхним основанием, основание П.— нижним основанием усеченной П. Расстояние между секущей плоскостью и нижним основанием наз. высотой усеченной П. Объем усеченной П. вычисляется по формуле

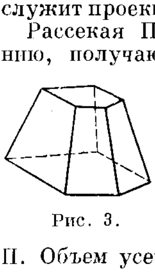


Рис. 3.

$$V=\frac{1}{3}h\left(s+S+\sqrt{sS}\right),$$

где h — высота, s, S — площади оснований. *БСЭ-3.*

ПИРСА СТРЕЛКА — двуместная *логическая операция*, обычно обозначаемая $\downarrow$ и задаваемая следующей *истинностной таблицей*:

A	B	$A\downarrow B$
И	И	Л
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Таким образом, высказывание $A\downarrow B$ означает «ни A, ни B». П. с. обладает тем свойством, что через нее выражаются все другие логические операции. Например, высказывание $\rceil A$ *(отрицание A)* эквивалентно высказыванию $A \downarrow A$, *конъюнкция* $A \& B$ высказываний A и B выражается так: $(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$, дизъюнкция $A \vee B$ эквивалентна $(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$. П. с. была введена в рассмотрение Ч. Пирсом (С. Peirs). *В. Е. Плиско.*

ПИРСОВСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ — представление кольца в виде прямой суммы подколец, связанное с данным идемпотентом e. Для кольца R, содержащего идемпотент e, существуют левое, правое и двустороннее П. р., определяемые равенствами

$$R = Re + R(1-e),$$
$$R = eR + (1-e)R,$$
$$R = eRe + eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e)$$

соответственно. При этом в случае отсутствия в R единицы полагают, по определению,

$$R(1-e) = \{x - xe \mid x \in R\},$$
$$(1-e)Re = \{xe - exe \mid x \in R\},$$
$$(1-e)R(1-e) = \{x - ex - xe + exe \mid x \in R\}.$$

Множества $(1-e)R$ и $eR(1-e)$ определяются аналогично. Таким образом, при двустороннем П. р. элемент $x \in R$ представляется в виде

$$x = exe + (ex - exe) + (xe - exe) + (x - ex - xe + exe),$$

при левом — в виде

$$x = xe + (x - xe)$$

и при правом — в виде

$$x = ex + (x - ex).$$

Рассматривается также П. р. относительно ортогональной системы идемпотентов $\{e_1, \ldots, e_n\}$, где $\Sigma_i e_i = 1$, а именно:

$$R = \sum\nolimits_{ij} e_i R e_j.$$

П. р. было предложено Б. Пирсом (см. [1]).

Лит.: [1] Peirce B., «Amer. J. Math.», 1881, v. 4, p. 97.

Л. А. Скорняков.

ПИРСОНА КРИВЫЕ — название семейства непрерывных распределений вероятностей (распределений Пирсона), плотности к-рых $p(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} p(x), \qquad (*)$$

где параметры a, b_0, b_1, b_2 — действительные числа. Более точно, кривыми Пирсона наз. графики зависимости $p(x)$ от x. Распределения, являющиеся решениями уравнения (*), совпадают с предельными формами *гипергеометрического распределения*. П. к. классифицируются в зависимости от характера корней уравнения

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0.$$

Семейство П. к. составляют 12 типов и *нормальное распределение*. Многие важнейшие распределения в математич. статистике могут быть получены с помощью преобразований из уравнения (*).

Систематич. описание типов П. к. дано У. Элдертоном (W. Elderton, 1938). В упрощенном виде классификация по типам такова.

Тип I:

$$p(x) = k\left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{m_2},$$
$$-a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \ m_1, \ m_2 > -1;$$

частный случай — *бета-распределение* 1-го рода.

Тип II:

$$p(x) = k\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m, \ -a \leqslant x \leqslant a, \ m \geqslant -1$$

(вариант П. к. типа I); частный случай — *равномерное распределение*.

Тип III:

$$p(x)=k\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\mu a}e^{-\mu x},\quad -a\leqslant x\leqslant\infty,\quad \mu>0,\quad a>0;$$

частные случаи — *гамма-распределение*, *«хи-квадрат»-распределение*.

Тип IV:

$$p(x)=k\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m}e^{-\mu\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)},$$

$$-\infty\leqslant x\leqslant\infty,\ a>0,\ \mu>0.$$

Тип V:

$$p(x)=kx^{-q}e^{-\frac{\alpha}{x}},\ 0\leqslant x<\infty,\ \alpha>0,\ q>1$$

(сводится преобразованием к типу III).

Тип VI:

$$p(x)=kx^{-q_1}(x-a)^{q_2},\ a\leqslant x<\infty,\ q_1>q_2-1;$$

частные случаи — бета-распределение 2-го рода, *Фишера F-распределение*.

Тип VII:

$$p(x)=k\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m},\ -\infty<x<\infty,\ m>\frac{1}{2};$$

частный случай — *Стьюдента распределение*.

Тип VIII:

$$p(x)=k\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-m},\ -a\leqslant x\leqslant 0,\ 0\leqslant m\leqslant 1.$$

Тип IX:

$$p(x)=k\left(1+\frac{x}{a}\right)^{m},\ -a\leqslant x\leqslant 0,\ m>-1.$$

Тип X:

$$p(x)=ke^{-\frac{x-m}{\sigma}},\ m\leqslant x<\infty,\ \sigma>0,\text{—}$$

показательное распределение.

Тип XI:

$$p(x)=kx^{-m},\ b\leqslant x<\infty,\ m>0;$$

частный случай — *Парето распределение*.

Тип XII:

$$p(x)=\left(\frac{1+\frac{x}{a_1}}{1-\frac{x}{a_2}}\right)^{m},\ -a_1\leqslant x\leqslant a_2,\ |m|>1$$

(вариант типа I).

Наиболее важны в приложениях типы I, III, VI, VII.

Всякая П. к. однозначно определяется своими первыми четырьмя моментами

$$\alpha_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^kp(x)\,dx,$$

если они конечны. Это свойство семейства П. к. используется для приближенного описания *эмпирических распределений*.

Метод подгонки П. к. к нек-рому эмпирич. распределению состоит в следующем. По независимым результатам наблюдений вычисляют первые четыре выборочных момента, затем определяется тип подходящей П. к. и методом моментов находятся значения неизвестных параметров искомой П. к. В общем случае метод моментов не является эффективным методом получения оценок П. к. Проблема более точной аппроксимации распределений с помощью П. к. получила новое решение в работах Л. Н. Большева (1963) по асимптотич. преобразованиям.

П. к. были введены К. Пирсоном (K. Pearson, 1894).

Лит.: [1] Elderton W. P., Frequency curves and correlation, 4 ed., Camb., 1953; [2] Кендалл М., Стьюарт А., *Теория распределений*, пер. с англ., М., 1966; [3] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [4] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, № 2, с. 129—55.
А. В. Прохоров.

ПИРСОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *Пирсона кривые*.

ПИТМЕНА ОЦЕНКА — эквивариантная статистич. оценка параметра сдвига относительно группы вещественных сдвигов, имеющая минимальный риск при квадратичной функции потерь.

Пусть компоненты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ случайного вектора $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ суть независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же вероятностному закону, плотность вероятности к-рого принадлежит семейству

$$\{f(x-\theta),\ |x|<\infty,\ \theta \in \Theta=(-\infty, +\infty)\},$$

причем

$$\mathsf{E}_\theta X_1^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x-\theta)\,dx<\infty$$

для любого $\theta \in \Theta$. Далее, пусть $G=\{g\}$ — группа вещественных сдвигов, действующая в пространстве реализаций $\mathbb{R}^1=(-\infty, +\infty)$ случайной величины X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$:

$$G=\{g : gX_i=X_i+g,\ |g|>\infty\}.$$

В таком случае задача оценивания параметра θ будет инвариантной относительно квадратичной функции потерь $L(\theta, \hat\theta)=(\theta-\hat\theta)^2$, если в качестве $\hat\theta=\hat\theta(X)$ выбрать эквивариантную оценку. Э. Питмен [1] показал, что эквивариантная оценка $\hat\theta(X)$ параметра сдвига θ относительно группы G, имеющая минимальный риск при квадратичной функции потерь, имеет вид

$$\hat\theta(X)=X_{(n1)}-\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \prod_{i=2}^{n} f(x+Y_i)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \prod_{i=2}^{n} f(x+Y_i)\,dx},$$

где $Y_i=X_{(ni)}-X_{(n1)}$, $X_{(ni)}$ есть i-я порядковая статистика, построенная по вектору наблюдений X. П. о.— несмещенная оценка, она является минимаксной в классе всех оценок параметра сдвига θ при квадратичной функции потерь, если все эквивариантные оценки параметра θ имеют конечные функции риска [2].

Пример 1. Если

$$f(x-\theta)=e^{-(x-\theta)},\ x\geqslant\theta,$$

то есть X_i, $i=1, 2, \ldots, n$, подчиняется показательному закону с неизвестным параметром сдвига θ, то П. о. $\hat\theta(X)$ для θ выражается формулой

$$\hat\theta(X)=X_{(n1)}-\frac{1}{n},$$

причем ее дисперсия равна $1/n^2$.

Пример 2. Если

$$f(x-\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}},\ |x|<\infty,$$

то есть X_i, $i=1, 2, \ldots, n$, подчиняется нормальному $N(\theta, 1)$ закону с неизвестным математич. ожиданием θ, то в этом случае среднее арифметическое

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$$

является П. о.

Лит.: [1] Pitman E. J., «Biometrika», 1939, v. 30, p. 391—421; [2] Girshick M. A., Savage L. J., «Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.», 1951, p. 53—73; [3] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.
М. С. Никулин.

ПИФАГОРА ТЕОРЕМА — теорема геометрии, устанавливающая связь между сторонами прямоугольного треугольника. П. т. была, по-видимому, известна до

Пифагора (6 в. до н. э.), но ему приписывается ее доказательство в общем виде. Первоначально теорема устанавливала соотношения между площадями квадратов, построенных на гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника: квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах. Обычно П. т. принято кратко формулировать так: квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов. Верна и теорема, обратная П. т.: если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то этот треугольник прямоугольный. *БСЭ-3.*

ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА — тройки целых положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=z^2$. Все решения этого уравнения, а следовательно, и все П. ч. выражаются формулами $x=a^2-b^2$, $y=2ab$, $z=a^2+b^2$, где a, b — произвольные целые положительные числа ($a>b$). П. ч. могут быть истолкованы как длины сторон прямоугольного треугольника. *БСЭ-3.*

ПЛ/I — универсальный *алгоритмический язык* (сокращение от Programming Language One), разработанный в 1963—64 фирмой по производству вычислительных машин ИБМ (International Business Machines). В языке ПЛ/I нашли свое отражение как опыт предшествующих ему языков *алгол*, *фортран*, *кобол*, так и многие новые идеи программирования, появившиеся к моменту создания ПЛ/I. На язык также оказали заметное влияние особенности вычислительных машин фирмы ИБМ и их операционной системы.

ПЛ/I устроен таким образом, чтобы из него можно было выделять подмножества, удовлетворяющие нуждам конкретного приложения. Программа на ПЛ/I составляется из независимо транслируемых модулей, называемых внешними процедурами, к-рые имеют алголоподобную блочную структуру и включают процедуры (возможно, многовходовые и рекурсивные) и блоки.

Наибольшее значение для диапазона применения ПЛ/I имеет разнообразие типов данных. Язык имеет дело с данными арифметическими (действительными и комплексными, с фиксированной и плавающей запятой, двоичными и десятичными), строковыми (литерными и битовыми), данными с шаблоном (аналогичными шаблонам в коболе) и данными для управления программой (метка передачи управления, вход, указатель, файл, ветвь и событие).

Язык ПЛ/I обеспечивает возможность объединения данных в агрегаты — массивы и структуры. М а с с и в ы представляют собой упорядоченный набор однородных элементов (скаляров или структур). С т р у к т у р а м и в ПЛ/I наз. иерархически упорядоченный набор элементов, каждый из к-рых имеет свое имя и может иметь свой тип данных и организацию.

Правила вычисления выражений позволяют вырабатывать произвольные значения. В случае несоответствия типов данных при их вычислении осуществляется автоматич. преобразование к типу, требуемому операциями или конкретным контекстом.

Существенной особенностью ПЛ/I являются п р а в и л а у м о л ч а н и я, позволяющие программисту указывать, напр., не все свойства данных, не все компоненты операторов, не все параметры встроенных функций. То, что не указано явно программистом, понимается нек-рым заранее определенным образом или же исходя из контекста.

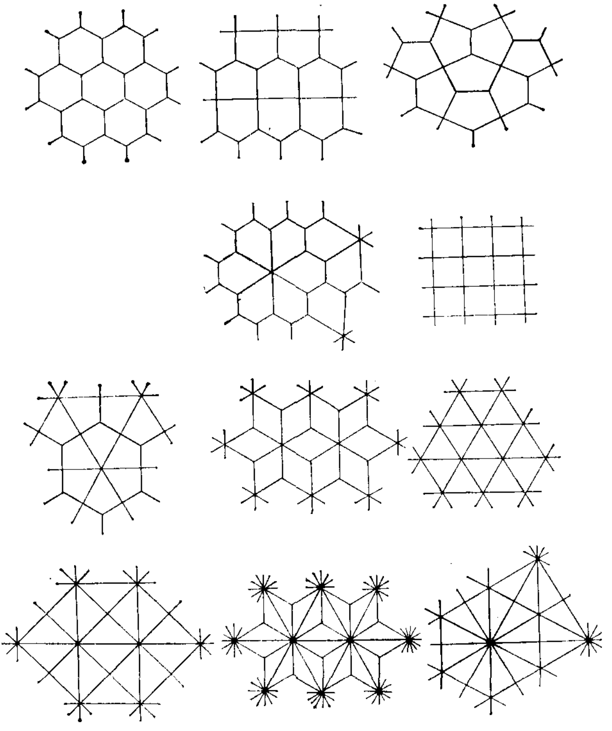
ПЛ/I обладает развитыми средствами управления работой с памятью. Эти средства позволяют программисту самому определять момент размещения переменных в памяти, объем требуемой памяти, скорость выборки элементов данных, повторно использовать уже выделенную память под другим именем и, возможно, с другой интерпретацией содержащихся в ней значений без переразмещения. Память может быть выделена статически (до исполнения программы) или динамически (при входе в блок или при исполнении оператора размещения). Выделенная для нек-рой переменной память может быть организована по типу стека с соответствующими правилами доступа или может быть связана с нек-рым указателем.

Наряду с обычными операторами присваивания, перехода, итеративного исполнения, вызова процедур, условными операторами, ПЛ/I включает средства для синхронизации параллельно исполняемых процедур, для исполнения нек-рых операторов во время компиляции, а также для выполнения нек-рых действий (системных или определенных программистом) при возникновении ситуаций (стандартных или определенных программистом), вызывающих прерывание при исполнении программы. В ПЛ/I представлены разнообразные средства для обмена данными с внешними устройствами (посредством записей, посимвольно и с редактированием). В язык ПЛ/I встроено большое количество стандартных функций, к-рые существенно облегчают программирование.

Стандарт ПЛ/I, опубликованный в 1976, дает более формальную и точную спецификацию языка, обобщает понятие типа и правила вычисления выражений и вычисляемых функциями значений. В то же время в стандарт языка не включены средства для параллельного исполнения и средства организации вычислений в период трансляции.

Лит.: [1] Универсальный язык программирования PL/1, пер. с англ., М., 1968; [2] Скотт Р., Сондак Н., ПЛ/1 для программистов, пер. с англ., М., 1977; [3] Программирование на ПЛ/1 ОС ЕС, М., 1979; [4] Бухтияров А. М., Фролов Г. Д., Олюнин В. Ю., Сборник задач по программированию на языке ПЛ/1, М., 1978; [5] American National Standard programming language PL/1, ANSI, X 3.53—1976. *Л. А. Корнева.*

ПЛАНИГОН — выпуклый многоугольник правильного разбиения плоскости на равные многоугольники, т. е. такого разбиения, что существует группа движений плоскости, совмещающая разбиение с собой, к-рая



действует транзитивно на совокупности многоугольников разбиения. На евклидовой плоскости существует 11 комбинаторных типов разбиения — т. н. сети Шубникова — Лавеса (см. рис.). Однако группа симметрии для одного комбинаторного типа может действовать по-разному. Взаимосвязь комбинаторного типа и группы симметрии характеризуется т. н. *символом смежности*. На евклидовой плоскости существует 46 общих правильных разбиений с различным символом смежности.

На плоскости Лобачевского планигонами являются правильные многоугольники с любым числом k сторон и любым данным числом α сходящихся в каждой вершине П. Для числа сторон $k=3, 4, 5, 6, >6$ можно выбрать такой размер П., что $\alpha \geqslant 7, \geqslant 5, \geqslant 4, \geqslant 4, \geqslant 3$. Многомерным аналогом П. является *стереоэдр*.

Лит.: [1] Делоне Б. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 3, с. 365—86; [2] Делоне Б. Н., Долбилин Н. П., Штогрин М. И., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1978, т. 148, с. 109—40; [3] Узоры симметрии, пер. с англ., М., 1980.

А. Б. Иванов.

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА — раздел математической статистики, изучающий рациональную организацию измерений, подверженных случайным ошибкам. Обычно рассматривается следующая схема П. э. Со случайными ошибками измеряется функция $f(\theta, x)$, зависящая от неизвестных параметров (вектора θ) и от переменных x, к-рые по выбору экспериментатора могут принимать значения из нек-рого допустимого множества X. Целью эксперимента является обычно либо оценка всех или нек-рых параметров θ или их функций, либо проверка нек-рых гипотез о параметрах θ. Исходя из цели эксперимента, формулируется критерий оптимальности плана эксперимента. Под планом эксперимента понимается совокупность значений, задаваемых переменным x в эксперименте.

Лит.: [1] Налимов В. В., Чернова Н. А., Статистические методы планирования экстремальных экспериментов, М., 1965; [2] Федоров В. В., Теория оптимального эксперимента, М., 1971; [3] Хикс Ч., Основные принципы планирования эксперимента, пер. с англ., М., 1967; [4] Финни Д., Введение в теорию планирования экспериментов, пер. с англ., М., 1970.

ПЛАНКА ПОСТОЯННАЯ — одна из абсолютных физич. констант, имеющая размерность действия (энергия $\times$ время); в системе CGS П. п. h равна

$$(6{,}62377 \pm 0{,}00018) \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \times \text{сек}$$

($\pm 0{,}00018$ — возможная погрешность в измерении). Впервые была введена М. Планком (M. Planck, 1900) в работе по световому излучению, в к-рой он предположил, что *энергия* e фотона (электромагнитной волны) равна $e=h\nu$, где ν — частота волны. Позднее, с возникновением квантовой механики, П. п. была использована в определении важнейших квантовомеханич. величин (оператора импульса, энергии и т. д.) и вошла почти во все уравнения и соотношения квантовой механики.

П. п. в нек-ром смысле характеризует границы применения классич. механики: оказывается, что законы квантовой механики существенно отклоняются от законов классич. механики лишь для тех физич. систем, для к-рых характерные расстояния, скорости и массы таковы, что соответствующая характерная величина действия сравнима по порядку с величиной h. При формальном математическом рассмотрении это означает, что при $h \to 0$ соотношения квантовой механики переходят в соответствующие классич. соотношения.

Наряду с постоянной h используют константу $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, к-рую при этом также наз. П. п.

Р. А. Минлос.

ПЛАНШЕРЕЛЯ ТЕОРЕМА: для каждой квадратично суммируемой функции $f \in L_2(-\infty, +\infty)$ интеграл

$$\tilde{f}_\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega}^{+\omega} f(y)\, e^{-ixy}\, dy$$

сходится в L_2 к нек-рой функции $\tilde{f}(x) \in L_2$ при $\omega \to \infty$, то есть

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}_\omega(x)|^2\, dx = 0.$$

При этом сама функция $f(x)$ представляется как предел в L_2 при $\eta \to \infty$ интегралов

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\eta}^{+\eta} \tilde{f}(y)\, e^{ixy}\, dy,$$

то есть

$$f(x) = \overset{L_2}{\lim_{\eta \to \infty}} f_\eta(x).$$

Кроме того, справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\lambda)|^2\, d\lambda$$

(ф о р м у л а П а р с е в а л я — П л а н ш е р е л я).

Функция

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega}^{+\omega} f(y)\, e^{-iyx}\, dy,$$

где предел понимается в смысле сходимости в L_2, наз. п р е о б р а з о в а н и е м Ф у р ь е функции f и обозначается обычным символом

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-ixy}\, dy, \qquad (1)$$

при этом интеграл (1) понимается в смысле главного значения на ∞ в метрике L_2. Аналогично истолковывается равенство

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(y)\, e^{ixy}\, dy. \qquad (2)$$

Для функций $f \in L_2$ интегралы (1) и (2) существуют в смысле главного значения почти при всех x.

Функции f и $\tilde{f}$ удовлетворяют почти при всех x также соотношениям

$$\tilde{f}(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy}\, dy \right\},$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(y)\, \frac{e^{ixy} - 1}{iy}\, dy \right\}.$$

Если обозначить $\tilde{f}$ преобразование Фурье, $\tilde{f}^{-1}$ — его обращение, то П. т. перефразируется так: $\tilde{f}$ и $\tilde{f}^{-1}$ — взаимно обратные унитарные операторы в L_2.

П. т. установлена М. Планшерелем (M. Plancherel, 1910).

Лит.: [1] З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 2, М., 1965; [2] Т и т ч м а р ш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.— Л., 1948; [3] Б о х н е р С., Лекции об интегралах Фурье, пер. с англ., М., 1962.

П. И. Лизоркин.

ПЛАНШЕРЕЛЯ ФОРМУЛА — формула, выражающая инвариантность скалярного произведения при преобразовании Фурье в пространстве $L_2(X)$:

$$\int_Y \hat{f}_1(y)\, \overline{\hat{f}_2(y)}\, d\mu(y) = \int_X f_1(x)\, \overline{f_2(x)}\, d\mu(x).$$

В классич. случае, когда $X = Y = \mathbb{R}^n$ есть n-мерное евклидово пространство, $\mu(x)$ и $\mu(y)$ суть n-мерные меры Лебега, преобразование Фурье

$$f(x) \mapsto \hat{f}(y)$$

на пространстве $L_2(\mathbb{R}^n) \ni f$ является непрерывным продолжением классич. преобразования Фурье

$$g(x) \longmapsto \hat{g}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, e^{i(x, y)}\, dx,$$

$$g \in L_1(\mathbb{R}^n),$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n),$$

(x, y) — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, с множества $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ на пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$.

П. ф. справедлива также, когда X — локально компактная коммутативная топологич. группа, Y — ее группа характеров, $x \in X$, $y \in Y$, $\mu(x)$ и $\mu(y)$ — соответствующим образом нормированные инвариантные меры в группах X и Y, а преобразование Фурье $f(x) \mapsto \hat{f}(y)$ на пространстве $L_2(X) \ni f$ является непрерывным продолжением отображения

$$g(x) \longmapsto \hat{g}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_X g(x)\, y(x)\, d\mu(x),$$

$$g(x) \in L_1(X),\ y(x) \in Y,$$

с множества $L_1(X) \cap L_2(X)$ на пространство $L_2(X)$.

П. ф. обобщается на некоммутативные топологич. группы. Пусть, напр., G — бикомпактная группа, μ — инвариантная на ней мера, $\mu(G) = 1$, $g \mapsto U_g^{(\alpha)}$ — неприводимое конечномерное размерности n_α унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве, $g \in G$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, $x(g) \in L_2(G)$,

$$T_x^{(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_G x(g)\, U_g^{(\alpha)*}\, d\mu(g)$$

($*$ — переход к сопряженному оператору), $S(T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*})$ — след оператора $T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*}$. Тогда обобщенная П. ф. имеет вид

$$\int_G |x(g)|^2\, d\mu(g) = \sum_\alpha n_\alpha S\left(T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*}\right).$$

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968.

Л. Д. Кудрявцев.

ПЛАСТИЧНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — теория деформируемого пластичного твердого тела, в к-рой исследуются задачи, состоящие в определении полей вектора перемещений $u(x, t)$ или вектора скоростей $v(x, t)$, тензора деформации $\varepsilon_{ij}(x, t)$ или скоростей деформации $v_{ij}(x, t)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(x, t)$, к-рые возникают в теле, занимающем область Ω с границей S, под действием массовых $K(x, t)$ и поверхностных $F(x, t)$ сил при заданных начальных и граничных условиях, а также в определении тех нагрузок и процессов, при к-рых равновесие (движение) тела является неустойчивым. Особенности П. м. т. состоят в том, что

а) соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ нелинейны и необратимы и описываются, вообще говоря, функционалами; следовательно, задачи П. м. т. существенно нелинейны;

б) конфигурации искомых квазистатич. полей определяются процессом изменения заданных функций на промежутке $[0, t]$, а не их мгновенными значениями в момент t;

в) в процессе изменения функций K, F возникают области упругой деформации, активной пластич. деформации (нагрузки) и пассивной деформации (разгрузки), в к-рых соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ различны; эти области должны быть определены при решении задачи;

г) уравнения краевой задачи могут, вообще говоря, оказаться разных типов (эллиптического или гиперболического) в разных областях тела.

При произвольном сложном процессе известны лишь весьма общие свойства функционалов пластичности, их явная аналитич. структура не установлена. Конкретные соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$, не содержащие явно функционалов, построены и экспериментально обоснованы для ряда типичных процессов деформации. Иногда рассматриваются также нек-рые искусственные «модели» соотношений $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$, к-рые лишь частично отражают упругопластич. свойства материалов.

Статические краевые задачи. В теории упругопластич. процессов (см. [1]) согласно постулату изотропии А. А. Ильюшина соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = A_k \varepsilon_{ij}^k \tag{1}$$

(суммирование по k от 1 до 6), где ε_{ij}^k — базис, построенный на основе тензора малой деформации, A_k — функционалы от инвариантов тензора деформации, давления p, температуры T и, возможно, других инвариантных величин немеханич. природы. Искомые функции $u_i(x, t)$, $\varepsilon_{ij}(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$ при равновесии удовлетворяют уравнениям

$$\sigma_{ij,\,j} + \rho K_i = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,\,j} + u_{j,\,i}, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} = A_k \varepsilon_{ij}^k, \quad x \in \Omega \cup S, \tag{4}$$

$$\sigma_{ij} l_j = F_i, \quad x \in S_\sigma, \tag{5}$$

$$u_i = \varphi_i, \; x \in S_u, \; S_\sigma \cup S_u = S, \; S_\sigma \cap S_u = 0 \tag{6}$$

при заданных функциях $K_i(x, t)$, $F_i(x, t)$, $\varphi_i(x, t)$ и областях Ω, S_σ, S_u. Здесь l_j — направляющие косинусы внешней нормали к граничной поверхности S; t — параметр процесса (напр., истинное или условное время); ρ — плотность материала; (2) — дифференциальные уравнения равновесия, (3) — кинематич. соотношения между малыми деформациями и перемещениями, (5) и (6) — граничные условия в напряжениях и перемещениях соответственно. Равенства (2) — (6), строго говоря, не реализуют постановку краевой задачи, поскольку при неизвестной структуре функционалов пластичности нельзя решить вопрос о существовании решения.

С учетом этой неопределенности для решения задачи (2) — (6), допуская его существование при произвольном сложном нагружении (СН), предложен и в частных задачах реализован следующий метод СН-ЭВМ. Ниже система равенств (2), (3), (5), (6) будет наз. неполной системой (В). В связи с использованием конечноразностной процедуры область Ω разбивается на N ячеек (элементов), в каждой из к-рых искомые функции имеют постоянные (средние) значения, зависящие от параметра t (интересующий интервал времени $[0, t]$ разбивается на M шагов), и в ν-й ячейке заменяются соотношения (4) аппроксимирующими соотношениями вида

$$\sigma_{\nu ij} = C_{\nu k} \varepsilon_{\nu ij}^k, \tag{7}$$

где $C_{\nu k}$ — функции t, такими, что решение задачи (В), (7) существует. Пусть в первом приближении с конкретно заданными (по возможности — наиболее простым способом, напр. в соответствии с обобщенным законом Гука) функциями $C_{\nu k}$

$$\sigma_{\nu ij} = C_{\nu k}^{(1)} \varepsilon_{\nu ij}^k \tag{7$_1$}$$

решение задачи (В), (7) есть $u_{\nu i}^{(1)}(t)$, $\varepsilon_{\nu ij}^{(1)}$, $\sigma_{\nu ij}^{(1)}(t)$. Определяемый по нему набор инвариантов $I_\nu^{(1)}(t)$ вместе с $p_\nu(t)$ и $T_\nu(t)$ рассматривается как совокупность программ испытаний N образцов в однородном напряженном состоянии. Проведение их на испытательном комбайне класса СН дает истинные зависимости $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ в процессах $I_\nu^{(1)}(t)$, $p_\nu(t)$, $T_\nu(t)$, что определяет уточненные аппроксимирующие соотношения

$$\sigma_{\nu ij} = C^{(2)}_{\nu k} \varepsilon^{k}_{\nu ij}, \qquad (7_2)$$

к-рые используются для численного решения задачи (В), (7_2) во втором приближении. Аналогично строятся последующие приближения. Сходимость оценивается по нормам разностей двух последующих приближений.

В отличие от применяемых вариантов теоретико-экспериментальных методов решения краевых задач с известными соотношениями (4), здесь используется испытание стандартных образцов в одномерном напряженном состоянии по стандартной методике, а не натурного объекта или его модели в сложном напряженном состоянии.

Предложен апостериорный критерий существования (см. [2]): если указанный процесс итераций сходится, то решение задачи (2) — (6) (с неизвестной структурой функционалов A_k) существует и с заданной степенью точности определяется в n-м приближении.

Если соотношения (4) известны, но сложны, то этот метод также применим с использованием (4) вместо испытательного комбайна СН.

Сложности постановки и решения краевой задачи теории пластичности в общем случае существенно уменьшаются при рассмотрении конкретных классов процессов.

Степень сложности процесса деформации в точке тела определяется сопоставлением кривизн траектории деформации, к-рая в 5-мерном евклидовом пространстве изображает процесс изменения девиатора деформации $Э_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}$ $(3\varepsilon = \varepsilon_{ii})$, с типичной для каждого материала величиной следа запаздывания h, определяемой экспериментально. На этой основе выделяются частные классы процессов, для к-рых соотношения (4) конкретизируются и не содержат явно функционалов. Для каждого такого класса процессов постановка краевой задачи (2) — (6) становится определенной, допускающей доказательство теорем существования и единственности и построение общих методов решения. При этом, однако, возникает проблема физич. достоверности решения, поскольку при заданных функциях $K_i(x, t)$, $F_i(x, t)$, $\varphi_i(x, t)$ процессы, определяемые решением, могут не соответствовать области достоверности частного вида соотношения (4), принятого при постановке задачи. Эту проблему можно поставить как задачу об определении класса заданных функций K_i, F_i, φ_i и, *может быть, ограничений на соотношения* (4) частного вида, при к-рых система уравнений (2) — (6), дополненная соотношениями, определяющими соответствующий класс процессов, совместна.

В теории малых упругопластич. деформаций (см. [3]), относящейся к процессам простой деформации (нулевой кривизны), соотношения (4) имеют вид

$$\sigma_{ij} = \frac{2\Phi(\varepsilon_u)}{3\varepsilon_u}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}) + 3K\varepsilon\delta_{ij}, \qquad (8)$$

где $\varepsilon_u = \left(\frac{2}{3}Э_{ij}Э_{ij}\right)$ — интенсивность деформации, Φ — экспериментально определяемая функция упрочнения, K — константа (модуль объемной упругости), $3\varepsilon = \varepsilon_{ii}$.

При ограничениях

$$3G \geqslant \frac{\Phi(\varepsilon_u)}{\varepsilon_u} \geqslant \frac{d\Phi}{d\varepsilon_u} \geqslant \lambda > 0 \qquad (9)$$

($\lambda < 1$ — число), приемлемых для конструкционных материалов, установлена эллиптич. природа краевой задачи (В), (8), доказаны теоремы существования и единственности решения, установлены минимальные принципы и даны соответствующие вариационные постановки задач. Доказана теорема о простом нагружении, определяющая класс функций K_i, F_i, φ_i

(однопараметрич. нагрузки), при к-ром решение задачи физически достоверно. Для решения краевой задачи (В), (8) в принципе применимы методы Ритца и Бубнова — Галеркина, к-рые, вследствие нелинейности задачи, малоэффективны. Широко используется метод упругих решений, сходящийся при условиях (9): в каждом последовательном приближении решается более простая краевая задача линейной теории упругости (см. [3]). При этом в ходе решения определяются области упругих деформаций, в к-рых имеет место обобщенный закон Гука. Применяется также метод переменных параметров упругости (см. [4]).

Постановка задачи (В), (8) и указанные методы решения применяются также к задачам термопластичности. При этом при температурном поле $T(x, t)$, определяемом решением задачи теплопроводности, в соотношениях (8) полагается $\Phi \equiv \Phi(\varepsilon_u, T)$ и член $3K\varepsilon\delta_{ij}$ заменяется выражением $3K(\varepsilon-\alpha T)\delta_{ij}$. Ввиду функциональной природы соотношений $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ использование функции $\Phi(\varepsilon_u, T)$ ограничено нек-рым классом тепловых процессов. Специальный интерес представляют задачи о циклич. нагружении тела (см. [5]), сопровождающемся периодич. возникновением областей разгрузки и нагрузки обратного знака.

В теории упругопластич. процессов малой кривизны (наибольшая кривизна значительно меньше h^{-1}) с соотношениями

$$\sigma_{ij} = \frac{2\Phi(s)}{3v_u}(v_{ij} - v\delta_{ij}) + \sigma\delta_{ij}, \quad \dot{\sigma} = 3Kv, \tag{10}$$

где

$$v_u = \left(\frac{2}{3} V_{ij} V_{ij}\right)^{1/2}, \quad V_{ij} = v_{ij} - v\delta_{ij}, \quad 3v = v_{mm},$$

$s = \int_0^t v_u dt$ — длина дуги траектории деформации, и с кинематич. уравнениями

$$2v_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i}, \tag{11}$$

где $v_i(x, t)$ — координаты вектора скорости частицы среды, ставится краевая задача (2), (10), (11), (5), (6), для к-рой доказаны теоремы существования и единственности, сформулированы вариационные принципы и предложен метод последовательных приближений. Условия физич. достоверности решения не выяснены. Эта задача формулируется, в частности, применительно к расчету установившегося пластич. течения упрочняющегося металла в технологич. процессах обработки давлением (прессование, прокатка и т. п.).

Аналогично ставится краевая задача для упругопластич. процессов средней кривизны (главная кривизна траектории деформации меньше или порядка h^{-1}).

Для теории двухзвенных процессов (траектория деформации — ломаная с углом излома θ при $s = s_0$), типичных для двухпараметрич. нагружений тела, с соотношениями (8) при $s \leqslant s_0$ и соотношениями

$$\sigma_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3\sin\theta}\left[\frac{Э_{ij} - Э_{ij}^0}{s - s_0}\sin(\theta - \vartheta) + \frac{Э_{ij}^0}{s_0}\sin\vartheta\right] + 3K\varepsilon\delta_{ij} \tag{12}$$

при $s > s_0$, где σ_u, ϑ — известные функции от s_0, θ, s, дана постановка краевой задачи (В), (12) при $s > s_0$ и (В), (8) при $s \leqslant s_0$ с доказательством теорем существования и единственности. Доказана локальная теорема физич. достоверности, определяющая достаточные условия, налагаемые на функции K_i, F_i, φ_i, при к-рых почти всюду в области Ω происходят изломы траекторий деформации. Свойства решений и материальных функций в окрестности точки излома существенны для решения задач об устойчивости равновесия при упругопластич. деформациях.

В современной теории течения для пластич. части тензора деформации ε_{ij}^{p} из постулатов пластичности энергетич. типа выводятся соотношения вида

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{p} = H \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}} \Delta\sigma_{mn}, \qquad (13)$$

а для упругой части принимается обобщенный закон Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{mm}^{l}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}^{l},$$

где λ, μ — постоянные Ламе, причем функция нагружения f является функционалом процесса нагружения $\sigma_{ij}(t)$, а функция упрочнения H, кроме того, зависит от приращений $\Delta\sigma_{ij}$. Чаще всего предполагается, что H не зависит от $\Delta\sigma_{ij}$. При этом линеаризованные по приращениям соотношения (13) позволяют строго формулировать краевую задачу типа (В), (13) с доказательством ряда общих теорем и минимальных принципов (см. [6]); разработаны процедуры численно-аналитич. решения. Преимущество простоты, даваемое линеаризацией соотношений (13), серьезно ослабляется ограниченностью области, в к-рой линеаризованные соотношения физически достоверны.

В П. м. т. часто используется постановка краевой задачи на основе теории пластичности Прандтля — Рейса, к-рая описывается соотношениями

$$2G\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}\delta_{ij} + R(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) + \frac{2G}{3K}\dot{\sigma}\delta_{ij},$$

где G, K — константы упругости, R — функция от $\sigma_u = \left(\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}\right)^{1/2}$. Область достоверности этих соотношений ограничена (точно не определена).

Развита теория идеально пластич. тел (см. [7], [8]), основанная на физич. соотношениях Сен-Венана — Леви — Мизеса. Эти соотношения формально получаются из соотношений малой кривизны (10), если в них положить $\Phi(s) = \sigma_s = \mathrm{const}$ (σ_s — предел текучести материала) и принять условие несжимаемости:

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = \frac{2\sigma_s}{3V_u} v_{ij}, \quad v = 0. \qquad (14)$$

Понятие идеальной пластичности подразумевает, кроме того, соблюдение в области активных пластич. деформаций условия текучести вида

$$F(\sigma_{ij}) = 0, \qquad (15)$$

напр. условия Генки — Мизеса $^3/_2 s_{ij}s_{ij} = \sigma_s^2$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$, или условия Треска — Сен-Венана $\tau_{\max} = \tau_s$, где $\tau_{\max}$ — наибольшее касательное напряжение, σ_s, τ_s — константы материала.

Краевая задача вида (В), (14), (15) с заменой (3) на (11) обычно гиперболического (иногда эллиптического) типа. Полная задача теории идеальной пластичности состоит в решении уравнений (2), (11), (14), (15) в части области Ω_1, в к-рой имеют место пластич. деформации, и уравнений (2), (3) с соотношениями обобщенного закона Гука в области упругих деформаций Ω_2 с соответствующими граничными условиями и кинематич. и динамич. условиями сопряжения решений на неизвестной границе областей Ω_1 и Ω_2 (упругопластич. задача).

Часто практически полезные результаты дает жестко-пластич. анализ, в к-ром упругие деформации игнорируются и части тела вне области пластичности считаются недеформируемыми. При этом, как правило, возникают стационарные поверхности разрыва скоростей частиц, что несовместимо с классич. положениями механики сплошной среды. В нек-рых задачах при задании граничных условий в напряжениях уравнения равновесия вместе с условиями типа (15) можно рассматривать как автономную систему гиперболич. типа. При этом возникает возможность неоднозначного определения области пластич. деформаций и напряжений в этой области, к-рую часто разрешают на основе нек-рых эвристич. соображений. Многозначность не возникает при решении упругопластич. задачи.

Среди задач, решаемых методами теории идеальной пластичности, специального упоминания заслуживают задачи об установившемся пластич. течении неупрочняющегося металла в «каналах» с определением скоростей и напряжений, включая контактные, применительно к технологич. задачам обработки давлением (ковка, штамповка, прессование).

Для ряда инженерных приложений особый интерес представляет теория пластич. течения тонких слоев металла, основанная на ряде рациональных гипотез кинематич. и физич. характера. При этом определяются условия, необходимые для поддержания пластич. течения (напр., мощность пресса), и распределение скоростей, позволяющее предвидеть форму изделия.

Прикладные задачи П. м. т. (напр., о равновесии оболочек) приводят к краевым задачам с нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными высокого порядка (напр., четвертого).

Для задач об устойчивости равновесия при пластич. деформациях характерно бифуркационное изменение типа процесса деформации в момент потери устойчивости с образованием точек излома на траекториях деформации. Напр., при простом нагружении тела в момент потери устойчивости возникает сложное нагружение, и для решения задачи об устойчивости необходимо привлекать соотношения, описывающие бесконечно малый процесс после точки излома траектории (см. [1]).

Динамические задачи теории пластичности. Общая постановка динамич. задачи получается, если (2) заменить уравнением движения

$$\sigma_{ij,\,j}+\rho K_i=\rho U_{i,\,tt},\quad x\in\Omega,$$

и к (2) — (6) добавить начальные условия, напр. вида

$$u_i(x,\,0)=\psi_i(x),\quad u_{i,\,t}(x,\,0)=\chi_i(x),\quad x\in\Omega.$$

При этом возникают трудности двоякого характера:

1) вследствие возникновения разных типов волн с различными скоростями распространения, зависящими от величин деформаций, процессы деформации в разных точках тела (и в каждой точке в разные промежутки времени) имеют разную степень сложности даже при простейших типах прилагаемых нагрузок, и априори нельзя установить возможность использования соотношений $\sigma_{ij}\sim\varepsilon_{ij}$ частного вида;

2) необходимо использовать динамич. соотношения $\sigma_{ij}\sim\varepsilon_{ij}$ с учетом зависимости от развития процесса деформации во времени.

Динамич. функционал пластичности изучен не полностью даже для одномерного процесса, т. е. при простой деформации. Информация о динамич. характеристиках материалов в сложном напряженном состоянии при сложных процессах деформации чрезвычайно скудна и не позволяет судить хотя бы о качественных свойствах динамич. функционалов пластичности. В связи с этим динамич. задачи теории пластичности ставятся с использованием статич. соотношений теории пластичности, что позволяет отрабатывать методы решения, выяснять специфические для динамики механич. эффекты и получать решения, полезные для практики в качестве оценок. Такой подход в качестве этапа исследования оправдывается чрезвычайной важностью изучения динамич. процессов в конструкциях, сооружениях и массивах.

Анализ распространения активных нелинейных деформаций в сложном напряженном состоянии обнаруживает возникновение комбинированных разрывов разных типов, характерных только для нелинейных задач. Насколько можно судить по имеющимся результатам, наиболее сложные процессы протекают в *областях, примыкающих к поверхностям* разрыва, тогда как в основной области движения сложность процесса по кривизнам траекторий и по времени ограничена. Поэтому представляется возможным решать динамич. задачи теории пластичности для сложных случаев путем комбинированного использования соотношений частного вида (напр., для процессов средней кривизны) в основной области и соотношений для окрестности точки излома (или для двухзвенных процессов) в областях, примыкающих к поверхностям разрыва. Нетривиальной и специфической для динамич. задач теории пластичности является задача о нахождении поверхности разгрузки, разделяющей области активных и пассивных деформаций.

Наиболее детально изучены задачи о распространении одномерных упругопластич. волн (см. [9]). Исследована задача о распространении волны разгрузки *в стержне при растяжении-сжатии* (см., напр., [9]). В дальнейшем распространение и взаимодействие упругопластич. продольных волн в стержне исследовано с учетом различных типов зависимости механич. нагрузок от скорости деформации. В свою очередь, полученные решения используются в качестве теории эксперимента (базисного или контрольного) для изучения динамич. свойств материалов (см. [10]).

Математические задачи теории уравнений состояния. Явление пластичности настолько сложно, что построить уравнения состояния (соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$) путем прямого обобщения опытных данных не удается. В связи с этим доминирует тенденция к созданию общей теории, к-рая, в частности, определит и теорию эксперимента. На этом пути ведется математич. исследование допустимых форм уравнений состояний, не противоречащих законам механики и термодинамики, изучение свойств кривых и поверхностей в n-мерном пространстве в связи с исследованием процессов и предельных конфигураций, формулирование определяющих принципов, относящихся к нек-рым классам (так или иначе идеализированных) материалов, указывающих выбор независимых параметров состояния и уточняющих (в достаточно общем виде) структуру соотношений $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$, аналитич. исследование свойств функционалов пластичности, выяснение классов процессов, допускающих более простое математич. описание в рамках общих соотношений (см. [1], [11]). Большое значение для теории и экспериментального исследования имеет развитие теории представления функционалов. Результаты этой теории позволяют, в частности, устанавливать физич. достоверность уравнения состояния сложной функциональной структуры по анализу явлений, сравнительно легко воспроизводимых в натуре.

Лит.: [1] Ильюшин А. А., Пластичность. Основы общей математической теории, М., 1963; [2] Ильюшин А. А., Ленский В. С., Модель и алгоритм, «Прикладные проблемы прочности и пластичности», 1975, № 1 (Горький); [3] Ильюшин А. А., Пластичность, ч. 1 — Упруго-пластические деформации, М.— Л., 1948; [4] Биргер И. А., «Прикл. матем. и механ.», 1951, т. 15, № 6, с. 765—70; [5] Москвитин В. В., Пластичность при переменных нагружениях, М., 1965; [6] Койтер В. Т., Общие теоремы теории упруго-пластических сред, пер. с англ., М., 1961; [7] Соколовский В. В., Теория пластичности, 3 изд., М., 1969; [8] Хилл Р., Математическая теория пластичности, пер. с англ., М., 1956; [9] Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А., Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках, М., 1961; [10] Васин Р. А., Ленский В. С., Ленский Э. В., Динамические зависимости между напряжениями и деформациями, в кн.: Проблемы динамики упруго-пластических сред, М., 1975; [11] Трусделл К., Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред, пер. с англ., М., 1975.

В. С. Ленский.

ПЛАТО ЗАДАЧА — задача нахождения *минимальной поверхности* (м. п.) с заранее заданной границей Γ. Впервые такая задача была поставлена Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1760), к-рый свел ее в классе поверхностей вида $z=z(x, y)$ к решению уравнения Эйлера — Лагранжа м. п. После опытов Ж. Плато (J. Plateau, 1849), в к-рых он показал, что м. п. могут быть получены в виде мыльных пленок, натянутых на проволочные каркасы (см. [1]), эту задачу стали называть задачей Плато.

В строгой постановке П. з. требует ряд дополнительных уточнений, относящихся к искомой м. п. и к ее границе. Напр., должно ли искомое решение быть регулярной м. п. или же его можно искать среди обобщенных минимальных поверхностей (о. м. п.); обязательно ли искомая поверхность должна реализовать абсолютный минимум площади; каков должен быть конформный или топологич. тип поверхности; в каком смысле понимать границу поверхности, и т. п. В зависимости от постановки задачи, ее решения и свойства этих решений (существование, единственность, регулярность и т. д.) могут быть существенно различными.

В течение 19 в. П. з. была решена для нек-рых частных видов заданной границы Γ, главным образом для различных полигональных контуров. В 1928 было доказано существование решения П. з. для о. м. п. типа круга, представляемой формулами Вейерштрасса и ограниченной заданной незаузленной жордановой кривой. В 1931 дано решение П. з. в следующей формулировке: пусть Γ — жорданова кривая в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, тогда в $\mathbb{R}^n$ существует о. м. п., заданная в изотермич. координатах (u, v) радиус-вектором $r=r(u, v)$, непрерывным в круге $|w|\leqslant 1$, $w=u+iv$, и гомеоморфно отображающим окружность $|w|=1$ на Γ; при этом площадь этой о. м. п. оказывается наименьшей среди всех непрерывных поверхностей типа круга, натянутых на контур Γ, в предположении, что на Γ можно натянуть хотя бы одну такую поверхность конечной площади.

После решения П. з. в 1931 для односвязной поверхности Дж. Дуглас (J. Douglas) поставил вопрос (т. н. задача Дугласа) о существовании в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, м. п., имеющей заданный топологич. тип (т. е. заданную эйлерову характеристику и характер ориентируемости) и ограниченной заданным контуром Γ, состоящим из объединения $k\geqslant 1$ жордановых кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$. В 1936—40 были даны достаточные условия разрешимости этой задачи, одно из к-рых заключается в возможности натянуть на Γ какую-нибудь поверхность данного топологич. типа, площадь к-рой была бы меньше, чем площадь любой поверхности с меньшей эйлеровой характеристикой, натянутой на тот же контур. В такой постановке П. з. была рассмотрена и решена также в римановом пространстве.

В нач. 60-х гг. 20 в. было достигнуто большое продвижение и в решении П. з. для k-мерных поверхностей, $k\geqslant 3$. Было предложено несколько обобщений П. з., основанных на новых определениях понятий поверхности, границы и площади. Одно из обобщений исходит из следующего определения понятия поверхности X и ее границы L в $\mathbb{R}^n$. Пусть имеются компакт $X\subset\mathbb{R}^n$ и компакт $A\subset X$, G — абелева группа и $k\geqslant 1$ — целое число; тогда определены группы гомологий Чеха — Александрова $H_{k-1}(A, G)$ и $H_{k-1}(X, G)$; ядро гомоморфизма $i_*: H_{k-1}(A, G)\rightarrow H_{k-1}(X, G)$, индуцированного вложением $i: A\rightarrow X$, наз. алгебраич. границей компакта X (в размерности k) по отношению к A. Если L — подгруппа группы $H_{k-1}(A, G)$, то X является поверхностью с границей $\supset L$, если L принадлежит алгебраич. границе компакта X; под площадью компакта X в $\mathbb{R}^n$ понимается его k-мерная хаусдорфова (сферическая) мера Λ^k. При таких определениях доказаны существование и регулярность почти всюду (топологическая локально евклидовость и аналитичность) компакта X_0, реализующего минимум меры Λ^k по всем компактам X с заданной границей L. Впоследствии эти теоремы были распространены на случай поверхностей X в римановом пространстве.

Другие предложенные обобщения П. з., в частности обобщение в терминах интегральных потоков, являются в нек-ром смысле эквивалентными постановке П. з. в терминах гомологий.

В классич. постановке *Плато многомерная задача* решена в 1969; а именно, доказана теорема: если в римановом пространстве V^n задано $(k-1)$-мерное подмногообразие Γ, $k \geqslant 3$, то существует поверхность, реализующая минимум хаусдорфовой меры Λ^k среди всех параметризуемых поверхностей X, являющихся в V^n непрерывными f-образами k-мерных гладких многообразий M с краем, гомеоморфным Γ при отображении $f: M \to V^n$.

Наряду с вопросами разрешимости П. з. интересными являются также вопросы единственности и регулярности ее решения. Наиболее продвинуто исследование вопроса о регулярности решения. Показано, что решение П. з., данное Дугласом в $\mathbb{R}^3$, не содержит внутренних точек ветвления. Для случая многомерной П. з. доказана регулярность решения почти всюду, причем возможность наличия нерегулярных точек подтверждается примерами. Что касается единственности решения П. з., то здесь известны лишь нек-рые достаточные признаки единственности (напр., решение П. з. единственно, если заданный контур Γ имеет однозначную выпуклую проекцию при центральном или параллельном проектировании на нек-рую плоскость). Чтобы подчеркнуть сложность этого вопроса, достаточно сказать, что есть основания ожидать существование спрямляемых контуров, стягивающих континуум м. п. типа круга.

Лит.: [1] Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd 3, H. 2/3, Lpz., 1903; [2] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces..., 2 éd., pt. 1, P., 1914; [3] Bianchi L., Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2 Aufl., Lpz.— B., 1910; [4] Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, пер. с англ., М., 1953; [5] Morrey C., «Ann. Math.», 1948, v. 49, № 4, p. 807—51; [6] Rado T., On the problem of Plateau, B., 1933; [7] Ниче И. С. С., «Математика», 1967, т. 11, № 3, с. 37—100; [8] Оссерман Р., там же, 1971, т. 15, № 2, с. 104—25; [9] Фоменко А. Т., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, с. 1049—1079; [11] Nitsche J. C. C., «Invent. math.», 1969, v. 8, N 4, p. 313—33; [12] Оссерман Р., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 4, с. 55—136; [13] Federer H., Geometric measure theory, B.— [u. a.], 1969; [14] Morrey C., Multiple integrals in the calculus of variations, B.— [u. a.], 1966. *И. Х. Сабитов.*

ПЛАТО МНОГОМЕРНАЯ ЗАДАЧА — термин, обозначающий серию задач, связанных с изучением экстремалей и глобальных минимумов функционала k-мерного объема vol_k, определенного на k-мерных обобщенных поверхностях, вложенных в n-мерное риманово пространство M^n и удовлетворяющих тем или иным граничным условиям.

В истории развития указанной вариационной задачи (см. *Плато задача*) выделяются несколько периодов, характеризующихся различными подходами к понятиям «поверхности», «границы», «минимизации» и, соответственно, методами получения минимального решения. Многомерная задача Плато формулируется так. Пусть $A^{k-1} \subset M^n$ — фиксированное замкнутое гладкое $(k-1)$-мерное подмногообразие в римановом пространстве M^n и пусть $X(A)$ — класс всех таких пленок (поверхностей) $X \subset M^n$, имеющих границей многообразие A, причем каждая пленка $X \in X(A)$ допускает непрерывную параметризацию (представима в виде образа нек-рого многообразия с краем), т. е. $X = f(W)$, где W — нек-рое k-мерное многообразие с краем ∂W, гомеоморфным A, а $f: W \to M^n$ —

непрерывное отображение, совпадающее с фиксированным гомеоморфизмом на крае ∂W, то есть $f : \partial W \xrightarrow{\cong} A$. Вопрос: можно ли найти в классе $X(A)$ пленку X_0, к-рая была бы в каком-либо разумном смысле минимальной, напр. чтобы ее k-мерный объем был наименьшим по сравнению с k-мерными объемами других пленок X из этого же класса? Оказалось, что перенесение классич. «двумерных» методов на многомерный случай наталкивается на серьезные трудности. Это привело к тому, что классич. постановка П. м. з. была на время оставлена и задача была сформулирована в иных (гомологических) терминах. Если отбросить понятие многообразия-пленки с краем $\partial W = A$ и сильно расширить понятие пленки и ее границы, ослабив связь пленки с ее границей (в частности, если рассматривать непараметризованные пленки), отбросив условие $X = f(W)$, то П. м. з. может быть сформулирована на языке обычных целочисленных гомологий H_*: найти минимальную пленку X_0, аннулирующую фундаментальный цикл $[A] \in H_{k-1}(A)$ многообразия A (в предположении, что A ориентируемо), т. е. $i_*[A]=0$, $i_*: H_{k-1}(A) \to H_{k-1}(X)$, где i_* — гомоморфизм, индуцированный вложением $i : A \to X$. Для решения П. м. з. в этой новой расширенной постановке был разработан (см. [1], [2]) геометрич. подход, при к-ром минимизировался функционал k-мерной хаусдорфовой меры (объема), определенный на k-мерных измеримых компактах (поверхностях) в M^n, и развита (см. [3], [4]) теория интегральных потоков и варифолдов, носителями к-рых являются k-спрямляемые подмножества в M^n. Однако указанное расширение понятия границы пленки в терминах гомологий H_* (то есть k—1-мерное многообразие A считается границей k-мерной пленки W, если при вложении $A \to W$ фундаментальный цикл $[A]$ аннулируется) означает отход классич. постановки П. м. з., так как, располагая теоремой существования минимального решения в гомологич. классе $X(A)$, по-прежнему ничего нельзя сказать о существовании минимального решения в классе всех пленок, являющихся непрерывными образами многообразий с краем, т. е. допускающих параметризацию. Дело в том, что если многообразие A гомологично нулю (как цикл) в пленке X_0, то X_0 не обязательно допускает представление в виде $X_0 = f(W_0)$, где W_0 — нек-рое k-мерное многообразие с краем.

В классич. постановке, т. е. в терминах пленок вида $X = f(W)$, где W суть k-мерные многообразия с краем A, П. м. з. была решена (см. [5], [6]). При этом было замечено, что классическая П. м. з. допускает эквивалентную формулировку на языке *бордизмов*. Пусть V есть $(k—1)$-мерное компактное ориентированное замкнутое многообразие, $f : V \to M^n$ — непрерывное отображение; пара (V, f) наз. **сингулярным бордизмом** M^n. Два бордизма (V_1, f_1) и (V_2, f_2) наз. **эквивалентными**, если существует k-мерное ориентированное многообразие W с краем $\partial W = V_1 \cup (-V_2)$ (где $-V_2$ означает V_2 с обратной ориентацией) и непрерывное отображение $F : W \to M^n$ такое, что $F|_{V_1} = f_1$, $F|_{V_2} = f_2$. Бордизм (V, f) эквивалентен нулю, если $V = \partial W = V_1$, $V_2 = \phi$. Классы эквивалентности сингулярных бордизмов образуют абелевы группы, к-рые после выполнения процесса стабилизации образуют одну из обобщенных теорий гомологий (теорию бордизмов). П. м. з. формулируется (на этом языке) так: а) можно ли среди всех пленок $X \subset M$, $A \subset X$ и обладающих тем свойством, что сингулярный бордизм (A, i) (где $i : A \to X$ — вложение) эквивалентен нулю в X, найти X_0 с наименьшим объемом $\mathrm{vol}_k X_0$? б) Можно ли среди всех сингулярных бордизмов (V, g) (где $g : V \to M^n$), эквивалентных данному бордизму (V', g'), найти такой бордизм (V_0, g_0), чтобы объем пленки $g_0(X_0)\subset M^n$ был бы наименьшим? Положительный ответ на эти вопросы см. в [5], [6], [13].

Классическая П. м. з. значительно отличается от ее гомологич. варианта. На рис. 1 показаны контур $A=S^1$ и пленка X, стремящаяся занять в $\mathbb{R}^3$ положение, соответствующее наименьшей площади. В некрый момент наступит склейка, схлопывание пленки,

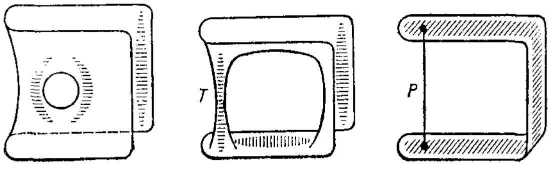


Рис. 1.

в результате чего вместо двумерной трубки T появится одномерный отрезок P. В двумерном случае отрезок P может быть непрерывно отображен в двумерный диск, заклеивающий A. В многомерном случае описанный эффект появления у минимальной пленки зон меньших разномерностей присутствует еще в большей степени, причем если в двумерном случае все такие куски P, $\dim P\leqslant k-1$, можно было отобразить без потери параметризующих свойств пленки X_0 в k-мерную (двумерную) часть этой пленки, то при $k>2$ эти зоны меньшей размерности, в общем случае, неустранимы (если мы хотим сохранить топологич. свойство пленки X_0, аннулирующей бордизм (A, i)). В силу тех же причин зоны меньшей размерности не могут быть отброшены, так как k-мерная часть $X^{(k)}$ пленки X может вообще не допускать непрерывной параметризации и, тем самым, вообще говоря, не аннулирует бордизм (A, i). Это показывает необходимость введения стратифицированного объема пленки X, составленного из объемов всех ее зон $X^{(i)}$, то есть $(\mathrm{vol}_k X^{(k)}, \mathrm{vol}_{k-1} X^{(k-1)}, \ldots)$. Теорема, являющаяся решением П. м. з., формулируется так (см. [5], [6]): существует глобально минимальная поверхность, минимизирующая стратифицированный объем.

Следствие: для любого фиксированного $(k-1)$-мерного ориентированного гладкого замкнутого подмногообразия A в римановом пространстве M^n (в том случае, когда $X(A)\neq\varnothing$) существует глобально минимальная поверхность $X_0=f_0(W_0)$, аннулирующая бордизм (A, i) (в частности, k-мерный объем пленки X_0 не больше k-мерного объема любой пленки вида $X=f(W)$), см. [5], [13]. Более того, пленка X_0 минимальна в каждой своей размерности $s\leqslant k$; если $X^{(s)}$ — часть пленки X, имеющая размерность s, то $X^{(s)}$ содержит подмножество $Z^{(s)}$, s-мерный объем к-рого равен нулю, а дополнение $X^{(s)}\setminus Z^{(s)}$ является открытым s-мерным всюду плотным в $X^{(s)}$ аналитич. подмногообразием в M^n. Здесь $Z^{(s)}$ — множество сингулярных точек в размерности s.

Этот результат является частным случаем общей теоремы существования и почти всюду регулярности глобально минимальной поверхности, доказанной (см. [5], [6], [13] для любой обобщенной теории (ко)гомологией и для любого набора краевых условий. Кроме того, такая поверхность существует и в каждом стабильном гомотопич. классе. Вот пример вариационной задачи, сформулированной и получившей решение в когомологич. терминах. Пусть ξ — стабильно нетривиальное векторное расслоение на компактном римановом пространстве M^n; пусть $X(\xi)$ — класс всех таких поверхностей $X\subset M^n$, что ограничение $\xi|_X$ расслоения ξ на X стабильно нетривиально (т. е. X — носитель ξ). Тогда всегда существует глобально минимальная поверхность $X_0\in X(\xi)$, имеющая наименьший объем в классе $X(\xi)$. Общая теорема существования может быть сформулирована и доказана также и на языке интегральных потоков, для чего следует ввести фильтрованные потоки, состоящие из потоков различных размерностей. На этом пути было затем получено решение П. м. з. в классах гомотопий [14].

В сфере задач, окружающих П. м. з., выделяются исследования конкретных аналитич. и топологич. свойств глобально минимальных поверхностей. Напр., актуальна задача предъявления конкретных поверхностей в римановых пространствах. Так, напр., известно (см. [3]), что комплексные алгебраич. подмногообразия в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$ — глобально минимальные поверхности. Этот результат носит ярко выраженный комплексный характер. В случае вещественных подмногообразий долгое время отсутствовали какие-либо методики обнаружения конкретных глобально минимальных поверхностей. Первым результатом (см. [6]) в этом направлении, учитывающим их топологию, была методика, применение к-рой позволило доказать, что каждому компактному риманову пространству M^n можно сопоставить универсальную функцию $\Omega_x(k)$, где $x \in M^n$, k — целое число, $1 \leqslant k \leqslant n$. Если X_0 — глобально минимальная поверхность, реализующая нетривиальный (ко)цикл в $H_k(M^n)$, то $\operatorname{vol}_k X_0 \geqslant \Omega_x(k)$ для любой точки $x \in X_0$. Если $M=G/H$ — однородное пространство, то $\Omega_x(k) \equiv \Omega(k)$ не зависит от точки x. Функция $\Omega_x(k)$ вычисляется в явном виде и дает общую оценку снизу на объемы всех k-мерных (ко)циклов в M^n. Оценка эта в общем случае неулучшаема, т. е. существуют бесконечные серии глобально минимальных X_0, для к-рых $\operatorname{vol}_k X_0 = \Omega(k)$. Для симметрич. пространств получено (см. [6], [13], [15]) полное описание всех таких поверхностей, для к-рых $\operatorname{vol}_k X_0 = \Omega(k)$. Разработаны (см. [11], [12], [14], [15]) дальнейшие методики получения конкретных глобально минимальных поверхностей. В различных задачах вариационного исчисления, топологии, алгебраич. геометрии, комплексного анализа возникает следующая ситуация: а) дано многообразие M^n и его «исчерпание» n-мерными областями D_r, расширяющимися с ростом параметра r; б) в M^n фиксирована глобально минимальная поверхность X^k; в) ставится вопрос: с какой скоростью растет $\operatorname{vol}_k(X^k \cap D_r)$, рассматриваемый как функция от r? К этому вопросу сводятся, напр., задачи о вычислении $\Omega_x(k)$, задачи о структуре базисов в пространствах целых функций, теоремы типа Штолля (см. [11]) и т. д. Оказывается (см. [6], [15]), существует универсальная точная эффективно вычислимая оценка снизу на скорость роста $\operatorname{vol}_k(X^k \cap D_r)$, из к-рой, как частные случаи, получаются явные формулы для $\operatorname{vol}_k X^k$, где X^k — глобально минимальная поверхность. Напр., объем такой поверхности, заключенной в шаре $B^n \subset \mathbb{R}^n$ и проходящей через центр шара (и имеющей границу на границе шара), всегда не меньше стандартного k-мерного шара B^k (плоского сечения), проходящего через центр B^n (см. [13], [15]).

В особое направление выделилась П. м. з. «коразмерности один»: рассматриваются глобально минимальные поверхности коразмерности 1 в $\mathbb{R}^n$. Так, напр., решена (см. [7]) проблема Бернштейна: пусть V^{n-1}— гладкое полное локально минимальное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$, допускающее взаимно однозначную проекцию на нек-рую гиперплоскость, т. е. V^{n-1} задается графиком функции f, определенной на $\mathbb{R}^{n-1}$; верно ли, что f — линейная функция? При $3 \leqslant n \leqslant 8$ ответ положителен (см. [8]). Минимальность таких гиперповерхностей тесно связана с минимальностью конусов в $\mathbb{R}^n$: из существования локально минимальной поверхности следует существование минимального конуса CM^{n-2}, т. е. поверхности, составленной из точек радиусов, идущих из точки $O \in \mathbb{R}^n$ в точки $x \in M^{n-2}$, где M^{n-2} — локально минимальная поверхность в сфере S^{n-1}. Установлено (см. [8]), что если M^{n-2} — замкнутое локально минимальное подмногообразие (т. е. обращающее в нуль оператор Эйлера) в S^{n-1}, не являющееся экватором $S^{n-2} \subset S^{n-1}$, то при $n \leqslant 7$ конус CM^{n-2} (с основанием M^{n-2} и вершиной в центре сферы) не минимизирует $(n-1)$-мерный объем vol_{n-1} (при фиксированной границе M^{n-2}), т. е. существует вариация (носитель к-рой сосредоточен около центра сферы), уменьшающая объем конуса. Отсюда и выводится линейность функции f при $n \leqslant 8$. При $n \geqslant 9$ ответ на вопрос отрицателен: существуют (см. [7] локально (и даже глобально) минимальные поверхности $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, задаваемые как графики нелинейных функций. Построение осуществляется явно; при этом обнаружилось, что конусы, задаваемые в $\mathbb{R}^{2m}$ уравнением

$$x_1^2 + \ldots + x_m^2 = x_{m+1}^2 + \ldots + x_{2m}^2, \qquad (*)$$

являются глобально минимальными поверхностями при фиксированной границе $V = S^{m-1} \times S^{m-1}$, $m \geqslant 4$. Эти конусы — частный случай конусов более общего вида, являющихся глобально минимальными поверхностями (см. [10]).

Развивается новое направление в П. м. з. — так наз. эквивариантные многомерные задачи Плато. Среди глобально минимальных поверхностей естественно выделен класс пленок, переходящих в себя при действии нек-рой группы симметрий (см. [9], [10]). Пусть G — компактная связная группа Ли, гладко действующая на M^n изометриями и расслаивающая его на орбиты $G(x)$, $x \in M^n$. Тогда для нахождения глобально минимальных поверхностей X^k в M^n, инвариантных относительно G, достаточно перейти к факторпространству $P = M^n/G$ и снабдить P римановой метрикой вида

$$dl_p = v^{1/p}\, d\tilde{s},$$

где $v = \mathrm{vol}\, G(x)$, а

$$p = \dim X^k - \dim G(x) = k - \dim G(x)$$

(здесь через $\dim G(x)$ обозначена размерность орбиты общего положения в M^n), $d\tilde{s}$ — естественная метрика-проекция, возникающая на P при изометрич. действии G. Для нахождения глобально минимальных поверхностей в M^n, инвариантных относительно G, достаточно описать таковые в M^n/G, снабженном метрикой dl_p (см. [9]), так что получается редукция П. м. з. на M^n к П. м. з. на M^n/G меньшей размерности. Эта методика позволила получить серии конкретных глобально минимальных поверхностей, обладающих большими группами симметрии (см. [13]). В частности, «конусы Саймонса», задаваемые уравнением (*), изображаются отрезком OD (см. рис. 2) на двумерном факторе

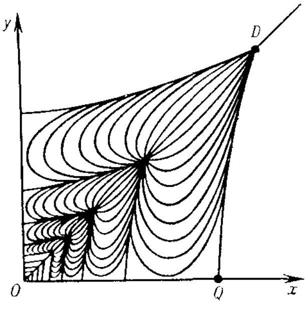


Рис. 2.

$$\mathbb{R}^{2m}/SO_m \times SO_m = (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0),$$

снабженном метрикой

$$(xy)^{2(2m-2)}\,(dx^2 + dy^2)$$

и являющемся первым квадрантом K на плоскости $\mathbb{R}^2$ (см. [13]). Для нахождения глобально минимальной поверхности с границей

$$S^{m-1} \times S^{m-1} = G(D),\ G = SO_m \times SO_m$$

достаточно найти геодезические, идущие из D на границу K и имеющие наименьшую длину. На рис. 2 показан пучок геодезических, исходящих из точки D; этот пучок можно понимать как пучок световых лучей, распространяющихся из источника D в прозрачной среде, заполняющей K с показателем преломления $(xy)^{2m-2}$. При $m<\frac{5}{2}+\sqrt{2}$ наряду с поверхностью OD существует еще одно минимальное решение меньшей длины, изображаемое геодезической OQ; это означает, что конус Саймонса — не глобально минимальная поверхность. С ростом m точка Q стремится к O, и при $m>\frac{5}{2}+\sqrt{2}$ существует единственная геодезическая, соединяющая D с границей квадранта, т. е. конус Саймонса — глобально минимальная поверхность (см. [13]).

Лит.: [1] Morrey Ch., Multiple integrals in the calculus of variations, B., 1966; [2] Reifenberg E., «Acta Math.», 1960, t. 104, № 1/2, p. 1—92; [3] Federer H., Geometric measure theory, B., 1969; [4] Almgren E. J., «Ann. Math.», 1968, v. 87, № 2, p. 321—91; [5] Фоменко А. Т., «Матем. сб.», 1972, т. 89, № 3, с. 475—519; [6] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, № 5, с. 1049—79; [7] Bombieri E., De Giorgi E., Giusti E., «Invent. Math.», 1969, v. 7, fasc. 3, p. 243—268; [8] Simons J., «Ann. Math.», 1968, v. 88, № 1, p. 62—105; [9] Lawson H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1972, v. 173, № 446, p. 231—49; [10] Lawson H., Simons J., «Ann. Math.», 1973, v. 98, № 3, p. 427—50; [11] Фоменко А. Т., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 3, с. 667—81; [12] Дао Чонг Тхи, там же, 1980, т. 44, № 5, с. 1031—65; [13] Фоменко А. Т., «Тр. Семинара по вект. и тенз. анализу...», 1974, в. 17, с. 3—176; 1978, в. 18, с. 4—93; [14] Дао Чонг Тхи, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1978, т. 42, в. 3, с. 500—05; [15] Фоменко А. Т., там же, 1981, т. 45, № 1, с. 187—213.

А. Т. Фоменко.

ПЛАТОНА ТЕЛА — названия пяти выпуклых *правильных многогранников*: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Многогранники названы по имени Платона, к-рый в соч. «Тимей» (4 в. до н. э.) придавал им мистич. смысл; были известны до Платона.

ПЛЕСНЕРА ТЕОРЕМА — один из основных результатов в теории *граничных свойств аналитических функций*. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в единичном круге $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$, $\Delta=\Delta(e^{i\theta})$ — открытый угол с вершиной $e^{i\theta}$ на окружности $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$, образованный двумя хордами круга D, проходящими через $e^{i\theta}$. Точка $e^{i\theta}$ наз. точкой Плеснера (или $e^{i\theta}$ обладает свойством Плеснера), если в любом сколь угодно малом угле Δ для любого значения w из расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ существует последовательность $\{z_k\}\subset\Delta$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} z_k=e^{i\theta},\quad \lim_{k\to\infty} f(z_k)=w.$$

Точка $e^{i\theta}$ наз. точкой Фату для $f(z)$, если существует один единственный предел

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} f(z)=A,$$

когда z стремится к $e^{i\theta}$ внутри любого угла Δ. Теорема Плеснера: почти все точки окружности Γ по мере Лебега на Γ являются либо точками Фату, либо точками Плеснера. Доказана А. И. Плеснером (см. [1]).

Известно также, что множество $P(f)$ всех точек Плеснера имеет тип G_δ на Γ. Построены примеры аналитич. функций в D, для к-рых множество $P(f)$ плотно на Γ и имеет любую наперед заданную меру Лебега $\operatorname{mes} P(f)=m$, $0\leqslant m<2\pi$ (см. [3]). П. т. верна для мероморфных функций $f(z)$ в любой односвязной области D со спрямляемой границей Γ. В этом случае $\zeta\in\Gamma$ есть точка Фату, если существует предел

$$\lim_{z\to\zeta} f(z)=A,\quad z\in D,$$

при стремлении $z \to \zeta$ по любому некасательному пути; определение точки Плеснера $\zeta \in \Gamma$ нужно изменить так, чтобы рассматривались углы Δ с вершиной ζ и сторонами, образующими углы, меньшие $\pi/2$, с нормалью к Γ в точке ζ (см. [2]).

Аналогом П. т. в терминах категории множеств является *Мейера теорема.*

Лит.: [1] Плеснер А. И., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 1, с. 125—36; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М. — Л., 1950; [3] Ловатер Дж., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259. *Е. Д. Соломенцев.*

ПЛОСКАЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРИВАЯ — множество точек L действительной аффинной плоскости, координаты к-рых удовлетворяют уравнению

$$f(x, y) = 0, \qquad (1)$$

где $f(x, y)$ — многочлен степени n от координат x, y; число n наз. порядком кривой L. Если многочлен f приводим, т. е. разлагается на множители $f_1, \ldots, f_k$, то определяемая уравнением (1) кривая L наз. приводимой и является объединением кривых $L_1, \ldots, L_k$ (компонент L), задаваемых соответственно уравнениями

$$f_1 = 0, \ \ldots, \ f_n = 0.$$

Если же многочлен f неприводим, то кривая L наз. неприводимой. Две неприводимые П. д. а. к., одна из к-рых имеет порядок n, а другая — порядок m, пересекаются не более чем в mn точках (теорема Безу).

Одна и та же П. д. а. к. L может определяться различными уравнениями. Пусть I_L — совокупность многочленов, обращающихся в нуль во всех точках кривой L. Если L неприводима, то из того, что $fg=0$ на L, следует равенство нулю f или g; в этом случае фактор-кольцо $K(L) = K/I_L$ (здесь K — кольцо всех многочленов) не имеет делителей нуля и наз. кольцом многочленов на L.

С неприводимой П. д. а. к. L ассоциируется также нек-рое поле $K(L)$, наз. полем рациональных функций на L. Оно состоит из рациональных функций $\frac{p(x, y)}{q(x, y)}$, причем q не делится на f, рассматриваемых с точностью до равенства на L ($\frac{p}{q}$ и $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ наз. равными на кривой L, заданной уравнением (1), если многочлен $p\tilde{q} - \tilde{p}q$ делится на f). Поле $K(L)$ является полем частных кольца $K(L)$.

Отображение $F : (x, y) \to \varphi(x, y), \psi(x, y)$ плоскости в себя наз. регулярным на П. д. а. к. L, если $\varphi, \psi \in K(L)$. Кривые L и M наз. изоморфными, если существуют регулярные (соответственно на L и на M) отображения $F : L \to M$ и $G : M \to L$, обратные друг другу; при этом кольца $K(L)$ и $K(M)$ изоморфны. В частности, изоморфны аффинно эквивалентные кривые.

Более общим является рациональное отображение кривой L в кривую M, осуществляемое рациональными функциями. Оно устанавливает соответствие между всеми точками кривых, кроме конечного их числа, и определяется так. Пусть $f=0$ и $g=0$ — уравнения кривых L и M соответственно, тогда рациональное отображение F задается такой парой рациональных функций φ и ψ, определенных на L, что $g(\varphi, \psi)=0$ на M. Кривые L и M наз. бирационально эквивалентными, если существуют рациональные отображения L в M и M в L, обратные друг другу; при этом поля $k(L)$ и $k(M)$ оказываются изоморфными. Такие рациональные отображения наз. бирациональными, или кремоновыми, преобразованиями. Все кремоновы преобразования на плоскости могут быть осуществлены последовательным проведением преобразований вида $x \to \frac{1}{x}$, $y \to \frac{1}{y}$. Бирациональная эквивалентность — более грубое отношение, чем изоморфизм, однако классификация П. д. а. к. с этой точки зрения оказывается проще и обозримее.

Простейшим примером рационального отображения является *проективное преобразование*. Важную роль играет дуальное отображение неприводимой кривой L, отличной от прямой, в кривую L^*, дуальную L, определяемое формулами:

$$u = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad v = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}}, \qquad (2)$$

где f — многочлен, определяющий L. Уравнение

$$g(u, v) = 0,$$

определяющее кривую L^*, получается исключением x, y из уравнений (1), (2). Вследствие связи дуального отображения с касательным преобразованием саму кривую L^* в ряде случаев можно представлять как огибающую семейства прямых, касательных к L. Порядок L^* наз. классом n^* кривой L. Отношение дуальности взаимно, т. е. $L^{**} = L$, и является отражением *двойственности принципа* проективной геометрии.

Точка x П. д. а. к. L, заданной уравнением (1), наз. особой точкой, если в ней $\operatorname{grad} f = 0$. Анализ особенностей является необходимым элементом исследования кривой L, однако полная классификация особенностей еще далека от завершения (1983).

Если все производные многочлена f до $(r-1)$-го порядка включительно в точке x равны нулю, а хотя бы одна производная r-го порядка отлична от нуля в x, то x наз. точкой кратности r и притом обыкновенной, если в ней существуют r различных касательных. Примеры особых точек:

1) $x^3 - x^2 + y^2 = 0$; $(0, 0)$ — обыкновенная двойная точка, точка самопересечения;

2) $x^2 + x^3 + y^2 = 0$; $(0, 0)$ — изолированная точка;

3) $x^3 + y^2 = 0$; $(0, 0)$ — точка заострения, возврата;

4) $2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 = 0$; $(0, 0)$ — точка самоприкосновения.

Неособая точка x П. д. а. к. L, заданной уравнением (1), наз. точкой перегиба, если в ней

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Другими словами, точки перегиба — это точки пересечения кривой L и кривой H, задаваемой уравнением (3) и называемой гессианой кривой L. Точкам перегиба кривой L соответствуют на дуальной кривой L^* точки возврата.

Для всякой П. д. а. к. имеет место соотношение (Ф. Клейн, F. Klein, 1876):

$$n + 2d + r = n^* + 2d^* + r^*,$$

где n — порядок L, n^* — класс L, r^* — число точек перегиба L, d^* — число изолированных двойных касательных к L (двойных точек L^*), r — число точек возврата L (точек перегиба L^*), d — число двойных точек L. См. также *Плюккера формулы*.

Любая неприводимая плоская кривая L бирационально эквивалентна неприводимой кривой L_0, имеющей лишь обыкновенные особенности.

Р о д (или ж а н р) П. д. а. к. L определяется числом p, являющимся разностью между наибольшим числом двойных точек, к-рые может иметь L, и их фактич. числом. Род p и порядок n кривой L связаны соотношением

$$2p = n(n-1) - \sum r_i(r_i - 1),$$

где суммирование распространяется на точки кратности r_i.

Кривые нулевого рода (наз. также р а ц и о н а л ь н ы м и, у н и к у р с а л ь н ы м и) обладают важным свойством, а именно: координаты точки, движущейся по такой кривой, могут быть выражены рациональными функциями ξ, η нек-рого параметра t. Другими словами, кривые рода нуль бирационально эквивалентны прямой. Уникурсальные кривые имеют важные применения. Пусть, напр., уравнение такой кривой определяет y как алгебраич. функцию от x; тогда для любой рациональной функции $g(x, y)$ неопределенный интеграл

$$\int g(x, y)dx$$

может быть выражен через элементарные функции.

Кривые рода 1, тесно связанные с *эллиптическими функциями*, бирационально эквивалентны кривой 3-го порядка без особенностей. Нек-рые кривые рода $p>1$ (т. н. г и п е р э л л и п т и ч е с к и е) бирационально эквивалентны кривой порядка $p+2$, имеющей единственную особую точку кратности p.

Род p является бирациональным инвариантом, однако две кривые, имеющие один и тот же род, не обязательно бирационально эквивалентны.

Полная классификация кривых порядка $n \geqslant 4$ еще (1983) не получена. Неприводимая кривая 2-го порядка является либо пустым множеством, либо эллипсом, либо гиперболой, либо параболой (см. *Линия второго порядка*). Эти кривые неособенны и уникурсальны.

Первая классификация кривых 3-го порядка была предложена И. Ньютоном (I. Newton, 1704), к-рый положил тем самым начало систематич. исследованию П. д. а. к. В основе ее лежит подразделение кривых 3-го порядка на классы в зависимости от количества и характера бесконечных ветвей. Уравнение кривой надлежащим выбором координатной системы приводится к одной из четырех канонич. форм A, B, C, D, которые затем разделяются на классы, подклассы и типы (см. схему).

У каждой кривой 3-го порядка L есть либо (единственная) двойная точка, и тогда L уникурсальна, либо точка перегиба, быть может находящаяся на бесконечности; если есть три точки перегиба, то они лежат на одной прямой; более трех точек перегиба быть не может.

Пополнение аффинной плоскости несобственными элементами приводит к проективной плоскости, на к-рой П. д. а. к. определяется уравнением

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0,$$

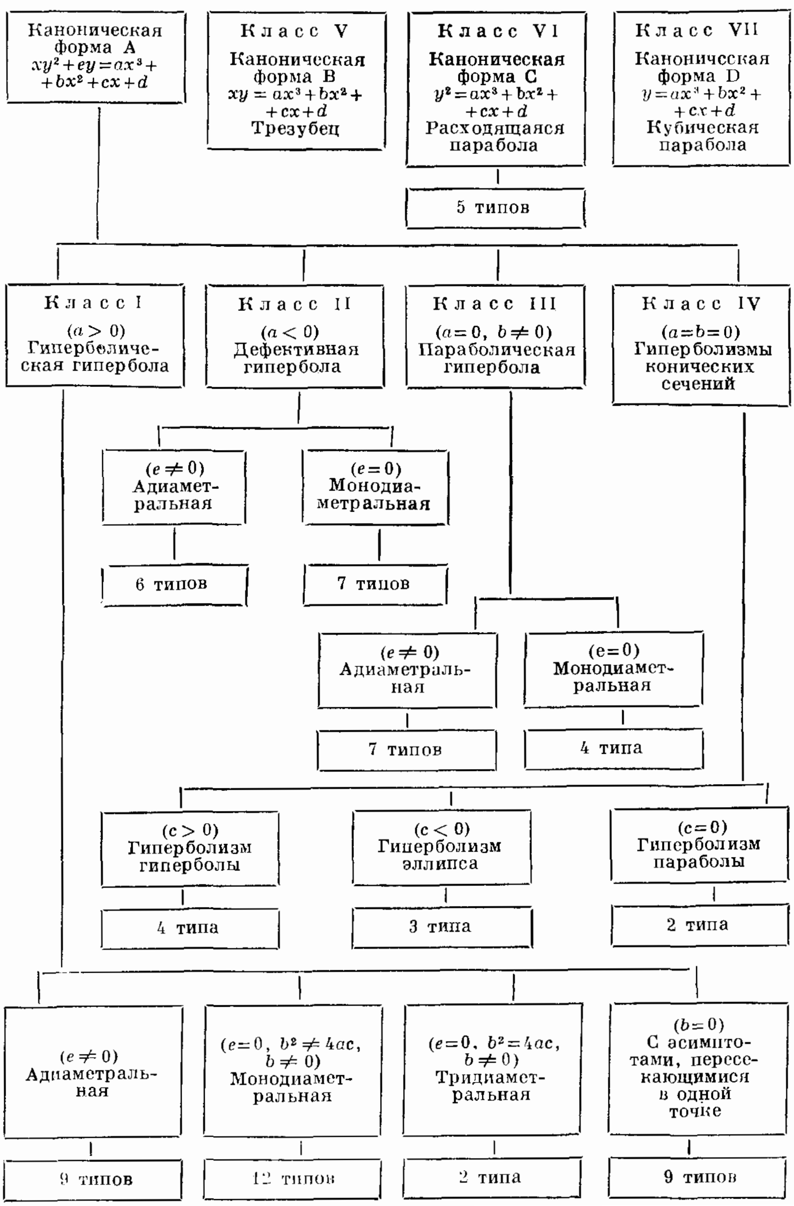
где F — однородный многочлен степени n от проективных координат x^1, x^2, x^3. Проективная классификация кривых проще; напр., каждая кривая 3-го порядка может быть рассматриваема как сечение конуса, направляющей к-рого служит одна из пяти т. н. дивергентных парабол, т. е. имеется пять типов проективно неэквивалентных кубич. кривых (т е о р е м а Н ь ю т о н а).

При исследовании П. д. а. к. полезным оказывается также и привлечение мнимых элементов, и, далее, переход в комплексную область. См. *Алгебраическая кривая*.

Лит.: [1] У о к е р Р., Алгебраические кривые, пер. с англ., М., 1952; [2] С м о г о р ж е в с к и й А. С., С т о л о в а Е. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961; [3] С а в е л о в А. А., Плоские кривые, М., 1960.

М. И. Войцеховский.

Классификация Ньютона кривых 3-го порядка



Род (или жанр) П. д. а. к. L определяется числом p, являющимся разностью между наибольшим числом двойных точек, к-рые может иметь L, и их фактич. числом. Род p и порядок n кривой L связаны соотношением

$$2p=n(n-1)-\sum r_i(r_i-1),$$

где суммирование распространяется на точки кратности r_i.

Кривые нулевого рода (наз. также **рациональными, уникурсальными**) обладают важным свойством, а именно: координаты точки, движущейся по такой кривой, могут быть выражены рациональными функциями ξ, η нек-рого параметра t. Другими словами, кривые рода нуль бирационально эквивалентны прямой. Уникурсальные кривые имеют важные применения. Пусть, напр., уравнение такой кривой определяет y как алгебраич. функцию от x; тогда для любой рациональной функции $g(x, y)$ неопределенный интеграл

$$\int g(x, y)dx$$

может быть выражен через элементарные функции.

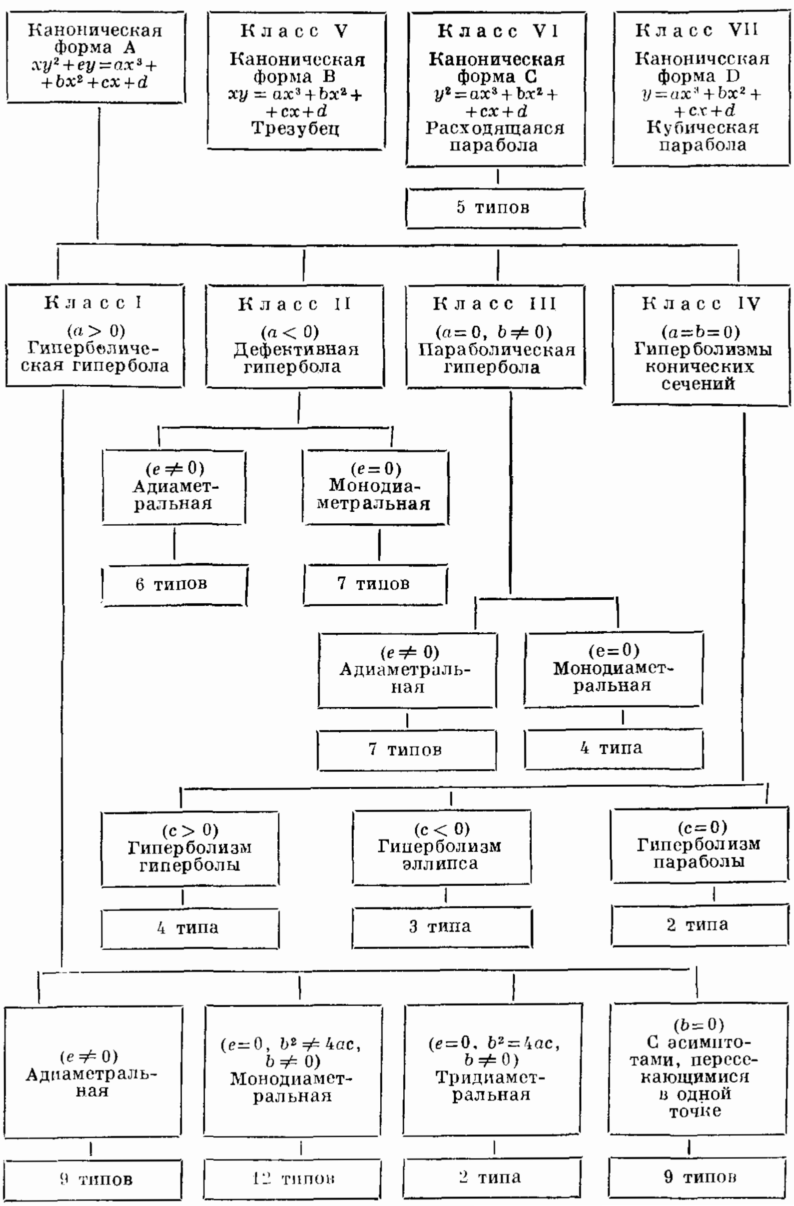
Кривые рода 1, тесно связанные с *эллиптическими функциями*, бирационально эквивалентны кривой 3-го порядка без особенностей. Нек-рые кривые рода $p>1$ (т. н. **гиперэллиптические**) бирационально эквивалентны кривой порядка $p+2$, имеющей единственную особую точку кратности p.

Род p является бирациональным инвариантом, однако две кривые, имеющие один и тот же род, не обязательно бирационально эквивалентны.

Полная классификация кривых порядка $n\geqslant4$ еще (1983) не получена. Неприводимая кривая 2-го порядка является либо пустым множеством, либо эллипсом, либо гиперболой, либо параболой (см. *Линия второго порядка*). Эти кривые неособенны и уникурсальны.

Первая классификация кривых 3-го порядка была предложена И. Ньютоном (I. Newton, 1704), к-рый положил тем самым начало систематич. исследованию П. д. а. к. В основе ее лежит подразделение кривых 3-го порядка на классы в зависимости от количества и характера бесконечных ветвей. Уравнение кривой надлежащим выбором координатной системы приводится к одной из четырех канонич. форм A, B, C, D, которые затем разделяются на классы, подклассы и типы (см. схему).

Классификация Ньютона кривых 3-го порядка



У каждой кривой 3-го порядка L есть либо (единственная) двойная точка, и тогда L уникурсальна, либо точка перегиба, быть может находящаяся на бесконечности; если есть три точки перегиба, то они лежат на одной прямой; более трех точек перегиба быть не может.

Пополнение аффинной плоскости несобственными элементами приводит к проективной плоскости, на к-рой П. д. а. к. определяется уравнением

$$F(x^1, x^2, x^3)=0,$$

где F — однородный многочлен степени n от проективных координат x^1, x^2, x^3. Проективная классификация кривых проще; напр., каждая кривая 3-го порядка может быть рассматриваема как сечение конуса, направляющей к-рого служит одна из пяти т. н. дивергентных парабол, т. е. имеется пять типов проективно неэквивалентных кубич. кривых (**теорема Ньютона**).

При исследовании П. д. а. к. полезным оказывается также и привлечение мнимых элементов, и, далее, переход в комплексную область. См. *Алгебраическая кривая*.

Лит.: [1] Уокер Р., Алгебраические кривые, пер. с англ., М., 1952; [2] Смогоржевский А. С., Столова Е. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961; [3] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

М. И. Войцеховский.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА теории упругости — название типа задач, в к-рых картина изучаемого явления в упругой среде одинакова во всех плоскостях, параллельных нек-рой плоскости (напр., плоскости Ox_1x_2 декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$). Математич. теорией П. з. часто описываются и задачи, к-рые по содержанию имеют пространственный характер (напр., изгиб тонких пластинок).

По П. з. теории упругости успехи достигнуты главным образом благодаря использованию формул, выражающих искомые решения через аналитич. функции одного комплексного аргумента; впервые эти формулы были выведены в 1909 Г. К. Колосовым (см. [1]), а начиная с 20-х гг. 20 в. в работах Н. И. Мусхелишвили они нашли полное обоснование, и на их базе развиты методы решения широкого круга граничных (краевых) и контактных П. з. теории упругости. Полученные по П. з. теоретич. результаты используются при решении практич. задач.

Комплексное представление полей смещений и напряжений. Говорят, что упругая среда находится в состоянии плоской деформации, если существует такая декартова система координат $Ox_1x_2x_3$, относительно к-рой компоненты вектора смещения имеют вид

$$u_\alpha = u_\alpha(x_1,\ x_2,\ t),\ \alpha=1,\ 2,\ u_3=0,$$

где t — время. Компоненты тензора напряжений таковы

$$X_{\alpha\beta}=\lambda\theta\delta_{\alpha\beta}+2\mu e_{\alpha\beta},\ X_{\alpha 3}=0,\ X_{33}=\lambda\theta,$$

где λ, μ — постоянные Ламе, $\delta_{\alpha\beta}$ — символы Кронекера, $e_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора деформации: $e_{\alpha\beta}=$ $=\partial_\alpha u_\beta+\partial_\beta u_\alpha$; $\theta=e_{\alpha\alpha}=\partial_\alpha u_\alpha$ — дилатация (α, $\beta=1$, 2; наличие в выражении двух одинаковых индексов означает суммирование).

Плоская деформация возможна в упругой среде, к-рая заполняет цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости Ox_1x_2, если при этом компоненты объемных сил имеют вид $X_\alpha=X_\alpha(x_1,\ x_2,\ t)$, $X_3=0$, а боковые усилия не зависят от координаты x_3 и расположены на плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра. Для реализации плоской деформации упругого цилиндра к его торцам необходимо приложить нормальные силы, равные $\pm\lambda\theta$.

При сделанных допущениях система уравнений динамики упругого тела относительно компонентов вектора смещений имеет вид

$$\mu\Delta u_\alpha+(\lambda+\mu)\,\partial_\alpha\theta+X_\alpha=\rho\ddot{u}_\alpha,\ \alpha=1,2,$$

где ρ — плотность распределения масс, $\rho\ddot{u}_\alpha$ — силы инерции, Δ — оператор Лапласа. Если воспользоваться операциями комплексного дифференцирования: $2\partial_{\bar z}=\partial_1+i\partial_2$, $2\partial_z=\partial_1-i\partial_2(\partial_\alpha=\partial/\partial x_\alpha)$, то при отсутствии сил инерции (статич. задача) эту систему можно записать в виде одного (комплексного) уравнения:

$$(\lambda+3\mu)\ \partial^2_{z\bar z}u+(\lambda+\mu)\ \partial^2_{\bar z\bar z}\bar u+X=0,$$

где $$u=u_1+iu_2,\ X=2^{-1}(X_1+iX_2).$$

Пусть область S, занятая упругой средой, представляет связную часть плоскости Ox_1x_2, ограниченную одним или несколькими контурами L_0, L_1, ..., L_m без общих точек, $L=L_0+L_1+\ldots+L_m$ — граница области S; точка $z=0$ принадлежит S.

Искомое решение уравнения равновесия выражается по формуле $u=u_0+TX$, где TX — нек-рое частное решение, к-рое можно выразить в виде

$$TX=-\varkappa\,(\mu\pi\,(1+\varkappa))^{-1}\int\int X\,(\zeta)\ln|\zeta-z|\,d\zeta_1 d\zeta_2+$$
$$+(2\mu\pi\,(1+x))^{-1}\int\int\bar X\,(\zeta-z)\,(\bar\zeta-\bar z)^{-1}\,d\zeta_1 d\zeta_2,$$

а u_0 — общее решение однородного уравнения ($X=0$), к-рое выражается по формуле

$$u_0=K(\varphi,\ \psi;\ \varkappa)=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)},$$

где φ и ψ — произвольные аналитич. функции от $z=x_1+ix_2$ в области S ($\varkappa=3-4\sigma$, где σ — постоянная Пуассона, $0<\sigma<0{,}5$). Если X — многочлен от x, y, то TX можно выразить в явной форме.

Оператор $K(\varphi,\ \psi;\ \varkappa)$ не изменится, если функции φ и ψ подчинить условию $\varphi(0)=0$ или $\psi(0)=0$. При выполнении одного из этих условий всякому полю смещений $u=u_1+iu_2$, заданному в области S, соответствует вполне определенная пара аналитич. функций φ, ψ.

Если в предыдущих формулах постоянную $\varkappa$ заменить через $\varkappa^*=(3-\sigma)/(1+\sigma)$, то получается формула для поля смещения обобщенного плосконапряженного состояния.

Комплексная запись

$$X_{\alpha\alpha}=2(\lambda+\mu)(\partial_z u+\partial_{\bar z}\bar u),\quad X_{11}-X_{22}+2iX_{12}=4\mu\partial_{\bar z}u$$

компонентов тензора напряжений, в силу равенства

$$u=K(\varphi,\ \psi;\ \varkappa)+Tx,$$

принимает вид

$$X_{\alpha\alpha}=4\operatorname{Re}\Phi(z)+T_0X,$$

$$X_{11}-X_{22}+2iX_{12}=2(\bar z\Phi'(z)+\Psi(z))+T_1X,$$

где

$$\Phi=2\mu\varphi',\quad \Psi=2\mu\Psi',$$

$$T_0=4(\lambda+\mu)\operatorname{Re}\partial_z TX,\quad T_1X=4\mu\partial_{\bar z}TX.$$

Пусть упругая среда подвергается непрерывной деформации. Тогда можно считать, что компоненты тензора напряжений и смещений — непрерывные однозначные функции в области S; Φ и Ψ голоморфны в S, причем Φ можно подчинить условию $\Phi'(0)=\overline{\Phi'(0)}$.

Если область S ограничена и односвязна, а деформация непрерывна, то функции φ и ψ голоморфны в S. В случае конечной многосвязной области φ и ψ будут, вообще говоря, многозначными функциями определенного вида.

Основными задачами плоской теории упругости являются следующие задачи.

1) Первая основная задача: определить упругое равновесие тела, когда на его границе заданы внешние силы.

Сила напряжения $(X_n,\ Y_n)$, действующая на элемент дуги ds контура L с нормалью n, может быть записана в комплексной форме:

$$(X_n+iY_n)\,ds=-2i\mu d\left(\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}\right),$$

и краевые условия первой задачи имеют вид

$$\varphi(t)+t\,\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+c(t),\quad t\in L, \tag{1}$$

где

$$f(t)=i(2\mu)^{-1}\int_L(X_n+iY_n)\,ds,$$

причем дуга s отсчитывается на каждом L_k от нек-рой фиксированной точки $z_k\in L_k$ в положительном направлении; $c(t)=c_k=\text{const}$ на L_k. Всегда можно считать $c_0=0$, остальные постоянные c_k определяются в ходе решения задачи. Если $m=0$, то искомые функции φ и ψ голоморфны в S. Тогда равенства $\varphi(0)=0$, $\operatorname{Im}\varphi'(0)=0$ обеспечивают единственность решения задачи (1), а необходимые и достаточные условия существования решения

$$\int_L(X_n+iY_n)\,ds=0,\ 2\mu\int_L(x_1Y_n-x_2X_n)\,ds=$$

$$=\operatorname{Re}\int_L f\,d\bar t=0$$

представляют собой условия статич. равновесия абсолютно жесткого тела.

При $m>0$, как уже было отмечено, φ и ψ — многозначные функции специального вида, причем они выражаются через новые искомые голоморфные в области S функции φ^* и ψ^*.

2) Вторая основная задача: определить упругое равновесие тела по заданным смещениям точек его границы.

Эта задача приводит к граничному условию вида

$$\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=f(t),\ \ t\in L,$$

где $f=u_1+iu_2$ — заданная на L функция.

3) Основная смешанная задача. Пусть S — конечная односвязная область, ограниченная замкнутым контуром L; $L=L'+L''$, где L' состоит из конечного числа дуг L', . . ., L'_m контура L, к-рые попарно не имеют общих точек; на L' заданы внешние напряжения, а на L'' — смещения. Соответствующие краевые условия можно записать в виде

$$\gamma(t)\,\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+c(t),\ \ t\in L,$$

где f — заданная функция точки $t\in L$; $\gamma(t)=1$, если $t\in L'$, и $\gamma(t)=-\varkappa$, если $t\in L''$; $c(t)=c_k=\mathrm{const}$, если $t\in L'$; $c(t)=0$, если $t\in L''$. Постоянные c_k (кроме одной, выбираемой как угодно) не задаются заранее и подлежат определению в ходе решения задачи.

4) Третья основная задача. На границе области задаются нормальная составляющая вектора смещения и касательная составляющая вектора внешнего напряжения.

Такая задача возникает, напр., в случае соприкасания упругого тела с жестким профилем заданной формы, когда контакт между упругим и жестким телами осуществляется по всей границе. Рассматриваются также другого рода контактные задачи. Все эти задачи также приводятся к граничным задачам для аналитич. функций.

5) Граничные задачи изгиба тонких пластинок. К аналогичным граничным условиям приводят задачи изгиба тонких пластинок. Прогиб w серединной поверхности тонкой однородной упругой пластинки, подверженной действию распределенной по ее поверхности нормальной нагрузки интенсивности q, удовлетворяет неоднородному бигармонич. уравнению

$$\Delta\Delta w=q/D,$$

где $D=Eh^3/12(1-\sigma^2)$ — цилиндрич. жесткость; h — толщина пластинки, E — модуль Юнга. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$w=w_0+\tilde{T}q,$$

где $\tilde{T}q$ — частное решение, к-рое выражается формулой

$$\tilde{T}q=(8\pi D)^{-1}\int\int q(\zeta)\,|\zeta-t|^2\ln|\zeta-z|\,d\zeta_1 d\zeta_2,$$

а w_0 — общее решение

$$w_0=\mathrm{Re}\,(\bar{z}\Phi(z)+\Psi(z))$$

однородного бигармонич. уравнения

$$\Delta\Delta w_0=0,$$

где Φ и Ψ — произвольные аналитич. функции в S.

Если q — многочлен от x_1 и x_2, то $\tilde{T}q$ выражается в явной форме. Если $\Phi(0)=0$, $\Psi(0)=0$, $\Phi'(0)=\overline{\Phi'(0)}$, то функции Φ и Ψ выражаются однозначно посредством заданной бигармонич. функции w_0.

Решение w уравнения $\Delta\Delta w=q/D$ следует подчинить граничным условиям, соответствующим тому или иному характеру закрепления границы пластинки. В случае заделанной по краям пластинки на границе L области S, занятой срединной поверхностью пластинки, должны выполняться условия $w=dw/dn=0$, где n — внешняя нормаль к контуру L. Эти два условия можно записать в виде одного комплексного равенства $\partial_z w=0$ (на L). Последнее приводится к виду (1).

Решение этой задачи всегда существует, единственно и выражается по формуле

$$w(x_1, x_2)=D^{-1}\iint\limits_S G(x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2)\, q(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1 d\zeta_2,$$

где G — функция Грина. Для круга $|z|<1$:

$$G(x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2)=2|\zeta-z|^2 \ln(|1-z\bar{\zeta}|\,|\zeta-z|^{-1})-$$
$$-(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2),$$
$$z=x_1+ix_2, \quad \zeta=\zeta_1+i\zeta_2.$$

В случае свободной пластинки граничные условия имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\sigma\Delta w+(1-\sigma)(w_{x_1x_2}\cos^2 v+w_{x_2x_2}\sin^2 v+\\ &\qquad +w_{x_1x_2}\sin 2v)=0,\\ &\frac{d\Delta w}{dn}+(1-\sigma)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}(w_{x_1x_2}-w_{x_1x_1})\sin 2v+\right.\\ &\qquad \left. +w_{x_1x_2}\cos 2v\right)=0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где v — угол, составляемый внешней нормалью n с осью Ox_1. Левые части равенств (2) представляют собой соответственно изгибающий момент и обобщенную перерезывающую силу, отнесенные к единице длины и действующие на боковой элемент пластинки с нормалью n. Граничные условия (2) можно записать в виде

$$d\left((3+\sigma)/(1-\sigma)\,\Phi-z\overline{\Phi}'-\overline{\Psi}'\right)=g,$$

где g — заданная функция на L.

6) Плоские стационарные упругие колебания. Когда решения системы уравнений динамики упругой среды ищутся в виде

$$u=v(x_1, x_2)\,e^{i\nu t}, \quad u_3=0,$$

где ν — частота колебания, для v получается формула

$$v=\partial_{\bar{z}}(w_1+iw_2)$$

(предполагается, что внешние силы равны нулю, $X_\alpha=0$), где w_1 и w_2 — произвольные решения уравнений:

$$\Delta w_1+a^2\nu^2 w_1=0, \quad \Delta w_2+b^2\nu^2 w_2=0,$$
$$a^2=\rho(\lambda+2\mu)^{-1}, \quad b^2=\rho\mu^{-1}.$$

Поле напряжений выражается по формулам

$$X_{11}+X_{22}=-(\lambda+\mu)\,\alpha^2\nu^2 w_1,$$
$$X_{11}-X_{22}+2iX_{22}=4\mu\partial_{\bar{z}}^2(w_1-iw_2),$$
$$X_{33}=-2^{-1}a^2\nu^2 w_1.$$

Общее решение уравнения

$$\Delta w+k^2 w=0, \quad k^2=\text{const},$$

выражается в виде

$$w=A_0 J_0(k|z|)+\int_0^1 \operatorname{Re}[z\Phi(zt)]\, J_0(k|z|\sqrt{1-t})\,dt, \quad (3)$$

где A_0 — произвольная действительная постоянная, Φ — произвольная аналитич. функция, J_0 — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка. При помощи формулы (3) выводятся комплексные представления для полей смещений и напряжений при плоском стационарном колебании упругой среды; они могут быть использованы для исследования граничных задач, а также для построения различных полных систем частных решений, к-рые позволяют аппроксимировать любые поля смещений и напряжений. В частности, эти полные системы можно использовать для построения приближенных решений краевых задач.

7) Задача определения концентраций напряжений около отверстий в анизотропных и изотропных пластинах. Основу приближенных методов решения таких задач также составляют введение функций комплексного переменного специальной структуры в виде степенных рядов и различных модификаций теории возмущений, а также использование теорем сложения цилиндрич. и сферич. функций с последующим сведением граничных задач к бесконечным системам алгебраич. уравнений.

Методы решения граничных задач. Формулы представления полей смещений и напряжений через аналитич. функции используются для доказательства существования и единственности решения общих граничных задач, а также для построения в явной форме решений нек-рых классов задач частного вида.

Метод степенных рядов с применением конформного отображения позволяет решать основные плоские задачи для областей, конформно отображающихся на круг посредством рациональных функций. Задача редуцируется к линейной алгебраич. системе уравнений и квадратурам. Этим методом практически решаются основные граничные задачи для любой односвязной области с использованием приближенного конформного отображения области на круг с помощью рациональных функций. При использовании ЭВМ этот прием является эффективным для построения решений основных граничных П. з. теории упругости и изгиба пластинок.

На основе теории интеграла типа Коши исследование П. з. редуцируется к хорошо изученным интегральным уравнениям.

Полезными являются также методы, сочетающие конформное отображение с применением аппарата интегралов типа Коши.

Существуют и другие способы приведения граничных П. з. теории упругости к интегральным уравнениям, к-рые дают возможность изучить вопросы существования и единственности решения.

Для редукции граничных П. з. теории упругости к интегральным уравнениям используется также метод потенциалов, не вводящий в рассмотрение комплексные аналитич. функции (φ и ψ).

Лит.: [1] Колосов Г. В., Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости, Юрьев, 1909; [2] его же, Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости, Л.— М., 1935; [3] Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966; [4] его же, Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [5] Векуа И. Н., Мусхелишвили Н. И., Методы теории аналитических функций в теории упругости, в кн.: Тр. Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (1960), М.— Л., 1962; [6] Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М.— Л., 1948; [7] Савин Г. Н., Концентрация напряжений около отверстий, М.— Л., 1951; [8] Галин Л. А., Контактные задачи теории упругости, М., 1953; [9] Штаерман И. Я., Контактная задача теории упругости, М.— Л., 1949; [10] Каландия А. И., Математические методы двумерной упругости, М., 1973; [11] Sokolnikoff I. S., Mathematical theory of elasticity, N. Y.— L., 1946; [12] Трехмерные задачи математической теории упругости, Тб., 1968.

И. Н. Векуа, Р. А. Кордзадзе.

ПЛОСКИЙ МОДУЛЬ — левый (или правый) модуль P над ассоциативным кольцом R такой, что функтор тензорного произведения $-\otimes_R P$ (соответственно $P\otimes_R -$) точен. Приведенное определение эквивалентно любому из следующих: 1) функтор $\mathrm{Tor}_1^R(-, P)=0$ (соответственно $\mathrm{Tor}_1^R(P, -)=0$); 2) модуль P представим в виде прямого (инъективного) предела спектра свободных модулей; 3) модуль характеров $P^* = \mathrm{Hom}_Z(P, Q/Z)$ инъективен, где Q — группа рациональных чисел, а Z — группа целых чисел; 4) для любого правого (соответственно левого) идеала J кольца R канонич. гомоморфизм

$$J \otimes_R P \longrightarrow JP \quad (P \otimes_R J \longrightarrow PJ)$$

является изоморфизмом.

Проективные модули и *свободные модули* являются примерами П. м. Класс П. м. над кольцом целых чисел совпадает с классом абелевых групп без кручения. Все модули над кольцом R являются П. м. тогда и только тогда, когда R регулярно в смысле Неймана (см. *Абсолютно плоское кольцо*). Когерентное кольцо может быть определено как кольцо, над к-рым прямое произведение ΠR_α любого числа экземпляров кольца R является П. м. Операции локализации и пополнения по степеням идеала кольца R приводят к П. м. над этим кольцом (см. *Адическая топология*). Классич. кольцо частных кольца R является П. м. над R.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971. *В. Е. Говоров.*

ПЛОСКИЙ МОРФИЗМ — морфизм схем $f: X \to Y$ такой, что для любой точки $x \in X$ локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ является плоским над $\mathcal{O}_{Y, f(x)}$ (см. *Плоский модуль*). Вообще, пусть $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей, он наз. плоским над Y в точке $x \in X$, если $\mathcal{F}_x$ — плоский модуль над кольцом $\mathcal{O}_{Y, f(x)}$. При нек-рых (довольно слабых) условиях конечности множество точек, в к-рых когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{F}$ является плоским, открыто в X. Если при этом схема Y целостна, то существует открытое непустое подмножество $U \subset Y$ такое, что $\mathcal{F}$ — П. м. над Y во всех точках, лежащих над U.

П. м. конечного типа соответствуют интуитивному понятию непрерывного семейства многообразий. П. м. открыт и равноразмерен (т. е. размерность слоев $f^{-1}(y)$ локально постоянна по $y \in Y$). Для многих геометрич. свойств множество точек $x \in X$, в к-рых слой $f^{-1}(f(x))$ плоского морфизма $f: X \to Y$ обладает этим свойством, открыто в X. Если П. м. f собственный, то открытым является и множество точек $y \in Y$, слои над к-рыми обладают этим свойством (см. [1]).

П. м. применяются также в теории спуска. Морфизм схем наз. строго плоским, если он плоский и сюръективный. Тогда, как правило, для проверки какого-либо свойства нек-рого объекта над Y достаточно проверить это свойство для объекта, полученного после строго плоской замены базы $f: X \to Y$ (см. [1]). В связи с этим представляют интерес критерии плоскостности морфизма $f: X \to Y$ (или $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathcal{F}$); при этом Y можно считать локальной схемой. Простейший критерий относится к случаю, когда база Y одномерна и регулярна: когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{F}$ будет плоским тогда и только тогда, когда униформизирующая на Y имеет тривиальный аннулятор в $\mathcal{F}$. Общий случай в нек-ром смысле сводится к одномерному. Пусть Y — приведенная нётерова схема и для любого морфизма $Z \to Y$, где Z — одномерная регулярная схема, замена базы $f_Z: X_Y \times Z \to Z$ является П. м.; тогда f есть П. м. Другой критерий плоскостности требует, чтобы $f: X \to Y$ был универсально открыт, а Y и геометрич. слои $f^{-1}(\bar{y})$ — приведены.

Лит.: [1] Grothendieck A., Dieudonné J., Eléments de géométrie algébrique, 4, «Publ. math. IHES», 1964, № 24; 1966, № 28; [2] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [3] Raynaud M., Gruson L., «Invent. math.», 1971, v. 13, p. 1—89. *В. И. Данилов.*

ПЛОСКОСТЬ — одно из основных понятий геометрии; обычно косвенным образом определяется аксиомами геометрии. П. может рассматриваться как совокупность двух непересекающихся множеств — множества точек и множества прямых с симметричным отношением инцидентности, связывающим точку и прямую. В зависимости от требований, к-рым удовлетворяет отношение инцидентности, описываемое определенными аксиомами, различают проективные, аффинные, гиперболические, эллиптические П. и др.

П. можно классифицировать по группам коллинеаций (см., напр., [7] гл. 3, где дана классификация Ленца — Бартолоцци проективных и аффинных П.) или по реализации в плоскости тех или иных конфигураций (см., напр., *Дезаргова геометрия*, *Паскалева геометрия*).

П. наз. метрической, если кроме отношения инцидентности определено расстояние между любой парой точек. Так, в *Гильберта системе аксиом* евклидовой геометрии расстояние вводится на базе аксиом конгруэнтности и непрерывности, и П. в этом случае наз. непрерывной (см. [1]). В случае невыполнения для **П.** аксиом непрерывности П. наз. дискретной (см., напр., *Неархимедова геометрия*), а П., состоящая из конечного числа точек, а следовательно, и прямых, наз. конечной (см. [7]).

Одним из путей изучения П. является введение в ней координат и тернарной операции с последующим ее изучением (см., напр., [7]), [8]).

В системе аксиом Вейля пространства E^3 П. является производным понятием от понятий «вектор» и «точка». Под П., проходящей через точку $A \in E^3$ и векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, понимается множество точек таких, что

$$\overline{AM} = t\mathbf{m} + \tau\mathbf{n}, \text{ где } t, \tau \in \mathbb{R}.$$

В прямоугольной системе координат (x, y, z) пространства E^3 П. задается линейным уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

коэффициенты A, B, C определяют координаты нормального вектора этой П. В m-мерном пространстве n-мерные П. описываются системами линейных уравнений (см. [5]).

Взаимное расположение П. в различных m-мерных пространствах определяется соответствующими аксиомами инцидентности так же, как и свойства инцидентности плоскостей и прямых.

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [3] Об основаниях геометрии, М., 1956; [4] Бахман Ф., Построение геометрии на основе понятия симметрии, пер. с нем., М., 1969; [5] Донеддю А., Евклидова планиметрия, пер. с франц., М., 1978; [6] Розенфельд Б. А., Многомерные пространства, М., 1966; [7] Dembowski P., Finite geometries, B., 1968; [8] Pikert G., Projektive Ebenen, B., 1955. *В. В. Афанасьев, Л. А. Сидоров.*

ПЛОТНОЕ МНОЖЕСТВО — то же, что *всюду плотное множество*. Более общо, множество A наз. плотным в открытом множестве G пространства X, если G содержится в замыкании A или, что то же самое, если $A \cap G$ всюду плотно в подпространстве $G \subset X$. Если A не плотно ни в каком непустом открытом множестве G, то оно является *нигде не плотным множеством* в X. *М. И. Войцеховский.*

ПЛОТНОСТИ МАТРИЦА состояния ρ, определенного на алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$,— положительный *ядерный оператор* $\tilde{\rho} \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$ такой, что

$$\rho(A) = \operatorname{Sp} A\tilde{\rho}, \quad A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}), \tag{1}$$

причем $\operatorname{Sp}\tilde{\rho} = 1$. Обратно, всякое состояние ρ, т. е. линейный положительный $(\rho(A^*A) \geqslant 0)$ нормированный $(\rho(E) = 1)$ функционал на $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, представимо в виде (1), т. е. имеет П. м. $\tilde{\rho}$ и притом единственную.

Впервые понятие П. м. появилось в статистич. физике при определении квантового состояния Гиббса. Пусть квантовая система, занимающая конечную область V пространства $\mathbb{R}^3$, описывается векторами нек-рого гильбертова пространства $\mathscr{H}_V$ и гамильтонианом H_V^0 и обладает, быть может, нек-рым набором коммутирующих друг с другом «первых интегралов» H_V^1, $\ldots$, H_V^k, $k=1, 2, \ldots$. Состоянием Гиббса такой системы наз. состояние на $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$, задаваемое П. м.:

$$\tilde{\rho}=Z^{-1}\exp\left\{-\beta\left(H_V^0+\mu_1 H_V^1+\ldots+\mu_k H_V^k\right)\right\}, \qquad (2)$$

где Z — нормирующий множитель, а $\beta>0$, μ_1, $\ldots$, μ_k — действительные параметры.

Наряду с П. м. (2) состояние системы в квантовой статистич. физике можно задавать с помощью т. н. **приведенной матрицы плотности.** В наиболее простом случае системы одинаковых частиц (бозонов или фермионов), описываемых векторами Фока пространства $\mathscr{H}_V$, приведенная П. м. $\hat{\rho}$ состояния ρ представляет собой набор функций (вообще говоря, обобщенных)

$$\hat{\rho}=\{\hat{\rho}_{m,n}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n),\ x_i\in V,\ y_j\in V,\ i=1, \ldots, m,\ j=1, \ldots, n;\ m=0, 1, \ldots\}, \qquad (3)$$

где

$$\hat{\rho}_{m,n}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)=\rho\left(\prod_{i=1}^{m} a(x_i)\times\times\prod_{j=1}^{n} a^*(y_j)\right),$$

а $a(x)$, $a^*(y)$, x, $y\in\mathbb{R}^3$,— *рождения операторы* и *уничтожения операторы* соответственно, действующие в $\mathscr{H}_V$. В случаях, когда в алгебре $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$ вместо операторов рождения и уничтожения выбрана какая-нибудь другая система образующих $\{a_\lambda, \lambda\in\mathscr{L}\}$ ($\mathscr{L}$ — нек-рое множество индексов), приведенная П. м. состояния $\hat{\rho}$ определяется аналогично (3) как совокупность значений состояния ρ на всевозможных мономах вида

$$a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_n}, \lambda_i\in\mathscr{L},\ i=1, \ldots, n,\ n=1, 2, \ldots .$$

Приведенная П. м. оказывается особенно удобной при определении предельного гиббсовского состояния на C^*-алгебре $\mathfrak{A}_\infty$ так наз. квазилокальных наблюдаемых: $\mathfrak{A}_\infty=\overline{\bigcup_{V\in\mathbb{R}^3}\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)}$ (черта означает замыкание в равномерной топологии).

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, 3 изд., М., 1976 (Теоретическая физика, т. 5); [2] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971. *Р. А. Минлос.*

ПЛОТНОСТИ ТОЧКА множества E в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ — точка x, в к-рой *плотность множества* E равна единице. Если единице равна внешняя плотность, то точка x наз. **точкой внешней плотности.** П. т. множества является одновременно точкой разрежения для дополнения этого множества. Почти все точки измеримого множества суть его П. т. С помощью понятия П. т. вводится понятие аппроксимативно непрерывной функции и *аппроксимативной производной.* *В. А. Скворцов.*

ПЛОТНОСТНАЯ ГИПОТЕЗА — предполагаемое неравенство, доставляющее оценку для числа $N(\sigma, T)$ нулей $\rho=\beta+i\gamma$ дзета-функции Римана

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

где $s=\sigma+it$, в прямоугольнике $1/2<\sigma\leqslant\beta\leqslant 1$, $|\gamma|\leqslant T$.

Наиболее точная формулировка П. г.:

$$N(\sigma, T)\leqslant cT^{2(1-\sigma)}\ln^A T.$$

Более простой, но менее точный вид П. г.:

$$N(\sigma, T) \leqslant cT^{2(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

П. г. позволяет получать в теории простых чисел результаты, сравнимые с теми, к-рые вытекают из гипотезы Римана. Напр., из П. г. следует, что при достаточно больших x в каждом сегменте $[x, x+x^{1/2+\varepsilon}]$ содержится хотя бы одно простое число.

П. г. является следствием более сильной *Линделёфа гипотезы*. В отличие от последней П. г. частично доказана, т. к. содержится в *плотностных теоремах*, начиная с нек-рых значений $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1/2$.

Для числа $N(\sigma, T, \chi)$ нулей L-функций Дирихле

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n, k)\, n^{-s},$$

где $\chi(n, k)$ — характер по модулю k, имеет место аналогичная П. г. В усредненной форме она имеет вид

$$\sum_{\chi \bmod k} N(\sigma, T, \chi) \leqslant c(k, T)^{2(1-\sigma)+\varepsilon},$$

$$\sum_{k \leqslant Q} \sum_{\chi^* \bmod k} N(\sigma, T, \chi) \leqslant c(k^2T)^{2(1-\sigma)+\varepsilon},$$

где χ^* — примитивный характер по модулю k.

П. г. для L-функций Дирихле применяется в теории распределения простых чисел, принадлежащих арифметич. прогрессиям.

Лит.: [1] Монтгомери Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1974; [2] Лаврик А. Ф., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, в. 2, с. 55—65. *Б. М. Бредихин.*

ПЛОТНОСТНЫЕ ТЕОРЕМЫ — общее название теорем, к-рые дают оценку сверху для числа $N(\sigma, T, \chi)$ нулей $\rho = \beta + i\gamma$ L-функций Дирихле

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n, k)\, n^{-s},$$

где $s = \sigma + it$, $\chi(n, k)$ — характер по модулю k в прямоугольнике $1/2 < \sigma \leqslant \beta < 1$, $|\gamma| \leqslant T$. В случае $k=1$ получают П. т. для числа нулей дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

П. т. для L-функций при $k \neq 1$ сложнее, чем соответствующие теоремы для дзета-функции Римана. При растущих параметрах T и k получаются оценки, зависящие от этих параметров. В приложениях решающую роль играет параметр k.

Значение П. т. выясняется из соотношений, позволяющих оценивать остаточный член в формуле для количества простых чисел p, принадлежащих арифметич. прогрессии $km+l$, $1 \leqslant l \leqslant k$, $(l, k)=1$, $m=0, 1, 2, \ldots$, и не превосходящих x, в зависимости от $N(\sigma, T, \chi)$.

Поскольку функция $N(\sigma, T, \chi)$ не возрастает при возрастании σ и $N(1, T, \chi)=0$, целью П. т. является получение оценок, наиболее быстро стремящихся к нулю при $\sigma \to 1$. В свою очередь эти оценки существенно дополняются результатами об отсутствии нулей у L-функций Дирихле в окрестности прямой $\sigma=1$, к-рые получаются с помощью кругового метода Харди — Литлвуда — Виноградова. На этом пути удалось получить сильные оценки для количества четных чисел $n \leqslant x$, возможно непредставимых в виде суммы двух простых чисел.

Первые П. т., доставлявшие оценки $N(\sigma, T, \chi)$ для индивидуального характера χ и усредненные оценки по всем характерам данного модуля k, были получены Ю. В. Линником. Дальнейшее значительное улучшение П. т. принадлежит А. И. Виноградову и Э. Бомбьери (E. Bombieri), к-рые использовали оценки $N(\sigma, T, \chi)$, усредненные по всем модулям $k \leqslant Q$ и по всем примитивным характерам данного модуля k, для доказательства теоремы о распределении простых чисел в арифметич. прогрессиях в среднем (при $Q = \sqrt{x}/(\ln x)^c$).

Теорема Виноградова — Бомбьери позволяет в ряде классич. задач аддитивной теории чисел заменять расширенную гипотезу Римана. Имеется ряд других улучшений П. т.

Лит.: [1] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [2] Монтгомери Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1974; [3] Лаврик А. Ф., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, в. 2, с. 55—65.

Б. М. Бредихин.

ПЛОТНОСТНЫЙ МЕТОД — один из методов аналитич. теории чисел, основанный на изучении статистики распределения нулей дзета-функции Римана

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$$

и L-функции Дирихле

$$L(s, \chi)=\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n, k)/n^s,$$

$s=\sigma+it$ — характер по модулю k. Многие теоретико-числовые проблемы получают наиболее законченное решение в предположении, что все нули $\rho=\beta+i\gamma$ функций $\zeta(s)$ и $L(s, \chi)$, находящиеся в полосе $0\leqslant\sigma\leqslant1$, $-\infty<t<+\infty$, лежат на прямой $\sigma=1/2$. Однако в ряде случаев достаточно сильные результаты получаются, если удается показать, что нули указанных функций с абсциссой $\beta\geqslant\sigma>1/2$ если и существуют, то все же составляют множество, к-рое становится все более редким при $\sigma\to1$. Существует большое количество теорем, к-рые дают оценки сверху для числа $N(\sigma, T)$ нулей $\zeta(s)$ и для числа $N(\sigma, T, \chi)$ нулей $L(s, \chi)$ в прямоугольнике $1/2<\sigma\leqslant\beta\leqslant1$, $|\gamma|\leqslant T$. П. м. существенно опирается на эти теоремы, получившие название *плотностных теорем.*

Впервые П. м. с использованием плотностной теоремы для $\zeta(s)$ применил Г. Хоайзель (G. Hoheisel, 1930) для оценки разности двух соседних простых чисел. Ему удалось доказать существование положительной константы $\alpha<1$ такой, что при $x>x_0=x_0(\alpha)$ между x и $x+x^{\alpha}$ всегда находится простое число. В дальнейшем всякое улучшение оценки для $N(\sigma, T)$ приводило к уточнению константы α. Для L-функции Дирихле П. м. был разработан Ю. В. Линником (1944 и последующие годы). Ю. В. Линник впервые исследовал распределение нулей L-функций при переменном k, в частности получил результаты о «частоте» нулей $L(s, \chi)$ вблизи точки $s=1$, что позволило найти оценку для наименьшего простого числа $p_0=p_0(k, l)$, лежащего в арифметич. прогрессии $kx+l$, $(l, k)=1$, $1\leqslant l\leqslant k$, $x=0, 1, 2, \ldots$; $p_0<k^c$, где c — нек-рая абсолютная константа. Улучшение оценок для $N(\sigma, T, \chi)$ приводит к уточнению константы c. Применяя плотностные теоремы для L-функций, Ю. В. Линник нашел новое доказательство теоремы Виноградова о представлении всякого достаточно большого нечетного числа суммой трех простых чисел (см. *Гольдбаха проблема*).

П. м. в теории L-функций позволил получить сильный результат в направлении бинарной проблемы Гольдбаха: всякое достаточно большое натуральное число можно представить в виде суммы двух простых чисел и ограниченного абсолютной константой нек-рого числа степеней двоек.

Наиболее сильные результаты П. м. дает в сочетании с др. методами, в частности с методом *большого решета.* На этом пути была доказана теорема Виноградова — Бомбьери (1965), к-рая заменяет во многих случаях *Римана обобщенную гипотезу.* Идеи и результаты П. м. переносятся с поля рациональных чисел на поля алгебраич. чисел.

Лит.: [1] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [2] Монтгомери Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1974; [3] Halberstam H., Richert H.-E., Sieve methods, L.—[a. o.], 1974.

Б. М. Бредихин.

ПЛОТНОСТЬ топологического пространства — одна из его *мощностных характеристик.*

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ, плотность распределения вероятностей,— производная функции распределения, отвечающей абсолютно непрерывной вероятностной мере.

Пусть X — случайный вектор, принимающий значения в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, $F(x_1, \ldots, x_n)$ — его функция распределения и пусть существует неотрицательная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n$$

для любых действительных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда $f(x_1, \ldots, x_n)$ наз. плотностью вероятности случайного вектора X и для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathsf{P}\{X \in A\} = \int \ldots \int_A f(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n.$$

Любая неотрицательная интегрируемая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1,$$

является П. в. нек-рого случайного вектора.

Если случайные векторы X и Y, принимающие значения в $\mathbb{R}^n$, независимы и имеют П. в. $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ соответственно, то случайный вектор $X+Y$ имеет П. в. $h(x_1, \ldots, x_n)$, к-рая является сверткой функций f и g:

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 - u_1, \ldots, x_n - u_n) \times \\ \times g(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, \ldots, u_n)\, g(x_1 - u_1, \ldots, x_n - u_n) \times \\ \times du_1 \ldots du_n.$$

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ — случайные векторы, принимающие значения в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ $(n, m \geqslant 1)$ и имеющие П. в. $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(y_1, \ldots, y_m)$ соответственно, и пусть $Z = (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$ — случайный вектор в $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогда если X и Y независимы, то Z имеет П. в. $h(t_1, \ldots, t_{n+m})$, наз. совместной плотностью распределения вероятностей случайных векторов X и Y, причем

$$h(t_1, \ldots, t_{n+m}) = f(t_1, \ldots, t_n)\, g(t_{n+1}, \ldots, t_{n+m}). \quad (1)$$

И обратно, если Z имеет П. в., удовлетворяющую соотношению (1), то X и Y независимы.

Характеристич. функция $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ случайного вектора X, имеющего П. в. $f(x_1, \ldots, x_m)$, выражается формулой

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n)} \times \\ \times f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

причем если $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ абсолютно интегрируема, то $f(x_1, \ldots, x_n)$ является ограниченной непрерывной функцией и

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n)} \times \\ \times \varphi(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

П. в. $f(x_1, \ldots, x_n)$ и соответствующая характеристич. функция $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ связаны также следующим соотношением (тождество Планшереля): функция $f^2(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема функция $|\varphi(t_1, \ldots, t_n)|^2$, и в этом случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t_1, \ldots, t_n)|^2\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, ν и μ суть σ-конечные меры на $(\Omega, \mathcal{A})$, причем ν абсолютно непрерывна относительно μ, т. е. из равенства $\mu(A)=0$ следует равенство $\nu(A)=0$, $A \in \mathcal{A}$. В этом случае на $(\Omega, \mathcal{A})$ существует неотрицательная измеримая функция f такая, что

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu$$

для любого $A \in \mathcal{A}$. Функция f наз. производной Радона — Никодима меры ν по мере μ, а в случае, когда ν — вероятностная мера, также П. в. ν по отношению к μ.

С понятием П. в. тесно связано понятие доминированного семейства распределений. Семейство вероятностных распределений $\mathcal{P}$ на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$ наз. доминированным, если на $(\Omega, \mathcal{A})$ существует σ-конечная мера μ такая, что каждая вероятностная мера из $\mathcal{P}$ имеет П. в. по отношению к μ (или, что то же самое, каждая мера из $\mathcal{P}$ абсолютно непрерывна относительно μ). Предположение о доминированности является существенным в нек-рых теоремах математич. статистики.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967; [3] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *Н. Г. Ушаков.*

ПЛОТНОСТЬ МНОЖЕСТВА E, измеримого на действительной прямой $\mathbb{R}$, в точке x — предел (если он существует) отношения

$$\frac{\operatorname{mes}(E \cap \Delta)}{|\Delta|} \text{ при } |\Delta| \to 0, \tag{1}$$

где Δ — произвольный отрезок, содержащий x, а $|\Delta|$ — его длина. Если вместо меры рассматривать внешнюю меру, то получится определение внешней П. м. E в точке x. Аналогично вводится П. м. в n-мерном пространстве. При этом длины отрезков в $\mathbb{R}$ заменяются объемами соответствующих n-мерных параллелепипедов с гранями, параллельными координатным плоскостям, а предел рассматривается при стремлении к нулю диаметра параллелепипеда. Для множеств из $\mathbb{R}$ оказывается полезным понятие правой (левой) П. м. E в точке x, к-рое получается из общего определения, если в нем рассматривать лишь отрезки Δ, имеющие левым (правым) концом точку x. Чаще всего понятие П. м. применяется в случае, когда П. м. равна единице (см. *Плотности точка*) или нулю (см. *Разреженность множества*).

Лит.: [1] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949. *В. А. Скворцов.*

ПЛОТНОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ — понятие общей аддитивной теории чисел, изучающей законы сложения последовательностей общего вида. П. п. является мерой того, какая часть из последовательности всех натуральных чисел принадлежит данной последовательности $A=\{a_k\}$ целых чисел $a_0=0<1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Под понятием П. п. имеется в виду плотность $d(A)$ (введенная в 1930 Л. Г. Шнирельманом) последовательности A, а именно:

$$d(A) = \inf_n \frac{A(n)}{n},$$

где
$$A(n) = \sum\nolimits_{1 \leqslant a_k \leqslant n} 1.$$

Плотность $d(A)=1$ тогда и только тогда, когда A совпадает с множеством N_0 всех целых неотрицательных чисел. Пусть $A+B$ — арифметич. сумма последовательностей $A=\{a_k\}$ и $B=\{b_l\}$, т. е. множество $A+B=\{a_k+b_l\}$, где числа a_k+b_l берутся без повторений. При $A=B$ полагают $2A=A+A$, аналогично $3A=A+A+A$ и т. д. Если $hA=N_0$, то A наз. базисом h-го порядка. При исследовании структуры множеств, получающихся в результате суммирования последовательностей, заданных лишь их плотностями. используются теоремы о плотности суммы двух последовательностей:

$$d(A+B) \geqslant d(A)+d(B)-d(A)\,d(B)$$

— неравенство Шнирельмана,

$$d(A+B) \geqslant \min(d(A)+d(B), 1)$$

— неравенство Манна — Дайсона.

Из неравенства Шнирельмана следует, что всякая последовательность положительной плотности есть базис конечного порядка. Применение этого факта к аддитивным задачам, в к-рых часто суммируются последовательности нулевой плотности, осуществляется посредством предварительного конструирования из заданных последовательностей новых с положительной плотностью. Напр., с помощью методов решета доказывается, что последовательность $\{p\}+\{p\}$, где p пробегает простые числа, обладает положительной плотностью. Отсюда следует теорема Шнирельмана: существует такое целое число $c_0>0$, что любое натуральное число есть сумма не более c_0 простых чисел. Эта теорема дает решение т. н. ослабленной проблемы Гольдбаха (см. также *Аддитивная теория чисел*).

Разновидностью понятия П. п. является понятие *асимптотической плотности*, частным случаем к-рой будет натуральная плотность. Понятие П. п. обобщается на числовые последовательности, отличные от натурального ряда, напр. на последовательности целых чисел в полях алгебраич. чисел. В результате удается изучать базисы в алгебраич. полях.

Лит.: [1] Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962; [2] Ostmann H.-H., Additive Zahlentheorie, Bd 1—2, B., 1956.

Б. М. Бредихин.

ПЛОЩАДЕЙ МЕТОД — способ решения различных задач теории однолистных функций, использующий теоремы площадей (см. *Площадей принцип*).

ПЛОЩАДЕЙ ПРИНЦИП: площадь дополнения к образу области при ее отображении регулярной в ней функцией неотрицательна. Впервые П. п. использовал в 1914 Т. Гронуолл [1], к-рый доказал этим путем т. н. внешнюю теорему площадей для функций класса Σ — функций

$$F(z)=z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\ldots,$$

регулярных и однолистных в области $\Delta'=\{z:1<|z|<\infty\}$ (см. *Однолистная функция*). Площадь $\sigma(CF(\Delta'))$ дополнения для образа $F(\Delta')$ области Δ' при отображении $w=F(z)\in\Sigma$ определяется формулой

$$\sigma(CF(\Delta'))=\pi\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}k\,|\alpha_k|^2\right)\geqslant 0$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\,|\alpha_k|^2\leqslant 1. \tag{1}$$

С помощью неравенства (1) получены первые результаты для функций классов Σ и S, где S — класс функций $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$, регулярных и однолистных в круге $\Delta=\{z:|z|<1\}$ (см. *Бибербаха гипотеза*, *Искажения теоремы*). Доказана [2] более общая теорема площадей. Г. М. Голузин [3] распространил теорему площадей на p-листные функции в круге (см. *Многолистная функция*).

Доказана следующая теорема площадей [4]: пусть $F \in \Sigma$, $\overline{B} = CF(\Delta')$, $Q(w)$ — регулярная на $\overline{B}$ функция,

$$Q(F(z)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k z^{-k} \not\equiv \text{const};$$

тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k \, |\alpha_k|^2 \leqslant 0 \qquad (2)$$

и знак равенства имеет место только в том случае, если площадь $\sigma(\overline{B})$ множества $\overline{B}$ равна нулю.

Под теоремой площадей в нек-ром классе однолистных функций $f(z)$, $z \in B$, B — область (или в классе систем однолистных функций $\{f_k(z),\ z \in B_k\}_{k=0}^{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, B_k — области), понимают обычно всякое неравенство, обладающее тем свойством, что знак равенства в нем имеет место в том и только в том случае, если площадь дополнения $\overline{G}$ для $f(B)$ (соответственно дополнения $\overline{G}$ для $\bigcup_{k=0}^{n} f_k(B_k)$) равна нулю. Обычно такая теорема доказывается с помощью П. п. Именно, рассматривается произвольная регулярная функция $Q(w)$ (или, более общо, имеющая регулярную производную) на $\overline{G}$ и вычисляется площадь $\sigma(Q(\overline{G}))$ образа $\overline{G}$ при отображении функцией Q. Таким образом, неравенство (2) есть нек-рая весьма общая теорема площадей в классе Σ.

Пусть $F \in \Sigma$ и

$$\ln \frac{F(t) - F(z)}{t - z} = \sum_{p,\, q=1}^{\infty} \omega_{p,\, q} t^{-p} z^{-q}, \; t, z \in \Delta'.$$

Выбирая надлежащим образом функцию Q, регулярную на $CF(\Delta')$, неравенство (2) можно записать в виде

$$\sum_{q=1}^{\infty} q \left| \sum_{p=1}^{\infty} \omega_{p,\, q} x_p \right|^2 \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} |x_p|^2, \qquad (3)$$

где x_p — произвольные числа, не равные одновременно нулю и такие, что

$$\varlimsup_{p \to \infty} \sqrt[p]{|x_p|} < 1.$$

Получены и более общие теоремы площадей в классе Σ (см. [5]).

Теоремы площадей доказаны: для класса $\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n)$ систем $\{f_k(z),\ f_k(0) = a_k,\ z \in \Delta\}_{k=1}^{n}$ функций f_k, конформно и однолистно отображающих круг Δ на области, попарно не имеющие общих точек,— неналегающие области (см. [6]); в классе $\Sigma(B)$ ($\Sigma(B)$, $B \ni \infty$,— класс функций F, регулярных и однолистных в $B \setminus \{\infty\}$ и таких, что $F(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{F(z)}{z} = 1$, см. [7]); для неналегающих многосвязных областей (см. [6], а также [8], [9]). Все теоремы площадей для многосвязных областей доказываются *контурного интегрирования методом.*

Под методом площадей понимают способы решения различных задач теории однолистных функций, использующие теоремы площадей.

Напр., из (3) с помощью неравенства Коши можно получить:

$$\left| \sum_{p,\, q=1}^{\infty} \omega_{p,\, q} x_p x'_q \right|^2 \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} |x_p|^2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} |x'_q|^2, \; (4)$$

где x_p и x'_q такие, что ряды, стоящие в правой части, сходятся. Если в неравенстве (4), напр., $x_p = t^{-p}$,

$x'_q = z^{-q}$, $|t|>1$, $|z|>1$, то получают теорему искажения хорд:

$$\left|\ln\frac{F(t)-F(z)}{t-z}\right|^2 \leqslant \ln\frac{|t|^2}{|t|^2-1}\ln\frac{|z|^2}{|z|^2-1}.$$

Теоремы площадей, напр. в классе $\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n)$, дают необходимые и достаточные условия принадлежности системы $\{f_k(z), f_k(0)=a_k, z\in\Delta\}_{k=1}^n$ мероморфных функций f_k классу $\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n)$ (см. [6] с. 179).

Лит.: [1] Gronwall T. H., «Ann. Math. Ser. 2», 1914/1915, v. 16, p. 72—76; [2] Prawitz H., «Arkiv mat., astron., fysik», 1927, Bd 20A, № 6, S. 1—12; [3] Голузин Г. М., «Матем. сб.», 1940, т. 8, № 2, с. 277—84; [4] Лебедев Н. А., Милин И. М., там же, 1951, т. 28, № 2, с. 359—400; [5] Nehari Z., «Arch. Ration. Mech. and Anal.», 1969, v. 34, № 4, p. 301—30; [6] Лебедев Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975; [7] Милин И. М., Однолистные функции и ортонормированные системы, М., 1971; [8] Аленицын Ю. Е., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, № 5, с. 1132—54; [9] Гутлянский В. Я., Щепетов В. А., «Докл. АН СССР», 1974, т. 218, № 3, с. 509—12; [10] Grunsky H., «Math. Z.», 1939, Bd 45, H. 1, S. 29—61. *Н. А. Лебедев.*

ПЛОЩАДЬ — численная характеристика, приписываемая плоским фигурам определенного класса (напр., многоугольникам) и обладающая следующими свойствами: 1) П. неотрицательна; 2) П. аддитивна (в случае многоугольников это означает, что если фигура $P\cup Q$ составлена из фигур P и Q, не имеющих общих внутренних точек, то пл. $(P\cup Q)=$ пл. $P+$ пл. Q; 3) П. сохраняется при перемещениях; 4) П. единичного квадрата равна 1. Термин «П.» употребляется также в более широком смысле как численная характеристика, сопоставляемая двумерным поверхностям в трехмерном пространстве; k-мерным поверхностям в n-мерном $(2\leqslant k<n)$ евклидовом или римановом пространстве; границам множеств и др. объектам, см. ниже.

Площадь плоской фигуры. Исторически П. определялась сначала на классе многоугольников (фигур, допускающих разбиение на конечное число треугольников без общих внутренних точек). Существенно, что на классе многоугольников П. со свойствами 1) — 4) существует и единственна (см. [1], [2]). Одним из следствий свойств 1) — 4) является то, что П. всей фигуры не меньше П. ее части.

В древности существование и единственность П. со свойствами 1) — 4) принимались без ясного описания класса рассматриваемых фигур; внимание сосредоточивалось на приемах вычисления П. Формула для П. прямоугольника, в том числе с иррациональными сторонами, обосновывалась *исчерпывания методом.* П. треугольника и произвольных многоугольников вычислялась как П. равносоставленного с ними прямоугольника. Доказано, что любые многоугольники равной П. равносоставлены (см. [2]).

Затем был выделен класс квадрируемых (измеримых по Жордану) фигур. Фигура M на плоскости наз. квадрируемой, если для любого $\varepsilon>0$ существуют такие многоугольные фигуры P и Q, что $P\subset M\subset Q$ и (пл. Q — пл. $P)<\varepsilon$. Класс квадрируемых фигур весьма богат. Он включает, в частности, все ограниченные плоские области с кусочно гладкими границами. Но есть и неквадрируемые плоские фигуры. На классе квадрируемых фигур также существует и единственна П. со свойствами 1) — 4) (см. [2]).

Исторически до рассмотрения класса квадрируемых фигур умели вычислять П. нек-рых из них — круга, кругового сектора и сегмента, различного рода лунок, криволинейных трапеций. Эти вычисления обосновывались методом исчерпывания многоугольниками. В ряде случаев для обоснования таких вычислений привлекался *Кавальери принцип*, состоящий в том, что если две плоские фигуры указанного типа пересекаются каждой прямой, параллельной фиксированной прямой, по отрезкам одинаковой длины, то эти фигуры имеют равную П. Средства интегрального исчисления (см., напр., [3]) дают удобные приемы для вычисления П. любых плоских областей с кусочно гладкими границами. Эти средства обосновывают также принцип Кавальери.

Стремление распространить понятие П. на более общие плоские множества с сохранением свойств 1) — 4) ведет к теории меры, к выделению класса плоских множеств, измеримых по Лебегу. Переход к еще более общим классам множеств на плоскости приводит уже к неединственным мерам со свойствами 1) — 4).

Ориентированная площадь. Если на ориентированной плоскости расположена направленная замкнутая кривая l, быть может с самопересечениями и налеганиями, то для каждой не лежащей на l точки плоскости определена целочисленная функция (положительная, отрицательная или нулевая), наз. степенью точки относительно l. Она показывает сколько раз и в какую сторону контур l обходит данную точку. Интеграл по всей плоскости от этой функции, если он существует, наз. охватываемой l ориентированной П. Последняя, в отличие от обычной П., имеет знак. О простейших свойствах ориентируемой П. см. [4].

Площадь поверхности. Проще всего определяется П. многогранных поверхностей: как сумма П. плоских граней. Попытка ввести понятие П. кривых поверхностей как предела П. вписанных многогранных поверхностей (подобно тому, как длина кривой определяется как предел вписанных ломаных) встречает трудность. Даже для весьма простой кривой поверхности П. вписанных в нее многогранников со все более мелкими гранями может иметь разные пределы в зависимости от выбора последовательности многогранников. Это наглядно демонстрирует известный пример Шварца, в к-ром последовательности вписанных многогранников с разными пределами П. строятся для боковой поверхности прямого кругового цилиндра (см. [2]).

Чаще всего П. поверхности определяют для класса кусочно гладких поверхностей с кусочно гладким краем (или без края). Обычно это делают с помощью следующей конструкции. Поверхность разбивают на мелкие части с кусочно гладкими границами: в каждой части выбирают точку, в к-рой существует касательная плоскость, и ортогонально проектируют рассматриваемую часть на касательную плоскость поверхности в выбранной точке; П. полученных плоских проекций суммируют; наконец, переходят к пределу при все более мелких разбиениях (таких, что наибольший из диаметров частей разбиения стремится к нулю). На указанном классе поверхностей этот предел всегда существует, и если поверхность задана параметрически кусочно C^1-гладкой функцией $\boldsymbol{r}(u, v)$, где параметры u, v изменяются в области D на плоскости (u, v), то площадь F выражается двойным интегралом

$$F=\int_D \sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\, du\, dv, \qquad (1)$$

где $g_{11}=\boldsymbol{r}_u^2$, $g_{12}=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v$, $g_{22}=\boldsymbol{r}_v^2$, а $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ — частные производные по u и v. Доказательство см., напр., в [3], [5]. В частности, если поверхность есть график C^1-гладкой функции $z=f(x, y)$ над областью D на плоскости (x, y), то

$$F=\int_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dx\, dy. \qquad (2)$$

Здесь $(1+f_x^2+f_y^2)^{-1/2}=\cos\alpha$, где α — острый угол между нормалью к поверхности и осью Oz. На основе формул (1), (2) выводятся известные формулы для П. сферы и ее частей, обосновываются приемы для вычисления П. поверхностей вращения и т. п.

Для двумерных кусочно гладких поверхностей в римановых многообразиях [6] формула (1) служит определением П., при этом роль g_{11}, g_{12}, g_{22} играют составляющие метрич. тензора самой поверхности.

Существенно, что уже в случае двумерной поверхности П. приписывается не множеству точек, а отображению двумерного многообразия в пространство и тем отличается от меры.

k-мерная площадь. Для кусочно гладкого погружения $f: M \to \mathbb{R}^n$ k-мерного многообразия (с краем или без края) в n-мерное евклидово пространство, $2 \leqslant k < n$, П. определяют с помощью конструкции, вполне аналогичной описанной выше для кусочно гладких поверхностей. Разница состоит в том, что проектирование ведется на k-мерные касательные плоскости и суммируются k-мерные объемы проекций. Если в области $D \subset M$ можно ввести координаты $u^1, \ldots, u^k$, то площадь F погружения $(D, f|_D)$ выражается интегралом

$$F = \int_D \sqrt{\det (g_{ij})}\, du^1 \ldots du^k, \qquad (3)$$

где g_{ij} — скалярные произведения $\left\langle \frac{df}{du^i}, \frac{df}{du^j} \right\rangle$. Если $k = n-1$ и D — область на координатной гиперплоскости $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, а f допускает явное задание $x_n = z(x_1, \ldots, x_{n-1})$, то формула (3) принимает вид

$$F = \int_D \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}. \qquad (4)$$

Если отображение f гладкое, то g_{ij} — коэффициенты метрич. тензора, индуцированного погружением, и из (3) следует, что П., определяемая внешней конструкцией, принадлежит внутренней геометрии погруженного многообразия. Иногда равенство (3) принимают за определение П., напр. в случае погружения не в $\mathbb{R}^n$, а в риманово многообразие.

На классе кусочно гладких погруженных многообразий П.: а) неотрицательна; б) равна 1 на k-мерном единичном кубе в $\mathbb{R}^n$; в) не меняется при ортогональных преобразованиях; г) аддитивна; д) полунепрерывна, т. е. $F(f) \leqslant \varliminf_{i \to \infty} F(f_i)$ при равномерной сходимости $f_i \to f$; е) если $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ есть нерастягивающее отображение, то $F(\varphi \circ f) \leqslant F(f)$; ж) если $\{P_i\}$ — набор из C_n^k попарно ортогональных k-мерных плоскостей и p_i — проектирование на P_i, то

$$F(p_i \circ f) \leqslant F(f) \leqslant \sum_{i=1}^{C_n^k} F(p_i \circ f). \qquad (5)$$

Дальнейшие обобщения. Теория площадей. Распространение функции F на более общие объекты с сохранением хотя бы части их свойств а) — ж) может осуществляться разными путями и вести к разным результатам. Изучение таких обобщений составляет предмет теории П. Обзор соотношений разных понятий П. см. в [10].

Граница между теорией П. и теорией меры довольно условна. По традиции к теории П. относят в первую очередь изучение П. непрерывных отображений, где учитывается кратность и меньшую роль играет сохранение аддитивности. О k-мерных мерах в n-мерном пространстве см., напр., *Хаусдорфа мера*, *Фавара мера*.

Ту или иную П. можно вводить на основе аппроксимативного, интегрально геометрического, функционального подхода, либо — аксиоматически. Ниже приведены наиболее распространенные понятия.

Площадь по Лебегу (см. [7], [9]) определяется равенством

$$L(M, f) = \varliminf_{i \to \infty} F(f_i), \qquad (6)$$

где M — конечно триангулируемое k-мерное многообразие; $f_i: M \to \mathbb{R}^n$ — всевозможные кусочно линейные от-

отображения; $f_i \to f$; $F(f_i)$ есть k-мерная П. соответствующей полиэдральной поверхности. П. по Лебегу одинакова для эквивалентных по Фреше отображений и потому является характеристикой *Фреше поверхности*.

В случае $k=2$ условие $L(M, f)<\infty$ влечет ряд полезных свойств поверхности (напр., возможность введения изотермич. параметров); в этом случае П. по Лебегу оказалась удобным инструментом, достаточным для решения *Плато задачи* и более общих двумерных задач вариационного исчисления. При $k>2$ исследование вариационных задач в классе непрерывных отображений столкнулось с трудностями (в проблеме компактности), что заставило обратиться к поиску других объектов (потоки и вариобразия) и связанных с ними характеристик типа П. Использование П. по Лебегу ограничивается также сложностью, с к-рой устанавливаются ее связи с другими понятиями П. и нек-рые ее свойства (напр., правое из неравенств (5)). Следует отметить две особенности $L(M, f)$: во-первых, при $L(M, f)=0$ может оказаться, что объем $V(f(M))>0$; во-вторых, даже при $k=2$ для разбиения M на M_1 и M_2 с общей границей в виде кривой может оказаться

$$L(M, f) > L(M_1, f|_{M_1}) + L(M_2, f|_{M_2}). \tag{7}$$

Изучался вопрос о том, в какой мере соблюдение нек-рых из свойств а) — ж) с заменой аддитивности на полуаддитивность, т. е. допущением неравенства типа (7), приводит к П. по Лебегу. Вопросы этого типа исследованы (1983) не до конца (см. [7]).

Интегрально геометрические площади [9]. Пусть $N(M, \varphi, y)$ есть какая-либо функция кратности для отображений $\varphi: M \to \mathbb{R}^k$ в точке $y \in \mathbb{R}^k$, напр. $N=\operatorname{card}\varphi^{-1}(y)$. Тогда для $f: M \to \mathbb{R}^n$ можно образовать интегрально геометрическую П.

$$\int_{G(n, k)} \int_{R^k} N(M, p_\sigma \circ f, y)\, dV(y)\, dv(\sigma), \tag{8}$$

где $G(n, k)$ — *Грассмана многообразие* k-мерных подпространств $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, v — нормированная *Хаара мера* на $G(n, k)$, p_σ — ортогональное проектирование на $\sigma \in G(n, k)$. Для разных функций кратности П. (8) могут различаться. Весьма специальный выбор $N(M, \varphi, y)$ приводит для триангулируемых M к совпадению (8) с П. по Лебегу при $k=2$, а также при $k>0$ в случае равенства нулю меры Хаусдорфа $H_{k+1}(f(M))$ (см. [9]). Для случая $k=2$ различные интегрально геометрические П. вводились еще Пеано, Гецем, Банахом (см. [7]).

Площадь границы множества. В связи с доказательством неравенства Брунна — Минковского и классического изопериметрич. неравенства была введена П. по Минковскому. Она приписывается множеству $A \subset \mathbb{R}^n$, но характеризует П. его границы и определяется равенством

$$F(A) = \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} (V(A+hB) - V(A)), \tag{9}$$

где B — единичный шар в $\mathbb{R}^n$, а V — объем. Для множеств A с кусочно гладкой границей и для выпуклых A в (9) существует обычный предел, совпадающий с $(n-1)$-мерной П. границы. Определение (9) сохраняет смысл для множеств в конечномерных нормированных пространствах, где даже для выпуклых A значение П. (9) может отличаться от меры Хаусдорфа $H_{n-1}(\partial A)$.

Другой полезной характеристикой, аналогичной П., к-рая сопоставляется множеству, но характеризует в основном его границу, является *периметр* измеримого множества. Он является частным случаем понятия массы потока.

Внутренняя площадь. Если M метризовано и $f: M \to \mathbb{R}^n$ — локально изометрич. отображение, то возникает вопрос о соотношении между $L(M, f)$ и мерой Хаусдорфа $H_k(M)$. Когда M — *двумерное многообразие ограниченной кривизны*, то $L(M,f) = H_2(M)$. Вообще же непрерывное $f: M \to \mathbb{R}^n$ индуцирует на компонентах связности $f^{-1}(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$, обобщенную метрику ρ, отличающуюся возможностью $\rho(x, y) = \infty$. Конструкция k-мерной меры Хаусдорфа, примененная к ρ, дает характеристику, к-рую можно принять за внутреннюю П. погружения. Для липшицевых f она совпадает с $L(M, f)$ (см. [11]).

Массы потоков и вариобразий. Интегрирование k-форм по k-мерному кусочно гладко вложенному в $\mathbb{R}^n$ ориентированному многообразию M приводит к потоку $T_M\varphi = \int_M \langle\varphi(x), \nu(x)\rangle dF(x)$ — линейному функционалу на k-формах φ в $\mathbb{R}^n$. Здесь ν — единичный касательный к M k-вектор. Линейный функционал T_M в существенном характеризует M. Кроме того, определен (на этот раз и при неориентированном M) нелинейный функционал — вариобразие $V_M\varphi = \int_M |\langle\varphi, \nu\rangle| dF$. Интегральные нормы (массы) $\|T_M\|$ и $\|V_M\|$ совпадают с П., то есть с $F(M)$. Включение класса кусочно гладких подмногообразий пространства $\mathbb{R}^n$ в более общие классы потоков и вариобразий играет в вариационном исчислении такую же роль, как обобщенные решения в теории уравнений в частных производных.

Среди всех потоков и вариобразий выделяют широкие классы целочисленных потоков и вариобразий. Последние сохраняют многие геометрич. свойства подмногообразий. Напр., целочисленный поток есть поток, допускающий представление $T = \sum_{i=1}^{\infty} n_i T_{M_i}$, где n_i — целые числа, а M_i суть C^1-гладкие подмногообразия, при условии, что конечна масса $(k-1)$-мерного потока dT, определяемого равенством $dT(\varphi) = T(d\varphi)$. Массы целочисленных потоков и вариобразий можно рассматривать как обобщения понятия П. поверхности. И здесь есть связь с П. по Лебегу. Пусть кусочно гладкие отображения $f_i: M \to \mathbb{R}^n$ равномерно сходятся $f_i \to f$ и $L(M, f) = \lim_{i\to\infty} L(M, f_i)$. Тогда соответствующие вариобразия V_{f_i} слабо сходятся к нек-рому целочисленному вариобразию V_f, причем $\|V_f\| = L(M, f)$. Тем самым каждому $f: M \to \mathbb{R}^n$ с $L(M, f) < \infty$ естественно сопоставляется вариобразие V_f с массой $L(M, f)$; на языке потоков об этом см. в [13].

Лит.: [1] Лебег А., Об измерении величин, пер. с франц., 2 изд., М., 1960; [2] Энциклопедия элементарной математики, т. 5, М., 1966; [3] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; [4] Лопшиц А. М., Вычисление площадей ориентированных фигур, М., 1956; [5] Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969; [6] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [7] Cesari L., Surface area, Princeton, 1956; [8] Federer H., Geometric measure theory, B.— Hdlb.— N. Y., 1969; [9] Federer H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1952, v. 58, № 3, p. 306—78; [10] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., Геометрические неравенства, Л., 1980; [11] Busemann H., «Ann. Math. 2 ser.», 1947, v. 48, p. 234—67; [12] Almgren F. J., The theory of varifolds, Princeton, 1965; [13] Federer H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1961, v. 98, № 2, p. 204—33.

Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, Л. Д. Кудрявцев.

ПЛЮККЕРА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — модель, реализующая геометрию трехмерного проективного пространства P_3 в гиперболич. пространстве ${}^3S_5$. П. и. основана на специальном истолковании *плюккеровых координат* прямой, определяемых для любой прямой пространства P_3.

При проективных преобразованиях пространства P_3 плюккеровы координаты преобразуются линейно. С помощью плюккеровых координат прямых пространства P_3 устанавливается взаимно однозначное соответствие между прямыми пространствами P_3 и точками проективного пространства P_5, координаты к-рых численно равны плюккеровым координатам прямых пространства P_3.

Прямые пространства P_3 изображаются точками невырожденной квадрики пространства P_5, индекс к-рой равен трем.

Если считать эту квадрику за абсолют и определить в пространстве P_5 проективную (неевклидову) метрику, то получается пятимерное гиперболич. пространство ${}^3S_5$. При каждой коллинеации и корреляции пространства P_3 происходит линейное преобразование плюккеровых координат, т. е. каждая коллинеация и корреляция изображаются коллинеацией пространства P_5, переводящей в себя абсолют. Эти коллинеации тем самым являются перемещениями пространства ${}^3S_5$. Перемещения пространства ${}^3S_5$ изображают или коллинеации или корреляции пространства P_3.

Каждому линейному комплексу пространства P_3 сопоставляется точка пространства ${}^3S_5$. Проективную геометрию пространства P_3 можно рассматривать как неевклидову геометрию гиперболич. пространства ${}^3S_5$. Именно эта интерпретация геометрии пространства P_3 в пространстве ${}^3S_5$ наз. интерпретацией Плюккера в связи с ролью плюккеровых координат.

Если в качестве основного образа пространства P_3 берется прямая, то геометрию этого пространства можно рассматривать как геометрию на абсолюте пространства ${}^3S_5$.

Группа проективных преобразований пространства P_3 изоморфна группе перемещений пространства ${}^3S_5$, и всякому инволюционному проективному преобразованию пространства P_3 соответствует инволюционное перемещение пространства ${}^3S_5$. Напр., нуль-системе в пространстве P_3 соответствует отражение от точки и от ее полярной гиперплоскости в пространстве ${}^3S_5$; инволюционной гомологии в пространстве P_3 соответствует гиперболический паратактич. сдвиг на полупрямую в пространстве ${}^3S_5$ и т. д. Каждой связной компоненте группы проективных преобразований пространства P_3 соответствует связная компонента группы перемещений пространства ${}^3S_5$.

1) Коллинеациям пространства P_3 с положительным определителем, включая тождественное преобразование, отвечают перемещения пространства ${}^3S_5$ с определителем, равным $+1$ (сюда включаются тождественные преобразования).

2) Корреляциям пространства P_3 с положительным определителем (включая нуль-систему) отвечают перемещения пространства ${}^3S_5$ с определителем, равным -1, переводящие собственную и идеальную области соответственно в себя (включая отражения от точки).

3) Коллинеациям пространства P_3 с отрицательным определителем отвечают перемещения пространства ${}^3S_5$ с определителем, равным $+1$, переводящие собственную область в идеальную и обратно, эта компонента содержит гиперболич. сдвиг на полупрямую.

4) Корреляциям пространства P_3 с отрицательным определителем отвечают перемещения пространства ${}^3S_5$ с определителем, равным -1, переводящие собственную область в идеальную и обратно.

Образам симметрии, соответствующим в пространствах P_3 и ${}^3S_5$, сопоставляются числовые инварианты, между к-рыми существуют определенные связи.

П. и. применяется в исследованиях групп перемещений трехмерных неевклидовых пространств S_3, ${}^1S_3$, ${}^2S_3$, к-рые изоморфны определенным подгруппам группы перемещений пространства ${}^3S_5$. Устанавливается также взаимосвязь групп движений этих трехмерных пространств (эллиптического, гиперболического) с группами перемещений пространств низших размерностей (см. *Фубини интерпретация*, *Котельникова интерпретация*). С помощью П. и. изучается интерпретация трехмерного симплектич. пространства Sp_3 в пространстве ${}^3S_5$.

П. и. предложена Ю. Плюккером [1].

Лит.: [1] Plücker J., Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, Lpz., 1868—69; [2] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [3] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1939. *Л. А. Сидоров.*

ПЛЮККЕРА ФОРМУЛЫ — формулы, связывающие внешние, т. е. отвечающие проективным вложениям, и внутренние характеристики алгебраич. многообразий. Наиболее старыми и известными среди численных формул алгебраич. геометрии являются П. ф. для плоской приведенной и неприводимой кривой $Z \subset \mathbb{C}P^2$, к-рая имеет лишь обыкновенные двойные и каспидальные особые точки. Пусть d — степень кривой Z, т. е. число точек из Z на прямой общего положения в $\mathbb{C}P^2$, а d^* — класс кривой Z, т. е. число прямых, касательных к Z в неособых точках и проходящих через одну и ту же фиксированную точку общего положения в $\mathbb{C}P^2$. Основные две формулы Плюккера таковы:

$$(1)\quad d^* = d(d-1) - 2\delta - 3k,$$
$$(2)\quad d^* = 2d + (2g-2) - k,$$

где g — род разрешения X кривой Z, δ — число обыкновенных двойных точек, а k — число каспидальных точек. Формула (1) сводится к виду $d^* = d(d-1)$, если кривая Z неособа.

Другие классические П. ф. следуют из (1) и (2) по двойственности. Если Z — не прямая, тогда двойственная кривая Z^* к Z определяется как замыкание множества касательных к Z, рассматриваемых как точки двойственной плоскости $\mathbb{C}P^{2*}$. Теорема, принадлежащая Ю. Плюккеру (J. Plücker, см. [3]), состоит в том, что дважды двойственная кривая Z^{**} совпадает с Z. Предполагая, что Z^* имеет лишь δ^* обыкновенных двойных и k^* каспидальных особых точек, получают формулы

$$(1^*)\quad d = d^*(d^*-1) - 2\delta^* - 4k^*,$$
$$(2^*)\quad d = 2d^* + 2(2g-2) - 2k^*.$$

Число δ^* можно интерпретировать также как число бикасательных к Z, т. е. прямых, к-рые касаются Z ровно в двух различных и неособых точках, с порядком касания 2, а k^* — как число точек перегиба.

Четыре формулы (1), (2), (1)*, (2)* не независимы: из любых трех следует четвертая. Однако любые три из них независимы. Из них вытекают также следующие соотношения:

$$(3)\quad k^* = 3d(d-2) - 6\delta - 8k,$$
$$(3^*)\quad k = 3d^*(d^*-2) - 6\delta^* - 8k^*.$$

Именно эти формулы были получены Ю. Плюккером вместе с формулами (1) и (1)* в 1834—39.

В случае основного поля конечной характеристики П. ф. и теорема двойственности не всегда справедливы. Напр., в характеристике 2 все касательные к конике проходят через одну определенную точку, наз. странной точкой коники, поэтому двойственная кривая есть прямая. В характеристике 3 имеется неособая кубика только с тремя точками перегиба и даже с одной (по П. ф. их должно было бы быть девять). При правильной интерпретации d^* формулы (1), (2) остаются справедливыми во всех характеристиках $\neq 2$; в характеристике 2 их нужно заменить на

$$(1_2)\quad d^* = d(d-1) - 2\delta - 4k,$$
$$(2_2)\quad d^* = 2d + (2g-2) - 2k.$$

Известно обобщение П. ф. на случай кривых в P^n с произвольными особенностями (см. [2]), а также на случай гиперповерхностей в P^n.

Лит.: [1] Berzolari L., в кн.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd 3_2, Lpz., 1906; [2] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, т. 1—2, пер. с англ., М., 1982; [3] Клейман С. Л., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, в. 6, с. 69—148.

В. В. Шокуров.

ПЛЮККЕРОВЫ КООРДИНАТЫ — координаты прямой в трехмерном пространстве, шесть чисел p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04}, p_{05}, p_{06}, из к-рых первые три являются координатами направляющего вектора l прямой L, а вторые три — моменты этого вектора относительно начала координат. Пусть прямая L проходит через точки X и Y с проективными координатами $(x_0, x_1, \ldots, x_3)$ и $(y_0, y_1, \ldots, y_3)$ соответственно П. к. этой прямой являются числа

$$p_{ik}=x_i y_k - x_k y_i.$$

П. к. применяют в линейчатой геометрии. Впервые были рассмотрены Ю. Плюккером (J. Plücker, 1869). Иногда вместо П. к. используют **Клейна координаты** $(x_0, \ldots, x_5)$, связанные с П. к. формулами:

$$p_{01}=x_0+x_1,\ p_{02}=x_2+x_3,\ p_{03}=x_4+x_5,$$

$$p_{23}=x_0-x_1,\ p_{13}=x_2-x_3,\ p_{12}=x_4-x_5.$$

Естественно рассматривать П. к. как координаты в p-мерном векторном подпространстве n-мерного векторного пространства V. При этом они понимаются как совокупность чисел, равных $(p\times p)$-субдетерминантам $(n\times p)$-матрицы $A\,(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, столбцы a_i, $1\leqslant i\leqslant p$, к-рой являются столбцами координат (в каком-либо базисе пространства V) базисных векторов подпространства W. Если a^j_i — компоненты столбца a_i, $1\leqslant i\leqslant p$, то П. к. (или **грассмановы координаты**) являются числа

$$u^{i_1 i_2 \ldots i_p}=\begin{vmatrix} a_1^{i_1} & a_2^{i_1} & \ldots & a_p^{i_1} \\ a_1^{i_2} & a_2^{i_2} & \ldots & a_p^{i_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{i_p} & a_2^{i_p} & \ldots & a_p^{i_p} \end{vmatrix} = p!\, a_1^{[i_1} a^{i_2} \ldots a_p^{i_p]},$$

$$1\leqslant i_\nu \leqslant n.$$

П. к. симметричны по всем индексам. Число существенных П. к. равно $\binom{n}{p}$.

При замене базиса W и фиксированном базисе V П. к. умножаются на одно и то же ненулевое число. При замене базиса V и фиксированном базисе W П. к. преобразуются как координаты контравариантного тензора валентности p (см. *Поливектор*). Два подпространства совпадают тогда и только тогда, когда их П. к., вычисленные в одном и том же базисе пространства V, отличаются лишь ненулевым множителем.

Принадлежность вектора x подпространству W записывается в виде линейных уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^{p+1} (-1)^{\alpha-1}\, x^{i_\alpha} u^{i_1 \ldots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \ldots i_p}=0$$

с коэффициентами, являющимися П. к. подпространства W. В этих уравнениях $i_1<i_2<\ldots<i_p$ — всевозможные наборы из чисел $1, 2, \ldots, n$. *Л. П. Купцов.*

ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция $u=u(z)$ от n комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$ в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, имеющая в D непрерывные частные производные по координатам x_ν, y_ν, $z_\nu=x_\nu+iy_\nu$, $\nu=1, \ldots, n$, до 2-го порядка включительно и удовлетворяющая в D системе n^2 уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu \partial y_\nu}=0,\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial y_\nu}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu \partial x_\nu}=0,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\mu,\ \nu=1,\ \ldots,\ n.$$

Применяя формальные производные

$$\frac{\partial u}{\partial z_\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\nu}-i\,\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\nu}+i\,\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right),$$

можно записать систему (1) в более компактной форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_\mu \partial z_\nu}=0,\ \mu,\nu=1,\ \ldots,\ n. \qquad (2)$$

Значение класса П. ф. определяется тем, что действительная и мнимая части $u=\operatorname{Re} f$, $v=\operatorname{Im} f$ любой голоморфной в области D функции $f=u+iv$ являются П. ф. в D; такие две (действительные) П. ф. наз. сопряженными. Обратно, если дана П. ф. u в окрестности V точки $z^0=x^0+iy^0\in\mathbb{C}^n$, то в этой окрестности существует голоморфная функция $f=u+iv$, действительная часть к-рой равна u. Задача определения этой голоморфной функции f сводится к нахождению сопряженной П. ф. v по формуле

$$v(z)=\int_{z^0}^{z}\sum_{\nu=1}^{n}\left(-\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\,dx_\nu+\frac{\partial u}{\partial x_\nu}\,dy_\nu\right)+C,\ z\in V,$$

где интеграл не зависит от пути в силу (1).

Вообще говоря, рассматриваются сами по себе и *комплексные П. ф.*, определяемые как решения системы (1) или (2). При $n>1$ П. ф. составляют правильный подкласс класса *кратногармонических функций*, к-рый, в свою очередь, есть правильный подкласс класса *гармонических функций*: при $n=1$ все эти три класса совпадают. С другой стороны, при $n\geqslant 1$ действительные П. ф. составляют правильный подкласс класса *плюрисубгармонических функций*, к-рый, в свою очередь, при $n>1$ является правильным подклассом класса *субгармонических функций*.

Кроме общих свойств гармонич. функций, П. ф. при $n>1$ обладают характерными свойствами, обусловленными в основном переопределенностью системы (1) или (2) в этом случае. Пусть, напр., при $n>1$ П. ф. $u(z)$ в единичном поликруге

$$U^n=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_\nu|<1,\ \nu=1,\ \ldots,\ n\}$$

непрерывна в замкнутом поликруге $\bar{U}^n$. При этом даже ее граничные значения на остове $T^n=\{\zeta\in\mathbb{C}^n: |\zeta_\nu|=1, \nu=1,\ \ldots,\ n\}$, являющемся правильной частью всей границы ∂U^n, не могут быть заданы в виде произвольной непрерывной функции $U^*(\zeta)$, $\zeta\in T^n$,— они удовлетворяют определенным дополнительным условиям. Таким образом, задача Дирихле в классе П. ф. с данными на остове разрешима лишь при специально подобранных граничных данных (см. [3]).

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [2] Соломенцев Е. Д., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964, с. 83—100; [3] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974. *Е. Д. Соломенцев.*

ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — действительная функция $u=u(z)$, $-\infty\leqslant u<+\infty$, n комплексных переменных $z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)$ в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$: $n\geqslant 1$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $u(z)$ полунепрерывна сверху всюду в D; 2) $u(z^0+\lambda a)$ есть *субгармоническая функция* переменного $\lambda\in\mathbb{C}$ в каждой связной компоненте открытого множества $\{\lambda\in\mathbb{C}: z^0+\lambda a\in D\}$ для любых фиксированных точек $z^0 \in D$, $a \in \mathbb{C}^n$. Функция $v(z)$ наз. плюрисупергармонической функцией, если $-v(z)$ есть П. ф. Плюрисубгармонич. функции при $n>1$ составляют правильный подкласс класса субгармонич. функций, а при $n=1$ эти два класса совпадают. Наиболее важные примеры П. ф.: $\ln|f(z)|$, $\ln^+|f(z)|$, $|f(z)|^p$, $p \geqslant 0$, где $f(z)$ — голоморфная функция в D.

Для того чтобы полунепрерывная сверху в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция $u(z)$, $u(z) < +\infty$, была П. ф., необходимо и достаточно, чтобы для любых фиксированных $z \in D$, $a \in \mathbb{C}^n$, $|a|=1$ существовало число $\delta = \delta(z, a) > 0$ такое, что при $0 < r < \delta$ выполняется неравенство

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi} a)\, d\varphi.$$

Для функций $u(z)$ класса $C^2(D)$ более удобен следующий критерий: $u(z)$ есть П. ф. в D тогда и только тогда, когда эрмитова форма (гессиан функции u)

$$H((z; u)\, a, \bar{a}) = \sum_{j,\ k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k} a_j \bar{a}_k$$

неотрицательно определена в каждой точке $z \in D$.

Помимо общих свойств субгармонич. функций, для П. ф. справедливы следующие: 1) $u(z)$ есть П. ф. в области D тогда и только тогда, когда $u(z)$ — П. ф. в окрестности каждой точки $z \in D$; 2) линейная комбинация П. ф. с положительными коэффициентами есть П. ф.; 3) пределы равномерно сходящейся и монотонно убывающей последовательностей П. ф. суть П. ф.; 4) для того чтобы $u(z)$ была П. ф. в области D, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде предела убывающей последовательности П. ф. $\{u_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно классов $C^\infty(D_k)$, где области D_k таковы, что $D_k \subset \bar{D}_k \subset D_{k+1}$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D$; 5) для любой точки $z^0 \in D$ среднее значение

$$J(z^0, r; u) = \frac{1}{\sigma_{2n}} \int_{|a|=1} u(z^0 + ra)\, da$$

по сфере радиуса r, где $\sigma_{2n} = 2\pi^n/(n-1)!$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^{2n}$, есть возрастающая функция по r, выпуклая относительно $\ln r$ на отрезке $0 \leqslant r \leqslant R$, если шар

$$V(z^0, R) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - z^0| < R\}$$

расположен в D, причем $u(z^0) \leqslant J(z^0, r; u)$; 6) при голоморфных отображениях П. ф. переходит в П. ф.; 7) если $u(z)$ — непрерывная П. ф. в области D, E — замкнутое связное аналитич. подмножество D и сужение $u|E$ достигает максимума на E, то $u(z) = \text{const}$ на E.

Имеют значение для приложений также следующие правильные подклассы класса П. ф. Функция $u(z)$ наз. сильно плюрисубгармонической, если существует выпуклая возрастающая функция $\varphi(t)$, $-\infty < t < +\infty$,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = +\infty,$$

такая, что $\varphi^{-1}(u(z))$ есть П. ф. В частности, если $\varphi(t) = e^t$, то получают логарифмически плюрисубгармонические функции.

Класс П. ф. и только что названные его подклассы важны для описания различных свойств голоморфных функций и областей комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, а также и более общих аналитич. пространств (см. [1] — [4], [7]). Напр., класс функций Гартогса $H(D)$ определяется как наименьший класс действительных функций в области D, содержащий все функции $\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — голоморфная функция в D, и замкнутый относительно следующих операций:

1) $\{u_1, u_2 \in H(D), \lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0\} \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in H(D)$;

2) $\{u_k \in H(D),\ u_k \leqslant M(D')$ для всякой подобласти $D' \subset \overline{D}' \subset D, k=1, 2, \ldots\} \Rightarrow \sup\{u_k(z): k=1, 2, \ldots\} \in H(D)$;

3) $\{u_k \in H(D),\ u_k \geqslant u_{k+1}, k=1, 2, \ldots\} \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} u_k(z) \in H(D)$;

4) $\{u \in H(D),\ z \in D\} \Rightarrow \limsup\limits_{z' \to z} u(z') \in H(D)$;

5) $\{u \in H(D')$ для всякой подобласти $D' \subset \overline{D}' \subset D\} \Rightarrow u \in H(D)$.

Полунепрерывные сверху функции Гартогса являются П. ф., но не всякая П. ф. есть функция Гартогса. Если D — область голоморфности, то классы полунепрерывных сверху функций Гартогса $u \in H(D)$ и П. ф. в D совпадают (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [3] Lelong P., в кн.: Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxélles, 1953, P., 1953, p. 21—40; [4] Bremermann H. J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1956, v. 82, p. 17—51; [5] его же, «Math. Ann.», 1956, Bd 131, p. 76—86; [6] его же, «Proc. Amer. Math. Soc.», 1956, v. 7, p. 771—75; [7] Соломенцев Е. Д., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964, с. 83—100. *Е. Д. Соломенцев.*

ПЛЮРИСУПЕРГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — см. *Плюрисубгармоническая функция.*

ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕОРИЯ — раздел дифференциальной геометрии, в к-ром изучаются поверхности. В П. т. исследуются форма поверхности, ее искривление, свойства различного рода линий на поверхности, рассматриваются вопросы изгибания, вопросы существования поверхности с данными внутренними или внешними свойствами и др.

В П. т. имеются две точки зрения: поверхность можно рассматривать как метрич. пространство со своей внутренней метрикой (т. н. внутренняя геометрия), либо поверхность рассматривается как фигура в пространстве (т. н. внешняя геометрия). Многие направления в П. т. (вопросы *изометрического погружения*, *изгибания* и др.) посвящены изучению связей между внутренней и внешней геометриями. Для регулярных поверхностей класса C^2 эти связи довольно тесны. См. также *Погруженных многообразий геометрия.*

Изучение поведения кривых на поверхностях (*асимптотических линий*, *геодезических линий* и др.), а также пар их однопараметрич. семейств — т. н. *сетей* — привело к выделению специальных классов поверхностей. Напр., *переноса поверхность* характеризуется существованием на ней сети переноса, *Фосса поверхность* — сетью Фосса, *линейчатая поверхность* — полугеодезической асимптотич. сетью и т. д. Теория сетей тесно связана с вопросами отображений поверхностей на поверхности. Наиболее важными классами отображений являются: *изометрическое отображение*, при к-ром сохраняются длины дуг, площади и углы между двумя направлениями, исходящими из одной точки; *конформное отображение*, при к-ром сохраняются углы между всякими двумя направлениями, выходящими из одной точки (напр., *стереографическая проекция*); *сферическое отображение*, при к-ром каждой точке поверхности по параллельности нормалей ставится в соответствии точка сферы; *геодезическое отображение*, при котором геодезические линии одной поверхности соответствуют геодезическим другой поверхности; эквиареальное отображение, при к-ром площади соответствующих фигур находятся в постоянном отношении.

Исследования в П. т. сопровождались изучением большого числа классов поверхностей, таких как *поверхности второго порядка*, *винтовые поверхности*, *геликоиды*, *Каталана поверхности*, *коноиды*, *резные поверхности*, *каналовые поверхности*, *Дюпена циклиды*, *Эннепера поверхности*, *Вейнгартена поверхности* и др. Много внимания уделяется изучению *минимальных поверхностей*. В связи с приложениями широко исследовались *триортогональные системы* поверхностей, напр. конфокальные поверхности 2-го порядка.

Помимо изучения свойств поверхностей, неизменных при любых изометрич. преобразованиях всего пространства (относящихся к т. н. метрической П. т.), изучаются свойства поверхностей, инвариантные по отношению к какой-либо другой группе преобразований, напр. группе аффинных или проективных преобразований. Аффинная П. т. рассматривает свойства поверхностей, неизменные при эквиаффинных преобразованиях (т. е. аффинных преобразованиях, сохраняющих объем). Проективная П. т. рассматривает проективно инвариантные свойства поверхностей. См. также *Аффинная дифференциальная геометрия*, *Проективная дифференциальная геометрия*, *Конформно-дифференциальная геометрия*.

Исследования П. т., изучение полей тех или иных геометрич. объектов, связанных с поверхностями, стимулировали развитие многих методов, нашедших применение и в др. областях математики, физики и механики (напр., *тензорный анализ*, *Картана метод внешних форм* и др.).

Для П. т. в том виде, в каком она сложилась в кон. 19 в., характерно рассмотрение только достаточно регулярных для применения дифференциального исчисления поверхностей (или их частей). С нач. 20 в. появились направления исследований П. т., в к-рых отказ от требований дифференцируемости компенсируется какими-то иными требованиями, гарантирующими получение содержательных геометрич. результатов. Такими требованиями были, напр., выпуклость изучаемой поверхности (см. *Выпуклая поверхность*), локальная единственность геодезической. Кроме того, предметом изучения стали поверхности во всем их протяжении (т. н. *геометрия в целом*), а не в достаточно малом участке, как это имело место в классической дифференциальной геометрии. При этом существенными являются учет их топологич. строения (напр., род поверхности), их полноты в том или ином смысле и связи этих характеристик с распределением кривизны.

Исследования по дифференциальной геометрии многомерных пространств, эллиптического пространства и пространства Лобачевского установили ряд геометрич. фактов, относящихся к П. т. в этих пространствах.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956; [2] Бляшке В., Дифференциальная геометрия..., пер. с нем., т. 1, М.— Л., 1935; [3] Норден А. П., Теория поверхностей, М., 1956; [4] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1—2, М.— Л., 1947—48; [5] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963; [6] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948; [7] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969; [8] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2 éd., t. 1—4, P., 1914—1925; [9] Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale, 3 ed., t. 1—2, Bologna, 1937. *Ю. А. Аминов.*

ПОВЕРХНОСТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция множества на сфере Ω, равная площади $S(E)$ той части выпуклой поверхности F, к-рая имеет своим сферич. изображением $E \subset \Omega$. Она сохраняет смысл для общих выпуклых поверхностей и является вполне аддитивной на кольце борелевских множеств.

Лит.: [1] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1938, т. 3, № 1, с. 27—44; [2] Буземан Г., Выпуклые поверхности, пер. с англ., М., 1964. *М. И. Войцеховский.*

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл по поверхности. Пусть поверхность S, расположенная в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x, y, z и имеющая, быть может, самопересечения, задана векторным представлением

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v),$$

где $$\boldsymbol{r}(u, v)=(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)) \qquad (1)$$

— непрерывно дифференцируемая вектор-функция, определенная на замыкании $\overline{G}$ двумерной измеримой по Жордану области G, расположенной на плоскости с декартовыми координатами u, v. Пусть

$$g_{11}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right)^2,\ g_{12}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v},\ g_{22}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)^2$$

— коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S. Если через $F(x, y, z)$ обозначить функцию, определенную на поверхности S, т. е. функцию $F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, то **поверхностный интеграл первого рода** (или **интеграл по площади поверхности**) определяют равенством

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS=$$
$$=\iint_G F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\, du dv. \qquad (2)$$

Это определение не зависит от выбора представления поверхности. П. и. 1-го рода является пределом соответствующих интегральных сумм, к-рые могут быть описаны в терминах, связанных с поверхностью. Напр., если функция $F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ интегрируема по Риману, $\tau=\{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ — разбиение поверхности S на части S_i, являющиеся образами при отображении (1) множеств $E_i \subset \overline{G}$, образующих разбиение $\tau_0=\{E_i\}_{i=1}^{i=t}$ множества $\overline{G}$ (см. *Кратный интеграл*), и

$$\operatorname{mes} S_i=\iint_{E_i} \sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\, du dv$$

— площадь S_i, то

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS=$$
$$=\lim_{\delta_{\tau_0}\to 0} \sum_{i=1}^{k} F(x(\xi_i, \eta_i),\quad y(\xi_i, \eta_i),\quad z(\xi_i, \eta_i)) \operatorname{mes} S_i,$$

где δ_{τ_0} — мелкость разбиения τ_0, а $(\xi_i, \eta_i) \in E_i$. В случае явного задания поверхности S в виде $z=f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$, формула (2) принимает вид

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS=$$
$$=\iint_G F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx dy.$$

Если на поверхности S с векторным представлением (1) нет особых точек, т. е. $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, то ее можно ориентировать, выбрав на ней непрерывную единичную нормаль $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, напр. $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times \boldsymbol{r}_v|}$.

Для ориентированной поверхности S^+ определяют **поверхностные интегралы второго рода** по формулам

$$\left.\begin{aligned}
\iint_{S^+} F(x, y, z)\, dx\, dy&=\iint_S F(x, y, z) \cos\gamma\, dS,\\
\iint_{S^+} F(x, y, z)\, dy\, dz&=\iint_S F(x, y, z) \cos\alpha\, dS,\\
\iint_{S^+} F(x, y, z)\, dy\, dz&=\iint_S F(x, y, z) \cos\beta\, dS,
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где в правой части стоят П. и. 1-го рода. Если S^- — поверхность S с ориентацией, противоположной ориентации S^+, то

$$\iint_{S^-} F(x, y, z)\, dx\, dy=-\iint_{S^+} F(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Аналогичные равенства имеют место в случае остальных П. и. 2-го рода (3). Как и П. и. 1-го рода, П. и. 2-го рода являются пределами интегральных сумм, к-рые можно описать в терминах поверхности.

Если $\boldsymbol{n}=\frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$, то справедлива формула

$$\iint_{S+} F(x, y, z)\, dx\, dy =$$
$$= \iint_G F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\, du dv.$$

Аналогичные формулы справедливы и для других П. и. 2-го рода (3).

В частности, для случая поверхности $z=f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$:

$$\iint_{S+} F(x, y, z)\, dx\, dy = \iint_G F(x, y, f(x, y))\, dx\, dy,$$
$$\iint_{S-} F(x, y, z)\, dx\, dy = -\iint_G F(x, y, f(x, y))\, dx\, dy.$$

Первый из этих интегралов наз. интегралом по «верхней» стороне поверхности S, а второй — по «нижней». Эта терминология связана с тем, что вектор $\boldsymbol{n}=\frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ в случае явного задания поверхности S, т. е. когда $x=u$, $y=v$, $z=f(x, y)$, составляет острый угол с осью z, т. е. направлен «вверх», а во втором случае — тупой угол и, следовательно, направлен «вниз».

Если гладкая поверхность S является границей ограниченной области и S^+ обозначает ее ориентацию с помощью внешней, а, значит, S^- с помощью внутренней, нормали по отношению к указанной области, то П. и. 2-го рода по ориентированной поверхности S^+ наз. П. и. по внешней стороне поверхности, а по S^- — П. и. по внутренней стороне.

П. и. по кусочно гладким поверхностям, к-рые могут быть разбиты на конечное число частей, каждая из к-рых имеет векторное представление (1), определяются как суммы П. и. по соответствующим частям. Так, определенные П. и. по кусочно гладким поверхностям не зависят от способа разбиения поверхности на указанные части.

Остроградского формула устанавливает связь между тройным интегралом по трехмерной ограниченной области и П. и. по ее границе, а *Стокса формула* — между П. и. и криволинейным интегралом по контуру, являющимся ее краем.

П. и. $\iint_S dS$ равен площади поверхности S. Если на поверхности S распределена масса с плотностью $F(x, y, z)$, то П. и. $\iint_S F(x, y, z) dS$ равен величине всей этой массы. Если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x, y, z)$ — векторная функция, заданная на ориентированной с помощью единичной нормали $\boldsymbol{n}$ поверхности S, то П. и.

$$\iint_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\, dS$$

наз. потоком векторного поля $\boldsymbol{a}$ через поверхность S. Очевидно, он не зависит от выбора системы координат в пространстве $\mathbb{R}^3$. С помощью П. и. записывают *двойного слоя потенциал* и *простого слоя потенциал*.

Если поверхность S является дифференцируемым многообразием, непрерывно дифференцируемые неотрицательные функции $\varphi_j(x, y, z)$, $j=1, 2, \ldots, m$, образуют разбиение единицы на S, т. е. носитель каждой функции содержится в нек-рой *карте* многообразия S и $\sum_{j=1}^m \varphi_j(x, y, z)=1$ для каждой точки $(x, y, z) \in S$, а функция $F(x, y, z)$ определена на S, то, по определению,

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS = \sum_{j=1}^{m} \iint_S \varphi_j(x, y, z) F(x, y, z)\, dS, \quad (4)$$

где каждый интеграл в правой части понимается в смысле (2). Если S^+ — ориентированное двумерное многообразие, то

$$\iint_{S^+} F(x, y, z)\, dx\, dy = \sum_{j=1}^{m} \iint_{S^+} \varphi_j(x,y,z) F(x,y,z)\, dx dy. \quad (5)$$

Аналогично определяются П. и. 2-го рода других типов (3). Определения (4) и (5) не зависят от выбора разбиения единицы на многообразии S.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [2] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 2, М., 1981; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975; [4] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, М., 1979; [5] Мищенко А. С., Фоменко А. Т., Курс дифференциальной геометрии и топологии, М., 1980. *Л. Д. Кудрявцев.*

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ — потенциал меры, сосредоточенной на нек-рой поверхности. При решении основных граничных задач *потенциала теории* применяются два вида П. п.: *простого слоя потенциал*

$$V(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|y-z|}\, dS_y,$$

создаваемый распределенной по поверхности S мерой с плотностью $\mu(y)$, $y \in S$; и *двойного слоя потенциал*

$$W(x) = \int \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|y-x|}\, dS_y,$$

создаваемый распределенной на S мерой с плотностью $\nu(y)$. Физически потенциал простого слоя интерпретируется как потенциал электрич. зарядов с плотностью $\mu(y)$, а потенциал двойного слоя — как потенциал диполей с плотностью $\nu(y)$ (см. также *Мультиполя потенциал*). *Е. Д. Соломенцев.*

ПОВЕРХНОСТЬ — одно из основных понятий геометрии. Определения П. в различных областях геометрии существенно отличаются друг от друга.

В элементарной геометрии рассматриваются плоскости, многогранные П., а также нек-рые кривые П. (напр., сфера). Каждая из кривых П. определяется специальным способом, чаще всего как множество точек или линий. Общее понятие П. в элементарной геометрии лишь поясняется, а не определяется: говорят, что П. есть граница тела или след движущейся линии и т. п.

В аналитич. и алгебраич. геометрии П. рассматривается как множество точек, координаты к-рых удовлетворяют определенному виду уравнений (см., напр., *Поверхность второго порядка*, *Алгебраическая поверхность*).

В 3-мерном евклидовом пространстве E^3 П. определяется с помощью понятия простой П. как гомеоморфизм квадрата в E^3. П. понимается как связное множество простых П. (напр., сфера является объединением двух полусфер — простых П.).

Обычно задание П. в E^3 осуществляется вектор-функцией

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)),$$

где $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$, а

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$$

— функции параметров u и v, удовлетворяющие нек-рым условиям регулярности, напр. условию

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{Vmatrix} = 2$$

(см. также *Дифференциальная геометрия*, *Поверхностей теория*, *Риманова геометрия*).

С точки зрения топологии П.— *двумерное многообразие*. Л. А. *Сидоров*.

К3-ПОВЕРХНОСТЬ — гладкая проективная алгебраич. поверхность X, у к-рой канонич. класс тривиален и размерность $\dim H^1(X, \Omega^1)$ пространства одномерных дифференциальных форм на X равна 0. Для К3-П. известны значения следующих инвариантов: геометрич. род $p_g = \dim H^2(X, \Omega^2) = 1$, эйлерова характеристика структурного пучка $\chi(\mathcal{O}) = 2$, этальные или (над полем комплексных чисел) топологич. числа Бетти $b_0 = b_4 = 1$, $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 = 22$, характеристика Эйлера — Пуанкаре $e(X) = 24$. Формула Римана — Роха для одномерного обратимого пучка D на К3-П. приобретает вид

$$\dim H^0(X, D) + \dim H^0(X, D^{-1}) = \frac{(D)^2}{2} + 2 + \dim H^1(X, D),$$

где $(D)^2$ — индекс самопересечения класса дивизоров, соответствующего пучку D (см. *Римана — Роха теорема*). Если пучку D соответствует эффективный неприводимый дивизор, то $H^1(X, D) = 0$.

Формула для вычисления арифметич. рода неприводимой кривой C на X тоже имеет простой вид:

$$p_a(C) = \frac{(C)^2}{2} + 1.$$

Как следствие получается, что $(C)^2 \geqslant -2$, а равенство $(C)^2 = -2$ будет выполнено только для гладких рациональных кривых. Отсюда также следует, что $(D)^2$ — четное число для любого дивизора D. Пусть $N(X)$ — группа Нерона — Севери поверхности X, т. е. группа классов дивизоров на X относительно алгебраич. эквивалентности. Тогда $N(X)$ — свободная абелева группа ранга ρ, где $1 \leqslant \rho \leqslant 20$, если характеристика основного поля k равна 0, и $1 \leqslant \rho \leqslant 20$ или $\rho = 22$, если $\operatorname{char} k > 0$. Индекс пересечения определяет на $N(X)$ целозначную билинейную форму, у к-рой квадрат любого элемента четен. Поверхности с $\rho = 20$ (при $\operatorname{char} k = 0$) наз. с и н г у л я р н ы м и, а с $\rho = 22$ (при $\operatorname{char} k > 0$) — с у п е р с и н г у л я р н ы м и.

Еще один численный инвариант поверхности X — это минимальный возможный индекс π самопересечения эффективного очень обильного дивизора на X, т. е. минимальная возможная степень поляризации на X. Если $\pi = 2n - 2$, то поверхность X можно вложить в n-мерное проективное пространство и нельзя вложить в проективное пространство меньшей размерности.

Важный способ изучения К3-П.— представление их в виде семейства (пучка) эллиптич. кривых. Поверхность X представлена в виде семейства эллиптич. кривых, если задано регулярное отображение $\tau : X \to P^1$, все слои к-рого, кроме конечного их числа,— неособые эллиптич. кривые. Поверхность X может быть представлена в таком виде тогда и только тогда, когда в группе $N(X)$ есть ненулевой элемент с индексом самопересечения 0, причем всевозможные такие представления соответствуют классам эффективных дивизоров с индексом самопересечения 0. Если поверхность, представленная в виде семейства эллиптич. кривых, является К3-П., то у нее нет кратных слоев. Построенное по такому семейству якобиево эллиптич. семейство снова будет К3-П.

Важный класс К3-П.— *Куммера поверхности*. Куммерова поверхность — это неособая модель фактора двумерного абелева многообразия A по подгруппе автоморфизмов, порожденной отображением замены знака. В частности, куммеровой будет поверхность, задаваемая уравнением $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$ в P^3. Любая гладкая поверхность 4-й степени в P^3 является К3-П. Поверхностями К3 будут гладкие поверхности, получаемые как пересечение трех гиперповерхностей 2-й степени (квадрик) в P^5 и как двойное накрытие плоскости с кривой ветвления 6-й степени.

Все К3-П. над полем комплексных чисел диффеоморфны, их многообразие модулей связно и имеет размерность 19. Строение этого многообразия модулей и автоморфизмы К3-П. изучают при помощи *отображения периодов.* Для К3-П. над полем комплексных чисел отображение периодов биективно (теорема типа Торелли) (см. [2]).

Если задано одномерное семейство К3-П. (над $\mathbb{C}$) с одним вырожденным слоем, то после накрытия базы его можно перестроить, не меняя вне вырожденного слоя, так что этот вырожденный слой либо станет невырожденным, либо будет одного из двух типов: (а) компоненты вырожденного слоя и кривые пересечений рациональны, двойственный полиэдр вырожденного слоя имеет топологич. тип двумерной сферы, (б) компоненты вырожденного слоя составляют цепочку, непустое пересечение имеют только соседние поверхности, крайние две поверхности рациональны, средние — эллиптические линейчатые, кривые пересечения — эллиптические. Типы (*а*) или (*б*) возникают, когда монодромия семейства нетривиальна (см. [2]).

К3-П. над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики допускают подъем в характеристику нуль, модули их кристаллич. когомологий не имеют кручения, а ранги этих модулей совпадают с размерностями соответствующих этальных когомологий. Для суперингулярных поверхностей построен аналог отображения периодов, и для него тоже доказана теорема типа Торелли. Многообразие периодов здесь неприводимо, полно, имеет размерность 9 и унирационально. Описаны все возможные для суперсингулярных поверхностей формы пересечений на $N(X)$, их 9 для каждого значения характеристики основного поля (см. [4]).

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Куликов В. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1977, т. 41, № 5, с. 1008—42; [3] Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1981, т. 45, № 3, с. 646—61; [4] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 18, М., 1981. *А. Н. Рудаков.*

ПОВЕРХНОСТЬ ВТОРОГО ПОРЯДКА — множество точек 3-мерного действительного (или комплексного) пространства, координаты к-рых в декартовой системе удовлетворяют алгебраич. уравнению 2-й степени

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+\\+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) может и не определять действительного геометрич. образа, в таких случаях говорят, что уравнение (*) определяет мнимую П. в. п. В зависимости от значений коэффициентов общего уравнения (*) оно может быть преобразовано с помощью параллельного переноса и поворота системы координат на нек-рый угол к одному из 17 приведенных ниже канонич. видов, каждому из к-рых соответствует определенный класс поверхностей. Именно,

невырождающиеся нераспадающиеся поверхности:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — *эллипсоид,*

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ — мнимый эллипсоид,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ — однополостный *гиперболоид,*

$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — двуполостный гиперболоид,

$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ p,\ q>0$ — *эллиптический параболоид,*

$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ p,\ q>0$ — *гиперболический параболоид;*

в ы р о ж д а ю щ и е с я н е р а с п а д а ю щ и е с я п о в е р х н о с т и:

цилиндрические поверхности —

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — *эллиптический цилиндр*,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ — мнимый эллиптический цилиндр,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — *гиперболический цилиндр*,

$y^2=2px$ — *параболический цилиндр*;

конические поверхности —

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ — коническая поверхность,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ — мнимая коническая поверхность;

в ы р о ж д а ю щ и е с я р а с п а д а ю щ и е с я п о в е р х н о с т и:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ — пара пересекающихся плоскостей,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ — пара мнимых пересекающихся плоскостей,

$\frac{x^2}{a^2}=1$ — пара параллельных плоскостей,

$x^2+a^2=0$ — пара мнимых параллельных плоскостей.

$x^2=0$ — пара совпадающих плоскостей.

П. в. п., имеющие единственный центр симметрии (ц е н т р П. в. п.), наз. ц е н т р а л ь н ы м и п о в е р х н о с т я м и. Координаты центра определяются решением системы:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}=0,$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}=0,$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}=0.$$

П. в. п. без центра симметрии или с неопределенным центром наз. н е ц е н т р а л ь н ы м и п о в е р х н о с т я м и.

Исследование П. в. п. может быть осуществлено без приведения общего уравнения к канонич. виду. Это достигается совместным рассмотрением значений т. н. о с н о в н ы х и н в а р и а н т о в П. в. п.— выражений, составленных из коэффициентов уравнения (*), значения к-рых не меняются при параллельном переносе и повороте системы координат:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}, \quad \delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix},$$

$$T=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33}a_{31} \\ a_{13}a_{11} \end{vmatrix},$$

$$S=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

и с е м и и н в а р и а н т о в (п о л у и н в а р и а н т о в) Δ' и Δ'', к-рые являются инвариантами относительно поворота системы координат:

$$\Delta'=\Delta_{11}+\Delta_{22}+\Delta_{33},$$

где Δ_{ij} — алгебраич. дополнение элемента a_{ik}, в Δ;

$$\Delta''=\begin{vmatrix} a_{11}a_{14} \\ a_{41}a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22}a_{24} \\ a_{42}a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33}a_{34} \\ a_{43}a_{44} \end{vmatrix}.$$

См. табл. 1 и 2.

Табл. 1.— Классификация поверхностей второго порядка по инвариантам

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td colspan="2">Невырождающиеся поверхности</td><td>Вырождающиеся поверхности</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>$\Delta < 0$</td><td>$\Delta = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Центральные поверхности $\delta \neq 0$</td><td>$\delta S > 0$, $T > 0$</td><td>Мнимый эллипсоид</td><td>Эллипсоид</td><td>Мнимый конус</td></tr>
<tr><td>$\delta S \leqslant 0$ и (или) $T \leqslant 0$</td><td>Однополостный гиперболоид</td><td>Двуполостный гиперболоид</td><td>Действительный конус</td></tr>
<tr><td>Нецентральные поверхности $\delta = 0$</td><td></td><td>Гиперболический параболоид</td><td>Эллиптический параболоид</td><td>Цилиндрические и распадающиеся поверхности (см. табл. 2)</td></tr>
</table>

Табл. 2.—Цилиндрические и распадающиеся поверхности второго порядка ($\Delta=0$, $\delta=0$)

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Цилиндрические поверхности $\Delta' \neq 0$</td><td colspan="2">Распадающиеся поверхности $\Delta'=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$T > 0$</td><td colspan="2">Эллиптический цилиндр</td><td rowspan="2">Пара мнимых пересекающихся плоскостей</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>Мнимый $\Delta' S > 0$</td><td>Действительный $\Delta' S < 0$</td></tr>
<tr><td>$T < 0$</td><td colspan="2">Гиперболический цилиндр</td><td>Пара пересекающихся плоскостей</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$T = 0$</td><td colspan="2" rowspan="2">Параболический цилиндр</td><td>Пара мнимых параллельных плоскостей $\Delta'' > 0$</td><td rowspan="2">Пара совпадающих плоскостей $\Delta''=0$</td></tr>
<tr><td>Пара параллельных плоскостей $\Delta'' < 0$</td></tr>
</table>

Инварианты в общем случае определяют П. в. п. с точностью до движения евклидова пространства, если соответствующие инварианты двух поверхностей равны, то такие поверхности могут быть совмещены движением. Иными словами, эти поверхности эквивалентны по отношению к группе движений пространства (метрически эквивалентны).

Существует классификация П. в. п. с точки зрения других групп преобразований. Так, относительно группы аффинных преобразований эквивалентными являются любые две поверхности, определяемые уравнениями одного канонич. вида, напр. две подобные П. в. п. являются эквивалентными.

Связи между различными аффинными классами П. в. п. позволяет установить классификация с точки зрения проективной геометрии. При этом эквивалентными считаются поверхности, к-рые могут быть переведены друг в друга посредством проективного преобразования. Напр., эллипсоиды, эллиптич. параболоиды и двуполостные гиперболоиды с точки зрения проективной геометрии являются действительными овальными поверхностями. Их проективная эквивалентность проявляется в том, что существует нек-рая система проективных координат, в к-рой уравнения этих поверхностей имеют одинаковый вид:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

т. е. соответствующие квадратичные формы $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ имеют одинаковые ранг (4) и сигнатуру (3). Аффинное их различие проявляется в типе линии пересечения с несобственной плоскостью: эллипсоиды пересекаются с ней по мнимому овалу, гиперболоиды — по действительному овалу, эллиптич. параболоиды — по паре мнимых пересекающихся прямых. Всего существует 8 классов проективной эквивалентности П. в. п.:

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$ — мнимая овальная поверхность,

$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$ — действительная овальная поверхность,

$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$ — кольцевидная поверхность,

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ — мнимая коническая поверхность,

$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ — действительная коническая поверхность,

$x_1^2+x_2^2=0$ — пара мнимых плоскостей,

$x_1^2-x_2^2=0$ — пара действительных плоскостей,

$x_1^2=0$ — пара совпадающих плоскостей.

Лит. см. при ст. *Линия второго порядка*. *А. Б. Иванов.*

ПОВОРОТОВ ДИАГРАММА — поверхность в эллиптическом пространстве $Э^3$, определяемая изометричными гладкими поверхностями F и F^* в евклидовом пространстве E^3 аналогично тому, как определяется *вращений индикатриса* для бесконечно малых изгибаний в E^3. О поверхности в эллиптич. пространстве, совпадающей с П. д., впервые упомянул Л. Бианки (L. Bianchi) при исследовании сферич. изображения основания изгибания поверхностей, показавший, что оно совпадает с изображением в смысле Клиффорда асимптотич. линий П. д.

Пусть F и F^* — изометричные гладкие одинаково ориентированные поверхности. В соответствующих по изометрии точках M и M^* триэдры, образованные касательными векторами x_u, x_v и $\overset{*}{x}_u$, $\overset{*}{x}_v$ к соответствующим по изометрии парам кривых $v=\text{const}$ и $u=\text{const}$ и нормалями n и n^*, равны, т. е.

$$(x_u)^2=(\overset{*}{x}_u)^2,\ (x_v)^2=(\overset{*}{x}_v)^2,$$

$$(n^*)^2=(n)^2=1,\ (x_u,\ x_v)=(\overset{*}{x}_u,\ \overset{*}{x}_v),$$

$$(nx_u)^2=(n^*\overset{*}{x}_u)=(nx_v)=(n^*\overset{*}{x}_v)=0,$$

и потому получаются один из другого поворотом вокруг оси с направляющим ортом $\overset{\circ}{V}$ на угол χ (определяемый с точностью до 2π). Пусть

$$Q=\cos\frac{\chi}{2}+\overset{\circ}{V}\sin\frac{\chi}{2}$$

— кватернион, по модулю равный 1 и определяемый с точностью до знака, представляющий указанный поворот. Совокупность таких кватернионов, параметризованная точками $M\in F$ (или $M^*\in F^*$), определяет множество точек в эллиптич. пространстве, называемое **диаграммой поворота** для изометричных поверхностей F и F^*. Напр., если F и F^* — изометричные куски цилиндров, то П. д. — кусок поверхности Клиффорда, причем круглым цилиндрам соответствует минимальная поверхность Клиффорда. Если $|\chi|<\pi$, то вне П. д. есть эллиптич. плоскость, и при геодезич. отображении эллиптич. пространства в евклидово:

$$Q=\overset{\circ}{V}\sin\frac{\chi}{2}+\cos\frac{\chi}{2}\to y=\overset{\circ}{V}\operatorname{tg}\frac{\chi}{2},$$

образом П. д. является индикатриса вращений нек-рого бесконечно малого изгибания срединной поверхности, соответствующей F и F^* (см. *Кон-Фоссена преобразование*) (при условии $|\chi|<\pi$ она регулярна).

Свойства П. д. для изометричных поверхностей положительной гауссовой кривизны аналогичны свойствам индикатрисы вращений: напр., удельная внутренняя кривизна П. д. всюду отрицательна, и потому она играет при исследовании изометрии выпуклых поверхностей такую же роль, что и индикатриса вращений. *М. И. Войцеховский.*

ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ЗАКОН — предельная теорема теории вероятностей, являющаяся уточнением *больших чисел усиленного закона*. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность случайных величин и

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Для простоты предполагается, что S_n для каждого n имеет нуль своей медианой. В то время как теоремы об усиленном законе больших чисел указывают условия, при к-рых $\frac{S_n}{a_n} \to 0$ почти наверное (п. н.) при $n \to \infty$, где $\{a_n\}$ — числовая последовательность, теоремы о П. л. з. имеют дело с числовыми последовательностями $\{c_n\}$ такими, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{c_n} = 1 \text{ п.н.} \tag{1}$$

или

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{c_n} = 1 \text{ п.н.} \tag{2}$$

Соотношение (1) равносильно тому, что

$$\mathsf{P}\{S_n > (1+\varepsilon)\, c_n \text{ б.ч.}\} = 0$$

и

$$\mathsf{P}\{S_n > (1-\varepsilon)\, c_n \text{ б.ч.}\} = 1$$

для любого $\varepsilon > 0$, где запись «б. ч.» означает бесконечное число раз.

Соотношения вида (1) и (2) справедливы при более ограничительных условиях, чем оценки, вытекающие из усиленного закона больших чисел. Если $\{X_n\}$ — последовательность *независимых случайных величин*, имеющих одинаковое распределение с математич. ожиданием, равным нулю, то

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \text{ п.н. при } n \to \infty$$

(теорема Колмогорова); если выполнено дополнительное условие $0 < \mathsf{E}X_1^2 < \infty$, то имеет место более сильное соотношение (2), в к-ром

$$c_n = (2nb \ln\ln(nb))^{1/2},$$

где $b = \mathsf{E}X_1^2$ (теорема Хартмана — Винтнера).

Первой теоремой общего типа о законе повторного логарифма был следующий результат А. Н. Колмогорова [1]. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин с математич. ожиданиями, равными нулю, конечными дисперсиями и пусть

$$B_n = \sum_{k=1}^n \mathsf{E}X_k^2.$$

Если $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и существует последовательность положительных постоянных $\{M_n\}$ такая, что

$$|X_n| \leqslant M_n \text{ и } M_n = o\left(\left(\frac{B_n}{\ln\ln B_n}\right)^{1/2}\right),$$

то выполнены соотношения (1) и (2) при

$$c_n = (2B_n \ln\ln B_n)^{1/2}.$$

В частном случае, когда $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение с двумя значениями, это утверждение было получено А. Я. Хинчиным [2]. Ю. Марцинкевич и А. Зигмунд [3] показали, что в условиях теоремы Колмогорова нельзя заменить o на O. Обобщения П. л. з. Колмогорова для последовательностей независимых ограниченных неодинаково распределенных случайных величин были исследованы В. Феллером [4]. Другие обобщения П. л. з. см. в [5]; имеется также следующий результат (см. [6]), примыкающий к теореме Хартмана — Винтнера: если $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение с бесконечной дисперсией, то

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{(n \ln n \ln n)^{1/2}} = \infty \text{ п.н.}$$

Результаты, полученные в области П. л. з. для последовательностей независимых случайных величин, послужили отправным пунктом для многочисленных исследований применимости П. л. з. к последовательностям зависимых случайных величин и векторов и к случайным процессам.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1929, Bd 101, S. 126—35; [2] Хинчин А. Я., «Fundam. math.», 1924, v. 6, p. 9—20; [3] Marcinkiewicz J., Zygmund A., там же, 1937, v. 29, p. 215—22; [4] Feller W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 54, p. 373—402; [5] Strassen V., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1964, Bd 3, S. 211—26; [6] его же, там же, 1965—66, Bd 4, S. 265—68; [7] Hartman P., Wintner A., «Amer. J. Math.», 1941, v. 63, p. 169—176; [8] Ламперти Дж., Вероятность, пер. с англ., М., 1973; [9] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972.

В. В. Петров.

ПОВТОРНЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл, в к-ром последовательно выполняется интегрирование по разным переменным, т. е. интеграл вида

$$\int_{A_y} \left[\int_{A(y)} f(x, y)\, dx \right] dy. \tag{1}$$

Функция $f(x, y)$ определена на множестве A, лежащем в прямом произведении $X \times Y$ пространств X и Y, в к-рых заданы σ-конечные меры μ_x и μ_y, обладающие свойством полноты; множество $A(y) = \{x: (x, y) \in A\} \subset X$ («сечение» множества A), измеримое относительно меры μ_x; множество A_y (проекция множества A в пространство Y), измеримое относительно меры μ_y. Интегрирование по $A(y)$ производится по мере μ_x, а по A_y — по мере μ_y. Интеграл (1) обозначают также

$$\int_{A_y} dy \int_{A(y)} f(x, y)\, dx.$$

К П. и. могут быть сведены *кратные интегралы*.

Пусть функция $f(x, y)$, интегрируемая по мере $\mu = \mu_x \times \mu_y$ на множестве $A \subset X \times Y$, продолжена нулем на все пространство $X \times Y$, тогда П. и.

$$\int_Y dy \int_X f(x, y)\, dx$$

и

$$\int_X dx \int_Y f(x, y)\, dy$$

существуют и равны между собой:

$$\int_Y dy \int_X f(x, y)\, dx = \int_X dx \int_Y f(x, y)\, dy \tag{2}$$

(см. *Фубини теорема*). В левом интеграле внешнее интегрирование фактически производится по множеству $A_y^* = \{y : y \in A_y,\ \mu_x A(y) > 0\}$. Таким образом, в частности, для точек $y \in A_y^*$ множества $A(y)$ измеримы относительно меры μ_x. По всему множеству A_y брать этот интеграл, вообще говоря, нельзя, т. к. при измеримом относительно меры μ множества A множество A_y может оказаться неизмеримым относительно меры μ_y, так же, как и отдельные множества $A(y)$, $y \in A_y$, могут быть неизмеримы относительно меры μ_x. Множество же A_y^* всегда измеримо относительно меры μ_y, если только множество A измеримо относительно меры μ.

Сформулированные условия возможности перемены порядка интегрирования в П. и. являются лишь достаточными, но не необходимыми: иногда перемена порядка интегрирования в П. и. допустима, а соответствующий кратный интеграл не существует. Напр., для функции $f(x, y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ при $x^2+y^2>0$ и $f(0, 0)=0$ П. и.

$$\int_{-1}^{+1} dx \int_{-1}^{+1} f(x, y)\, dy = \int_{-1}^{+1} dy \int_{-1}^{+1} f(x, y)\, dx,$$

а кратный интеграл

$$\iint_{|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1} f(x, y)\, dx\, dy$$

не существует. Однако если существует хотя бы один из интегралов

$$\int_Y dy \int_X |f(x, y)|\, dx \text{ или } \int_X dx \int_Y |f(x, y)|\, dy,$$

то функция f интегрируема на множестве $X \times Y$ и справедливо равенство (2).

Для П. и. в случае, когда внутренний интеграл является *интегралом Стилтьеса*, а внешний — *интегралом Лебега*, справедлива следующая теорема о перемене порядка интегрирования: пусть функция $g(x, y)$ суммируема по y на $[c, d]$ для всех значений x из $[a, b]$ и является функцией ограниченной вариации по x на $[a, b]$ для почти всех значений $y \in [c, d]$. Пусть, далее, полная вариация функции $g(x, y)$ по переменной x на $[a, b]$ при всех указанных значениях y не превышает нек-рой неотрицательной и суммируемой на $[c, d]$ функции. Тогда функция $\int_c^d g(x, y) dy$ является функцией ограниченной вариации от переменной x на $[a, b]$ и для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ имеет место формула

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x)\, d_x g(x, y) = \int_a^b f(x)\, d_x \left[\int_c^d g(x, y)\, dy \right].$$

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 2, М., 1981; [4] Никольский С. М., Курс математичеcкого анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975; [5] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959.

Л. Д. Кудрявцев.

ПОВТОРНЫЙ ПРЕДЕЛ — предел функции нескольких переменных, при к-ром предельный переход совершают последовательно по различным переменным. Пусть, напр., функция f двух переменных x и y определена на множестве вида $X \times Y$, $x \in X \subset \mathbb{R}^m$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^n$, и пусть x_0, y_0 — предельные точки соответственно множеств X и Y или символы ∞ (в случае, когда $m=1$ или $n=1$, x_0 и соответственно y_0 могут быть бесконечностями со знаком: $+\infty$, $-\infty$). Если при любом фиксированном $y \in Y$ существует предел

$$\varphi(y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y) \tag{1}$$

и у функции $\varphi(y)$ существует предел

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y),$$

то этот предел наз. **повторным пределом**

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) \tag{2}$$

функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0). Аналогично определяется П. п.

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y). \tag{3}$$

Если существует (конечный или бесконечный) *двойной предел*

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) \tag{4}$$

и при любом фиксированном $y \in Y$ существует конечный предел (1), то существует и П. п. (2) и он равен двойному пределу (4).

Если при каждом $y \in Y$ существует предел (1), а при каждом $x \in X$ существует предел

$$\psi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

и если при $x \to x_0$ функция $f(x, y)$ стремится на Y к предельной функции $\varphi(y)$ равномерно относительно y, то оба П. п. (2) и (3) существуют и равны друг другу.

Если множества X и Y являются множествами натуральных чисел, то функция f наз. в этом случае двойной последовательностью и значения аргументов пишут в виде индексов:

$$f(m, n) = u_{mn},$$

а П. п.

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} = u_{mn} \text{ и } \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} u_{mn}$$

наз. повторными пределами двойной последовательности. Понятие П. п. обобщается на случай, когда X, Y и множество значений функции f являются подмножествами нек-рых топологич. пространств.

Л. Д. Кудрявцев.

ПОВТОРНЫЙ РЯД — ряд, члены к-рого являются также рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} \right). \tag{1}$$

П. р. (1) наз. сходящимся, если при любом фиксированном n сходится ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} = a_n$$

и, кроме того, сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Сумма последнего ряда и наз. суммой повторного ряда (1). Сумма

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} \right).$$

П. р. (1) является повторным пределом его частичных сумм

$$s_{mn} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} u_{kl},$$

то есть

$$s = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} s_{mn}.$$

Если сходится *двойной ряд*

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty} u_{mn} \tag{2}$$

и при любом натуральном n сходятся ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn},$$

то сходится и П. р. (1), причем он имеет ту же сумму, что и двойной ряд (2). Условие этой теоремы выполняется, в частности, если двойной ряд (2) абсолютно сходится.

Л. Д. Кудрявцев.

ПОГЛОЩАЮЩЕЕ СОСТОЯНИЕ цепи Маркова $\xi(t)$ — такое состояние i, что

$$\mathsf{P}\{\xi(t)=i \mid \xi(s)=i\}=1 \text{ при любых } t \geqslant s.$$

Примером *Маркова цепи* с поглощающим состоянием 0 является *ветвящийся процесс*.

Введение дополнительных поглощающих состояний — удобный прием, к-рый помогает исследовать свойства траекторий цепи Маркова, связанные с достижением того или иного множества.

Пример. Пусть в множестве S состояний однородной цепи Маркова $\xi(t)$ с дискретным временем и переходными вероятностями

$$p_{ij}=\mathsf{P}\{\xi(t+1)=j \mid \xi(t)=i\}$$

выделено подмножество H и нужно найти вероятности

$$q_{ih}=\mathsf{P}\{\xi(\tau(H))=h \mid \xi(0)=i\}, \quad i \in S, \ h \in H,$$

где $\tau(H)=\min\{t>0: \xi(t) \in H\}$ — момент первого достижения множества H. Если ввести вспомогательную цепь Маркова $\xi^*(t)$, отличающуюся от $\xi(t)$ лишь тем, что в $\xi^*(t)$ все состояния $h \in H$ поглощающие, то при $h \in H$ вероятности

$$p_{ih}^*(t)=\mathsf{P}\{\xi^*(t)=h \mid \xi^*(0)=i\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\tau(H) \leqslant t, \ \xi(\tau(H))=h \mid \xi(0)=i\}$$

монотонно не убывают при $t \uparrow \infty$ и

$$q_{ih}=\lim_{t \to \infty} p_{ih}^*(t), \ i \in S, \ h \in H. \tag{*}$$

В силу основного определения цепи Маркова

$$p_{ih}^*(t+1)=\sum\nolimits_{j \in S} p_{ij} p_{jh}^*(t), \ t \geqslant 0, \ i \in S \setminus H, \ h \in H,$$
$$p_{hh}^*(t)=1, \ h \in H, \ p_{ih}^*(t)=0, \ i, \ h \in H, \ i \neq h.$$

Переход к пределу при $t \to \infty$ с учетом (*) дает для q_{ih} систему линейных уравнений:

$$q_{ih}=\sum\nolimits_{j \in S} p_{ij} q_{ih}, \ i \in S \setminus H, \ h \in H,$$
$$q_{hh}=1, \ h \in H, \ q_{ih}=0, \ i, \ h \in H, \ i \neq h.$$

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967.

А. М. Зубков.

ПОГЛОЩЕНИЯ ЗАКОНЫ — тождества вида

$$x \wedge (x \vee y)=x, \ x \vee (x \wedge y)=x,$$

где $\wedge$ и $\vee$ — две двуместные операции на нек-ром множестве L. Если, кроме П. з., эти операции удовлетворяют законам коммутативности и ассоциативности, то отношение $x \leqslant y$, определяемое эквивалентностью

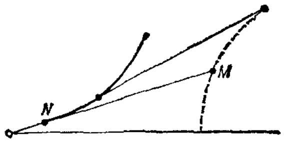
$$x \leqslant y \leftrightarrow x \vee y=y \tag{*}$$

(или равносильной эквивалентностью $x \leqslant y \leftrightarrow x \wedge y=x$), будет порядковым отношением таким, что $x \wedge y$ — наибольшая нижняя грань, а $x \vee y$ — наименьшая верхняя грань элементов x и y. С другой стороны, если в упорядоченном множестве $(L, \leqslant)$ существуют наибольшая нижняя грань $x \wedge y$ и наименьшая верхняя грань $x \vee y$ для любой пары элементов x, y, то для операций $\vee$ и $\wedge$ выполняются законы поглощения, коммутативности, ассоциативности и справедлива эквивалентность (*).

Лит.: [1] Расёва Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972.

В. Н. Гришин.

ПОГОНИ ЛИНИЯ — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», к-рая ставится следующим образом. Пусть точка M равномерно движется по нек-рой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки N такую, что касательная, проведенная к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки M. В плоском слу-



чае система уравнений, к-рым должна удовлетворять П. л., имеет вид

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x),\ F(\xi,\ \eta) = 0,$$

где $\frac{dy}{dx}$ — угловой коэффициент П. л., $F(\xi,\ \eta)=0$ — уравнение заданной кривой.

Задача о П. л. поставлена Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci), решена П. Буге (P. Bouguer, 1732).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ТЕОРИЯ — асимптотическое приближение решения граничных задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных (сингулярных задач) в подобластях с существенным влиянием членов со старшими производными на решение. Явление пограничного слоя (п. с.) возникает в узких зонах вблизи частей границы, на к-рых существует различие между числом граничных условий исходной и вырожденной (при нулевом значении параметра малости) задач, а также вблизи поверхностей разрыва решения вырожденной задачи.

Решение сингулярных задач представимо суммой двух разложений. Внешнее разложение дает метод малого параметра с частью B_0 граничных условий $B=B_0+B_1$ задачи. Внутреннее разложение быстро убывает вне п. с. и отыскивается, как правило, в виде многочленов по степеням ε. Для их определения дифференциальные уравнения преобразуются к переменным, зависящим от ε и растягивающим подобласти пограничного слоя. Уравнения п. с. возникают в результате приравнивания нулю коэффициентов при различных степенях ε после подстановки многочленов в преобразованные уравнения. К ним добавляются условия B_1. Оценка погрешности внешнего разложения, если она найдена, показывает необходимую замену переменных. При решении сложных прикладных задач необходимая замена переменных может быть выявлена на основе физич. оценки величин членов исходных уравнений и соответствующих им упрощений и должна освободить старшие производные от ε. Для решения задачи необходимо определить, где расположены п. с. и как условия B разделяются на B_0 и B_1. Своеобразие такого решения заключается в том, что исходным эллиптич. уравнением могут отвечать гиперболич. уравнения внешних разложений и параболические — внутренних разложений.

В теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x_t = f(x,\ y,\ t),\ \varepsilon y_t = g(x,\ y,\ t),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \quad (1)$$

где x и f суть m-мерные, а y и g суть n-мерные векторные функции, для задачи Коши с условиями $x(0,\ \varepsilon)=x^0$, $y(0,\ \varepsilon)=y^0$ и определенными свойствами f и g доказана теорема существования и единственности решения и установлены свойства решения при $\varepsilon \to 0$ (см. [1]). В случае краевой задачи для уравнения (1) с условиями

$$x(0,\ \varepsilon)=x^0,\ y_1(0,\ \varepsilon)=y_1^0,\ y_2(0,\ \varepsilon)=y_2^0,$$

где сумма числа компонент векторов y_1 и y_2 равна n, существуют, вообще говоря, п. с. в окрестностях концов сегмента $[0, T]$. Построен алгоритм нахождения асимптотики решения этой задачи, при определенных свойствах функций f и g доказано существование и единственность решения и даны его оценки (см. [3]). В случае неединственности решения предельного уравнения $g=0$ относительно y построен внутренний (в окрестности τ, $0<\tau<T$) п. с., разделяющий области с различными решениями предельного уравнения. Для одного типа интегро-дифференциального уравнения построен алгоритм асимптотич. разложения по ε задачи с начальными условиями и исследованы нек-рые особенности поведения решений.

В случае линейных обыкновенных дифференциальных уравнений $(L+\varepsilon M)x=f(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, где L и M — дифференциальные операторы, с граничными условиями B_0+B_1 выделен класс задач, решение к-рых содержит п. с., и введено понятие регулярного вырождения, при к-ром решение предельного уравнения позволяет удовлетворить условиям B_0, а асимптотич. решение для п. с.— условиям B_1 (см. [4]). Построен итерационный процесс асимптотич. представления решения и даны оценки остаточных членов разложений.

В П. с. т. общего нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка при определенных предположениях доказано (см. [5]), что решение 1-й краевой задачи складывается из внешнего решения, п. с. и остаточного члена, имеющего с 1-й производной порядок ε на всем сегменте.

Изучено поведение решений краевых задач основных типов для линейного уравнения с частными производными вида

$$\varepsilon\Delta u+A(x, y)u_x+B(x, y)u_y+C(x, y)u=f(x, y),$$

где Δ — оператор Лапласа, в области D с границей S. Построены условия на функции A, B, C, f, границу S и функции a, φ точки P линии S, входящие в граничное условие $u_n+a(P)=\varphi(P)$, при к-рых u в $D+S$ равномерно стремится к решению предельного уравнения с приведенным граничным условием на определенной части S (отсутствие п. с.) (см. [6]).

Для эллиптич. уравнения 2-го порядка в области D с границей S на примере двух независимых переменных

$$\varepsilon[a(x, y)u_{xx}+2b(x, y)u_{xy}+c(x, y)u_{yy}+$$
$$+d(x, y)u_x+e(x, y)u_y+g(x, y)u]+u_x-$$
$$-h(x, y)u=f(x, y),\ h\geqslant\alpha^2>0,$$

построены итерационные процессы решения задачи с условием $u=0$ на S, доказаны теоремы о структуре разложения u по ε и даны оценки остаточного члена этого разложения (см. [4]). Аналогичные результаты получены и для уравнений высших порядков.

Разработан (см. [7]) метод сращивания асимптотич. разложений для уравнения

$$\varepsilon\Delta u-a(x, y)u_y=f(x, y)$$

в прямоугольнике с заданным u на его границе.

Исследования П. с. т. для нелинейных уравнений с частными производными связаны в основном с аэрогидродинамикой и базируются на уравнениях Навье—Стокса и их обобщениях. Запросы практики привели как к развитию математич. теории, так и к возникновению различных задач и методов их решения. Здесь речь будет идти только о ламинарных течениях (см. [8] — [10]).

Гидродинамика плоских ($k=0$) и осесимметричных ($k=1$) течений несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости ν описывается уравнениями Навье — Стокса

$$\left.\begin{array}{r}(\eta^k u)_\xi + (\eta^k v)_\eta = 0, \quad u_\tau + u u_\xi + v u_\eta = \varepsilon^2 \Delta u - p_\xi\,, \\ v_\tau + u v_\xi + v v_\eta = \varepsilon^2 \Delta v - p_\eta\,,\end{array}\right\} \quad (2)$$

где $\varepsilon = R^{-1/2}$, $R = wX/\nu$ — число Рейнольдса, представленное через характерные величины скорости w и линейного размера X. На замкнутой границе S области D решения задаются краевые условия, причем на обтекаемом контуре Г при $\eta = H(\xi)$ задаются условия $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = v_0(\xi,\ H(\xi))$, где $\bar{u}$, $\bar{v}$ — касательная и нормальная к Г составляющие вектора $(u,\ v)$. В $D + S$ задаются начальные значения u, v, p.

При малом ε асимптотич. решение задачи в первом приближении составляется из решения уравнений (2) при $\varepsilon = 0$ с частью условий на S (на Г ставится только условие $v = v_0$) и решения уравнений п. с. Уравнения динамического п. с. выводятся в предположении, что условная толщина п. с. δ и величина v имеют порядки $\delta \sim X\varepsilon$, $v \sim w\varepsilon$, а члены левых частей последних уравнений из (2) имеют порядок членов с ε^2. Введение переменных $t = \tau$, $x = \xi$, $y = \eta/\varepsilon$, $V = v/\varepsilon$ приводит при $\varepsilon \to 0$ к уравнениям Прандтля

$$(r^k u)_x + (r^k V)_y = 0, \;\; u_t + u u_x + V u_y = u_{yy} - p_x, \;\; p_y = 0, \quad (3)$$
$$0 \leqslant t \leqslant T, \; 0 \leqslant x \leqslant X_0, \; 0 \leqslant y < \infty,$$

с условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x,\ y),\; v|_{t=0} = v_0(x,\ y),\; u|_{y=0} = 0,$$
$$V|_{y=0} = v_0(t,\ x),$$
$$u \to W(t,\ x) \text{ при } y \to \infty,\; p_x = -WW_x - W_t,\; u|_{x=0} = 0,$$

где r — расстояние от оси симметрии при $k = 1$, $W(x)$ — известная функция. Эти уравнения и условия справедливы для любого криволинейного контура, радиус кривизны к-рого много больше δ. В последнем случае x, y — координаты вдоль контура и по нормали к нему.

При постоянном W задача сводится к краевой для обыкновенного дифференциального уравнения. Имеются и другие классы подобных решений.

Известны условия, при к-рых решения задач п. с. существуют, исследованы вопросы единственности и устойчивости решений и их выхода на решения стационарных задач (см. [11]). Решения строятся по методу прямых, доказана их сходимость.

Уравнения п. с. для сжимаемой жидкости выводятся из уравнений для течений вязкого и теплопроводного газа и значительно более сложны, чем (3). Возрастает и их количество. Имеется интегральное преобразование, упрощающее эти уравнения в общем случае и сводящее их к (3) при числе Прандтля $\mathrm{Pr} = c_p/K = 1$, где c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении, K — коэффициент теплопроводности (см. [12]). Известен ряд модификаций преобразования. В общем случае уравнения п. с. описывают т. н. естественные конвективные течения. Если ν не зависит от температуры и архимедова сила пренебрежимо мала, то уравнение энергии отделяется от системы уравнений п. с. и говорят о вынужденных конвективных течениях. Уравнение энергии определяет тепловой п. с., толщина к-рого отличается от δ.

П. с. возникают и в зоне раздела течений с различными характерными скоростями. Ударные волны также являются п. с.

Отдельный класс двумерных задач п. с. связан с течениями у вращающихся осесимметричных пластин и тел.

Вместе с развитием методов решения нестационарных задач решены задачи с периодическим W, при движении скачком из состояния покоя, при ускоренном движении, для п. с. за ударной волной, при переменной температуре обтекаемой поверхности.

В П. с. т. трехмерных течений развиты методы решения задач и рассмотрены случаи, приводящие к упрощению уравнений. Уравнения п. с. на скользящем цилиндрич. крыле бесконечного размаха аналогичны уравнениям двумерного п. с. В приближенной постановке решены задачи п. с. на вращающейся цилиндрич. лопасти пропеллера и на вращающемся цилиндре в косо набегающем потоке, а также задача п. с. вблизи линии пересечения двух плоскостей.

Перечисленные исследования п. с. в аэрогидродинамике относятся к первому приближению П. с. т. Высшие приближения позволяют проводить исследования взаимодействия п. с. с внешним потоком, а также расчеты при умеренных числах R (см. [13]).

Устойчивость п. с. позволяет определить границы применимости теории. Имеются исследования (см. [14]) на основе метода малых возмущений с периодическими и локальными начальными возмущениями. В случае плоских течений анализ 3-мерных возмущений в линейном приближении сводится на основании теоремы Сквайра к 2-мерному с измененным значением ν. Нелинейный анализ при потере устойчивости обнаруживает появление продольных вихрей.

Физич. обобщения задач П. с. т. (см. [15] — [17]) связаны с изучением многофазных течений, с использованием реальных уравнений состояния и коэффициентов переноса (усложнение уравнений), с рассмотрением неравновесных течений с диффузией (расширение системы уравнений и приобретение ею параболико-гиперболич. типа), с учетом абляции обтекаемой поверхности (усложнение граничных условий и необходимость расчета теплопроводности в теле), с учетом переноса излучения (интегро-дифференциальные уравнения).

Дальнейшее развитие П. с. т. в аэрогидродинамике получила при исследовании течений, не удовлетворяющих предположениям Прандтля, с решениями в виде многослойных асимптотич. разложений. Источником сложности структуры решения являются дополнительные малые параметры в граничных условиях (напр., из-за малого радиуса кривизны обтекаемого контура), существования особых точек, линий или поверхностей в первом приближении П. с. т., а также возможная бифуркация решения.

К этому классу относятся течения около точек отрыва и присоединения п. с. к обтекаемому контуру и около точек падения на п. с. ударных волн. Характерные решения (см. [18] — [20]) имеют трехслойную структуру. Внешнее решение определяет возмущенное п. с. потенциальное течение и описывается уравнениями в возмущениях. Средний слой толщины порядка $X\varepsilon$ описывается уравнениями невязких завихренных течений с $p_y=0$, и в него поступает газ из основной части предшествующего п. с.

Уравнения 3-го, самого тонкого, пристеночного слоя выводятся в предположении, что его длина и толщина имеют соответственно порядки $X\varepsilon^{3/4}$, $X\varepsilon^{5/4}$. Введение в стационарном случае переменных

$$x=\xi\varepsilon^{-3/4},\ y=\eta\varepsilon^{-5/4},\ U=u\varepsilon^{-1/4},\ V=v\varepsilon^{-3/4},\ P=p\varepsilon^{-1/2}$$

приводит при $\varepsilon\to 0$ снова к уравнениям (3), в к-рых следует u заменить на U, а p — на P. Эта структура решения задачи характерна для широкого класса течений с малыми величинами возмущений.

Исследованы многие задачи динамики течений при малых ε, в к-рых на коротких расстояниях давление во внешнем сверхзвуковом ($M>1$, $M=w/c$, где w — скорость газа, c — скорость звука) потоке меняется сильно. К ним относятся задачи расчета обтекания контуров с большой локальной кривизной и присоединения потока к поверхности тела. В этих случаях при трехслойной схеме решения в среднем слое $p_y \neq 0$.

Изучен класс задач, в к-рых возмущенное решение занимает конечную область. Эти решения реализуются на режимах умеренного и сильного взаимодействия п. с. с внешним гиперзвуковым ($M \to \infty$) потоком и при сверхзвуковом обтекании тел конечной длины, через поверхность к-рых производится интенсивный вдув ($v_0 > 0$) газа. В этих задачах величина давления на всей внешней границе п. с. определяется из решения полной задачи. Возмущение от задней кромки тела распространяется вверх по потоку, что определяется неединственностью решения в окрестности передней кромки тела.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., «Матем. сб.», 1952, т. 31, № 3, с. 575—86; [2] Вазов В., Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1968; [3] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., 1973; [4] Вишик М. И., Люстерник Л. А., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 5, с. 3—122; 1960, т. 15, в. 3, с. 3—80; [5] Коул Дж., Методы возмущений в прикладной математике, пер. с англ., М., 1972; [6] Олейник О. А., «Матем. сб.», 1952, т. 31, № 1, с. 104—17; [7] Ильин А. М., Леликова Е. Ф., там же, 1975, т. 96, № 4, с. 568—83; [8] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, 4 изд., ч. 2, М., 1963; [9] Лойцянский Л. Г., Ламинарный пограничный слой, М., 1962; [10] Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, пер. с нем., М., 1974; [11] Олейник О. А., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 3, с. 3—65; [12] Дородницын А. А., «Прикл. матем. и механ.», 1942, т. 6, в. 6, с. 449—86; [13] Ван-Дайк М., Методы возмущений в механике жидкости, пер. с англ., М., 1967; [14] Бетчов Р., Криминале В., Вопросы гидродинамической устойчивости, пер. с англ., М., 1971; [15] Соу С., Гидродинамика многофазных систем, пер. с англ., М., 1971; [16] Дорренс У. Х., Гиперзвуковые течения вязкого газа, пер. с англ., М., 1966; [17] Кэйс В. М., Конвективный тепло- и массообмен, пер. с англ., М., 1972; [18] Нейланд В. Я., «Изв. АН СССР. Механ. жидк. и газа», 1969, № 4, с. 53—57; [19] его же, «Тр. ЦАГИ», 1974, в. 1529; [20] Stewartson K., «Advances Appl. Mech.», 1974, v. 14, p. 145—239. *Ю. Д. Шмыглевский.*

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ — область больших значений градиента функций, в частности в гидродинамике, область течения вязкой жидкости (газа) с малой по сравнению с продольными размерами поперечной толщиной, образующаяся у поверхности обтекаемого твердого тела или на границе раздела двух потоков жидкостей с различными скоростями, температурами или химич. составами. П. с. характеризуется резким изменением в поперечном направлении скорости (динамический П. с.) или температуры (тепловой, или температурный, П. с.), или же концентраций отдельных химич. компонентов (диффузионный, или концентрационный, П. с.). Понятие П. с. и сам термин были введены Л. Прандтлем (L. Prandtl, 1904) в связи с решением краевой задачи для нелинейных уравнений с частными производными гидродинамики вязких жидкостей. Нужды развития авиации определили разработку теории П. с. в аэрогидродинамике. В сер. 20 в. стала развиваться математическая *пограничного слоя теория*, а также приложения в теории теплопередачи, диффузии, процессов в полупроводниках и др. *Ю. Д. Шмыглевский.*

ПОГРЕШНОСТЬ — разность $x-a$, где a — данное число, к-рое рассматривается как приближенное значение нек-рой величины, точное значение к-рой равно x. Разность $x-a$ наз. также абсолютной П. Отношение $x-a$ к a наз. относительной П. числа a. Для характеристики П. обычно пользуются указанием ее границ. Число $\Delta(a)$ такое, что

$$|x-a| \leqslant \Delta(a),$$

наз. границей абсолютной П. Число $\delta(a)$ такое, что

$$\left|\frac{x-a}{a}\right| \leqslant \delta(a),$$

наз. границей относительной П. Границы относительной П. часто выражают в процентах. В качестве $\Delta(a)$ и $\delta(a)$ берутся по возможности меньшие числа.

Информацию о том, что число a является приближенным значением числа x с границей абсолютной П. $\Delta(a)$, принято записывать в виде

$$x = a \pm \Delta(a).$$

Аналогичное соотношение для относительной П. записывается в виде

$$x = a(1 \pm \delta(a)).$$

Границы абсолютной и относительной П. указывают на максимально возможное расхождение x и a. Наряду с ними часто употребляются характеристики П., учитывающие характер возникновения П. (напр., погрешность измерений) и частоту различных значений разности x и a. При таком подходе к П. используются методы теории вероятностей (см. *Ошибок теория*).

При численном решении задачи П. результата обуславливается неточностями, к-рые присущи формулировке задачи и способам ее решения. П., возникающую вследствие неточности математич. описания реального процесса, наз. П. математической модели; возникающую вследствие неточности задания исходных данных — П. входных данных; возникающую вследствие неточности метода решения — П. метода; возникающую вследствие неточности вычислений — вычислительной П. Иногда П. математич. модели и П. входных данных объединяют под одним названием — неустранимая П.

В процессе вычислений исходные П. последовательно переходят от операции к операции, накапливаясь и порождая новые П. Возникновение и распространение П. в вычислениях являются предметом специальных исследований (см. *Вычислительная математика*).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977.

Г. Д. Ким.

ПОГРУЖАЮЩАЯ ОПЕРАЦИЯ — в математической логике операция, переводящая выражения одного логико-математич. языка в выражения другого с сохранением тех или иных дедуктивных свойств. П. о. широко используются для установления взаимосвязи между различными логич. теориями, *исчислениями*.

Напр., если формуле A формальной арифметики сопоставить формулу A^* этого же языка, вставив два отрицания перед ней и перед каждой ее подформулой (напр., $(A \vee B)^*$ есть $\neg\neg(\neg\neg A^* \vee \neg\neg B^*)$, а $(\exists x A)^*$ есть $\neg\neg\exists x \neg\neg A^*$, и т. д.), то из выводимости A в классической формальной арифметике следует выводимость A^* уже в интуиционистской формальной арифметике. Отсюда вытекает, что непротиворечивость интуиционистской формальной арифметики влечет непротиворечивость и классической формальной арифметики. Описанная негативная интерпретация Гёделя позволяет, следовательно, указать важное взаимоотношение между интуиционистской и классич. арифметиками.

Другой типичный пример П. о. — перевод Гёделя — Тарского, позволяющий установить взаимосвязь модальных и интуиционистских логик. Построение моделей в аксиоматич. теории множеств также может быть обычно интерпретировано синтаксически как построение нек-рой П. о. — внутренней модели теории множеств.

Лит.: [1] Шенфилд Дж. Р., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; [2] Фейс Р., Модальная логика, пер. с англ., М., 1974; [3] Драгалин А. Г., Математический интуиционизм, М., 1979.

А. Г. Драгалин.

ПОГРУЖЕНИЕ, иммерсия, — отображение $f: X \to Y$ одного топологич. пространства в другое, при к-ром каждая точка в X имеет окрестность U, к-рую

f гомеоморфно отображает на fU. Это понятие применяется главным образом к отображению многообразий, где часто дополнительно требуется еще выполнение условия локальной плоскости (такое же, как и для *локально плоского вложения*). Последнее условие автоматически выполнено, если многообразия X и Y являются дифференцируемыми, и матрица Якоби отображения f имеет в каждой точке максимальный ранг, равный размерности X. Задача классификации П. одного многообразия в другое с точностью до т. н. регулярной гомотопии сведена к чисто гомотопич. задаче. Гомотопия $f_t\colon X^m \to Y^n$ наз. регулярной, если для каждой точки $x \in X$ она может быть продолжена до *изотопии* $F_t : U \times D^k \to Y$, где U — окрестность x, D^k — диск размерности $k=n-m$, и F_t совпадает с f_t на $U \times 0$, где 0 — центр диска. В дифференцируемом случае достаточно потребовать, чтобы матрица Якоби имела максимальный ранг при каждом t и непрерывно зависела от t. Дифференциал D_f П. определяет послойный мономорфизм касательного расслоения τX в касательное расслоение τY. Регулярная гомотопия определяет гомотопию таких мономорфизмов. Оказывается, что этим устанавливается биекция между классами регулярных гомотопий и гомотопич. классами мономорфизмов расслоений.

Задача П. в евклидовы пространства сводится к задаче гомотопич. классификации П. в *Штифеля многообразия* $V_{n,m}$. Напр., так как $\pi_2(V_{3,2})=0$, то имеется только один класс П. сферы S^2 в $\mathbb{R}^3$, так что стандартное вложение регулярно гомотопно своему зеркальному отражению (сферу можно «регулярно вывернуть наизнанку», см. рис.). Так как $V_{2,1} \approx S^1$, то имеется счетное число классов П. окружности в плоскость, а т. к. расслоение Штифеля над S^2 гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{R}P^3$ и $\pi_1(\mathbb{R}P^3)=\mathbb{Z}_2$, то имеется только два класса погружений S^1 в S^2, и т. д. *А. В. Чернавский.*

ПОГРУЖЕНИЕ многообразия — непрерывное отображение $F\colon M^m \to N^n$ m-мерного многообразия M^m в n-мерное многообразие N^n такое, что для каждой точки $x \in M^m$ существует окрестность U_x, для к-рой F есть вложение, т. е. гомеоморфизм на $F(U_x) \subset N^n$. В частности, если F есть гомеоморфизм на $F(M^m)$, то он наз. вложением M^m в N^n. Погружение F наз. $C^{l,\alpha}$-погружением, если M^m и N^n суть $C^{l,\alpha}$-гладкие многообразия ($l \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1$, $m \leq n$) и отображение F в соответствующих картах задается функциями

$$x^i = f^i(u^1, \ldots, u^m), \quad i = 1, \ldots, n,$$

принадлежащими классу гладкости $C^{l,\alpha}$, а ранг матрицы $\left\| \frac{df^i}{du^j} \right\|$ равен m в каждой точке $x \in M^m$($C^{l,\alpha}$-гладкое многообразие — многообразие, наделенное Г-структурой, где псевдогруппа состоит из l раз дифференцируемых отображений, производные к-рых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α).

К понятию П. и $C^{l,\alpha}$-гладкого П. непосредственно примыкают понятия поверхности и $C^{l,\alpha}$-гладкой поверхности. Погружения F и G многообразия M в N наз. эквивалентными, если существует такой гомеоморфизм $\Phi : M \to M$, что $F = G\Phi$.

Погруженным многообразием наз. пара, состоящая из многообразия M и его погружения F. m-мерной поверхностью в n-мерном многообразии N^n наз. класс эквивалентных погружений $F : M^m \to N^n$; каждое П. этого класса наз. параметризацией поверхности. Поверхность наз. $C^{l,\alpha}$-гладкой, если на многообразиях M и N можно ввести $C^{l,\alpha}$-структуры и если среди параметризаций поверхности найдется такая параметризация F, к-рая в этих структурах есть $C^{l,\alpha}$-погружение.

Теория погруженных многообразий, как правило, особенно в тех случаях, когда рассматриваются вопросы, связанные с геометрией П., изучает свойства, инвариантные относительно введенного выше понятия эквивалентности, и по существу совпадает с теорией поверхностей.

Пусть M^m есть $C^{l,\alpha}$-многообразие, $l \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha < 1$. Всякое M^m допускает при $m \geqslant 1$ вложение в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2m}$ и $C^{l,\alpha}$-погружение в $\mathbb{R}^{2m-1}$ при $m \geqslant 2$. Если m положительно и не является степенью двойки, то всякое M^m допускает $C^{l,\alpha}$-вложение в $\mathbb{R}^{2m-1}$, в то же время при любом $m=2^s$ с $s \geqslant 0$ существуют замкнутые гладкие m-мерные многообразия, не допускающие даже топологич. вложения в $\mathbb{R}^{2m-1}$ (таково, напр., проективное пространство). Если M^m не имеет компактных компонент, то оно допускает $C^{l,\alpha}$-вложение в $\mathbb{R}^{2m-1}$.

Ориентируемое m-мерное многообразие при $m \neq 1,4$ допускает $C^{l,\alpha}$-вложение в $\mathbb{R}^{2m-1}$. Вопрос о возможности погружения m-мерного многообразия в $\mathbb{R}^{2m}$ при $n < 2m-1$ связан с классами Уитни и *Понтрягина классами* этого многообразия. Известно также, что каждое $C^{l,\alpha}$-гладкое m-мерное многообразие с $l \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha < 1$ допускает собственное (т. е. такое, что прообраз каждого компактного множества компактен) П. в $\mathbb{R}^{2m}$ и собственное вложение в $\mathbb{R}^{2m+1}$. Если на M^m задана риманова метрика, то часто рассматривают *изометрическое погружение* M^m в $\mathbb{R}^n$ или другое риманово пространство N^n. $C^{l,\alpha}$-гладкое риманово многообразие, $l=2$, $0 < \alpha < 1$; $l > 2$, $0 \leqslant \alpha < 1$, допускает $C^{l,\alpha}$-гладкое изометрическое П. в нек-рое $\mathbb{R}^n$. В случае компактного M^m число $n=(2m+1)$ $(6m+14)$. Наоборот, $C^{l\alpha}$-гладкое П. $(l \geqslant 2, 0 < \alpha < 1)$ M^m в $\mathbb{R}^n$ индуцирует на M^m $C^{l,\alpha}$-гладкую риманову метрику [4].

Лит.: [1] Смейл С., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 1, с. 125—38; [2] Jacobowitz H., «Ann. Math.», 1972, v. 95, № 2, p. 191—225; [3] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [4] Сабитов И. Х., Шефель С. З., «Сиб. матем. ж.», 1976, т. 17, № 4, с. 914—25. *С. З. Шефель.*

ПОГРУЖЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ ГЕОМЕТРИЯ — теория, изучающая внешнюю геометрию и связь между внешней и внутренней геометрией подмногообразий евклидова или риманова пространства. П. м. г. является обобщением классич. дифференциальной геометрии поверхностей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Локально внутренняя и внешняя геометрии погружения многообразия обычно описываются соответственно с помощью первой и второй квадратичных форм. Для погружений m-мерного многообразия M^m в многообразие N^n существует понятие эквивалентности (см. *Погружение* многообразия). В П. м. г. изучаются свойства, одинаковые у эквивалентных погружений, т. е. свойства поверхности F^m, определяемой погружением f. В связи с этим в геометрических вопросах погружение и поверхность не различаются. Погружение f индуцирует отображение $df: TM^m \to TN^n$ *касательных расслоений.*

Первая квадратичная (фундаментальная) форма g поверхности F определяется на TM^m равенством

$$g_p(X, Y) - \bar{g}_{f(p)}(X, Y),$$

где $p \in M^m$, $X, Y \in TM^m$, а $\bar{g}$ — риманова метрика в N^n. Здесь и далее векторы $X \in TM^m$ не различаются в обозначениях с их образом $df(X)$. Квадратичная форма g определяет на M^m структуру риманова пространства M_g^m; свойства M_g^m составляют предмет внутренней геометрии поверхности F. Если $\{x^k\}$, $\{y^\alpha\}$, $k=1, \ldots, m$, $\alpha=1, \ldots, n$,— локальные координаты в M^m и

N^n, то погружение f задается параметрич. уравнениями $y^\alpha = f^\alpha(x^1, \ldots, x^m)$. В локальных координатах

$$g_p(X, Y) = g_{ij}(p) X^i Y^j,$$

где $\{X^i\}$, $\{Y^j\}$ — координаты векторов X, Y,

$$g_{ij} = \bar{g}_{\alpha,\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f_\beta}{\partial x^j},$$

а $\{\bar{g}_{\alpha\beta}\}$ — компоненты метрич. тензора $\bar{g}$ риманова пространства N^n.

К внутренней геометрии поверхности F принадлежат такие понятия, как длина кривой, объем области, связность Леви-Чивита ∇_X внутренней метрики, ее преобразования кривизны $R(X, Y)Z$ и т. д. Относящиеся сюда вычислит. формулы см. в ст. *Риманова геометрия*.

Вторая (фундаментальная) форма II определяется равенством

$$II(X, Y)_p = (\bar{\nabla}_X Y)_p - (\nabla_X Y)_p,$$

где $\bar{\nabla}$, ∇ — связности Леви-Чивита на N^n, M^m соответственно. Фактически II зависит не от векторных полей X, Y, а лишь от их значений в точке p и является билинейным симметричным отображением

$$(TM^m)_p \times (TM^m)_p \to (\nu M^m)_p,$$

где νM^m — *нормальное расслоение* M^m в N^n. Для каждого единичного вектора $\xi \in (\nu M^m)_p$ равенства

$$\langle II(X, Y), \xi\rangle_p = h_\xi(X, Y)_p = \langle A_\xi(X), Y\rangle_p$$

определяют вторую квадратичную форму h_ξ и второй фундаментальный тензор A_ξ. В локальных координатах компоненты $h_{ij}(\xi)$ формы h_ξ имеют вид

$$h_{ij}(\xi) = \bar{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \xi^\beta,$$

где $\{\xi^\beta\}$ — координаты вектора ξ.

Для формы h_ξ обычным образом (т. е. так же, как для поверхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$) определяют главные кривизны, главные направления (зависящие от ξ) и другие связанные с ними понятия.

Исходя из элементарных симметрич. функций, можно строить различные функции главных кривизн. Таковы, напр., средняя кривизна

$$H = \frac{1}{m} \sqrt{\sum_{j=1}^{m+n} \left(\sum_{i=1}^{m} K_i(\xi_j)\right)^2},$$

где $\{\xi_j\}$ — ортонормированный набор нормалей, а $K_i(\xi)$ — главные кривизны формы h_j; кривизна Чжэня — Лашофа

$$K = \frac{1}{\omega_{n-m-1}} \int_{\xi \in S^{n-m-1}} |K_1(\xi) \ldots K_m(\xi)|\, d\sigma,$$

где ω_l — объем сферы S^l; длина второй основной формы

$$S = \sqrt{\sum_{i,j} K_i^2(\xi_j)}$$

(см. [1] — [3]).

Значение первой и второй квадратичных форм поверхности в точке p определяет ее вблизи p с точностью до бесконечно малых 2-го порядка. Каждому $\xi \in (\nu M^m)_p$, $|\xi| = 1$, соответствует соприкасающийся параболоид. (Для поверхности в евклидовом пространстве — это соприкасающийся параболоид для проекции поверхности на $(m+1)$-плоскость, определяемую $(TM^m)_p$ и ξ.) При $m = n-1$ (т. е. в случае гиперповерхности) форма h_ξ единственна с точностью до знака. В этом случае вторые фундаментальную и квадратичную формы не различают, и теория приобретает большое сходство с классич. теорией поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

Основные уравнения. Коэффициенты первой и второй квадратичных форм не являются независимыми. Они связаны уравнениями Гаусса и Петерсона — Кодацци — Майнарди.

Уравнения Гаусса

$$R(X, Y)Z = \overline{R}(X, Y)Z - H(X, \nabla_X Z) + H(Y, \nabla_X Z) + \\ + H([X, Y], Z) \qquad (1)$$

выражают преобразование кривизны поверхности F через преобразование кривизны N^n и коэффициенты квадратичных форм (здесь $[\cdot, \cdot]$ — скобка Пуассона).

Инвариантная форма уравнений Петерсона — Кодацци — Майнарди связана с понятием риманова расслоения над M_g^m. Расслоение $E(l)$ l-мерных плоскостей над римановым многообразием M_g^m наз. римановым, если в $E(l)$ задана риманова метрика $\langle\cdot, \cdot\rangle_E$ и риманова (т. е. согласованная с метрикой) связность $D: TM^n \times E \to E$. Билинейное g-симметричное отображение

$$A_\xi : TM^m \times E \to TM^m$$

наз. вторым фундаментальным тензором в E; равенство

$$\langle H(X, Y), \xi\rangle_E = \langle A_\xi X, Y\rangle_g$$

определяет вторую фундаментальную форму в E, ассоциированную с A_ξ. Уравнения

$$\nabla_X A_\xi Y - \nabla_Y A_\xi X = A_{D_X} Y - A_{D_Y} X, \qquad (2)$$

$$\tilde{R}(X, Y)\xi = H(A_\xi X, Y) - H(X, A_\xi Y), \qquad (3)$$

где $\tilde{R}$ — форма кривизны связности D, наз. уравнениями Петерсона — Кодацци — Майнарди. Уравнения (3) часто наз. уравнениями Риччи (координатную запись уравнений (2) — (3) см. в [1]). Уравнения (2) — (3) всегда выполнены, если $E(l)$ — нормальное расслоение M^m в N^n и $D_X\xi$ равно проекции $\overline{\nabla}_X\xi$ на $(\nu M^m)_p$.

Имеется следующее обобщение *Бонне теоремы* (см. [2]). Пусть $E(l)$ — риманово расслоение над односвязным M_g^m и пусть на $E(l)$ задан второй фундаментальный тензор A_ξ. Если при этом выполняются соотношения (1) — (3), то существует изометрич. погружение M_g^m в евклидово пространство $\mathbb{R}^{m+l}$ с нормальным расслоением $E(l)$. Такое погружение единственно в следующем смысле: если f, f' — изометрич. погружения M_g^m в $\mathbb{R}^{m+l}$ с нормальными расслоениями E, E', оснащенными, как и выше, и нек-рая изометрия φ: $M_g^m \to M_g^m$ накрывается отображением $\overline{\varphi}$: $E \to E'$, согласованным с оснащенным, то существует такая изометрия Φ пространства $\mathbb{R}^{m+l}$, что $\Phi \circ f = f' \circ \varphi$.

Классы погружений. Многомерная П. м. г. возникла и долгое время развивалась как теория существования изометрич. погружений римановых многообразий как правило в $\mathbb{R}^n$, реже — в пространство постоянной кривизны K (см. *Изометрическое погружение*). Что касается внешне геометрич. свойств и связей между внешней и внутренней геометрией поверхностей, то она подробно изучена только для двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^3$. В этом случае существует классификация точек поверхности, с помощью к-рой двумерные поверхности разбиваются на классы: выпуклые поверхности, седловые поверхности и развертывающиеся поверхности. Именно эти классы являются основным объектом изучения в дифференциальной геометрии в целом. В многомерном случае такая классификация точек поверхности неизвестна (1983). Известны только нек-рые классы многомерных поверхностей: k-выпуклые, k-седловые и k-развертывающиеся.

k-выпуклые поверхности. Поверхность F^m в $\mathbb{R}^n$ наз. k-выпуклой, если для каждой точки $p \in F^m$ существует нормаль $\xi_p \in (\nu F^m)_p$, для к-рой $h_p(\xi)$ положительно определена, и для любого k-мерного направления $\sigma_k \in (TF^m)_p$, $2 \leqslant k \leqslant m$, найдется в σ_k двумерное направление σ_2 такое, что $h_p(\xi)(X, Y) > 0$ (либо $h_p(\xi)(X, Y) = 0$) для каждого $\xi_p \in (\nu F^m)_p$ при $X, Y \in \sigma_2$, $X, Y \neq 0$. 2-выпуклая поверхность F^m в $\mathbb{R}^n$ есть выпуклая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{m+1} \subset \mathbb{R}^n$ (см. [4]). Внутренняя метрика k-выпуклой поверхности обладает следующим свойством: в каждой точке p для каждого k-мерного направления σ_k касательного пространства найдется двумерное направление $\sigma_2 \subset \sigma_k$, в к-ром риманова кривизна строго положительна.

k-седловые поверхности. Поверхность F^m в $\mathbb{R}^n$ наз. k-седловой, если каждой ее точке p для каждой нормали $\xi \in (\nu F^m)_p$ число собственных значений $h_p(\xi)$ одного знака не превосходит $(k-1)$, $2 \leqslant k \leqslant m$. Двумерная k-седловая поверхность есть обычная седловая поверхность в $\mathbb{R}^n$, от к-рой нельзя отсечь «горбушку» гиперплоскостью. Внутренняя метрика k-седловой поверхности обладает следующим свойством: в каждой точке p для каждого k-мерного направления σ_k касательного пространства найдется двумерное направление $\sigma_2 \subset \sigma_k$, в к-ром риманова кривизна не положительна. Если k-седловая поверхность полна в $\mathbb{R}^n$, то ее гомологии $H_i(F^m) = 0$ при $i \geqslant k$ (см. [4], [5]). Полная m-мерная k-седловая поверхность F^m с неотрицательной кривизной Риччи есть цилиндр с $(m-k+1)$-мерной образующей.

k-развертывающиеся (k-параболические) поверхности. Поверхность F^m в $\mathbb{R}^n$ наз. k-развертывающейся, если в каждой ее точке p существует k-мерное направление $\sigma_k \subset (TF^m)_p$, к-рое состоит из собственных векторов, принадлежащих нулевому собственному значению матрицы второй квадратичной формы относительно каждой нормали в данной точке. Внутренняя метрика k-развертывающейся поверхности обладает следующим свойством: в каждой точке p найдется подпространство σ_k касательного пространства $(TF^m)_p$ размерности k такое, что $R_{XY} = 0$ для любого вектора $X \in \sigma_{kF}$, где $Y \in (TF^m)_p$ — любой вектор касательного пространства, R_{XY} — оператор кривизны. Если k-развертывающаяся поверхность F^m полна в $\mathbb{R}^n$ и несет на себе внутреннюю метрику неположительной кривизны Риччи, то она является цилиндром с k-мерной образующей [6].

Свободные погружения. Если образ $H_p(X, Y)$ в каждой точке $p \in F^m$ имеет максимально возможную размерность $m(m+1)/2$, то погружение наз. свободным. В этом случае первые и вторые производные радиус-вектора погружения F^m образуют линейно независимую систему. В классе свободных погружений существует изометрич. погружение в размерность $n > m(m+1)/2 + 3m + 5$, но при этом полностью теряется связь между внутренней и внешней геометрией. Напр., два свободных изометрич. погружения m-мерного многообразия M^m в $\mathbb{R}^n$, $n > m(m+1)/2 + 3m + 5$, можно соединить гомотопией, состоящей из свободных изометрич. погружений M^m (см. [7]).

Погружения с малой коразмерностью. Если коразмерность q погружения мала, то из условий на внутреннюю метрику многообразия вытекают условия на вторую квадратичную форму поверхности. А из свойств второй квадратичной формы далее выводятся топологические и внешне геометрич. свойства поверхности. В частности, получаются теоремы непогружаемости. Так, если M^m с секционной кривизной $K_\sigma \leqslant 0$ изометрически погружено в $\mathbb{R}^{m+q}$ с $q < m$, то M^m есть $(q+1)$-седловая поверхность и ее гомологии (в случае полноты) $H_k = 0$ при $k \geqslant q+1$ (см. [5]). В частности, компактное M^m с $K_\sigma \leqslant 0$ не может быть погружено в $\mathbb{R}^{2m-1}$ (см. [8], [9]). Если же $K_\sigma<0$, то M^m даже локально непогружаемо в $\mathbb{R}^{2m-2}$ (см. [9]). Аналогично, M^m с $K_\sigma<1$ непогружаемо в сферу S^{2m-2} радиуса 1. Компактное F^m в S^{2m-1} имеет нулевую эйлерову характеристику и компактное параллелизуемое накрывающее многообразие, если $K_\sigma<1$ (см. [10]). О поверхности F^m в $\mathbb{R}^{m+q}$ при $q\leqslant m+2r-2$ и $K_\sigma<0$ известно, что ее нормальные *Понтрягина классы* удовлетворяют условию

$$\sum 2^{q-2} p_i^{\perp} p_{r-i}^{\perp}=0.$$

Если $K_\sigma>0$, то из $q\leqslant m-1$ следует, что F^m есть $(q+1)$-выпуклая поверхность [9]. В частности, при $q=1$ — это 2-выпуклая поверхность. Если $K_\sigma>0$ и $q=2$, то компактная поверхность F^m, $m\geqslant3$, имеет гомологии сферы [11]. Если F^m в $\mathbb{R}^{m+q}$ имеет неположительную секционную кривизну, то она — $(m-q(q+1))$-развертывающаяся и, в случае полноты, F^m есть цилиндр с $(m-q(q+1))$-мерной образующей [10]. Если же $M^m=M^k\times\mathbb{R}^{n-k}$ и $q\leqslant n-2k$, то погружение многообразия M^m в $\mathbb{R}^{m+q}$ есть $(m-2k-q)$-развертывающаяся поверхность [8] и, в случае полноты, F^m есть цилиндр с $(m-2k-q)$-мерной образующей. При более общих предположениях компактная поверхность

$$M^m=M^{p_1}\times\ldots\times M^{p_q}\to\mathbb{R}^{n+q},\ p_i\geqslant2,$$

есть произведение гиперповерхностей [12].

Лит.: [1] Эйзенхарт Л., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [2] Chen B., Geometry of submanifolds, N.Y., 1973; [3] Chern S.-s., Lashof R. K., «Amer. J. Math.», 1957, v. 79, p. 306—18; [4] Шефель С. З., «Сиб. матем. ж.», 1969, т. 10, № 2, с. 459—66; [5] Глазырин В. В., «Докл. АН СССР», 1977, т. 233, № 6, с. 1028—30; [6] Hartman P., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 115, p. 94—109, 1970, v. 147, p. 529—40; [7] Громов М. Л., «Докл. АН СССР», 1970, т. 192, № 6, с. 1206—09; [8] Chern S., Kuiper N., «Ann. of Math.», 1952, v. 56, № 3, p. 422—30; [9] Боровский Ю. Е., Шефель С. З., «Сиб. матем. ж.», 1978, т. 19, № 6, с. 1386—87; [10] Борисенко А. А., «Матем. сб.», 1977, т. 104, № 4, с. 559—76; [11] Moore J., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 70, № 1; [12] Gardner R. B., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1977, v. 83, № 1, p. 1—35.

В. А. Топоногов, С. З. Шефель.

ПОДВИЖНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА — особая точка z_0 решения дифференциального уравнения $F(z, w, w')=0$ (F — аналитич. функция), рассматриваемого как функция $w(z)$ комплексного переменного z, при условии, что решения того же уравнения с близкими начальными данными имеют близкие к z_0 особые точки, не совпадающие с z_0. Классич. пример П. о. т. возникает при рассмотрении уравнения

$$\frac{dw}{dz}=\frac{P(z, w)}{Q(z, w)},$$

где P и Q — голоморфные функции в нек-рой области пространства $\mathbb{C}^2$. Если поверхность $\{Q=0\}$ неприводима и проектируется вдоль оси Ow на область $\Omega\subset Oz$, то все точки области Ω являются П. о. т.; для решения с начальным условием (z_0, w_0), где

$$Q=(z_0, w_0)=0\neq P(z_0, w_0),$$

точка z_0 — *алгебраическая точка ветвления*.

Лит.: [1] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950.

Ю. С. Ильяшенко.

ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА МЕТОД — дифференциально-геометрический метод локального исследования подмногообразий различных однородных пространств, исходным моментом к-рого является отнесение самого подмногообразия и всех его геометрич. объектов к возможно более общему (подвижному) реперу. П. р. м. включает в себя последующий процесс канонизации репера — инвариантного присоединения к каждой точке подмногообразия единственного репера с целью получения дифференциальных инвариантов, характеризующих подмногообразие с точностью до преобразований вмещающего его однородного пространства.

В наиболее общей форме П. р. м. был предложен Э. Картаном (E. Cartan, см. [1]), давшим разнообразные образцы его применений. Позднее метод получил широкое распространение и развитие (см. *Продолжений и охватов метод*). Аналитич. основу П. р. м. составляют инвариантные линейные дифференциальные формы группы Ли и их структурные уравнения, а также теория представлений групп Ли как групп преобразований. В современной геометрии основные положения П. р. м. потребовали уточнений и получили оформление в терминах теории расслоенных пространств.

Пусть X_n есть n-мерное однородное пространство и G есть r-мерная группа Ли его преобразований (G действует слева). Пусть $X_n=G/H$ — представление, где $H\subset G$ — группа изотропии (стационарности) нек-рой точки $x_0\in X_n$; (e_k, e_α), $k=1, 2, \ldots, n$, $\alpha=n+1, \ldots, r$,— базис левоинвариантных векторных полей на G такой, что на H e_α составляют также базис левоинвариантных векторных полей подгруппы Ли H. Базису (e_k, e_α) отвечает сопряженный базис левоинвариантных линейных дифференциальных форм $(\theta^k, \theta^\alpha)$ на группе Ли G. Канонич. проекция π: $G\to X_n$, сопоставляющая точкам $x\in X_n$ левые классы смежности $\pi(x)=H_x\in G$ группы G по подгруппе $H=H_{x_0}$, вносит в группу Ли G структуру главного H-расслоения с базой X_n и структурной группой H размерности $r-n$. При таком представлении G векторные поля e_α составляют базис фундаментальных векторных полей расслоения π: $G\to X_n$, а векторные поля e_k натягивают нек-рое трансверсальное к слоям расслоения π: $G\to X_n$ n-распределение. В соответствии с этим линейные дифференциальные формы θ^k являются полубазовыми формами расслоения π: $G\to X_n$ и образуют вполне интегрируемую подсистему форм в системе $(\theta^k, \theta^\alpha)$. Слои $H_x\subset G$ являются интегральными многообразиями максимальной размерности для системы уравнений Пфаффа $\theta^k=0$.

С и с т е м о й р е п е р о в в классической дифференциальной геометрии (евклидовой, аффинной, проективной и т. д.) наз. множество фигур пространства X_n, находящееся в биективном соответствии с множеством преобразований пространства X_n (или, что то же самое, с множеством элементов фундаментальной группы G данного пространства), при этом любой репер R из данной системы можно получить из нек-рого начального R_0 с помощью только одного преобразования:

$$L_g: X_n\to X_n,\ R=L_g(R_0),\ g\in G.$$

Учитывая, что главная роль подвижного репера $L_g(R_0)=R_g$ по отношению к неподвижному R_0 состоит в том, чтобы определять произвольное преобразование L_g однородного пространства X_n, можно отождествить множество реперов $\{R_g\}$ с множеством элементов группового пространства G, приобретающих таким образом смысл абстрактных реперов, обслуживающих любое однородное пространство с данной фундаментальной группой G.

Пусть задано нек-рое гладкое подмногообразие $M\subset X_n$ размерности m. Р е п е р а м и н у л е в о г о п о р я д к а подмногообразия M наз. элементы ограничения $G(\pi, M)=G|_M\subset G$ расслоения π: $G\to X_n$ на M, как на новую базу. Это значит, что главное расслоение $G(\pi, M)\to M$ вложено в G и определяется в нем как полный прообраз $\pi^{-1}(M)\subset G$. Так как левоинвариантные формы θ^k, θ^α на группе Ли G подчиняются уравнениям Маурера — Картана

$$\left.\begin{aligned} d\theta^k&=\frac{1}{2}C^k_{lm}\theta^l\wedge\theta^m+C^k_{l\alpha}\theta^l\wedge\theta^\alpha,\\ d\theta^\alpha&=\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\beta\wedge\theta^\gamma+C^\alpha_{\beta k}\theta^\beta\wedge\theta^k+\frac{1}{2}C^\alpha_{lm}\theta^l\wedge\theta^m,\\ k,\ l,\ m&=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma=n+1,\ \ldots,\ r,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

где C^k_{lm}, $C^k_{l\alpha}$, $C^\alpha_{\beta\gamma}$, $C^\alpha_{\beta k}$, C^α_{lm} — структурные константы группы Ли, то ограничение форм θ^k, θ^α на подрасслоение $G(\pi, M)$, т. е. формы ω^k, ω^α, будет подчиняться таким же уравнениям, но, сверх того, среди форм ω^k возникнут линейные зависимости

$$\omega^p = \Lambda^p_a \omega^a, a = 1,\ 2,\ \ldots, m;\ p = m+1, \ldots,\ n, \qquad (2)$$

где ω^a — формы, оставшиеся вместе с ω^α линейно независимыми на главном расслоенном пространстве $G(\pi,\ M) \to M$, а Λ^p_a — функции, также определенные на расслоении реперов нулевого порядка $G(\pi,\ M) \to M$. Функции Λ^p_a являются координатами касательной плоскости $T_x(M) \subset T_x(X_n)$ подмногообразия $M \subset X_n$, зависящими от точки $x \in M$ и репера

$$R \in \pi^{-1}(x) = H_x \subset G(\pi,\ M).$$

Касательные плоскости $x \to T_x(M)$ образуют сечение f: $M \to \mathcal{G}_m(M)$ грассманова расслоения $\mathcal{G}_m(M) \to M$ m-плоскостей, проходящих через точки подмногообразия $M \subset X_n$. Расслоение $\mathcal{G}_m(M) \to M$ является присоединенным к главному расслоению $G(\pi,\ M) \to M$. Структура функций Λ^p_a характеризуется уравнениями

$$d\Lambda^p_a + F^p_{a\alpha}(\Lambda)\,\omega^\alpha = \Lambda^p_{ab}\omega^b, \qquad (3)$$

явный вид к-рых можно получить внешним дифференцированием уравнений (2) с помощью (1) и последующим применением леммы Картана. Функции Λ^p_a, Λ^p_{ab} являются относительными координатами 1-струи $j^1_x f$ сечения f по отношению к подвижному реперу $R \in \pi^{-1}(x)$ точки $x \in M$. Геометрич. объект $j^1_x f$ образует также сечение $j^1 f$: $M \to \mathcal{G}^1_m(M)$ соответствующего расслоенного пространства $\mathcal{G}^1_m(M) \to M$, присоединенного к главному расслоению $G(\pi,\ M) \to M$. Аналогичным образом возникает сечение $j^2 f$: $M \to \mathcal{G}^2_m(M)$ с координатами Λ^p_a, Λ^p_{ab}, Λ^p_{abc} образующего его геометрич. объекта, а также его последующие продолжения $j^3 f, \ldots, j^q f$, к-рым соответствуют дифференциальные продолжения уравнений (3).

До тех пор пока расслоение $\mathcal{G}^a_m(M) \to M$, к-рому принадлежит сечение $j^q f(M)$, является однородным, возможна редукция $G^q(\pi,\ M)$ главного расслоения $G(\pi,\ M) \to M$ реперов к нек-рой подгруппе $\tilde{H} \subset H$, определяемая по Картану с помощью нек-рой фиксации относительных координат Λ^p_a, Λ^p_{ab}, $\ldots$, $\Lambda^p_{a_1 \ldots a_{q+1}}$ геометрич. объекта $j^q_x f$, не зависящей от точки $x \in M$. Так определяется частичная канонизация репера. Реперы $R \in G^q(\pi,\ M)$ наз. полуканоническими реперами порядка $q+1$ данного подмногообразия $M \subset X_n$. Если же следующее продолжение дает геометрич. объекты, группа стационарности к-рых содержит лишь тождественное преобразование, то возможна фиксация лишь части координат геометрич. объекта сечения $j^{q+1} f$, не зависящая от точки x, после чего оставшаяся часть координат Λ геометрич. объекта $j^{q+1} f$ зависит только от $x \in M$. Таким образом возникает сечение s: $M \to G(\pi,\ M)$ расслоения реперов нулевого порядка подмногообразия $M \subset X_n$. Репер $R = s(x)$ этого сечения наз. каноническим репером подмногообразия $M \subset X_n$, или сопровождающим репером этого подмногообразия. Описанный выше процесс продолжения уравнений (3) и выбранный способ фиксации функций Λ приводит к уравнениям

$$\omega^p = \Lambda^p_\alpha \omega^a,\ \omega^\alpha = \Lambda^\alpha_a \omega^a, \qquad (4)$$

связывающим линейные формы ω^k, ω^α на сечении $s(M)$. Поле канонич. репера строится не однозначно, а зависит от произвола фиксации относительных координат геометрич. объекта $j^{q+1}f$. Важно лишь то, что часть коэффициентов уравнения (4) имеет постоянные (при желании наиболее простые) числовые значения, тогда как другая часть их образует дифференциальные инварианты подмногообразия $M \subset X_n$, определяющие его с точностью до преобразования в X_n. Канонич. реперы сечения $s(M)$ являются аналогом классич. примера — сопровождающего репера Френе кривой евклидова пространства, а уравнения (4) соответствуют уравнениям Френе кривой. На пути канонизации репера могут возникать осложнения, связанные с неоднородностью расслоений $\mathcal{G}_m^q(M)$ и разнотипностью в этом смысле различных подмногообразий M в X_n и даже их отдельных кусков. На этом и основывается классификация различных типов точек и различных классов подмногообразий в X_n. Благодаря этим особенностям П. р. м. сыграл плодотворную роль в изучении подмногообразий в разнообразных однородных пространствах и, кроме того, указал путь к развитию современных методов исследования самых общих дифференциально-геометрич. структур на гладких многообразиях.

Лит.: [1] Картан Э., Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера, пер. с франц., М., 1963; [2] Фавар Ж., Курс локальной дифференциальной геометрии, пер. с франц., М., 1960; [3] Картан А., Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, пер. с франц., М., 1971; [4] Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.— Л., 1948. *Е. Л. Евтушик.*

ПОДВИЖНЫХ СЕТОК МЕТОД — метод численного решения задач математич. физики, где разностная сетка, на к-рой осуществляется аппроксимация уравнений основной задачи, не остается фиксированной; она прослеживает в процессе расчета изменение границ счетных областей. Простейшая разностная сетка, получаемая точками пересечения прямых, параллельных осям декартовой системы координат (прямоугольная сетка), позволяет максимально упростить разностные уравнения, описывающие основную задачу. Однако адекватное представление на ней границ сложной формы и задаваемых на них граничных условий связано со значительными трудностями, зачастую непреодолимыми при ограниченных ресурсах ЭВМ. Эти трудности особенно возрастают при решении нестационарных задач математич. физики, когда границы расчетных областей подвижны и претерпевают значительную деформацию. Построение системы координат с координатными линиями, совпадающими с границами, становится существенной частью алгоритма решения таких задач.

При применении П. с. м. в каждый фиксированный момент времени счетная область разрезается на конечное число ячеек сетки, не налегающих друг на друга и заполняющих всю область без зазоров. В случае двух пространственных переменных с точки зрения практич. реализации наиболее удобно счетную область двумя семействами линий разрезать на четырехугольные ячейки. Тогда становится простой нумерация ячеек (аналогичная нумерации элементов матрицы по строкам и столбцам).

Расчет координат узлов такой сетки можно трактовать как разностный аналог задачи об отыскании функций $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, обеспечивающих однолистное отображение на область физич. плоскости (x, y), в к-рой проводится расчет, нек-рой параметрич. области на плоскости (ξ, η), напр. единичного квадрата $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Граничные значения этих функций устанавливают нек-рое взаимно однозначное соответствие между точками на сторонах параметрич. квадрата и на границах физич. области. Это соответствие целесообразно оставлять в распоряжении вычислителя, к-рый расставляет узлы сетки на границе счетной области, исходя из конкретного содержания задачи и имеющихся ресурсов.

Для областей несложной формы координаты узлов сетки можно вычислять по явным формулам, основанным на использовании интерполяции или конкретного вида отображения. В случае сложных областей приходится прибегать к итерационному процессу, в ходе к-рого положение узла сетки на каждой итерации пересчитывается в зависимости от положения его соседей. Такие итерационные процессы, как правило, моделируют решение нек-рой системы дифференциальных уравнений с частными производными. При их конструировании зачастую в той или иной форме привлекаются конформные и квазиконформные отображения.

Структура решения задач математич. физики (напр., задач газовой динамики) может характеризоваться наличием зон, в к-рых происходит резкое изменение параметров потока. Размеры таких зон могут быть существенно меньше характерного линейного размера задачи, а их местонахождение заранее неизвестно и, кроме того, может меняться в процессе расчета. В связи с этим разрабатываются алгоритмы, к-рые позволяли бы использовать в расчетах сетки, сгущающиеся в таких зонах.

С целью создания надежных вычислительных алгоритмов задача построения сетки зачастую формулируется как задача минимизации нек-рого вариационного функционала. Функционал может содержать управляющие параметры, изменение к-рых обеспечивает определенную свободу и возможность приспосабливать рассчитываемую сетку к особенностям конкретной задачи.

Лит.: [1] Численное решение многомерных задач газовой динамики, М., 1976; [2] Сидоров А. Ф., «Численные методы механики сплошной среды», 1977, т. 8, № 4, с. 149—56; [3] Мещеряков Ю. П., Шапеев В. П., там же, 1978, т. 9, № 2, с. 91—103; [4] Данаев Н. Т., там же, 1979, т. 10, № 4, с. 60—74; [5] Томас П. Д., Миддлкофф Д. Ф., «Ракетная техника и космонавтика», 1980, т. 18, № 7, с. 55—61.

Г. П. Прокопов.

ПОДГРУПП РЯД — конечная цепочка вложенных одна в другую подгрупп группы G:

$$E=G_0\subseteq G_1\subseteq \ldots \subseteq G_n=G \qquad (*)$$

или

$$G=G_1\supseteq G_2\supseteq \ldots \supseteq G_{n+1}=E.$$

Рассматриваются также бесконечные цепочки вложенных подгрупп (убывающие и возрастающие), занумерованные порядковыми числами или даже элементами упорядоченного множества. Их чаще наз. *подгрупп системами*.

Важную роль в теории групп играют субнормальные, нормальные и центральные ряды. П. р. (*) наз. субнормальным, если каждый его предыдущий член есть нормальная подгруппа следующего члена. Если, кроме того, каждая подгруппа G_i, $i=0, 1, \ldots, n$, нормальна в G, то ряд (*) наз. нормальным рядом в G. Существует и иная терминология, в к-рой нормальным рядом наз. то, что здесь названо субнормальным, а для второго определенного здесь понятия используется термин «инвариантный ряд» (преобладает, однако, первая терминология). Факторгруппы G_{i+1}/G_i наз. факторами, а число n — длиной субнормального ряда. Нормальный ряд (*) наз. центральным, если все его факторы центральны, т. е. G_{i+1}/G_i лежит в центре группы G/G_i для всех i или, что равносильно, взаимный коммутант G_{i+1} и G лежит в G_i для всех i. Если G_{i+1}/G_i в точности совпадает с центром группы G/G_i (соответственно коммутант G_{i+1} и G совпадает с G_i) для всех i, то ряд (*) наз. верхним центральным рядом (соответственно нижним центральным рядом) группы G.

Пусть в группе G заданы субнормальный (соответственно нормальный или центральный) ряд и нек-рая подгруппа $H \subseteq G$ и пусть $H_i = G_i \cap H$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Тогда цепочка

$$E = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = H$$

является субнормальным (соответственно нормальным или центральным) рядом в H, а факторы этого ряда изоморфны подгруппам соответствующих факторов ряда (*). Если G/N — нек-рая факторгруппа группы G, то цепочка

$$E = G_0N/N \subseteq G_1N/N \subseteq \ldots \subseteq G_nN/N = G/N$$

является субнормальным (соответственно нормальным или центральным) рядом в G/N, а факторы этого ряда суть гомоморфные образы соответствующих факторов ряда (*).

Два субнормальных (в частности, нормальных) ряда группы наз. изоморфными, если они имеют одинаковую длину и между их факторами существует взаимно однозначное соответствие, при к-ром соответствующие факторы изоморфны. Если всякая подгруппа одного ряда совпадает с одной из подгрупп другого, то второй ряд наз. уплотнением первого. Неуплотняемый далее нормальный ряд наз. главным, а субнормальный — композиционным. Факторы этих рядов наз. соответственно главными и композиционными факторами. Любые два субнормальных (соответственно нормальных или центральных) ряда группы обладают изоморфными субнормальными (соответственно нормальными или центральными) уплотнениями. В частности, любые два главных (композиционных) ряда изоморфны (см. *Жордана — Гёльдера теорема*).

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории группы, 3 изд., М., 1982; [2] Черников С. Н., Группы с заданными свойствами системы подгрупп, М., 1980.

Н. С. Романовский.

ПОДГРУПП СИСТЕМА — множество $\mathfrak{A}$ подгрупп группы G, удовлетворяющее условиям: 1) $\mathfrak{A}$ содержит единичную подгруппу 1 и саму группу G, 2) $\mathfrak{A}$ линейно упорядочено по вложению, т. е. для всяких A, B из $\mathfrak{A}$ либо $A \subseteq B$, либо $B \subseteq A$. Говорят, что подгруппы A, A' из $\mathfrak{A}$ составляют скачок, если A' непосредственно следует за A в $\mathfrak{A}$. П. с., замкнутая относительно объединений и пересечений, наз. полной. Полная П. с. наз. субнормальной, если для всякого скачка A, A' этой системы A является нормальной подгруппой в A'. Факторгруппы A'/A наз. факторами системы $\mathfrak{A}$. П. с., все члены к-рой суть нормальные подгруппы группы G, наз. нормальной. В случае, когда одна субнормальная система содержит (в теоретико-множественном смысле) другую, первую из них наз. уплотнением второй. Нормальная П. с. наз. центральной, если все ее факторы центральны, т. е. A'/A содержится в центре G/A для всякого скачка A, A'. Субнормальная П. с. наз. разрешимой, если все ее факторы абелевы.

Наличие в группе тех или иных П. с. выделяет в классе всех групп различные подклассы, наиболее употребительны из к-рых RN, $\overline{RN}^*$, $\overline{RN}$, RI, RI^*, $\overline{RI}$, Z, ZA, ZD, $\overline{Z}$, $\tilde{N}$, N — классы Куроша — Черникова:

RN-группа — обладает разрешимой субнормальной П. с.;

$\overline{RN}^*$-группа — обладает разрешимой субнормальной П. с., вполне упорядоченной по возрастанию;

$\overline{RN}$-группа — всякую субнормальную П. с. этой группы можно уплотнить до разрешимой субнормальной;

RI-группа — обладает разрешимой нормальной П. с.;

RI^*-группа — обладает разрешимой нормальной П. с., вполне упорядоченной по возрастанию;

$\overline{RI}$-группа — всякую нормальную П. с. этой группы можно уплотнить до разрешимой нормальной;

Z-группа — обладает центральной П. с.;

ZA-группа — обладает центральной П. с., вполне упорядоченной по возрастанию;

ZD-группа — обладает центральной П. с., вполне упорядоченной по убыванию;

$\tilde{Z}$-группа — всякую нормальную П. с. такой группы можно уплотнить до центральной;

$\tilde{N}$-группа — через всякую подгруппу такой группы проходит субнормальная П. с.;

N-группа — через всякую подгруппу такой группы проходит субнормальная П. с., вполне упорядоченная по возрастанию.

Частный случай П. с.— *подгрупп ряды.*

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Черников С. Н., Группы с заданными свойствами системы подгрупп, М., 1980; [3] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982.

Н. С. Романовский.

ПОДГРУППА — подмножество H *группы* G, само являющееся группой относительно операции, определяющей G. Подмножество H группы G является ее подгруппой тогда и только тогда, когда: (1) H содержит произведение любых двух элементов из H, (2) H содержит вместе со всяким своим элементом h обратный к нему элемент h^{-1}. В случае конечных и, вообще, периодич. групп проверка условия (2) является излишней.

Подмножество группы G, состоящее из одного элемента 1, будет, очевидно, подгруппой, и эта П. наз. единичной П. группы G и обозначается обычно символом E. Сама G также является своей П. Всякая П., отличная от всей группы, наз. истинной П. этой группы. Истинная П. нек-рой бесконечной группы может быть изоморфна самой группе. Сама группа G и подгруппа E наз. несобственными П. группы G, все остальные — собственными.

Теоретико-множественное пересечение любых двух (и любого множества) П. группы G является П. группы G. Пересечение всех П. группы G, содержащих все элементы нек-рого непустого множества M, наз. подгруппой, порожденной множеством M, и обозначается символом $\{M\}$. Если M состоит из одного элемента a, то $\{a\}$ наз. циклической П. элемента a. Группа, совпадающая с одной из своих циклических П., наз. *циклической группой.*

Теоретико-множественное объединение П., вообще говоря, не обязано являться П. Объединением подгрупп H_i, $i \in I$, наз. П., порожденная объединением множеств H_i.

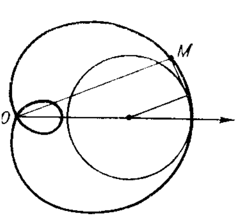
Произведение подмножеств S_1 и S_2 группы G есть множество, состоящее из всевозможных (различных) произведений s_1s_2, где $s_1 \subset S_2$, $s_2 \in S_2$. Произведение подгрупп H_1H_2 есть П. тогда и только тогда, когда $H_1H_2=H_2H_1$, и в этом случае произведение H_1H_2 совпадает с объединением подгрупп H_1 и H_2.

Гомоморфный образ П.— подгруппа. Если группа G_1 изоморфна нек-рой подгруппе H группы G, то говорят, что группа G_1 может быть вложена в группу G. Если даны две группы и каждая из них изоморфна нек-рой истинной П. другой, то отсюда еще не следует изоморфизм самих этих групп. *О. А. Иванова.*

ПОДГРУППЫ ИНДЕКС в группе G — число *смежных классов* в каждом из разложений группы G по этой подгруппе H (в бесконечном случае — мощность множества этих классов). Если число смежных классов конечно, то H наз. подгруппой конечного индекса в G. Пересечение конечного числа подгрупп конечного индекса само имеет конечный индекс (теорема Пуанкаре). Индекс подгруппы H в группе G обычно обозначается $|G:H|$. Произведение порядка подгруппы H на ее индекс $|G:H|$ равно порядку группы G (теорема Лагранжа). Это соотношение имеет место как для конечной группы G, так и в случае бесконечной G — для соответствующих мощностей.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982; [2] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *О. А. Иванова.*

ПОДЕРА, подэра, кривой l относительно точки O — множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки O на касательные к кривой l. Напр., улитка Паскаля — П. окружности относительно точки O (см. рис.). П. плоской линии $x=x(t)$, $y=y(t)$ относительно начала координат:



$$X=x-x'\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2},\ Y=y-y'\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}.$$

Уравнение П. пространственной линии $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ относительно начала координат:

$$X=x-x'\frac{xx'+yy'+zz'}{x'^2+y'^2+z'^2};\ Y=y-y'\frac{xx'+yy'+zz'}{x'^2+y'^2+z'^2};$$

$$Z=z-z'\frac{xx'+yy'+zz'}{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

Антиподерой линии l относительно точки O наз. линия, П. к-рой относительно точки O есть линия l.

П. поверхности относительно точки O — множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки O на касательные плоскости поверхности. Уравнение П. поверхности $F(x, y, z)=0$ по отношению к началу координат:

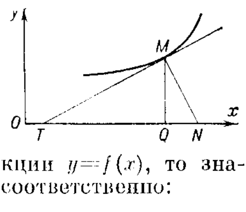
$$X=F_x\Phi,\ Y=F_y\Phi,\ Z=F_z\Phi,$$

где

$$\Phi=\frac{xF_x+yF_y+zF}{F_x^2+F_y^2+F_z^2}.$$

А. Б. Иванов.

ПОДКАСАТЕЛЬНАЯ И ПОДНОРМАЛЬ — направленные отрезки QT и QN, являющиеся проекциями на ось Ox отрезков касательной MT и нормали MN к нек-рой кривой в ее точке M (см. рис.).



Если кривая есть график функции $y=f(x)$, то значения величин П. и п. равны соответственно:

$$QT=-\frac{f(x)}{f'(x)},\ QN=f(x)f'(x),$$

где x — абсцисса точки M. Если кривая задана параметрически:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$$

то тогда

$$QT=-\frac{\psi(t)\varphi'(t)}{\psi'(t)},\ QN=\frac{\psi(t)\psi'(t)}{\psi'(t)},$$

где t — значение параметра, определяющее точку M кривой. *БСЭ-3.*

ПОДКАТЕГОРИЯ — частный случай понятия подструктуры математич. структуры. Категория $\mathfrak{L}$ наз. подкатегорией категории $\mathfrak{K}$, если $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}\subseteq\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$,

$$H_{\mathfrak{L}}(A, B)=H_{\mathfrak{K}}(A, B)\cap\mathrm{Mor}\,\mathfrak{L}$$

для любых $A, B\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$ и произведение морфизмов из $\mathfrak{L}$ совпадает с их произведением в $\mathfrak{K}$. Для каждого подкласса $\mathfrak{L}'$ класса $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ существуют наименьшая и наибольшая подкатегории $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ категории $\mathfrak{K}$, классы объектов к-рых совпадают с $\mathfrak{L}'$; подкатегория $\mathfrak{L}_1$ содержит только единичные морфизмы объектов из $\mathfrak{L}'$ и наз. дискретной П., порожденной $\mathfrak{L}'$; подкатегория $\mathfrak{L}_2$ содержит все морфизмы из $\mathfrak{K}$, начала и концы к-рых лежат в $\mathfrak{L}'$ и наз. полной П., порожденной $\mathfrak{L}'$. Всякая подкатегория $\mathfrak{L}$ категории $\mathfrak{K}$, для к-рой $H_{\mathfrak{L}}(A, B)=H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ для любых $A, B\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$, наз. полной П. категории $\mathfrak{K}$. Полными П. являются: П. непустых множеств в категории всех множеств, П. абелевых групп в категории всех групп и т. д. Для *малой категории* $\mathfrak{D}$ полная П. категории всех контравариантных функторов из $\mathfrak{D}$ в категорию множеств, порожденная основными функторами, изоморфна категории $\mathfrak{D}$. Этот результат позволяет строить пополнение произвольной малой категории пределами и копределами.

Произвольная П. категории $\mathfrak{K}$ не наследует никаких свойств этой категории. Однако существуют важные классы П., наследующих многие свойства объемлющей категории, таковы, напр., рефлективные П., корефлективные П. *М. Ш. Цаленко.*

ПОДМАТРИЦА матрицы A размера $m\times n$ — матрица размера $k\times l$, где $1\leqslant k\leqslant m$, $1\leqslant l\leqslant n$, образованная элементами, находящимися на пересечении фиксированных k строк и l столбцов матрицы A с сохранением прежнего порядка. Определитель квадратной П. порядка k матрицы A наз. минором k-го порядка матрицы A. *Т. С. Пиголкина.*

ПОДМНОГООБРАЗИЕ — 1) В узком смысле слова топологическое n-мерное П. топологического m-мерного многообразия M — такое подмножество $N\subset M$, к-рое в индуцированной топологии является n-мерным многообразием. Число $m-n$ наз. коразмерностью подмногообразия N. Наиболее часто встречаются локально плоские П., для к-рых тождественное вложение $i\colon N\to M$ является *локально плоским вложением*. Подмножество $N\subset M$ является локально плоским П., если для каждой точки $p\in N$ имеются такая окрестность U этой точки в M и такие локальные координаты $x_1, \ldots, x_m$ в ней, что в терминах этих координат $N\cap U$ описывается уравнениями $x_{n+1}= =\ldots=x_m=0$.

2) В широком смысле слова топологическое n-мерное П. топологического m-мерного многообразия M — такое n-мерное многообразие N, к-рое как множество точек является подмножеством M (иными словами, N — это подмножество M, снабженное структурой n-мерного многообразия) и для к-рого тождественное вложение $i\colon N\to M$ является *погружением*. П. в узком смысле является П. в широком смысле, а последнее является П. в узком смысле тогда и только тогда, когда i есть вложение в топологич. смысле (т. е. у каждой точки $p\in N$ имеется сколь угодно малые окрестности в N, являющиеся пересечениями с N нек-рых окрестностей в M).

3) Кусочно линейное, аналитическое или дифференцируемое (класса C^l, $l\leqslant\infty$) П. кусочно линейного, аналитического или дифференцируемого (класса C^k, $l\leqslant k\leqslant\infty$) многообразия M в широком смысле (соответственно узком) — это подмножество $N\subset M$, к-рое снабжено структурой кусочно линейного, аналитического или дифференцируемого (класса C^l) многообразия, причем i является кусочно линейным, аналитическим или дифференцируемым (класса C^l) погружением (соответственно вложением). Определение дифференцируемого П. класса C^l годится и при $l=0$, совпадая в этом случае с определением топологического П. Обычно подразумевается, что $l\geqslant 1$.

В аналитическом и дифференцируемом случаях П. всегда является локально плоским. Поэтому определение аналитического (дифференцируемого) П. в узком смысле обычно с самого начала формулируется как аналитический (дифференцируемый) вариант данного в 1) определении локально плоского П. с помощью локальных координат, добавляя к сказанному там условию, чтобы локальные координаты $x_1, \ldots, x_m$ были аналитическими (дифференцируемыми класса C^l). Если подмножество N удовлетворяет последнему определению, то оно естественным образом снабжается структурой аналитического (дифференцируемого класса C^l) многообразия и i оказывается вложением в смысле соответствующей структуры.

Кусочно линейное П. в узком смысле локально представляется как подполиэдр объемлющего многообразия, кусочно линейно эквивалентный симплексу. Оно не всегда является локально плоским (хотя это так при $m-n>2$); кроме того, для таких П. свойство быть локально плоским в топологич. смысле не совпадает (по крайней мере непосредственно) со свойством быть локально плоским в кусочно линейном смысле.

4) Простой модификацией этих определений получаются определения: П. с краем; П. многообразия с краем (при этом в ряде топологич. вопросов оказывается целесообразным ограничить возможные расположения П. у края объемлющего многообразия, см. [1]); П., различные компоненты к-рого могут иметь различную размерность; П. бесконечномерного многообразия [2]; комплексно аналитического П. комплексно аналитического многообразия.

Понятие П. в узком смысле является непосредственным обобщением понятия кривой и поверхности. П. в широком смысле используются в теории групп Ли (где это понятие и было впервые введено [3]), дифференциальной геометрии [4] и теории *слоений.*

5) В *алгебраической геометрии* П.— замкнутое подмножество алгебраич. многообразия в *Зариского топологии.* Этим формализуется идея, что П. задается алгебраич. уравнениями. Помимо перехода от $\mathbb{R}$ к другим полям, изменение понятия П. в этом случае состоит в том, что допускаются П. с особенностями.

Лит.: [1] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [2] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948; [4] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970. *Д. В. Аносов.*

ПОДМОДУЛЬ — подмножество модуля, являющееся подгруппой его аддитивной группы и замкнутое относительно умножения на элементы основного кольца. В частности, левый (правый) идеал кольца R является П. левого (правого) R-модуля R. П., отличный от всего модуля, наз. собственным. Множество П. данного модуля, упорядоченное по включению, является полной дедекиндовой решеткой (см. *Вполне приводимый модуль*). Если φ — гомоморфизм модуля A в модуль B, то множество

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{x \mid x \in A,\ \varphi(x) = 0\}$$

оказывается П. модуля A и наз. ядром гомоморфизма φ. Каждый П. служит ядром некоторого гомоморфизма. П. наз. большим (или существенным), если он имеет ненулевое пересечение с любым другим ненулевым П. Напр., целые числа образуют большой П. группы рациональных чисел. Каждый модуль является большим П. своей инъективной оболочки (см. *Инъективный модуль*). Подмодуль A модуля B наз. малым (или косущественным), если для любого подмодуля $A' \subseteq B$ равенство $A + A' = B$ влечет $A' = B$. Малым оказывается, напр., всякий собственный П. цепного модуля. Малый П. образуют необратимые элементы локального кольца.

Сумма всех малых П. совпадает с пересечением всех максимальных П. Левый идеал I принадлежит радикалу Джекобсона тогда и только тогда, когда IM мал в M для всякого конечно порожденного левого модуля M. Элементы малого П. являются необразующими, т. е. любая система образующих модуля остается таковой после удаления любого из этих элементов (это, конечно, не означает, что их можно удалить все сразу!). Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов модуля совпадает с множеством эндоморфизмов, имеющих малый образ.

Лит.: [1] Каш Ф., Модули и кольца, пер. с нем., М., 1981; [2] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79. *Л. А. Скорняков.*

ПОДОБИЕ — преобразование евклидова пространства, при к-ром для любых двух точек A, B и их образов A', B' имеет место соотношение $|A'B'|=k|AB|$, где k — положительное число, называемое коэффициентом П.

Каждая *гомотетия* является подобием. Каждое *движение* (в том числе и тождественное) также можно рассматривать как преобразование П. с коэффициентом k, равным единице. Фигура F наз. подобной фигуре F', если существует преобразование П., при к-ром $F \to F'$. П. фигур является отношением эквивалентности, т. е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. П. есть взаимно однозначное отображение евклидова пространства на себя; П. сохраняет порядок точек на прямой, т. е. если точка B лежит между точками A, C и B', A', C' — соответствующие их образы при нек-ром П., то B' также лежит между точками A' и C'; точки, не лежащие на прямой, при любом П. переходят в точки, не лежащие на одной прямой. П. преобразует прямую в прямую, отрезок в отрезок, луч в луч, угол в угол, окружность в окружность. При П. угол сохраняет величину.

П. с коэффициентом $k \neq 1$, преобразующее каждую прямую в параллельную ей прямую, является гомотетией с коэффициентом k или $-k$. Каждое П. можно рассматривать как композицию движения D и нек-рой гомотетии Γ с положительным коэффициентом.

П. наз. собственным (несобственным), если движение D является собственным (несобственным). Собственное П. сохраняет ориентацию фигур, а несобственное — изменяет ориентацию на противоположную.

Аналогично определяется П. (с сохранением указанных выше свойств) в 3-мерном евклидовом пространстве, а также в n-мерном евклидовом и псевдоевклидовом пространствах.

В n-мерных римановых, псевдоримановых и финслеровых пространствах П. определяется как преобразование, переводящее метрику пространства в себя с точностью до постоянного множителя.

Совокупность всех П. n-мерного евклидова, псевдоевклидова, риманова, псевдориманова или финслерова пространства составляет r-членную группу преобразований Ли, наз. группой подобных (гомотетических) преобразований соответствующего пространства. В каждом из пространств указанных типов r-членная группа подобных преобразований Ли содержит $(r-1)$-членную нормальную подгруппу движений.

Представляют интерес метрич. пространства векторных плотностей с группами П. и изометрий, содержащими бесконечномерные подгруппы изометрий с общими траекториями. *И. П. Егоров.*

ПОДОБИЯ ТЕОРИЯ — учение об исследовании физич. явлений, основанное на понятии о физич. подобии.

Два физич. явления подобны, если по численным значениям характеристик одного явления можно получить численные значения характеристик другого явления простым пересчетом, к-рый аналогичен переходу от одной системы единиц измерения к другой. Для всякой совокупности подобных явлений все соответствующие безразмерные характеристики (безразмерные комбинации из размерных величин) имеют одинаковое численное значение (см. *Размерностей анализ*). Обратное заключение тоже верно, т. е. если все соответствующие безразмерные характеристики для двух явлений одинаковы, то эти явления физически подобны.

Анализ размерностей и П. т. тесно связаны между собой и положены в основу экспериментов с моделями. В таких экспериментах осуществляются замены изучения нек-рого явления в натуре изучением аналогичного явления на модели меньшего или большего масштаба (обычно в специальных лабораторных условиях).

После установления системы параметров, определяющих выделенный класс явлений, устанавливаются условия подобия двух явлений. Именно, пусть явление определяется n независимыми параметрами, нек-рые из к-рых могут быть безразмерными. Пусть, далее, размерности определяющих переменных и физич. постоянных выражены через размерности k из этих параметров с независимыми размерностями ($k \leqslant n$). Тогда из n величин можно составить только $n-k$ независимых безразмерных комбинаций. Все искомые безразмерные характеристики явления можно рассматривать как функции от этих $n-k$ независимых безразмерных комбинаций, составленных из определяющих параметров. Среди всех безразмерных величин, составленных из определяющих характеристик явления, всегда можно указать нек-рую базу, т. е. систему безразмерных величин, к-рые определяют собой все остальные.

Определенный соответствующей постановкой задачи класс явлений содержит явления, вообще неподобные между собой. Выделение из него подкласса подобных явлений осуществляется с помощью следующего условия.

Для подобия двух явлений необходимо и достаточно, чтобы численные значения безразмерных комбинаций, составленных из полного перечня определяющих параметров, образующих базу, в этих двух явлениях были одинаковы. Условия о постоянстве базы отвлеченных параметров, составленных из заданных величин, определяющих явление, наз. к р и т е р и я м и п о д о б и я.

В гидродинамике важнейшими критериями подобия являются *Рейнольдса число*, характеризующее соотношение между инерционными силами и силами вязкости, *Маха число*, учитывающее сжимаемость газа, и *Фруда число*, характеризующее соотношение между инерционными силами и силами тяжести. Основными критериями подобия процессов теплопередачи между жидкостью (газом) и обтекаемым телом являются: *Прандтля число*, характеризующее термодинамич. состояние среды; *Нуссельта число*, характеризующее интенсивность конвективного теплообмена между поверхностью тела и потоком жидкости (газа); *Пекле число*, характеризующее соотношение между конвективным и молекулярным процессами переноса тепла в жидкости; *Стэнтона число*, характеризующее интенсивность диссипации энергии в потоке жидкости или газа. Для распределения тепла в твердом теле критериями подобия являются *Фурье число*, характеризующее скорость изменения тепловых условий в окружающей среде и скорость перестройки поля темп-ры внутри тела, и число Био, определяющее характер соответствия между температурными условиями среды и распределением температуры внутри тела. В процессах, изменяющихся с течением времени, основными критериями подобия, характеризующими одинаковость протекания процессов во времени, являются критерии гомохронности. В задачах аэрогидромеханики этот критерий наз. *Струхаля числом.* Критерием подобия механич. движения является *Ньютона число.* При изучении упругих деформаций критерием подобия является коэффициент Пуассона.

Если условия подобия выполнены, то для фактич. расчета всех характеристик в натуре по данным о размерных характеристиках на модели необходимо знать переходные масштабы для всех соответствующих величин. Если явление определяется n параметрами, из к-рых k имеют независимые размерности, то для величин с независимыми размерностями переходные масштабы могут быть произвольными и их нужно задать с учетом условий задачи, а при экспериментах — и с учетом условий опыта. Переходные масштабы для всех остальных размерных величин получаются из формул, выражающих размерности каждой размерной величины через размерности k величин с независимыми размерностями, для к-рых масштабы подсказаны условиями опыта и постановки задачи.

Напр., в задаче об установившемся обтекании тела несжимаемой вязкой жидкостью все безразмерные величины, характеризующие движение в целом, определяются тремя параметрами: углами α, β (направление поступательной скорости тела относительно его поверхности) и числом Рейнольдса R. Условия физич. подобия — критерии подобия — представляются соотношениями:

$$\alpha = \text{const}, \ \beta = \text{const}, \ R = \frac{Pvd}{\mu} = \text{const}.$$

Здесь подразумевается, что при моделировании явления результаты опытов с моделью можно переносить на натуру только при одинаковых α, β и R. Первые два условия всегда легко осуществить на практике, третье — труднее, особенно в тех случаях, когда модель меньше обтекаемого тела, к-рое в натуре имеет большие размеры, напр. крыло самолета. При уменьшении размеров для сохранения величины числа Рейнольдса необходимо либо увеличивать скорость обтекаемого потока, что практически обычно неосуществимо, либо существенно изменять плотность и вязкость жидкости. На практике эти обстоятельства приводят к большим затруднениям при изучении аэродинамич. сопротивления (напр., продувка самолетов в натуральную величину в аэродинамич. трубах, а также труб закрытого типа, в к-рых циркулирует с большой скоростью сжатый, т. е. более плотный, воздух).

Специальные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что в ряде случаев для тел хорошо обтекаемой формы число Рейнольдса заметно влияет только на безразмерный коэффициент лобового сопротивления и иногда очень слабо влияет на безразмерный коэффициент подъемной силы и на нек-рые др. величины, играющие весьма важную роль в различных практич. вопросах. Различие в значении числа Рейнольдса на модели и в натуре в нек-рых вопросах не является существенным.

Аналогичным образом при моделировании движения тел в газе с большими скоростями необходимо иметь одинаковые значения числа Маха на модели и в натуре.

При моделировании плавания кораблей по воде необходимо обеспечивать равенство для натуры и модели чисел Фруда и Рейнольдса. Однако при уменьшении линейных размеров и опытах в воде в лаборатории из условия о постоянстве чисел Рейнольдса следует требование об увеличении скорости движения модели, а из постоянства числа Фруда следует требование об уменьшении скорости движения модели, поэтому точное моделирование (при испытании моделей кораблей в лаборатории), вообще говоря, невозможно. Иногда такого рода трудности можно обходить путем использования различных жидкостей или путем искусственного изменения ускорения силы тяжести с помощью «центробежного моделирования», располагая испытываемые объекты на вращающейся установке большого диаметра.

Детальное проникновение в сущность гидродинамич. явлений показывает, что во многих случаях влияние числа Рейнольдса можно учесть с помощью дополнительных расчетов или с помощью простых опытов с использованием данных по буксировке плоских пластинок. В гидродинамике обычных водоизмещающих судов основное значение имеет число Фруда, и поэтому моделирование проводится с соблюдением постоянства числа Фруда.

Исследование с помощью моделей часто является единственно возможным способом экспериментального изучения и решения важнейших практич. задач. Так обстоит дело при изучении натурных явлений, протекающих в течение десятков, сотен или даже тысяч лет; в условиях модельных опытов подобное явление может продолжаться несколько часов или дней (напр., при моделировании просачивания нефти). Могут встречаться и обратные случаи, когда вместо исследования чрезвычайно быстро протекающего в природе явления изучают подобное явление, происходящее на модели гораздо медленнее.

Моделирование является исходной базой для задачи, к-рая состоит в фактич. определении законов природы, в отыскании общих свойств и характеристик различных классов явлений, в разработке экспериментальных и теоретич. методов исследования и разрешения различных проблем, в получении систематич. материалов, приемов, правил и рекомендаций для решения конкретных практич. задач.

Лит.: [1] Бриджмен П. В., Анализ размерностей, пер. с англ., Л.— М., 1934; [2] Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, 9 изд., М., 1981.

Л. И. Седов.

ПОДОБНАЯ ОБЛАСТЬ — общепринятое сокращение термина «критическая область, подобная выборочному пространству», употребляемого в математич. статистике по отношению к критич. области нерандомизированного подобия статистич. критерия.

Пусть X — случайная величина, принимающая значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_0)$, $\theta \in \Theta$, и пусть проверяется сложная гипотеза $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ против альтернативы $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. Далее, пусть для проверки H_0 против H_1 построен нерандомизированный подобный критерий уровня $\alpha (0 < \alpha < 1)$, критич. функция к-рого есть $\varphi(x)$, $x \in \mathfrak{X}$. Так как этот критерий является нерандомизированным, то

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in K \subset \mathfrak{X}, \\ 0, & x \notin K, \end{cases} \tag{1}$$

где K — нек-рое множество из пространства $\mathfrak{X}$, наз. **критическим множеством критерия** (согласно этому критерию гипотеза H_0 отклоняется в пользу H_1, если в эксперименте наблюдается событие $\{X \in K\}$). Кроме того, построенный критерий является подобным, в силу чего

$$\int_{\mathfrak{X}} \varphi(x)\, d\mathsf{P}_\theta = \alpha \text{ при всех } \theta \in \Theta_0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что критич. область K нерандомизированного подобного критерия обладает следующим свойством:

$$\mathsf{P}_\theta \{X \in K\} = \alpha \text{ при всех } \theta \in \Theta_0.$$

Именно, акцентируя внимание на последнем свойстве критич. множества K нерандомизированного подобного критерия, Дж. Нейман и Э. Пирсон назвали K «областью, подобной выборочному пространству $\mathfrak{X}$» в том смысле, что обе вероятности $\mathsf{P}_\theta\{X \in K\}$ и $\mathsf{P}_\theta\{X \in \mathfrak{X}\}$ не зависят от $\theta \in \Theta_0$.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Neyman J., Pearson E. S., «Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A», 1933, v. 231, p. 289—337; [4] Lehmann E. L., Scheffé H., «Sankhyā», 1950, v. 10, p. 305—40; [4] их же, там же, 1955, v. 15, p. 219—36. *М. С. Никулин.*

ПОДОБНАЯ СТАТИСТИКА — статистика, имеющая одно и то же распределение вероятностей при справедливости нек-рой сложной гипотезы.

Пусть статистика T отображает выборочное пространство $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}_{\mathfrak{X}}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, в измеримое пространство $(\mathfrak{Y}, \mathscr{B}_{\mathfrak{Y}})$ и пусть рассматривается нек-рая сложная гипотеза H_0: $\theta \in \Theta_0 \subseteq \Theta$. В таком случае, если для любого события $B \in \mathscr{B}_{\mathfrak{Y}}$ вероятность

$$\mathsf{P}_\theta(T^{-1}(B)) \text{ не зависит от } \theta, \text{ когда } \theta \in \Theta_0, \qquad (*)$$

то говорят, что T является П. с. по отношению к гипотезе H_0 или просто П.с. Очевидно, что условие (*) равносильно тому, что распределение статистики T не меняется, когда θ пробегает Θ_0. Имея в виду это свойство, часто о П. с. говорят, что она является свободной относительно параметра θ, $\theta \in \Theta_0$. П. с. играют большую роль при построении подобных критериев, а также при решении статистич. задач с мешающими параметрами.

Пример 1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково нормально $N_1(a, \sigma^2)$ распределенные случайные величины ($|a| < \infty$, $\sigma > 0$). Тогда при любом $\alpha > 0$ статистика

$$T = \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2\right]^\alpha} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^{2\alpha},$$

где

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

является свободной относительно двумерного параметра (a, σ^2).

Пример 2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_{n+m}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, функция распределения к-рых принадлежит семейству $\mathscr{F} = \{F(x)\}$ всех непрерывных функций распределений на $(-\infty, +\infty)$. В этом случае, если $F_n(x)$ и $F_m(x)$ суть функции эмпирич. распределений, построенные по наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_{n+m}$ соответственно, то статистика Смирнова

$$S_{n,m} = \sup_{|x| < \infty} |F_n(x) - F_m(x)|$$

является подобной относительно семейства $\mathscr{F}$.

Лит.: [1] Соле Ж.-Л., Основные структуры математической статистики, пер. с франц., М., 1972; [2] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [3] Барра Ж.-Р., Основные понятия математической статистики, пер. с франц., М., 1974. *М. С. Никулин.*

ПОДОБНЫЕ МАТРИЦЫ — квадратные матрицы A и B одного порядка, связанные соотношением $B = S^{-1}AS$, где S — какая-либо невырожденная матрица того же порядка. П. м. имеют один и тот же ранг, один и тот же определитель, один и тот же характеристич. многочлен, одни и те же собственные значения. Часто бывает важно выбрать для данной матрицы ей подобную, имеющую возможно более простую форму, напр. диагональную или жорданову (см. *Жорданова матрица*). *Т. С. Пиголкина.*

ПОДОБНЫЕ МНОЖЕСТВА — обобщение элементарно-геометрич. понятия *подобия*. Множества A и B, линейно упорядоченные отношениями $\mathscr{R}$ и $\mathscr{S}$, наз. подобными, если для них существует такое взаимно однозначное отображение $f: A \to B$, что для любых $x, y \in A$ из $x\mathcal{R}y$ следует $f(x)\mathcal{S}f(y)$. *М. И. Войцеховский.*

ПОДОБНЫЕ ОПЕРАТОРЫ — операторы S и T в банаховом пространстве X (не обязательно ограниченные) такие, что существует ограниченный оператор U в X, обладающий ограниченным обратным, и выполняется соотношение

$$S = U^{-1}TU.$$

Если U — унитарный оператор, то S и T наз. унитарно эквивалентными.

Это понятие — пример понятия т. н. подобных отображений. Пусть f и g — два отображения множества X в себя. Тогда если существует взаимно однозначное отображение $U: X \to X$ такое, что $Uf = gU$, то эти отображения наз. подобными. Имеются попытки дать определение подобия для отображений одного множества X на другое Y; напр., отображения наз. подобными, если существуют взаимно однозначные отображения U и V множеств X и Y на себя такие, что $Vf = gU$. *М. И. Войцеховский.*

ПОДОБНЫЙ КРИТЕРИЙ — статистический критерий для проверки сложной гипотезы $H_0: \theta \in \Theta_0$ против сложной альтернативы $H_1: \theta \in \Theta_1 (\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing)$, функция мощности к-рого принимает на Θ_0 одно и то же заранее заданное значение из интервала (0,1).

См. *Неймана структура*, *Беренса — Фишера проблема*, *Подобная область*.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

ПОДОБЪЕКТ объекта категории — понятие, аналогичное понятию подструктуры математич. структуры. Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная категория и A — фиксированный объект из $\mathfrak{K}$. В классе всех мономорфизмов из $\mathfrak{K}$ с концом в A вводится отношение предпорядка (отношение делимости справа): $\mu: X \to A$ предшествует $\sigma: Y \to A$ или $\mu \prec \sigma$, если $\mu = \mu'\sigma$ для нек-рого $\mu': X \to Y$. В действительности, морфизм μ' однозначно определен, поскольку σ — мономорфизм. Отношение предпорядка индуцирует отношение эквивалентности между мономорфизмами с концом в A: мономорфизмы $\mu: X \to A$ и $\sigma: Y \to A$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mu \prec \sigma$ и $\sigma \prec \mu$. Класс эквивалентных мономорфизмов наз. подобъектом объекта A. П. с представителем $\mu: X \to Y$ иногда обозначают $(\mu: X \to A]$ или $(\mu]$. Допускается также возможность с помощью т. н. символа τ Гильберта произвести выбор представителей подобъектов объекта A и рассматривать этих представителей в качестве подобъектов. В категориях множеств, групп, абелевых групп, векторных пространств П. любого объекта определяется канонич. вложением подмножества (подгруппы, подпространства) в объемлющее множество (группу, пространство). Однако в категории топологич. пространств введенное понятие П. шире понятия подмножества с индуцированной топологией.

Отношение предпорядка между мономорфизмами с общим концом A индуцирует отношение порядка между П. объекта A: $(\mu] \leqslant (\sigma]$, если $\mu < \sigma$. Это отношение аналогично отношению включения подмножеств некоторого множества.

Если мономорфизм μ регулярен, то любой эквивалентный ему мономорфизм также регулярен. Поэтому можно говорить о регулярных П. любого объекта A. В частности, П. с представителем 1_A регулярен. В категориях с нулевыми морфизмами аналогично вводятся нормальные П. Если в категории $\mathfrak{K}$ существует бикатегорная структура $(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$, то подобъект $(\mu: X \to A]$ объекта A наз. допустимым (относительно указанной бикатегорной структуры), если $\mu \in \mathfrak{M}$. *М. Ш. Цаленко.*

ПОДПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ — линейное представление ρ в инвариантном подпространстве $F \subset E$ представления π группы (алгебры, кольца, полугруппы) X в векторном (топологич. векторном) пространстве E, определяемое формулой $\rho(x)\xi = \pi(x)\xi$ для всех $\xi \in F$, $x \in X$. Если π — непрерывное представление (топологич. группы, алгебры, кольца, полугруппы), то любое его П. п. также непрерывно.

А. И. Штерн.

ПОДПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ алгебраических систем — специальный тип подсистем прямого (декартова) произведения систем. Пусть A_i, $i \in I$, — семейство однотипных алгебраич. систем и пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$ — прямое произведение этих систем с проекциями ρ_i: $A \to A_i$, $i \in I$. Алгебраич. система B того же типа наз. подпрямым произведением систем A_i, если существует такое вложение m: $B \to A$, что гомоморфизмы $m\rho_i$, $i \in I$, сюръективны. Иногда под П. п. понимается любая система, изоморфная подсистеме прямого произведения: тогда системы, удовлетворяющие сформулированному выше условию, наз. специальными подпрямыми произведениями. В теории колец и в теории модулей П. п. наз. также подпрямой суммой. Подпрямое произведение (подпрямую сумму) обозначают $\prod^s_{i \in I} A_i$ ($\sum^s_{i \in I} A_i$ соответственно).

Следующие условия равносильны: а) система B является П. п. систем A_i, $i \in I$; б) существует разделяющее семейство сюръективных гомоморфизмов f_i: $B \to A_i$, $i \in I$; в) существует такое семейство конгруэнций ρ_i, $i \in I$, системы B, что пересечение этих конгруэнций является единичной конгруэнцией и $B/\rho_i \simeq A_i$ для каждого $i \in I$. Всякая универсальная алгебра является П. п. подпрямо неразложимых алгебр.

С теоретико-категорной точки зрения понятие П. п. двойственно понятию правильного произведения алгебраич. систем с нулевыми (одноэлементными) подсистемами.

М. Ш. Цаленко.

ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ геометрического симплициального комплекса K — такой геометрический симплициальный комплекс K_1, что тело $|K_1|$ совпадает с телом $|K|$ и каждый симплекс K_1 содержится в нек-ром симплексе K. Практически переход к П. производится с помощью разбиения симплексов комплекса K на более мелкие симплексы так, чтобы разбиение каждого симплекса было согласовано с разбиением его граней. В частности, каждая вершина K является вершиной K_1. Переход к П. обычно используется для доказательства инвариантности комбинаторно определяемых характеристик *полиэдров* (напр., *эйлеровой характеристики*, *гомологий групп*), а также для получения *триангуляций* с нужными свойствами (напр., достаточно мелких триангуляций). Звездное П. комплекса K с центром в точке $a \in |K|$ получается следующим образом. Замкнутые симплексы K, не содержащие точку a, остаются без изменения. Каждый замкнутый симплекс σ, содержащий точку a, разбивается на конусы с вершиной в точке a над теми гранями σ, к-рые не содержат a. Для любых двух триангуляций T_1, T_2 одного и того же полиэдра P существует триангуляция T_3 полиэдра P, получающаяся как из T_1, так и из T_2 последовательностью звездных П. Понятие звездного П. допускает формализацию на языке абстрактных симплициальных комплексов (симплициальных схем). Любое звездное П. замкнутого подкомплекса продолжается до звездного П. всего комплекса. Производное подразделение K' комплекса K получается в результате последовательных звездных П. с центрами во всех открытых симплексах K в порядке убывания их размерностей. Для произвольного замкнутого подкомплекса K комплекса L подкомплекс $K' \subset L'$ — полный в следующем смысле: из того, что все вершины нек-рого симплекса

$\sigma \in L'$ лежат в K', следует, что $\sigma \in K'$. Если в качестве центров производного П. выбрать барицентры симплексов, то получится барицентрическое П. Если диаметр каждого симплекса n-мерного комплекса K не превосходит числа d, то диаметры симплексов его барицентрического П. ограничены числом $\frac{nd}{n+1}$. Диаметры симплексов m-кратного барицентрического П. комплекса K ограничены числом $\left(\frac{n}{n+1}\right)^m d$, т. е. могут быть сделаны сколь угодно малыми путем выбора достаточно большого m.

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947; [2] Хилтон П.-Дж., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, пер. с англ., М., 1966.
С. В. Матвеев.

ПОДРЕШЕТКА — подмножество A элементов решетки, замкнутое относительно операций $+$ и $\cdot$, т. е. такое подмножество, что $a+b \in A$ и $ab \in A$ для любых a, b из A. Таким образом, П. является подалгеброй решетки, рассматриваемой как универсальная алгебра с двумя бинарными операциями. Подрешетка A наз. выпуклой, если из a, $b \in A$ и $a \leqslant c \leqslant b$ вытекает, что $c \in A$. Примерами П. являются всякое одноэлементное подмножество решетки, идеал, фильтр, интервал. Все эти П. выпуклые. Любое подмножество элементов цепи является ее П. (не обязательно выпуклой). Все П. данной решетки, упорядоченные отношением включения, образуют решетку.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970; [3] Житомирский Г. И., в сб.: Упорядоченные множества и решетки, в. 7, Саратов, 1981; [4] Грэтцер Г., Общая теория решеток, пер. с англ., М., 1982.
Т. С. Фофанова.

ПОДСТАНОВКА множества — взаимно однозначное отображение множества на себя. Термин «П.» главным образом применяется для конечного множества X. В этом случае удобно считать, что $X=\{1, \ldots, n\}$, и записывать П. в виде

$$\gamma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots n \\ i_1 & i_2 & \ldots i_n \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — нек-рая *перестановка* чисел 1, 2, ..., n (впрочем, иногда термин «перестановка» употребляется как синоним термина «П.», см., напр., [2] с. 146). Запись (*) означает, что γ переводит число k в i_k, то есть $\gamma(k)=i_k$ (пишут также $k^\gamma=i_k$) для $i=1, 2, \ldots, n$. Число всех различных П. множества X при $|X|=n$ равно числу всех перестановок этого множества, т. е. $n!$. Произведение подстановок α и β множества X определяется как последовательное выполнение отображений α и β и задается формулой $\alpha\beta(x)=\alpha(\beta(x))$ для всех $x \in X$. Совокупность всех П. множества X образует группу относительно введенного умножения, к-рая наз. *симметрической группой*. Любая подгруппа симметрич. группы наз. *подстановок группой*.

Симметрич. группа П. множества X обозначается $S(X)$, она содержит в качестве подгруппы $SF(X)$ — группу, состоящую из таких подстановок γ, к-рые перемещают лишь конечное подмножество элементов (то есть $\gamma(x) \neq x$ лишь для конечного множества элементов $x \in X$). Если X конечно и состоит из n элементов, то симметрич. группа обозначается S_n.

Транспозицией наз. такая П. множества X, к-рая меняет местами только два элемента i и j; она обозначается (i, j). В S_n имеется ровно $n(n-1)/2$ транспозиций. Любая подстановка γ из $SF(X)$ представима в виде произведения транспозиций. В частности, каждая П. из S_n есть произведение транспозиций. П. может разлагаться в произведение транспозиций многими способами. Однако для данной γ характер четности числа множителей в разложении на транспозиции не зависит от способа разложения. П., представимая в виде произведения четного числа транспозиций, наз. **четной**, а разлагающаяся в произведение нечетного числа транспозиций — **нечетной**. В S_n имеется $n!/2$ четных П. и столько же нечетных. Если П. $\gamma \in S_n$ записана в виде (*), то ее четность совпадает с четностью **числа инверсий** перестановки $i_1, \ldots, i_n$, к-рое равно числу таких пар $\{i_k, i_j\}$, что $k<j$, $i_k>i_j$. Транспозиция, очевидно, есть нечетная П. Применение одной транспозиции к любой перестановке меняет четность числа ее инверсий на противоположную. Произведение двух четных, а также двух нечетных П. есть четная П., а четной и нечетной П. (в любом порядке) — нечетная. Все четные П. составляют нормальную подгруппу $A(X)$ в группе $SF(X)$, к-рая наз. **знакопеременной**. При $|X|=n$ подгруппа $A(X)$ обозначается A_n.

Циклом длины l наз. такая подстановка σ конечного множества $Y=\{y_1, \ldots, y_l\}$, что

$$\sigma(y_1)=y_2,\ \sigma(y_2)=y_3, \ldots,\ \sigma(y_{l-1})=y_l,\ \sigma(y_l)=y_1.$$

Конечный цикл обозначается $(y_1, y_2, \ldots, y_l)$. **Бесконечным циклом** наз. такая П. счетного множества

$$Y=\{\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots\},$$

что для любого целого i $\sigma(y_i)=y_{i+1}$. Обозначение бесконечного цикла таково:

$$(\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots).$$

Цикл длины 2 есть транспозиция. Группа S_n содержит $(n-1)!$ циклов длины n. Для любой подстановки γ из $S(X)$ существует такое разбиение множества X на непересекающиеся подмножества, что на каждом из них γ действует как цикл. Конечные подмножества этого разбиения имеют вид

$$\{x, \gamma(x), \ldots, \gamma^{l-1}(x)\},$$

где $\gamma^l(x)=x$, а бесконечные —

$$\{\ldots, \gamma^{-2}(x), \gamma^{-1}(x), x, \gamma(x), \gamma^2(x), \ldots\},$$

где $\gamma^k(x)\neq x$ при $k\neq 0$. Циклы, индуцируемые подстановкой γ на подмножествах разбиения, наз. **независимыми циклами** подстановки γ. Например, (1, 3, 4) и (2, 5)— независимые циклы П.

$$\gamma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

γ записывается в виде

$$(1, 3, 4)(2, 5)$$

и является произведением своих независимых циклов. Вообще, если γ нетождественная П., имеющая лишь конечное число циклов неединичной длины, то γ — произведение таких циклов. В частности, каждая нетождественная П. из $SF(X)$ является произведением своих независимых циклов неединичной длины. **Порядок подстановки** γ из $SF(X)$, т. е. порядок циклич. группы $\langle\gamma\rangle$, равен наименьшему общему кратному длин ее независимых циклов.

Из независимых циклов данной П. можно получить независимые циклы П., сопряженной с ней. Напр., если

$$\gamma=(a_1, \ldots, a_l)\ldots(a_j, \ldots, a_n)$$

произведение независимых циклов подстановки γ из S_n, а $\delta\in S_n$ и $\delta(a_i)=b_i$, $i=1, \ldots, n$, то

$$\delta\gamma\delta^{-1}=(b_1, \ldots, b_l)\ldots(b_j, \ldots, b_n)$$

— разложение подстановки $\delta\gamma\delta^{-1}$ в произведение независимых циклов. Две П. группы S_n тогда и только тогда сопряжены в S_n, когда они имеют одно и то же число независимых циклов каждой длины.

Пусть $s \in S_n$, k — число независимых циклов подстановки s, включая и циклы длины 1. Тогда разность $n-k$ наз. декрементом подстановки s. Наименьшее число множителей при разложении подстановки s в произведение транспозиций совпадает с ее декрементом. Четность П. совпадает с четностью ее декремента.

П. возникли впервые в комбинаторике 18 в. В кон. 18 в. Ж. Лагранж (J. Lagrange) применил их при исследовании разрешимости алгебраич. уравнений в радикалах. О. Коши (A. Cauchy) посвятил многочисленные исследования этому понятию. Ему, в частности, принадлежит идея разложения П. в произведение циклов. Исследования групповых свойств П. восходит к Н. Абелю (N. Abel) и особенно к Э. Галуа (E. Galois). См. *Галуа теория*, *Подстановок группа*.

Лит.: [1] Jordan C., Traité des substitutions et des équations algébriques, P., 1957; [2] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [3] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [4] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962. *Д. А. Супруненко.*

ПОДСТАНОВКИ ПРАВИЛО — одно из *вывода правил* логико-математических исчислений. Под названием «П. п.» могут фигурировать различные виды правил. Напр., в *высказываний исчислении* это П. п. формулы вместо всех вхождений пропозициональной переменной. Для *предикатов исчисления*: а) П. п. формулы вместо *предикатной переменной*; при этом требуется выполнение ряда ограничений на вхождения индивидных переменных с тем, что ы избежать коллизии переменных, т. е. ситуации, когда переменная, свободная в подставляемой формуле, окажется связанной в результате подстановки; б) П. п. терма вместо свободных вхождений индивидной переменной соответствующего сорта; при этом также необходимо избегать коллизии переменных.

Лит.: [1] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [2] Шенфилд Дж. Р., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; [3] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., 2 изд., М., 1982. *С. Н. Артемов.*

ПОДСТАНОВОК ГРУППА — совокупность *подстановок* на нек-ром множестве X, образующих группу относительно операции умножения подстановок. Иначе, П. г. — это пара (G, X), где G — группа, X — множество и каждому $\gamma \in G$ соответствует подстановка $x \mapsto x^{\gamma}$ множества X такая, что 1) $x^{\alpha\beta}=(x^{\alpha})^{\beta}$, $x \in X$, $\alpha, \beta \in G$, и 2) $x^{\alpha}=x$ для любого $x \in X$ тогда и только тогда, когда $\alpha=\varepsilon$ — единица группы G. Если выполняется лишь условие 1), то говорят о действии (или представлении) группы G на множестве X. В этом случае подмножество H элементов группы G, оставляющих на месте все $x \in X$, будет нормальным делителем в G (называемым ядром действия) и факторгруппа G/H действует на X уже как П. г. Если X — конечное множество, то П. г. (G, X) наз. конечной, в противном случае — бесконечной. Множество всех подстановок на X наз. симметрич. группой и обозначается $S(X)$ или S_n, если $X=\{1, 2, \ldots, n\}$.

Подобием (или изоморфизмом) П. г. (G, X) на П. г. (G', X') наз. пара (φ, ψ) отображений, где φ — изоморфизм G на G', а ψ — биекция X на X', причем оба отображения согласованы в том смысле, что для всех $x \in X$ и $\alpha \in G$ имеет место равенство $(x^{\alpha})^{\psi}=(x^{\psi})^{\alpha\varphi}$. П. г., между к-рыми существует подобие, наз. подобными. Если (G, X) — П. г., то на множестве X естественно определена эквивалентность: $y \sim x$, $y, x \in X \Longleftrightarrow y=x^{\alpha}$ для нек-рого $\alpha \in G$; классы эквивалентности П. г. наз. орбитами, или областями транзитивности, группы (G, X). П. г. транзитивна, если она имеет лишь одну орбиту, в противном случае она интранзитивна (см. *Транзитивная группа*).

Произвольная абстрактная группа G может быть представлена как П. г. на подходящем множестве X (теорема Кэли). При этом в качестве X можно выбрать множество всех элементов группы G и сопоставить каждому $\gamma \in G$ отображение, получающееся в результате умножения справа на элемент $\gamma: \xi^{\gamma} = \xi\gamma$. Полученное таким образом регулярное представление группы G в виде П. г. не является единственно возможным. При исследовании П. г. интересуются другими свойствами, чем при изучении абстрактных групп. Речь идет не только о строении группы, а в первую очередь о том, как группа действует на множестве X; так, напр., свойство транзитивности есть свойство П. г., а не абстрактных групп.

Пусть (G, X) — П. г., а M — подмножество в X. Совокупность всех подстановок $\gamma \in G$, переводящих M в себя (то есть $x \in M \Leftrightarrow x^{\gamma} \in M$), образует подгруппу G_M, называемую стабилизатором множества M. Множество тех подстановок, к-рые оставляют все $y \in M$ на месте, наз. фиксатором множества M и обозначается $G_{\{M\}}$. Фиксатор будет нормальным делителем стабилизатора. Если $M = \{\alpha\}$ — одноэлементное множество, то понятия стабилизатора и фиксатора совпадают (он обозначается G_a). Группа наз. полурегулярной (или действующей свободно), если стабилизатор каждой точки является единичной группой и регулярной (или просто транзитивной), если группа, кроме того, транзитивна. Централизатором $\mathfrak{Z}(G)$ группы G наз. ее централизатор в симметрич. группе $S(X)$ — это совокупность подстановок на X, поэлементно перестановочных со всеми элементами из G. Централизатор транзитивной группы полурегулярен, и наоборот, централизатор полурегулярной группы транзитивен. Регулярная П. г. (G, X) подобна вышеприведенному регулярному представлению группы G. Централизатором $\mathfrak{Z}(G)$ регулярного представления будет т. н. левое регулярное представление группы G, сопоставляющее элементу $\gamma \in G$ подстановку $\xi^{\gamma} = \gamma^{-1}\xi$, $\xi \in G$.

Существуют операции (см. [6]), позволяющие из заданных П. г. строить новые.

а) Сумма П. г. Пусть (G, X) и (H, Y) — две П. г., причем пересечение $X \cap Y$ пусто. Сумма $(G, X)+(H, Y)$ определяется как П. г. прямого произведения $G \times H$ на объединении $X \cup Y$, причем для $\alpha \in G$, $\beta \in H$, $z \in X \cup Y$

$$z^{(\alpha, \beta)} = \begin{cases} z^{\alpha}, & z \in X, \\ z^{\beta}, & z \in Y. \end{cases}$$

б) Произведением $(G, X) \times (H, Y)$ П. г. (G, X) и (H, Y) наз. группа $(G \times H, X \times Y)$, действующая на $X \times Y$ согласно формуле $(x, y)^{(\alpha, \beta)} = (x^{\alpha}, y^{\beta})$.

Обе операции ассоциативны и могут быть определены для произвольного числа групп.

в) Сплетение. Пусть (G, X) и (H, Y) — П. г. и $\beta(x) \in H^X$ — отображение X в H. На множестве пар $[\alpha, \beta(x)]$, называемых таблицами, определяется умножение:

$$[\alpha, \beta(x)]\,[\alpha', \beta'(x)] = [\alpha\alpha', \beta(x)\,\beta(x^{\alpha})],$$

относительно к-рого они образуют группу $G \sim H$. Сплетение П. г. (G, X) и (H, Y) есть П. г. $(G \sim H, X \times Y)$, причем действие определяется формулой

$$(x, y)^{[\alpha, \beta(x)]} = (x^{\alpha}, y^{\beta(x)}).$$

Сплетение также ассоциативно и может быть определено даже для любого вполне упорядоченного семейства П. г. Сплетение неединичных П. г. будет импримитивной группой. Если G и H рассматривать как их регулярные представления, то это определение с точностью до порядка сомножителей совпадает с обычным теоретико-групповым *сплетением* групп.

г) Экспонирование. Группа таблиц, действующая на множестве Y^X, приводит к П. г.

$$(H, Y) \uparrow (G, X) = (G \sim H, Y^X).$$

Причем действие определяется следующим образом:

$$f(x)^{[\alpha, \beta(x)]} = (f(x^\alpha))^{\beta(x)},$$

где $f(x) \in Y^X$. Экспонирование не ассоциативно и приводит обычно к примитивным группам. А именно, $(H, Y) \uparrow (G, X)$ примитивна, если (H, Y) — примитивная нециклич. группа.

Группы подстановок возникают обычно как совокупность подстановок, сохраняющих нек-рые отношения или операции на множестве X (см. также *Преобразований группа*). Так, исходным для возникновения теории П. г. было понятие группы Галуа многочлена. Если

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$$

многочлен с коэффициентами a_i из нек-рого поля K, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — его корни в нек-ром надполе, то группой Галуа будет П. г. множества $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, сохраняющих рациональные отношения между корнями, т. е. равенства вида

$$\sum c_{i_1 i_2 \ldots i_n} \xi_1^{i_1} \ldots \xi_n^{i_n} = 0,$$

где $c_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in K$. Как показал Э. Галуа (E. Galois), от свойств этой группы зависит разрешимость или неразрешимость уравнения $f(x) = 0$ в радикалах. Этот результат привел к развитию теории П. г. в трудах Э. Галуа, Ж. Серре (J. Serret), К. Жордана (C. Jordan) и др. Дальнейшее развитие (кон. 19 — нач. 20 вв.) эта теория нашла в работах У. Бёрнсайда (W. Burnside), У. Маннинга (W. Manning), Г. Фробениуса (G. Frobenius), О. Ю. Шмидта, И. Шура (J. Schur). П. г. имеют многочисленные применения в дискретной математике, напр. при классификации булевых функций и конечных автоматов, в теории кодов с исправлением ошибок, при подсчете изомеров сложных органич. соединений.

Лит.: [1] Passman D., Permutation groups, N.Y.— Amst., 1968; [2] Wielandt H., Finite permutation groups, N.Y.—L., 1964; [3] Burnside W., Theory of groups of finite order, N.Y., 1958; [4] Калужнин Л. А., Сущанский В. И., Преобразования и перестановки, пер. с укр., М., 1979; [5] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962; [6] Калужнин Л. А., Клин М. Х., Сущанский В. И., «Известия вузов. Математика», 1979, № 8, с. 26—33.

Л. А. Калужнин.

ПОДФОРМУЛЬНОСТИ СВОЙСТВО — свойство нек-рых *логических исчислений* и *логико-математических исчислений*, заключающееся в том, что посылки каждого правила исчисления состоят из подформул заключения. П. с. позволяет организовать поиск вывода «снизу вверх» (см. *Генцена формальная система*). С целью повышения эффективности такого поиска для многих исчислений рассматриваются различные специализации и обобщения П. с. *С. Ю. Маслов.*

ПОДХОДЯЩАЯ ДРОБЬ — см. *Цепная дробь.*

ПОДЧИНЕНИЯ ПРИНЦИП — одна из форм *Линделёфа принципа*, использующая понятие подчинения функций. Пусть $\omega(z)$ — любая функция, регулярная в круге $|z|<1$ и удовлетворяющая условию: $\omega(0)=0$, $|\omega(z)|<1$ в $|z|<1$; пусть функция $F(z)$ мероморфна в $|z|<1$. Если функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=F(\omega(z))$, то $f(z)$ наз. подчиненной функции $F(z)$ в круге $|z|<1$, а $F(z)$ — подчиняющей функцией. Это отношение подчинения обозначается через $f(z) \prec F(z)$. В простейшем случае, когда $F(z)$ — *однолистная функция* в $|z|<1$, указанное отношение означает просто, что $f(0)=F(0)$ и что функция $f(z)$ не принимает в круге $|z|<1$ тех значений, к-рых в нем не принимает функция $F(z)$. Имеют место следующие основные теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $w=F(z)$ мероморфна в круге $|z|<1$ и отображает его на *риманову поверхность* $G(F)$. Пусть $G_r(F)$ — часть $G(F)$, соответствующая $|z|\leqslant r$, $r<1$. Если $f(z)\prec F(z)$, то значения $f(z)$ в $|z|\leqslant r$ (при *аналитическом продолжении* из $f(0)=F(0)$) лежат в $G_r(F)$, причем граничные точки $G_r(F)$ достигаются только для $f(z)=F(\varepsilon z)$, $|\varepsilon|=1$ (см. [2]).

Теорема 2. Если $f(z)\prec F(z)$ и $F(z)$ регулярна в $|z|\leqslant r$, $r<1$, то, полагая

$$M_\lambda(r,\ f)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^\lambda\,d\theta\right\}^{1/\lambda},\ \lambda\geqslant 0,$$

имеем $M_\lambda(r,\ f)\leqslant M_\lambda(r,\ F)$, $\lambda\geqslant 0$, $0\leqslant r<1$ (см. [1]).

Теорема 3. Если $f(z)\prec F(z)$ и $F(z)$ регулярна в $z=0$, то для коэффициентов разложений $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_nz^n$, $F(z)=\sum_{n=0}^\infty A_nz^n$ имеем $\sum_{n=1}^m|a_n|^2\leqslant\sum_{n=1}^m|A_n|^2$, $m=1,\ 2,\ \ldots$ (см. [2]).

Общая теория подчинения полезна при рассмотрении вопроса о множестве значений, принимаемых (или выпускаемых) аналитич. функцией. Отношение подчинения можно использовать в двух различных направлениях. Во-первых, можно исходить из заданной функции $F(z)$ и изучать свойства всех функций $f(z)$, подчиненных $F(z)$. Если при этом подчиняющая функция $F(z)$ полностью известна, то известна и область $G_r(F)$, в к-рой лежат значения $f(z)$ (теорема 1), и верхняя граница интегральных средних $M_\lambda(r,\ f)$ (теорема 2). Если, кроме того, $F(z)$ регулярна в $z=0$, то имеем верхние границы для коэффициентов функции $f(z)$ (теорема 3). Во-вторых, можно рассмотреть какую-либо мероморфную в круге $|z|<1$ функцию $f(z)$, из свойств к-рой следует невозможность ее подчинения в $|z|<1$ надлежащей функции $F(z)$. Если при этом $F(z)$, напр., однолистна, то $f(z)$ необходимо принимает в $|z|<1$ значения вне $G(F)$. Эти идеи использования отношения подчинения и выражают П. п. П. п. можно распространять и на многосвязные области (см. [3]).

Лит.: [1] Littlewood J. E., «Proc. Lond. Math. Soc. (2)», 1925, v. 23, p. 481—519; [2] Rogosinski W., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1939, v. 35, p. 1—26; [3] Аленицын Ю. Е., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 60, с. 5—21; [4] Rogosinski W., «Schr. Königs. Gelehrt. Gesellsch. Naturwiss. Kl.», 1931, Jg. 8, H. 1, S. 1—31; [5] Rogosinski W., «J. Lond. Math. Soc.», 1939, v. 14, № 53, p. 4—11; [6] его же, «Proc. Lond. Math. Soc.», 1943, v. 48, p. 48—82; [7] Littlewood J. E., Lectures on the theory of functions, L., 1944; [8] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966, с. 356—57, 606—09.

Ю. Е. Аленицын.

ПОЗИТИВНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность действительных чисел $\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots$ на промежутке $[a,\ b]$ такая, что для всякого многочлена

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$

нетождественного нулю и неотрицательного на $[a,\ b]$ выражение

$$\Phi(P)=a_0\mu_0+a_1\mu_1+\ldots+a_n\mu_n\geqslant 0.$$

Если же для всякого такого многочлена будет $\varphi(P)>0$, то последовательность наз. строго позитивной. Для того чтобы последовательность $\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots$ была позитивной на $[a,\ b]$, необходимо и достаточно существование возрастающей на $[a,\ b]$ функции $g(x)$, для к-рой

$$\int_a^b x^n dg(x)=\mu_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots.$$

М. И. Войцеховский.

ПОЗИТИВНОЕ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — исчисление высказываний в языке $\{\&, \vee, \supset\}$, задаваемое следующими 8 схемами аксиом:

$$A \supset (B \supset A),\ (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)),$$
$$A \& B \supset A,\ A \& B \supset B,\ A \supset (B \supset A \& B),$$
$$A \supset A \vee B,\ B \supset A \vee B,\ (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B) \supset C)$$

и правилом вывода *модус поненс*. П. п. и. содержит ту часть интуиционистского исчисления высказываний I (см. *Интуиционизм*), к-рая не зависит от отрицания, а именно: всякая пропозициональная формула, не содержащая связки $\neg$ (отрицания), выводима в П. п. и. тогда и только тогда, когда она выводима в I. Если к П. п. и. добавить две схемы аксиом:

1) $\neg A \supset (A \supset B)$ (закон отрицания антецедента),

2) $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$ (закон приведения к абсурду),

то получится исчисление I. Для получения I можно вместо 2) взять и более слабую схему:

2′) $(A \supset \neg A) \supset \neg A$ (закон частичного приведения к абсурду).

См. также *Импликативное пропозициональное исчисление*.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [2] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., 2 изд., М., 1982. *С. К. Соболев.*

ПОЗИЦИОННАЯ ИГРА — игра, имеющая характер развертывающегося в дискретном времени процесса на древовидно упорядоченном множестве (наз. также *деревом*). Конечной П. и. наз. система

$$\Gamma = \langle I,\ X,\ \mathfrak{R},\ \{P_x\}_{x \in X_0},\ \{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I},\ \{h_i\}_{i \in I} \rangle,$$

где 1) I — множество игроков ($|I| = n$); 2) X — конечное дерево, вершины к-рого наз. позициями, а корень — начальной позицией. Для позиций естественно определяется отношение следования; позиции, непосредственно следующие за данной $x \in X$, наз. альтернативами x; позиции, не имеющие альтернатив, наз. окончательными, а ведущие в них пути — партиями; множество окончательных позиций обозначается X^*; 3) $\mathfrak{R}$ — разбиение множества $X \setminus X^*$ на $n+1$ множеств очередности $X_0, X_1, \ldots, X_n$. В позициях из X_i, $i > 0$, ход осуществляется игроком i, в позициях из X_0 — случайно; 4) P_x — вероятностные распределения на множествах альтернатив каждой позиции $x \in X_0$; 5) $\mathfrak{R}_i = \{U_1^i, U_2^i, \ldots, U_{m_i}^i\}$ — разбиение каждого X_i, $i > 0$. Предполагается, что все позиции x из данного U_k^i имеют одинаковое число альтернатив и никакие две из них не следуют друг за другом; множества U_k^i наз. информационными. Между альтернативами всех позиций одного информационного множества установлено однозначное соответствие, и каждый его класс наз. альтернативой самого информационного множества; 6) h_i — функция, ставящая в соответствие каждой окончательной позиции выигрыш в ней игрока i.

Чистой стратегией игрока i в П. и. является функция, ставящая в соответствие каждому информационному множеству U^i_k нек-рую его альтернативу. Набор n чистых стратегий всех игроков составляет ситуацию. Процесс игры в условиях сложившейся ситуации можно понимать как случайное блуждание по множеству позиций от начальной позиции к окончательной, причем в каждой позиции игрок, множеству очередности к-рого принадлежит эта позиция, знает лишь содержащее ее информационное множество и выбирает альтернативу в соответствии со своей стратегией. В позициях из X_0 выбор альтернативы случаен. Это случайное блуждание определяет вероятностное распределение на множестве окончательных позиций. Принимая за выигрыш игрока математич. ожидание его выигрыша на окончательных позициях, получают *бескоалиционную игру* в нормальной форме.

П. и. наз. игрой с полной информацией, если информационные множества игроков состоят из одной позиции каждое. В игре с полной информацией существует ситуация равновесия в чистых стратегиях (теорема Цермело — Неймана).

Важную роль в П. и. играют смешанные стратегии. Две смешанные стратегии игрока наз. эквивалентными, если в ситуациях, отличающихся только этими стратегиями, вероятности каждой окончательной позиции равны. Игрок имеет полную память, если каждое его информационное множество следует за единственной альтернативой всех предшествующих информационных множеств этого игрока. Наличие полной памяти у игрока означает, что в момент совершения хода он помнит все информационные множества, в к-рых он находился, и свои выборы в них. Стратегией поведения наз. такая смешанная стратегия, при к-рой случайные выборы альтернатив информационных множеств стохастически независимы. Каждая смешанная стратегия игрока эквивалентна нек-рой стратегии поведения тогда и только тогда, когда игрок имеет полную память (теорема Куна).

Более общими являются П. и. с бесконечным множеством альтернатив в каждой позиции и с бесконечно продолжающимися партиями, а также *игры на графах.*

Лит.: [1] Позиционные игры, М., 1967; [2] Берж К., Общая теория игр нескольких лиц, пер. с франц., М., 1961; [3] Кун Г. У., в сб.: Позиционные игры, М., 1967, с. 13—40; [4] Thompson G. L., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 2, Princeton, 1953, p. 267—77; [5] Воробьев Н. Н., «Проблемы кибернетики», 1962, в. 7, с. 5—20; [6] Буй Конг Кыонг, «Вестник ЛГУ», 1969, № 1, с. 49—59.

Н. Н. Воробьев, А. Н. Ляпунов.

ПОЙА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей случайной величины X_n, принимающей целые неотрицательные значения k, $0 \leqslant k \leqslant n$, в соответствии с формулой

$$\mathsf{P}\{X_n=k\}=$$

$$=C_n^k \frac{b(b+c)\ldots[b+(k-1)c]\, r(r+c)\ldots[r+(n-k-1)c]}{(b+r)(b+r+c)\ldots[b+r+(n-1)c]},$$

где целые $n>0$, $b>0$, $r>0$, $c \geqslant -1$ — параметры, или эквивалентной формулой

$$\mathsf{P}\{X_n=k\}$$

$$=C_n^k \frac{p(p+\gamma)\ldots[p+(k-1)\gamma]\, q(q+\gamma)\ldots[q+(n-k-1)\gamma]}{(1+\gamma)\ldots[1+(n-1)\gamma]}=$$

$$=C^k_{(p/\gamma)+k-1} C^{n-k}_{(q/\gamma)+n-k-1} \Big/ C^n_{(1/\gamma)+n-1}, \tag{2}$$

где целое $n>0$, действительные $0<p<1$, $q=1-p$, $\gamma>0$ — параметры. Связь между (1) и (2) устанавливается равенствами

$$p=\frac{b}{b+r}, \quad q=\frac{r}{b+r}, \quad \gamma=\frac{c}{b+r}.$$

Математич. ожидание и дисперсия П. р. равны соответственно $\mathsf{E}X_n=np$ и $\mathsf{D}X_n=npq\,\frac{1+\gamma n}{1+\gamma}$. Специальные случаи П. р.: X_n имеет при $c=0$ *биномиальное распределение* с параметрами n и p; X_n имеет при $s=-1$ *гипергеометрическое распределение* с параметрами $M=b$, $N=b+r$ и n. При $b\to\infty$, $r\to\infty$, когда $p=b/(b+r)$ постоянно, и $\gamma=c/(b+r)\to 0$, П. р. стремится к биномиальному распределению с параметрами n и p.

П. р. было рассмотрено Д. Пойа (G. Pólya, 1923) в связи с т. н. урновой схемой Пойа. Из урны, содержащей b черных и r красных шаров, осуществляется выбор с возвращением при условии, что каждый извлеченный шар возвращается в урну вместе с c шарами того же цвета. Если X_n — полное число черных шаров в выборке объема n, то распределение X_n задается формулами (1) или (2). Последовательность X_n, $n=1, 2, \ldots$, представляет собой дискретный марковский процесс, причем состояния процесса определяются числом черных шаров в выборке в момент n, а условная вероятность перехода от состояния k в момент времени n в состояние $k+1$ в момент времени $n+1$ равна

$$\mathsf{P}\{X_{n+1}=k+1 \mid X_k=k\}=\frac{b+kc}{b+r+nc}=\frac{p+k\gamma}{1+n\gamma}$$

(зависит от n).

Предельным переходом из урновой схемы Пойа может быть получен процесс Пойа — неоднородный марковский процесс с непрерывным временем, принадлежащий классу процессов «чистого размножения». При условии, что за бесконечно малое время Δt происходит лишь одно извлечение шара, при $n \to \infty$, когда $np \to t$, $n\gamma \to \alpha t$, выводится предельная условная вероятность перехода из состояния k в состояние $k+1$ за время Δt:

$$\mathsf{P}\{X(t+\Delta t)=k+1 \mid X(t)=k\}=\frac{1+\alpha k}{1+\alpha t}\Delta t+o(\Delta t).$$

При переходе от урновой схемы Пойа к процессу Пойа возникает важная предельная форма П. р. Именно, вероятность $P_k(t)$ в момент времени t пребывать в состоянии k равна

$$P_n(t)=C^n_{(1/\alpha)+n-1}\left(\frac{\alpha t}{1+\alpha t}\right)^n\left(\frac{1}{1+\alpha t}\right)^{1/\alpha}$$

$$(P_0(0)=1).$$

Полученное предельное распределение является *отрицательным биномиальным распределением* с параметрами $1/\alpha$ и $1/(1+\alpha t)$ (соответствующее математич. ожидание равно t, а дисперсия $t(1+\alpha t)$.

Урновая модель и процесс Пойа, в к-рых возникает П. р. и его предельная форма, являются моделями с эффектом последействия (извлечение шара определенного цвета из урны увеличивает вероятность извлечения шара того же цвета при следующем испытании).

При стремлении параметра α к нулю процесс Пойа переходит в *пуассоновский процесс*, а П. р. при $\alpha \to 0$ имеет своим пределом *Пуассона распределение* с параметром t.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967.

А. В. Прохоров.

ПОЙА ТЕОРЕМА: пусть R^D — множество отображений конечного множества D, $|D|=n$, в множество R и пусть G — группа подстановок множества D, порождающая разбиение R^D на классы эквивалентности, при к-ром $f_1, f_2 \in R^D$ принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда найдется такое $g \in G$, что $f_1(g(d))=f_2(d)$ для всех $d \in D$; если каждому $r \in R$ сопоставлен вес $w(r)$ — элемент коммутативного кольца (вес f полагается равным $w(f)=\prod_{d \in D} w(f(d))$ и вес $w(F)$ класса $F \subset R^D$ определяется как вес любого $f \in F$), то

$$\sum_F w(F)=P\left(G;\ \sum_{r \in R} w(r),\ \sum_{r \in R} w^2(r), \ldots \right.$$
$$\left. \ldots,\ \sum_{r \in R} w^n(r)\right),$$

где в левой части равенства сумма берется по всем классам эквивалентности, а

$$P(G;\ x_1, x_2, \ldots, x_n)=|G|^{-1}\sum_{g \in G}\prod_{k=1}^n x_k^{j_k(g)}=P(G)$$

есть цикловой индекс G, при этом $j_k(G)$ — **число циклов длины** k подстановки g **в** разложении ее в произведение независимых циклов.

Теорема была опубликована в 1937 Д. Пойа (G. Pólya, см. [3] с. 36—138), хотя фактически она была известна раньше (см. [3] с. 9—35).

Если в качестве веса элементов R брать степени независимой переменной x (или произведение степеней нескольких переменных), то для $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (т. н. «ряд, перечисляющий фигуры», где a_k — число элементов R веса x^k) и $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ (т. н. «ряд, перечисляющий конфигурации», где b_k — число классов R^D веса x^k) согласно П. т. имеет место соотношение:

$$\Phi(x)=P(G;\ \varphi(x),\ \varphi(x^2),\ \ldots,\ \varphi(x^n))=P(G;\ \varphi(x)).$$

Примеры. 1) Если $|R|=m$, $w(r)\equiv 1$, то $\varphi(x)=m$ и тогда $P(G;\ m,\ m,\ \ldots,\ m)$ — число классов эквивалентности.

2) Если $R=\{0,\ 1\}$, $w(r)=x^r$, то $\varphi(x)=1+x$, а $f\in R^D$ с $w(f)=x^k$ можно истолковать как подмножество D мощности k. Группа G индуцирует орбиты подмножеств D, и коэффициент при x^k в многочлене $P(G;\ 1+x)$ есть число орбит, состоящих из подмножеств мощности k.

3) Пусть $R=\{0,\ 1\}$, $D=V^2$ — все 2-подмножества $\{i,\ j\}$ множества $V=\{1,\ 2,\ \ldots,\ p\}$, тогда $f\in R^D$ представляет помеченный граф с вершинами из V, у к-рого две вершины i и j смежны, если $f(\{i,\ j\})=1$. Пусть $w(r)=x^r$, тогда если $w(f)=x^k$, то k — число ребер в графе, соответствующем отображению f. Если на V действует симметрич. группа S_p, то, определив для $\sigma\in S_p$ подстановку g_σ на D соотношением $g_\sigma\{i,\ j\}=\{\sigma(i),\ \sigma(j)\}$, получают парную группу $G=S^{(2)}=\{g_\sigma\}$, действующую на $D=V^{(2)}$.

Для последовательности g_{pk} (чисел графов с p вершинами и k ребрами), $k=1,\ 2,\ \ldots$, по П. т. получают производящую функцию

$$g_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_{pk}x^k=P(S_p^{(2)};\ 1+x).$$

Для единичной группы подстановок E_n, симметрич. группы подстановок S_n и парной группы подстановок $S_n^{(2)}$ цикловой индекс имеет соответственно вид

$$P(E_n;\ x_1)=x_1^n,$$

$$P(S_n;\ x_1,\ \ldots,\ x_n)=\sum{}^{*}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i!}\left(\frac{x_i}{i}\right)^{k_i},$$

$$P(S_n^{(2)})=\sum{}^{*}\left(\prod_{i=1}^{n}k_i!\,i^{k_i}\right)^{-1}\prod_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(x_i x_{2i}^{i-1})^{k_{2i}}\times$$

$$\times x_i^{i\binom{k_i}{2}}\prod_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}x_{2i+1}^{ik_{2i+1}}\prod_{r<s}x_{[r,\ s]}^{(r,\ s)\,k_r k_s},$$

где $(r,\ s)$ — наибольший общий делитель, $[r,\ s]$ — наименьшее общее кратное чисел r и s, а суммирование Σ^* проводится по $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$ при условии $k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n$. Известны цикловые индексы для знакопеременной, циклической и диэдральной групп, а также формулы для получения цикловых индексов для произведения, декартова произведения и сплетения групп (см. [4]).

Имеются обобщения П. т. на случай иного определения как веса функции, так и классов эквивалентности [1].

Лит.: [1] Де Брейн Н. Дж., в кн.: Прикладная комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1968, с. 61—106; [2] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [3] Перечислительные задачи комбинаторного анализа. Сб. переводов, М., 1979; [4] Харари Ф., Палмер Э., Перечисление графов, пер. с англ., М., 1977.

В. М. Михеев.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, экспоненциальная функция, экспонента,— функция

$$y = e^{z} \equiv \exp z$$

(где e — основание натуральных логарифмов— неперово число), для любого значения z (действительного или комплексного) определяемая соотношением

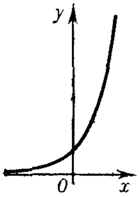
$$e^{z} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n}. \qquad (1)$$

Она обладает следующими свойствами:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \text{ и } (e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$$

при любых значениях z_1 и z_2.

При действительных x график П. ф. $y = e^{x}$ — экспоненциальная кривая — проходит через точку (0, 1) и асимптотически приближается к оси Ox (см. рис.).



В курсе математич. анализа рассматривается П. ф. $y = a^{x}$ при действительных x и $a > 0$, $a \neq 1$; она связана с (основной) П. ф. $y = e^{x}$ соотношением

$$a^{x} = e^{x \ln a}.$$

П. ф. $y = a^{x}$ определена при всех x, положительна, монотонна (возрастает, если $a > 1$, и убывает, если $0 < a < 1$), непрерывна, бесконечно дифференцируема; при этом

$$(a^{x})' = a^{x} \ln a, \quad \int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C,$$

в частности

$$(e^{x})' = e^{x}, \quad \int e^{x} dx = e^{x} + C;$$

в окрестности каждой точки П. ф. может быть разложена в степенной ряд, напр.:

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \ldots + \frac{x^{n}}{n!} + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}. \qquad (2)$$

График П. ф. $y = a^{x}$ симметричен графику П. ф. $y = (1/a)^{x}$ относительно оси ординат. Если $a > 1$, то П. ф. a^{x} при $x \to +\infty$ возрастает быстрее любой степени x, а при $x \to -\infty$ стремится к нулю быстрее любой степени $1/x$, т. е. при любом натуральном $b > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^{x}}{|x|^{b}} = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^{b} a^{x} = 0.$$

Обратной к П. ф. является *логарифмическая функция*.

При комплексных a и z П. ф. связана с (основной) П. ф. $w = e^{z}$ формулой

$$a^{z} = e^{z \operatorname{Ln} a},$$

где $\operatorname{Ln} a$ — логарифм комплексного числа a.

П. ф. $w = e^{z}$ — целая трансцендентная функция и является аналитич. продолжением П. ф. $y = e^{x}$ с действительной оси в комплексную плоскость.

Помимо формулы (1), П. ф. может быть определена также с помощью ряда (2), сходящегося во всей комплексной плоскости, или по формуле Эйлера

$$e^{z} = e^{x + iy} = e^{x} (\cos y + i \sin y).$$

Если $z = x + iy$, то

$$|e^{z}| = e^{x}, \ \operatorname{Arg} e^{z} = y + 2\pi k, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \ldots.$$

П. ф. e^{z} — периодическая с периодом $2\pi i$:

$$e^{z + 2\pi i} = e^{z}.$$

П. ф. e^{z} принимает все комплексные значения, за исключением нуля: уравнение $e^{z} = a$ имеет бесконечное число решений для любого комплексного числа $a \neq 0$. Эти решения находятся по формуле

$$z = \operatorname{Ln} a = \ln |a| + i \operatorname{Arg} a.$$

П. ф. e^z является одной из основных элементарных функций. Через нее выражаются, напр., тригонометрич. функции и гиперболич. функции. *Ю. В. Сидоров.*

ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное распределение вероятностей случайной величины X, задаваемое плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Плотность $p(x)$ зависит от положительного масштабного параметра λ. Формула для моментов: $\mathsf{E}X^n = n!/\lambda^n$, в частности — для математич. ожидания $\mathsf{E}X = 1/\lambda$ и дисперсии $\mathsf{D}X = 1/\lambda^2$; характеристич. функция: $(1 - it/\lambda)^{-1}$.

П. р. входит в семейство распределений, называемых *гамма-распределениями* и задаваемых плотностью

$$p(x) = [\lambda^\alpha x^{\alpha - 1}/\Gamma(\alpha)] e^{-\lambda x}, \ x \geq 0;$$

n-кратная свертка распределения (1) равна гамма-распределению с тем же самым параметром λ и с $\alpha = n$.

П. р.— единственное распределение, обладающее свойством отсутствия последействия: для любых $x > 0$, $y > 0$ выполняется равенство

$$\mathsf{P}\{X > x + y \mid X > y\} = \mathsf{P}\{X > x\}, \tag{2}$$

где $\mathsf{P}\{X > x + y \mid X > y\}$ — условная вероятность события $X > x + y$ при условии $X > y$. Свойство (2) называется также марковским свойством.

В однородном *пуассоновском процессе* расстояние между двумя последовательными скачками траектории имеет П. р. Наоборот, процесс восстановления с показательным временем жизни (1) является пуассоновским процессом восстановления. П. р. часто возникает как предельное при суперпозиции или разрежении процессов восстановления, в задачах пересечения высокого уровня в различных схемах блуждания, в критических ветвящихся процессах и т. п.

Упомянутыми выше свойствами объясняется широкое применение П. р. при расчетах различных систем в теории массового обслуживания и в теории надежности. Предполагая времена занятости приборов случайными, независимыми друг от друга и распределенными показательно, можно благодаря свойству (2) изучать системы массового обслуживания с помощью конечных или счетных цепей Маркова с непрерывным временем. Аналогичным образом используются цепи Маркова и в теории надежности, где времена исправной работы отдельных приборов часто можно предполагать независимыми и распределенными показательно.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967.

Б. А. Севастьянов.

ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА МЕТОД — один из методов минимизации функций многих переменных, использующий лишь значения минимизируемой функции. П. с. м. применяется в тех случаях, когда минимизируемая функция недифференцируема или вычисление ее производных требует большого объема работы. Ниже описан П. с. м. для задачи минимизации функции $F(\boldsymbol{x})$ на множестве

$$X = \{\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n) : a_i \leq x^i \leq b_i, \ i = 1, \ldots, n\},$$

где a_i, b_i — заданные числа, $a_i < b_i$; случаи, когда все или нек-рые $a_i = -\infty$, $b_j = +\infty$, здесь не исключаются. Пусть $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ — координатный вектор, у к-рого i-я координата равна 1, остальные координаты равны нулю. Задают начальное приближение $\boldsymbol{x}_0 \in X$, $\alpha_0 > 0$. Пусть известно k-е приближение $x_0 \in X$, $\alpha_k > 0$ при каком-либо $k \geqslant 0$. Полагают $p_k = e_{i_k}$, где $i_k = k - n\left[\frac{k}{n}\right] + 1$ (здесь $[a]$ — целая часть числа a). Таким образом,

$$p_0 = e_1, \ldots, p_{n-1} = e_n, p_n = e_1, \ldots, p_{2n-1} = e_n, p_{2n} = e_1, \ldots,$$

т. е. осуществляется циклич. перебор координатных векторов $e_1, \ldots, e_n$. Сначала проверяют выполнение условия

$$x_k + \alpha_k p_k \in X, \ F(x_k + \alpha_k p_k) < F(x_k). \qquad (1)$$

Если (1) выполняется, то полагают $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k$. Если (1) не выполняется, то проверяют условие

$$x_k - \alpha_k p_k \in X, \ F(x_k - \alpha_k p_k) < F(x_k). \qquad (2)$$

В случае выполнения условия (2) полагают $x_{k+1} = x_k - \alpha_k p_k$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k$. Если оба условия (1), (2) не выполняются, то полагают $x_{k+1} = x_k$,

$$\alpha_{k+1} = \begin{cases} \lambda \alpha_k \text{ при } i_k = n, \ x_k = x_{k-n+1}, & (3) \\ \alpha_k \text{ при } i_k \neq n \text{ или } x_k \neq x_{k-n+1}, \text{ или } 0 \leqslant k \leqslant n-1; \end{cases}$$

где λ, $0 < \lambda < 1$,— параметр метода. Условия (3) означают, что если за один цикл из n итераций при переборе всех координатных векторов $e_1, \ldots, e_n$ с шагом α_k выполнилось хотя бы одно из условий (1) или (2), то длина шага α_k не дробится и сохраняется на протяжении по крайней мере следующего цикла из n итераций; если же на последних n итерациях оба условия (1), (2) ни разу не выполнились, то шаг α_k дробится.

Если функция $F(x)$ выпукла и непрерывно дифференцируема на X, множество $\{x \in X : F(x) \leqslant F(x_0)\}$ ограничено, α_0 — произвольное положительное число, то метод (1) — (3) сходится, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} F(x_k) = \inf_{x \in X} F(x),$$

последовательность $\{x_k\}$ сходится к множеству точек минимума $F(x)$ на X. Если $F(x)$ недифференцируема на X, то П. с. м. может не сходиться (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Васильев Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980; [2] Карманов В. Г., Математическое программирование, 2 изд., М., 1980.

Ф. П. Васильев.

ПОКРЫВАЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТ в частично упорядоченном множестве — элемент, непосредственно следующий за другим элементом; точнее, выражение «a покрывает b в частично упорядоченном множестве P» означает, что $b < a$ и не существует элемента $x \in P$, удовлетворяющего условию $b < x < a$.

Т. С. Фофанова.

ПОКРЫТИЕ множества X — любое семейство подмножеств этого множества, объединение к-рого есть X.

1) Под П. топологического пространства, равномерного пространства и вообще какого-либо множества, наделенного тем или иным строением, понимают произвольное П. этого множества. Однако в теории топологич. пространств особенно естественно рассматривать открытые покрытия, то есть П., все элементы к-рых являются открытыми множествами. Большое значение открытых П. вызвано тем, что их элементы несут в себе полную информацию о локальном строении пространства, а свойства П. в целом (в частности, число элементов в нем, кратность, комбинаторные свойства) отражают существенно глобальные характеристики пространства.

Так, на языке открытых П. определяется размерность по Лебегу dim топологич. пространства: размерность нормального пространства X не превосходит натурального числа n, если в каждое конечное открытое П. этого пространства можно вписать конечное открытое П., кратность к-рого в каждой точке (т. е. число элементов П., содержащих данную точку) не превосходит $n+1$. Отношение вписанности одного П. в другое является основным общим элементарным отношением между П. Семейство множеств γ вписано в семейство множеств λ, если каждый элемент семейства γ содержится в нек-ром элементе семейства λ. На языке открытых П. определяется класс *паракомпактных пространств.*

Подпокрытием покрытия γ множества X наз. всякое подсемейство семейства γ, само являющееся П. множества X. В терминах подпокрытий определяются фундаментальные понятия бикомпактности, счетной и финальной компактности. Пространство бикомпактно, если из каждого его открытого П. можно выделить конечное подпокрытие. Пространство счетно компактно, если из каждого его счетного открытого П. можно выделить конечное подпокрытие. Пространство финально компактно, если из каждого его открытого П. можно выделить счетное подпокрытие. С помощью открытых П. определяются абстрактные комбинаторные объекты, открывающие дорогу применению алгебраич. методов к исследованию топологич. пространств, более общих, чем полиэдры. П. С. Александров определил фундаментальное понятие нерва произвольного покрытия γ как абстрактного комплекса, вершины к-рого поставлены во взаимно однозначное соответствие с элементами покрытия γ и конечный набор этих вершин составляет абстрактный симплекс в том и только в том случае, если пересечение отвечающих этим элементам покрытий γ не пусто. Системам открытых П. пространства, взятых вместе с отношением вписанности, отвечают системы абстрактных комплексов, связанных симплициальными отображениями,— т. н. спектры комплексов.

Заметную роль в топологии играют и замкнутые покрытия — то есть П., все элементы к-рых являются замкнутыми множествами. Если в топологич. пространстве все одноточечные множества замкнуты, то примером замкнутого П. этого пространства может служить семейство всех его одноточечных подмножеств. Но в таком П. не заключено никакой информации о топологии рассматриваемого пространства, кроме той, что в нем выполнена T_1-аксиома отделимости. Поэтому требование замкнутости П. следует соединять с другими существенными ограничениями. В частности, полезно рассматривать замкнутые локально конечные П. Они существенны в теории размерности. Важным примером замкнутого П. является П. полиэдра замкнутыми симплексами какого-нибудь подразделяющего этот полиэдр комплекса.

Среди ограничений на П., связанные не с характером элементов, а с их расположением, наиболее часто встречаются следующие. Мощность П.— число элементов в нем, локальная конечность (у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся с конечным множеством элементов семейства подмножеств этого пространства), точечная конечность (означающая, что множество элементов П., содержащих произвольно взятую точку, конечно), звездная конечность (каждый элемент П. пересекается лишь с конечным числом элементов этого П.).

Семейство множеств в топологич. пространстве наз. консервативным, если замыкание объединения любого его подсемейства равно объединению замыканий элементов этого подсемейства. Каждое локально конечное семейство множеств консервативно. Консервативные П. возникают при исследовании паракомпактных пространств, при этом важны и не тривиальны не только открытые, но и любые консервативные П.

Важную роль играет понятие звезды точки x относительно семейств множеств (в частности, покрытий) γ. Это — объединение всех элементов семейства γ, содержащих x, обозначаемое обычно $\mathrm{St}_{\gamma}(x)$. Аналогично определяется звезда $\mathrm{St}_{\gamma}(A)$ множества A относительно семейства множеств γ. На понятии звезды основано фундаментальное отношение звездной вписанности одного П. в другое, существенно более тонкое, чем отношение вписанности. Семейство множеств λ наз. звездно вписанным в семейство множеств γ, если для каждой точки найдется элемент семейства γ, содержащий звезду этой точки относительно λ. Отношение звездной вписанности открытых П. имеет важное значение в теории размерности, на нем основаны нек-рые критерии метризуемости, оно является одним из основных элементарных понятий, входящих в определение равномерной структуры и равномерного пространства. Полезно рассматривать семейства F открытых П. топологич. пространства, направленные отношением звездной вписанности в следующем смысле: для любых γ_1 и γ_2 из F найдется $\mu \in F$, звездно вписанное и в γ_1, и в γ_2.

Представляет ценность следующая характеристика паракомпактности на языке звездной вписанности (теорема Мориты): хаусдорфово пространство паракомпактно в том и только в том случае, если в любое его открытое П. можно вписать открытое П. звездно.

Звездная вписанность в случае произвольных (или даже замкнутых) П. не столь содержательна. В частности, это видно из того, что семейство всех одноточечных подмножеств пространства звездно вписано в любое П. этого пространства.

Лит.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974. *А. В. Архангельский.*

2) В комбинаторной геометрии имеется ряд задач и предложений, относящихся к специальным П., в основном выпуклых множеств. Пусть K — выпуклое тело n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{bd}\,K$ и $\mathrm{int}\,K$ — соответственно граница и внутренность K. Наиболее известны следующие задачи с П.

а) Ищется минимальное число $t(K)$ транслятов (параллельных переносов) $\mathrm{int}\,K$, при помощи к-рых можно покрыть тело K.

б) Ищется минимальное число $b(K)$ гомотетичных K тел с коэффициентом гомотетии k, $0<k<1$, при помощи к-рых можно покрыть тело K.

в) Ищется минимальное число $d(K)$ гомотетичных K множеств с коэффициентом гомотетии $k>1$ и центром гомотетии в $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}\,K$, при помощи к-рых можно покрыть тело K.

При ограниченности K задачи а) и б) эквивалентны между собой, эквивалентны *освещения задаче* (извне) множества $\mathrm{bd}\,K$ и связаны с *Хадвигера гипотезой*. Для неограниченного K задачи а) и б), вообще говоря, различны, причем числа $b(K)$ и $t(K)$ могут быть бесконечными.

Лит.: [1] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., Теорема Хелли и ее применения, пер. с англ., М., 1968; [2] Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц., Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, М., 1965; [3] их же, Разбиение фигур на меньшие части, М., 1971; [4] Хадвигер Г., Дебруннер Г., Комбинаторная геометрия плоскости, пер. с нем., М., 1965; [5] Роджерс К., Укладки и покрытия, пер. с англ., М., 1968; [6] Болтянский В. Г., Солтан П. С., Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Киш., 1978. *П. С. Солтан.*

ПОКРЫТИЯ И УПАКОВКИ — комбинаторные конфигурации, связанные с многозначным отображением одного множества на другое. Пусть заданы множества V и E и многозначное отображение Γ множества E на множество V. Пусть $\Gamma(e)$ — образ элемента $e \in E$ при отображении Γ и для любого $C \subseteq E$ пусть $\Gamma(C) = \bigcup_{e \in E} \Gamma(e)$. Подмножество $C \subseteq E$ наз. *покрытием* (для (V, E, Γ)), если $\Gamma(C) = V$. Подмножество $P \subseteq E$ наз. *упаковкой*, или *укладкой* (для (V, E, Γ)), если для любых двух различных элементов e_i, e_j из P множества $\Gamma(e_i)$ и $\Gamma(e_j)$ не пересекаются. Подмножество $P \subseteq E$ наз. *совершенной упаковкой*, или *совершенным покрытием*, если P является одновременно и покрытием, и упаковкой. Множество E наз. *покрывающим*, а множество V — *покрываемым*. Если обратное отображение Γ^{-1} таково, что $\Gamma^{-1}(V) = E$, то можно рассматривать V как покрывающее множество, а E как покрываемое. Отображение $\Gamma : E \to V$ определяет *отношение инцидентности* I, при к-ром v из V и e из E инцидентны (обозначение vIe), если $v \in \Gamma(e)$.

С понятиями упаковки и покрытия связаны экстремальные задачи, заключающиеся в отыскании (по произвольно заданной тройке (V, E, Γ)) П. и у., доставляющих экстремум тех или иных функционалов. Такой функционал можно, напр., задать с помощью функции, сопоставляющей каждому элементу e из E неотрицательное действительное число $w(e)$, наз. весом элемента e. Задача о минимальном покрытии заключается в построении покрытия C, для к-рого $\Sigma_{e \in C} w(e)$ принимает минимальное значение. Часто рассматривается случай, когда $w(e) \equiv 1$; здесь речь идет о нахождении покрытия минимальной мощности, или т. н. *кратчайшего покрытия*. Если тройка (V, E, Γ) такова, что

$$\max_{e \in E} |\Gamma(e)| \leqslant u, \quad \min_{v \in V} |\Gamma^{-1}(v)| \geqslant w,$$

то минимальная мощность $\varkappa(V, E, \Gamma)$ покрытия удовлетворяет неравенствам

$$\frac{|V|}{u} \leqslant \varkappa(V, E, \Gamma) \leqslant 1 + \frac{E}{w}\left(1 + \ln\frac{|V|w}{|E|}\right).$$

В экстремальных задачах об упаковках чаще всего требуется найти упаковки максимальной мощности.

Иногда на покрываемом множестве V задается функция λ, принимающая целые неотрицательные значения, тогда *λ-покрытием* (*λ-упаковкой*) наз. подмножество $P \subseteq E$, удовлетворяющее условию: для каждого $v \in V$ число $\sigma(v, P)$ тех элементов $e \in P$, к-рые инцидентны элементу v, подчиняется неравенству

$$\sigma(v, P) \geqslant \lambda(v)$$

(соответственно $\sigma(v, P) \leqslant \lambda(v)$). Существует связь между λ-покрытиями минимальной мощности и λ-упаковками максимальной мощности. Именно, пусть заданы множества V и E, многозначное отображение $\Gamma : E \to V$, а также функции λ и λ' на множестве V такие, что для каждого $v \in V$:

$$\lambda(v) + \lambda'(v) = |\Gamma^{-1}(v)|.$$

Тогда, если множество C есть минимальное по мощности λ-покрытие для (V, E, Γ), то множество $P = E \setminus C$ является максимальной по мощности λ'-упаковкой, и наоборот: если P — максимальная λ'-упаковка, то множество $C = E \setminus P$ есть λ-покрытие минимальной мощности. К классу задач о П. и у. относятся, напр., следующие:

1) Пусть G — граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Если рассматривать множество V в качестве покрываемого, множество E — в качестве покрывающего и отношение инцидентности вершин

и ребер — в качестве I, то покрытием является реберное покрытие графа, упаковкой — паросочетание, совершенной упаковкой — совершенное паросочетание. Если в качестве и покрывающего, и покрываемого взять множество вершин, а в качестве I — отношение смежности вершин, то покрытием будет внешне устойчивое множество, а упаковкой — внутренне устойчивое множество; при этом минимальная мощность покрытия наз. числом внешней устойчивости, а максимальная мощность упаковки — числом внутренней устойчивости (см. *Графов числовые характеристики*).

2) Пусть V — непустое множество в метрич. пространстве R. Система π множеств $U\subseteq R$ наз. ε-покрытием множества V, если диаметр $d(U)$ любого множества $U\in\pi$ не превосходит 2ε и $V\subseteq\bigcup_{U\in\pi}U$. Множество $S\subseteq R$ наз. ε-сетью для множества V, если любая точка множества V находится на расстоянии, не превышающем ε, от нек-рой точки из S. Множество $U\subseteq R$ наз. ε-различимым, если любые две его различные точки лежат на расстоянии, бо́льшем ε. Пусть $N_\varepsilon(V)$ — минимальное число множеств в ε-покрытии множества V, а $M_\varepsilon(V)$ — максимальное число точек в ε-различимом подмножестве множества V. Число $\log_2 N_\varepsilon(V)$ наз. ε-энтропией множества V, а $\log_2 M_\varepsilon(V)$ наз. ε-емкостью множества V. Понятия ε-энтропии и ε-емкости применяются в теории приближения функций и в теории информации.

3) Пусть B^n — единичный n-мерный куб с метрикой Хемминга и покрываемое множество есть множество его вершин, а покрывающее множество — множество шаров радиуса r в B^n. Тогда множество центров шаров упаковки есть *код*, исправляющий r ошибок. Если упаковка является совершенной, то код наз. плотно упакованным, или совершенным.

Если в качестве покрываемого множества взять подмножество N_f вершин куба B^n, на к-ром нек-рая булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение 1, а в качестве покрывающего — множество граней (интервалов), целиком содержащихся в N_f, то покрытие наименьшей мощности будет соответствовать кратчайшей дизъюнктивной нормальной форме функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, а покрытие с наименьшей суммой рангов — минимальной дизъюнктивной нормальной форме функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ (см. *Булевых функций нормальные формы*).

В задачах о П. и у. оцениваются их мощности, исследуются вопросы существования, построения, перечисления совершенных упаковок, изучаются возможности построения эффективных алгоритмов для решения этих задач.

Лит.: [1] Роджерс К., Укладки и покрытия, пер. с англ., М., 1968; [2] Тот Л. Ф., Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, пер. с нем., М., 1958; [3] Питерсон У., Уэлдон Э., Коды, исправляющие ошибки, пер. с англ., М., 1976; [4] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, М., 1974; [5] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [6] Берж К., Теория графов и ее применения, пер. с франц., М., 1962; [7] Витушкин А. Г., Оценка сложности задачи табулирования, М., 1959; [8] Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 2, с. 3—86; [9] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [10] Яблонский С. В., Введение в дискретную математику, М., 1979.

А. А. Сапоженко.

ПОКРЫТИЯ ТЕОРЕМЫ — теоремы для различных классов регулярных функций, устанавливающие нек-рые свойства таких множеств, к-рые целиком содержатся в множестве значений каждой функции соответствующего класса. Ниже приведены нек-рые из основных **П. т.** (см. также [1]).

Теорема 1. Если функция $w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ регулярна и однолистна в круге $|z|<1$ (то есть $f(z)\in S$), то круг $|w|<{}^1/_4$ целиком покрывается образом круга $|z|<1$ при отображении этой функцией. На окружности $|w|=1/4$ только в том случае имеются точки, не принадлежащие образу, если

$$f(z)=\frac{z}{(1+e^{i\alpha}z)^2},\ 0\leqslant\alpha<2\pi.$$

Теорема 2. Если мероморфная функция $w=F(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\zeta}+\ldots$ однолистно отображает $|\zeta|>1$, то вся граница образа лежит в круге $|w-\alpha_0|\leqslant 2$.

Теорема 3. Если $f(z)\in S$, то по крайней мере одна из n ближайших к $w=0$ точек границы образа круга $|z|<1$ при отображении $w=f(z)$, лежащих на n любых лучах, исходящих из $w=0$ под равными углами, отстоит от $w=0$ не ближе чем на $\sqrt[n]{1/4}$.

Теорема 4. Если $f(z)\in S$, то в образе круга $|z|<1$ при отображении $w=f(z)$ содержится множество, состоящее из n открытых прямолинейных отрезков с суммой длин, не меньшей n, исходящих из начала под равными углами величины 2π.

Для $f(z)\in S$ и удовлетворяющих в круге $|z|<1$ неравенству $|f(z)|<M$, $M\geqslant 1$, имеют место П. т., аналогичные теоремам 1, 3 (с соответствующими постоянными). П. т. 1 и 3 переносятся и на класс функций $w=f(z)$, регулярных и однолистных в кольце $1<|z|<r$ и отображающих его на области, лежащие в $|w|>1$, а окружность $|z|=1$ — на окружность $|w|=1$.

Для класса R функций $w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$, регулярных в круге $|z|<1$, не существует круга $|w|<\rho$, $\rho>0$, целиком покрываемого значениями каждой из функций этого класса. Для функций

$$w=F(z)=z^q+a_2z^{q+1}+\ldots,\ q\geqslant 1,$$

регулярных в $|z|<1$, каждый образ этого круга целиком покрывает нек-рый отрезок любого заданного наклона, содержащий точку $w=0$ внутри, длиной не меньше $A=8\pi^2/\Gamma^4(1/4)=0{,}45\ldots$, причем число A нельзя увеличить без дополнительных ограничений. В этом же классе функций при условии, что $F(z)\neq 0$ в кольце $0<|z|<1$, каждый образ круга $|z|<1$ целиком покрывает круг $|w|<1/16$, но не всегда покрывает больший круг с центром в $w=0$.

В классе S_p регулярных в $|z|<1$ функций $f(z)=z^p(1+a_1z+a_2z^2+\ldots)$ таких, что каждое свое значение w они принимают не более чем в p точках круга $|z|<1$, имеет место аналог П. т. 1 с соответствующим кругом $|w|<1/2^{p+1}$. Если при этом $a_1=\ldots=a_{p-1}=0$ или $a_1=\ldots=a_p=0$, то соответствующими кругами будут $|w|<1/4$ или $|w|<1/2$. Аналогичные результаты имеют место для функций, p-листных в среднем по окружности, p-листных в среднем по площади и др. На класс S_p перенесена и П. т. 3.

См. также теорему Блоха в ст. *Блоха константа*.

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

Г. К. Антонюк.

ПОЛЕ — коммутативно-ассоциативное кольцо с единицей, множество ненулевых элементов к-рого не пусто и образует группу относительно умножения. П. можно охарактеризовать также как простые ненулевые коммутативно-ассоциативные кольца с единицей. Примеры полей: П. рациональных чисел $\mathbb{Q}$, П. действительных чисел $\mathbb{R}$, П. комплексных чисел $\mathbb{C}$, конечные П. (см. *Галуа поле*), П. частных областей целостности.

Подполем поля K наз. подмножество $M\subset K$, к-рое само является П. относительно операций сложения и умножения, заданных в K. Напр., если σ—нек-рый автоморфизм поля K, то множество

$$K^\sigma=\{x\in K\mid\sigma(x)=x\}$$

является подполем в K. Если M и N — подполя поля K, то их пересечение $M\cap N$ будет подполем в K; кроме того, существует наименьшее подполе MN поля K, содержащее M и N и называемое композитом полей M и N (в K). Каждое П. содержит единственное простое (т. е. не содержащее подполей) подполе.

Любой гомоморфизм полей является вложением. Для произвольного поля K существует единственный гомоморфизм $\varphi: \mathbb{Z} \to K$, переводящий единицу кольца $\mathbb{Z}$ в единицу поля K. Если $\ker \varphi = 0$, то K наз. полем характеристики нуль. В этом случае простое подполе поля K совпадает с П. частных кольца $\varphi(\mathbb{Z})$ и изоморфно полю $\mathbb{Q}$. Если $\ker \varphi \neq 0$, то $\ker \varphi = p\mathbb{Z}$ для нек-рого простого p. Это p наз. характеристикой поля K. Простое подполе поля K совпадает в этом случае с $\varphi(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Если k подполе поля K, то K наз. расширением поля k. Пусть Y — нек-рое подмножество в K, тогда определено поле $k(Y)$ — наименьшее подполе поля K, содержащее Y и k. Говорят, что $k(Y)$ получено из k присоединением элементов множества Y.

Основные задачи теории полей — это описание всех подполей данного П., всех П., содержащих данное П., то есть надполей (см. *Расширение* поля), изучение всех вложений П. в нек-рое другое П., классификация полей с точностью до изоморфизма и изучение группы автоморфизмов данного П.

Поле K наз. конечно порожденным над своим подполем k, если существует конечное множество $Y \subset K$ такое, что $K = k(Y)$. Любое такое П. можно интерпретировать как П. рациональных функций $k(X)$ нек-рого неприводимого алгебраич. многообразия X, определенного над k. Изучением таких П. занимается *алгебраическая геометрия*. В частности, задача классификации таких П. эквивалентна задаче бирациональной классификации неприводимых алгебраич. многообразий, а задача нахождения группы всех автоморфизмов П. $K = k(X)$, оставляющих на месте все элементы поля k, эквивалентна задаче нахождения всех бирациональных автоморфизмов многообразия X, определенных над k.

Изучение конечных *сепарабельных расширений* произвольных П. составляет предмет *Галуа теории*. В теории чисел важную роль играет рассмотрение конечных расширений поля $\mathbb{Q}$, называемых П. алгебраич. чисел. Изучением этих П. занимается *алгебраическая теория чисел*.

Теория полей изучает также П., несущие нек-рые дополнительные структуры, напр. дифференциальные П., топологические П., упорядоченные П., формально вещественные и формально p-адические П. и др.

Зарождение теории П. (в рамках теории алгебраич. уравнений) относится к сер. 19 в. После публикации работ Э. Галуа (E. Galois) и Ж. Лагранжа (J. Lagrange) в теории групп и К. Ф. Гаусса по теории чисел стало очевидно, что нужно исследовать природу самих числовых систем. Концепции П. появляются в работах Л. Кронекера (L. Kronecker) и Р. Дедекинда (R. Dedekind). Р. Дедекинд ввел понятие П., к-рое он первоначально называл «рациональной областью». Теория Р. Дедекинда опубликована в примечаниях и дополнениях к «Теории чисел» П. Дирихле (P. Dirichlet). В них Р. Дедекинд существенно дополнил и развил теорию чисел, теорию идеалов и теорию конечных П. Термин «П.» впервые появился в издании этой книги в 1871.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [2] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [3] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [4] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963.
Л. В. Кузьмин.

ПОЛЕ РАЗЛОЖЕНИЯ многочлена — наименьшее поле, содержащее все корни данного многочлена. Точнее, расширение L поля K наз. полем разложения многочлена f над полем K, если f разлагается над полем L на линейные множители:

$$f = a_0(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$$

и $L=K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (см. *Расширение* поля). П. р. существует для любого многочлена $f \in K[x]$ и определено однозначно с точностью до изоморфизма, тождественного на K. П. р., по определению, является конечным алгебраич. расширением поля K.

Примеры. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ служит П. р. многочлена x^2+1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Любое конечное поле $\mathrm{GF}(q)$, где $q=p^n$, есть П. р. многочлена x^q-x над простым подполем $\mathrm{GF}(p) \subset \subset \mathrm{GF}(q)$.

О. А. Иванова.

ПОЛЕЗНОСТИ ТЕОРИЯ — теория, изучающая предпочтение индивидов и его представление в виде числовой функции. Предпочтением на множестве альтернатив X наз. транзитивное бинарное отношение R на X; оно представляется функцией $u(x)$ на X; при этом $u(x)$ наз. функцией полезности, если для любых $x, y \in X$ из xRy следует $u(x) \geqslant u(y)$ и наоборот. Таким образом, в П. т. изучаются упорядоченные множества и их монотонные отображения в числовое пространство (обычно одномерное). П. т. возникла в работах экономистов 18 в.; начало современной (50-е гг. 20 в.) П. т. было положено Дж. Нейманом (J. Neumann) и О. Моргенштерном (O. Morgenstern) (см. [1]).

Существование функции полезности в случае конечного множества X является очевидным. В бесконечном случае необходимым и достаточным условием существования функции полезности является существование плотного по полезности счетного подмножества $A \subset X$, т. е. для любых $x, y \in X|A$, xR^*y, существует такое $z \in A$, что xR^*z и zR^*y, где R^* — строгое предпочтение ($xR^*y \Longleftrightarrow xRy$ и не yRx). Если X — выпуклое множество векторного пространства, R непрерывно на X и для любых $x, y, z \in X$, xR^*y, и любого α, $0<\alpha<1$, верно $[\alpha x+(1-\alpha)z]R^*[\alpha y+(1-\alpha)z]$, то существует единственная с точностью до положительной линейной трансформации линейная функция полезности (см. [3]). Различные комбинации более слабых условий приводят к нелинейной, разрывной или в том же смысле неединственной функции полезности. Напр., если X — векторное пространство и из xR^*y следует $(x+z)R^*(y+z)$ и $\alpha xR^*\alpha y$ для всех $z \in X$ и $\alpha>0$, то функция оказывается однозначной, но кусочно линейной.

В П. т. также рассматриваются стохастич. упорядочения и упорядочения сумм или разностей альтернатив (тогда функция полезности строится по нек-рому кватернарному отношению на X), обобщения для n-арного отношения вместо бинарного, построение функции полезности одновременно с субъективными вероятностями, связь между полезностью многокомпонентных альтернатив и полезностями их компонент и др. (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [2] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [3] Фишберн П. С., Теория полезности для принятия решений, пер. с англ., М., 1978; [4] Суппес П., Зинес Дж., в кн.: Психологические измерения, пер. с англ., М., 1967.

Э. Й. Вилкас.

ПОЛЕЙ КЛАССОВ ТЕОРИЯ — теория, дающая описание всех абелевых расширений (конечных расширений Галуа с абелевой группой Галуа) поля K, принадлежащего к одному из следующих типов: 1) K — поле алгебраич. чисел, т. е. конечное расширение поля $\mathbb{Q}$; 2) K — конечное расширение поля рациональных p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$; 3) K — поле алгебраич. функций одной переменной над конечным полем; 4) K — поле формальных степенных рядов над конечным полем.

Основные теоремы П. к. т. были сформулированы и доказаны в частных случаях Л. Кронекером (L. Kronecker), Г. Вебером (H. Weber), Д. Гильбертом (D. Hilbert) и др. (см. также *Алгебраическая теория чисел*).

Поля типа 2) и 4) наз. локальными, а поля типа 1) и 3) — глобальными. Соответственно можно говорить о локальной и глобальной П.к. т.

В локальной П. к. т. каждому конечному абелеву расширению L/K с группой Галуа $G(L/K)$ ставится в соответствие нормєнная подгруппа $N_{L/K}(L^*)$ мультипликативной группы K^* поля K. Группа $N_{L/K}(L^*)$ полностью определяет поле L, и существует канонич. изоморфизм $\varphi: G(L/K) \simeq K^*/N_{L/K}(L^*)$ (основной изоморфизм П. к. т.). Явный вид этого изоморфизма дает теория формального комплексного умножения (см. [2] гл. 6). Наоборот, любая открытая подгруппа конечного индекса в K^* реализуется как норменная подгруппа для нек-рого абелева расширения L (теорема существования).

Если L и L_1 — конечные абелевы расширения поля K, $M = L \cap L_1$ и $N = L \cdot L_1$, то справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} N_{M/K}(M^*) &= N_{L/K}(L^*)\, N_{L_1/K}(L_1^*), \\ N_{N/K}(N^*) &= N_{L/K}(L^*) \cap N_{L_1/K}(L_1^*). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Включение $L_1 \supseteq L$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$N_{L/K}(L^*) \supset N_{L_1/K}(L_1^*),$$

причем в этом случае диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G(L_1/K) & \overset{\varphi}{\simeq} & K^*/N_{L_1/K}(L^*) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ G(L/K) & \overset{\varphi}{\simeq} & K^*/N_{L/K}(L^*), \end{array} \qquad (2)$$

где α получен ограничением автоморфизмов с L_1 на L, а β индуцирован тождественным отображением $K^* \to K^*$, коммутативна. В частности, если K^{ab} — максимальное абелево расширение поля K, то группа Галуа $G(K^{ab}/K)$ канонически изоморфна проконечному пополнению группы K^*.

Изоморфизм φ дает также описание последовательности подгрупп ветвления в $G(L/K)$. Так, расширение L/K не разветвлено тогда и только тогда, когда группа единиц $U(K)$ поля K содержится в группе $N_{L/K}(L^*)$. В этом случае изоморфизм φ полностью определяется тем, что автоморфизм Фробениуса, порождающий группу $G(L/K)$, переходит в класс $\pi \cdot N_{L/K}(L^*)$, где π — простой элемент поля K.

На языке когомологий групп изоморфизм φ интерпретируется как изоморфизм между группами когомологий Тейта

$$H^{-2}(G(L/K), \mathbb{Z}) \simeq G(L/K)$$

и

$$H^0(G(L/K), L^*) = K^*/N_{L/K}(L^*).$$

Более того, пусть L/K — произвольное конечное расширение Галуа локальных полей. Тогда для любого целого n определен канонич. изоморфизм φ_n:

$$H^{n-2}(G(L/K), \mathbb{Z}) \simeq H^n(G(L/K), L^*).$$

Если задана башня полей Галуа $M \supset L \supset K$, то инфляция

$$\mathrm{inf}: H^2(G(L/K), L^*) \longrightarrow H^2(G(M/K), M^*)$$

сохраняет инвариант (см. *Брауэра группа*), а ограничение

$$\mathrm{res}: H^2(G(M/K), M^*) \longrightarrow H^2(G(M/L), M^*)$$

умножает инвариант на $[L:K]$. Если $\overline{K}$ — сепарабельное замыкание поля K, то инвариант определяет канонич. изоморфизм между группой Брауэра поля K

$$\mathrm{Br}(K) \simeq H^2(G(\overline{K}/K),\ \overline{K}^*)$$

и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

В глобальной П. к. т. роль мультипликативной группы поля играет группа классов иделей. Пусть L/K — конечное расширение Галуа глобальных полей, и I_L — группа иделей поля L. Группа L^* вкладывается в I_L в качестве дискретной подгруппы (она наз. группой главных иделей), а факторгруппа $C_L = I_L/L^*$, наделенная фактортопологией, наз. группой классов иделей. Доказывается, что $H^1(G(L/K),\ C_L) = 1$ и $H^2(G(L/K),\ C_L) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, где $n = [L:K]$. Существует канонич. вложение inv: $H^2(G(L/K),\ C_L) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Как и в локальной П. к. т., для любого целого n определен изоморфизм (основной изоморфизм глобальной П. к. т.)

$$\psi_n\colon\ H^{n-2}(G(L/K),\ \mathbb{Z}) \simeq H^n(G(L/K),\ C_L).$$

Для абелева расширения L/K изоморфизм ψ_0 сводится к изоморфизму $\psi: G(L/K) \simeq C_K/N_{L/K}(C_L)$. Норменная подгруппа $N_{L/K}(C_L)$ однозначно определяет поле L, и наоборот, любая открытая подгруппа конечного индекса в C_K является норменной подгруппой для нек-рого конечного абелева расширения L (глобальная теорема существования). Соотношения, аналогичные (1) и (2), остаются справедливыми и для глобальных полей. Если K^{ab} — максимальное абелево расширение поля K, то в функциональном случае группа $G(K^{ab}/K)$ изоморфна проконечному пополнению группы C_K, а в числовом случае группа $G(K^{ab}/K)$ изоморфна факторгруппе группы C_K по связной компоненте.

Изоморфизмы φ_n и ψ_n согласованы. Если L/K конечное расширение Галуа глобальных полей, L_v — пополнение поля L относительно нек-рой точки v и K_v — пополнение поля K относительно ограничения v на K, то существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \psi_n\colon & H^{n-2}(G(L/K),\ \mathbb{Z}) & \simeq & H^n(G(L/K),\ C_L), & \\ & \uparrow \mathrm{cores} & & \uparrow f & \quad (3) \\ \varphi_n\colon & H^{n-2}(G(L_v/K_v),\ \mathbb{Z}) & \simeq & H^n(G(L_v/K_v),\ L^*), & \end{array}$$

где отображение f индуцировано вложением $L^* \to I_L \to C_L$ и коограничением cores. Для $n=0$ (3) дает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \psi\colon & G(L/K)/[G(L/K),\ G(L/K)] & \simeq & C_K/N_{L/K}(C_L) & \\ & \uparrow & & \uparrow & \quad (4) \\ \varphi\colon & G(L_v/K_v)/[G(L_v/K_v),\ G(L_v/K_v)] & \simeq & K_v^*/N_{L_v/K_v}(L_v^*). & \end{array}$$

Диаграмма (4) позволяет получить закон разложения простых дивизоров поля K в абелевом расширении L/K. Именно, дивизор $\mathfrak{c}$ поля K не разветвлен в L (вполне распадается в L) тогда и только тогда, когда $U(K_{\mathfrak{c}}) \subset N_{L/K}(G_L)$ (соответственно $K^* \subset N_{L/K}(G_L)$).

Если $\mathfrak{c}$ — нек-рый простой дивизор поля K, не разветвленный в L, v — точка поля K, соответствующая $\mathfrak{c}$, и π — простой элемент поля K_v, то определен символ Артина $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{c}}\right) = \psi^{-1}(\pi) \in G(L/K)$, зависящий только от $\mathfrak{c}$. Элемент $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{c}}\right)$ — это автоморфизм Фробениуса в подгруппе разложения точки v. Согласно теореме плотности Чеботарева любой элемент группы $G(L/K)$ имеет вид $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{c}}\right)$ для бесконечного числа простых дивизоров $\mathfrak{c}$ поля K.

Напр., максимальное абелево неразветвленное расширение числового поля K (называемое гильбертовым полем классов) — это поле, норменная подгруппа к-рого совпадает с образом относительно проекции $I_K \to C_K$ группы $K^* \times \prod_v U(K_v)$, где v пробегает все точки поля K. Группа $I_K / K^* \times \prod_v U(K_v)$ канонически изоморфна группе классов дивизоров Cl_K поля K, что дает важный изоморфизм $G(F/K) \simeq \mathrm{Cl}_K$. В частности, над K нет неразветвленных абелевых расширений тогда и только тогда, когда поле K одноклассно.

Тип разложения простого дивизора $\mathfrak{c}$ поля K в F полностью определяется классом $\mathfrak{c}$ в $\mathrm{Cl}_{\mathfrak{c}}$. Вполне распадаются в F все главные дивизоры и только они. Все дивизоры поля K становятся главными в F.

Подобно тому, как П. к. т. для абелевых неразветвленных расширений можно излагать на языке группы классов дивизоров и ее подгрупп, можно дать характеризацию любого конечного абелева расширения поля K в терминах группы лучевых классов по нек-рому модулю (см. *Алгебраическая теория чисел*). Существуют также обобщения П. к. т. на случай бесконечных расширений Галуа [4].

Хотя П. к. т. возникла как теория абелевых расширений, ее результаты дают важную информацию и для неабелевых расширений Галуа. Напр., на теории полей классов основано доказательство существования бесконечных башен полей классов (см. *Башня полей*).

Лит.: [1] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [2] Вейль А., *Основы теории чисел*, пер. с англ., М., 1972; [3] Кох Х., Теория Галуа p-расширений, пер. с нем., М., 1973; [4] Кузьмин Л. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, в. 6, с. 1220—54. *Л. В. Кузьмин.*

ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ порядка m — комплексная функция $w=u+iv$ действительных переменных x и y или, что эквивалентно, независимых комплексных переменных $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$ в плоской области D, представимая в виде

$$w=f(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k f_k(z), \qquad (1)$$

где $f_k(z)$, $k=0, \ldots, m-1$,— комплексные аналитич. функции в D. Иначе, П. ф. w порядка m можно определить как функцию, имеющую в D непрерывные частные производные по x и y или по z и $\bar{z}$ до порядка m включительно и удовлетворяющую всюду в D обобщенному условию Коши — Римана:

$$\frac{\partial^m w}{\partial \bar{z}^m} = 0.$$

При $m=1$ получаются аналитич. функции.

Для того чтобы функция $u=u(x, y)$ была действительной (или мнимой) частью нек-рой П. ф. $w=u+iv$ в области D, необходимо и достаточно, чтобы u была *полигармонической функцией* в D. На П. ф. переносятся с соответствующими изменениями нек-рые классич. свойства аналитич. функций (см. [1]).

П. ф. мультипорядка $m=(m_1, \ldots, m_n)$ от комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$ и $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$ в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, наз. функция вида

$$w = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{m_1-1, \ldots, m_n-1} \bar{z}_1^{k_1} \ldots \bar{z}_n^{k_n} f_{k_1 \ldots k_n}(z_1, \ldots, z_n),$$

где $f_{k_1 \ldots k_n}$ — аналитич. функции переменных $z_1, \ldots, z_n$ в D.

Лит.: [1] Балк М. Б., Зуев М. Ф., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 5, с. 203—26. *Е. Д. Соломенцев.*

ПОЛИВЕКТОР, p-вектор, векторного пространства V — элемент p-й внешней степени $\Lambda^p V$ пространства V над полем k (см. *Внешняя алгебра*). p-вектор может пониматься как кососимметризованный p раз контравариантный тензор на V. Любая линейно независимая система векторов $x_1, \ldots, x_p$ из V определяет ненулевой p-вектор $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$; такие П. наз. разложимыми, или простыми (часто — просто П.). При этом линейно независимые системы $x_1, \ldots, x_p$ и $y_1, \ldots, y_p$ порождают одно и то же подпространство в V в том и только в том случае, когда $y_1 \wedge \ldots \wedge y_p = c x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$, где $c \in K$. Для любого ненулевого поливектора $t \in \Lambda^p V$ его аннулятор $\mathrm{Ann}\, t = \{v \in V \mid t \wedge v = 0\}$ есть подпространство размерности $\leq p$, причем поливектор t разложим тогда и только тогда, когда $\dim \mathrm{Ann}\, t = p$. Разложимые p-векторы n-мерного пространства V образуют коническое алгебраич. многообразие в $\Lambda^p V$; соответствующее проективное алгебраич. многообразие есть *Грассмана многообразие*. Любой ненулевой n-вектор или $(n-1)$-вектор в n-мерном пространстве V разложим; бивектор t разложим тогда и только тогда, когда $t \wedge t = 0$.

Если $v_1, \ldots, v_n$ — базис пространства V и $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_i^j v_j$, то координатами поливектора $t = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ в базисе $\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_p} \mid i_1 < \ldots < i_p\}$ пространства $\Lambda^p V$ являются миноры $t^{i_1 \ldots i_p} = \det \|x_i^{j_k}\|$, $i_1 < \ldots < i_p$, матрицы $\|x_i^j\|$. В частности, при $p = n$

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \det \| x_i^j \| v_1 \wedge \ldots \wedge v_n.$$

Если фиксировать ненулевой n-вектор $\omega \in \Lambda^n V$, то возникает двойственность между p-векторами и $(n-p)$-векторами, т. е. естественный изоморфизм

$$\pi : \Lambda^p (V) \longrightarrow (\Lambda^{n-p} V)^* \cong \Lambda^{n-p} (V^*)$$

такой, что $t \wedge u = \pi(t)(u)\omega$ для всех $t \in \Lambda^p V$ и $u \in \Lambda^{n-p} V$.

Пусть $k = \mathbb{R}$ и в V задано скалярное произведение, тогда в $\Lambda^p V$ индуцируется скалярное произведение, обладающее следующим свойством: для любого ортонормированного базиса $v_1, \ldots, v_n$ в V базис $\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_p} \mid i_1 < \ldots < i_p\}$ в $\Lambda^p V$ также ортонормирован. Скалярный квадрат

$$(t, t) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} (t^{i_1 \ldots i_p})^2$$

разложимого поливектора $t = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ совпадает с квадратом объема параллелепипеда в V, натянутого на векторы $x_1, \ldots, x_p$. Если фиксировать в n-мерном евклидовом пространстве V ориентацию (что равносильно выбору n-вектора ω, для к-рого $(\omega, \omega) = 1$), то указанная выше двойственность приводит к естественному изоморфизму $\gamma : \Lambda^p V \to \Lambda^{n-p} V$ такому, что $t \wedge u = (\gamma(t), u)\omega$ для всех $t \in \Lambda^p V$, $u \in \Lambda^{n-p} V$. В частности, $(n-1)$-вектору $t = x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}$ соответствует вектор $\gamma(t) \in V$, наз. векторным произведением векторов $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980; [3] Постников М. М., Линейная алгебра и дифференциальная геометрия, М., 1979.

А. Л. Онищик.

ПОЛИГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, гипергармоническая функция, метагармоническая функция, порядка m — функция $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ действительных переменных, определенная в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, имеющая непрерывные частные производные до $2m$-го порядка включительно и удовлетворяющая всюду в D полигармоническому уравнению

$$\Delta^m u \equiv \Delta(\Delta \ldots (\Delta u)) = 0, \quad m \geq 1,$$

где Δ — оператор Лапласа. При $m = 1$ получаются *гармонические функции*, при $m = 2$ — *бигармониче-*

ские функции. Каждая П. ф. есть аналитич. функция от координат x_j. Нек-рые другие свойства гармонич. функций также переносятся с соответствующими изменениями на П. ф.

Для П. ф. любого порядка $m>1$ обобщаются представления при помощи гармонич. функций, известные для бигармонич. функций (см. [1] — [5]). Напр., для П. ф. u двух переменных справедливо представление

$$u(x_1, x_2)=\sum_{k=0}^{m-1} r^{2k}\omega_k(x_1, x_2), \quad r^2=x_1^2+x_2^2,$$

где ω_k, $k=0, \ldots, m-1$ — гармонич. функции в области D. Для того чтобы функция $u(x_1, x_2)$ двух переменных была П. ф., необходимо и достаточно, чтобы она была действительной (или мнимой) частью *полианалитической функции.*

Основная краевая задача для П. ф. порядка $m>1$ состоит в следующем: найти П. ф. $u=u(x)$ в области D, непрерывную вместе с производными до $(m-1)$-го порядка включительно в замкнутой области $\overline{D}=D\bigcup C$ и удовлетворяющую на границе C условиям:

$$\left.\begin{aligned} & u|_C=f_0(y), \\ & \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C=f_1(y), \ \ldots, \ \frac{\partial^{m-1}u}{\partial n^{m-1}}\Big|_C=f_{m-1}(y), \ y\in C, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

где $\partial u/\partial n$ — производная по нормали к C, а $f_0(y)$, $\ldots$, $f_{m-1}(y)$ — заданные достаточно гладкие функции на достаточно гладкой границе C. Многие исследования посвящены решению задачи (*) в шаре пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [1], [6]). Для решения задачи (*) в случае произвольной области применялся метод интегральных уравнений, а также различные вариационные методы (см. [1], [6]).

Лит.: [1] Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., 1948; [2] Привалов И. И., Пчелин Б. М., «Матем. сб.», 1937, т. 2, в. 4, с. 745—58; [3] Nicolesco M., Les fonctions polyharmoniques, P., 1936; [4] его же, «Disq. Math. Phys.», 1940, v. 1, p. 43—56; [5] Tolotti C., «Giorn. Math. Battaglini», 1947, v. 1, p. 61—117; [6] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957. *Е. Д. Соломенцев.*

ПОЛИГОН над моноидом R, R-полигон, операнд,— непустое множество с моноидом операторов. Точнее, непустое множество A наз. левым П. над моноидом R, если для любых $\lambda\in R$ и $a\in A$ определено произведение $\lambda a\in A$, причем

$$(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a)$$

и

$$1a=a$$

для любых $\lambda, \mu\in R$, $a\in A$. Правый П. определяется аналогично. Задание R-полигона A равносильно заданию гомоморфизма φ моноида R в моноид отображений множества A в себя, переводящего 1 в тождественное отображение. При этом $\lambda a=b$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi(\lambda)(a)=b.$$

В частности, каждое непустое множество можно рассматривать как П. над моноидом его отображений в себя. Таким образом, П. тесно связан с представлением полугруппы преобразованиями.

Если A — *универсальная алгебра*, сигнатура к-рой Ω содержит лишь унарные операции, то A можно превратить в П. над свободным моноидом F с системой свободных образующих Ω, положив

$$(f_1f_2\ldots f_n)a=f_1(f_2(\ldots(f_n(a))\ldots))$$

для любых $f_i\in\Omega$, $a\in A$. Если Ω — множество входных сигналов автомата с множеством состояний A, то A аналогичным образом превращается в F-полигон (ср. *Автоматов алгебраическая теория*).

Отображение φ R-полигона A в R-полигон B наз. гомоморфизмом, если $\varphi(\lambda a)=\lambda\varphi(a)$ для любых $\lambda \in R$ и $a \in A$. При $A=B$ получается определение эндоморфизма. Все эндоморфизмы полигона A образуют моноид, и A можно рассматривать как П. над ним.

Эквивалентность θ на R-полигоне A наз. конгруэнцией, если $(a, b) \in \theta$ влечет $(\lambda a, \lambda b) \in \theta$ для любого $\lambda \in R$. Множество классов конгруэнции θ естественным образом превращается в R-полигон, называемый факторполигоном полигона A и обозначаемый через A/θ. Если A — полигон над R, то на R можно определить отношение $\mathrm{Ann}\, A$, положив $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Ann}\, A$, если $\lambda a = \mu a$ для всех $a \in A$. Отношение $\mathrm{Ann}\, A$ оказывается конгруэнцией моноида R, и A естественным образом превращается в П. над фактормоноидом $R/\mathrm{Ann}\, A$. Если полигон A возник из нек-рого автомата, то описанный переход равносилен «склеиванию» одинаковым образом действующих последовательностей входных сигналов. Наряду с обычными для универсальных алгебр конструкциями прямого и подпрямого произведения, в теории П. рассматривается важная для алгебраич. теории автоматов конструкция сплетения. Свободное произведение (или копроизведение) П. совпадает с их дизъюнктным объединением.

На П. можно смотреть как на неаддитивный аналог модуля над кольцом, что служит богатым источником задач теории П. В частности, установлена связь П. с *радикалами* в полугруппах и исследуются связи свойств моноида со свойствами П. над ним. Напр., все левые R-полигоны проективны тогда и только тогда, когда R — одноэлементная группа, а инъективность всех П. над коммутативным моноидом R равносильна наличию в R нуля и порождаемости всех его идеалов идемпотентами (ср. *Гомологическая классификация колец*).

Если R — моноид с нулем 0, то можно говорить об R-полигоне A с нулем как об R-полигоне с отмеченной точкой u, причем $0a=u$ для всех $a \in A$. Теория П. с нулем имеет нек-рые особенности.

Каждый П. можно рассматривать как функтор из однообъектной категории в категорию множеств.

Лит.: [1] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, пер. с англ., М., 1975; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 2, М., 1972; [3] Скорняков Л. А., в сб.: Модули, в. 3, Новосиб., 1973, с. 22—27; [4] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, с. 57—190.

Л. А. Скорняков.

ПОЛИКРУГ, полицилиндр,— область

$$\Delta = \Delta\,(a=(a_1, \ldots, a_n),\ r=(r_1, \ldots, r_n)) = \\ = \{z=(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_\nu - a_\nu| < r_\nu,\ \nu=1, \ldots, n\}$$

комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, являющаяся топологич. произведением n кругов,

$$\Delta = \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_n,$$

$$\Delta_\nu = \{z_\nu \in \mathbb{C} : |z_\nu - a_\nu| < r_\nu\},\ \nu=1, \ldots, n.$$

Точка $a=(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ — центр поликруга Δ, $r=(r_1, \ldots, r_n)$, $r_\nu > 0$, $\nu=1, \ldots, n$,— его мультирадиус. При $a=0$, $r=(1, \ldots, 1)$ получается единичный поликруг. Остовом поликруга Δ наз. часть

$$T = T\,(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_\nu - a_\nu| = r_\nu,\ \nu=1, \ldots, n\}$$

его полной топологич. границы $\partial\Delta$. П. есть полная *кратно круговая область*.

Естественным обобщением понятия П. является полиобласть (поликруговая область, обобщенный полицилиндр) $D=D_1 \times \ldots \times D_n$, являющаяся топологич. произведением n (вообще говоря, многосвязных) областей $D_\nu \subset \mathbb{C}$, $\nu=1$,

..., n. Граница $\Gamma=\partial D$ полиобласти D состоит из n множеств размерности $2n-1$:

$$\Gamma_\nu=\{z\in\mathbb{C}^n\colon z_\nu\in\partial D_\nu,\ z_\mu\in\overline{D}_\mu,\ \mu\neq\nu\},\ \nu=1,\ \ldots,\ m,$$

общая часть к-рых есть n-мерный остов полиобласти D:

$$T=\partial D_1\times\ldots\times\partial D_n=\{z\in\mathbb{C}^n\colon z_\nu\in\partial D_\nu,\ \nu=1,\ \ldots,\ n\}.$$

Е. Д. Соломенцев.

ПОЛИЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА — часть алгебры, изучающая *полилинейные отображения* модулей (в частности, векторных пространств). Первыми разделами П. а. явились теория *билинейных форм* и *квадратичных форм*, теория *определителей* и развивающее ее исчисление Грассмана (см. *Внешняя алгебра*). Основную роль в П. а. играют понятия *тензорного произведения*, *тензора*, *полилинейной формы*. Приложения П. а. к геометрии и анализу связаны главным образом с *тензорным исчислением* и *дифференциальными формами*. *А. Л. Онищик.*

ПОЛИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА, n-линейная форма, на унитарном A-модуле E — *полилинейное отображение* $E^n\to A$ (здесь A — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей). П. ф. наз. также полилинейной функцией (n-линейной функцией). Поскольку П. ф. — частный случай полилинейных отображений, можно говорить о симметрических, кососимметрических, знакопеременных, симметризованных и кососимметризованных П. ф. Напр., определитель квадратной матрицы порядка n над A — это кососимметризованная (и тем самым знакопеременная) n-линейная форма на A^n. n-линейные формы на E образуют A-модуль $L_n(E,A)$, естественно изоморфный модулю $(\overset{n}{\bigotimes}E)^*$ всех линейных форм на $\overset{n}{\bigotimes}E$. В случае $n=2$ ($n=3$) говорят о *билинейных формах* (трилинейных формах).

n-линейные формы на E тесно связаны с n раз ковариантными тензорами, т. е. элементами модуля $T^n(E^*)=\bigotimes^n E^*$. Точнее, имеется линейное отображение

$$\gamma_n\colon T^n(E^*)\longrightarrow L_n(E,\ A)$$

такое, что

$$\gamma_n(u_1\otimes\ldots\otimes u_n)(x_1,\ \ldots,\ x_n)=u_1(x_1)\ldots u_n(x_n)$$

для любых $u_i\in E^*$, $x_i\in E$. Если модуль E свободен, то γ инъективно, а если E к тому же конечно порожден, то и биективно. В частности, n-линейные формы на конечномерном векторном пространстве над полем отождествляются с n раз ковариантными тензорами.

Для любых форм $u\in L_n(E,A)$, $v\in L_m(E,A)$ определяется их тензорное произведение $u\otimes v\in L_{n+m}(E,A)$ формулой

$$u\otimes v(x_1,\ \ldots,\ x_{n+m})=u(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,v(x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+m}).$$

Для симметризованных П. ф. определено также симметрич. произведение

$$(\sigma_n u)\vee(\sigma_m v)=\sigma_{n+m}(u\otimes v),$$

а для кососимметризованных П. ф. — внешнее произведение

$$(\alpha_n u)\wedge(\alpha_m v)=\alpha_{n+m}(u\otimes v).$$

Эти операции распространяются на модуль $L_*(E,A)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}L(E,A)$, где $L_0(E,A)=A$, $L_1(E,A)=E^*$, модуль симметризованных форм $L_\sigma(E,A)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\sigma_n L_n(E,A)$ и модуль кососимметризованных форм $L_\alpha(E,A)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\alpha_n L_n(E,A)$ соответственно, превращая их в ассоциативные алгебры с единицами. Если E — конечно порожденный свободный модуль, то отображения γ_n определяют изоморфизм *тензорной алгебры*

$T(E^*)$ на $L_*(E, A)$ и *внешней алгебры* $\Lambda(E^*)$ на алгебру $L_\alpha(E, A)$, совпадающую в этом случае с алгеброй знакопеременных форм. Если A — поле характеристики 0, то имеется также изоморфизм симметрич. алгебры $S(E^*)$ на алгебру $L_\sigma(E, A)$ симметрич. форм.

Всякой П. ф. $u \in L_n(E, A)$ соответствует функция $\omega_n(u): E \to A$, заданная формулой

$$\omega_n(u)(x) = u(x, \ldots, x), \; x \in E.$$

Функции вида $\omega_n(u)$ наз. **формами степени** n на E; если E — свободный модуль, то в координатах относительно произвольного базиса они задаются однородными многочленами степени n. В случае $n=2$ ($n=3$) получаются *квадратичные формы* и *кубические формы* на E. Форма $F=\omega(u)$ полностью определяет симметризацию $\sigma_n u$ формы $u \in L_n(E, A)$, имеющую вид

$$\sigma_n u(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \sum_{i_1 < \ldots < i_r} F(x_{i_1} + \ldots + x_{i_r}).$$

В частности, для $n=2$

$$(\sigma_2 u)(x, y) = F(x+y) - F(x) - F(y).$$

Отображения γ_n и ω_n определяют гомоморфизм алгебры $S(E^*)$ на алгебру всех *полиномиальных функций* $P(E)$, к-рый является изоморфизмом, если E — свободный конечно порожденный модуль над бесконечной областью целостности A.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [3] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968. *А. Л. Онищик.*

ПОЛИЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, n-**линейное отображение**, **полилинейный оператор**,— отображение f прямого произведения $\prod_{i=1}^{n} E_i$ n унитарных модулей E_i над ассоциативно-коммутативным кольцом A с единицей в нек-рый A-модуль F, линейное по каждому аргументу, т. е. удовлетворяющее условию

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, ay+bz, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \\ = af(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \\ + bf(x_i, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ (a, b \in A; \; y, z \in E_i, \; i=1, \ldots, n).$$

В случае $n=2$ ($n=3$) говорят о *билинейном отображении* (соответственно трилинейном). Каждое П. о.

$$f: \prod_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow F$$

определяет единственное линейное отображение $\bar{f}$ тензорного произведения $\otimes_{i=1}^{n} E_i$ в F такое, что

$$\bar{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f(x_1, \ldots, x_n), \; x_i \in E_i,$$

причем соответствие $f \mapsto \bar{f}$ есть биекция множества П. о. $\prod_{i=1}^{n} E_i \to F$ на множество всех линейных отображений $\otimes_{i=1}^{n} E_i \to F$. П. о. $\prod_{i=1}^{n} E_i \to F$ естественным образом образуют A-модуль.

В A-модуле $L_n(E, F)$ всех n-линейных отображений $E^n \to F$ действует симметрич. группа S_n:

$$(sf)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)}),$$

где $s \in S_n$, $f \in L_n(E, F)$, $x_i \in E$. П. о. f наз. **симметрическим**, если $sf=f$ для всех $s \in S_n$, и **кососимметрическим**, если $sf=\varepsilon(s)f$, где $\varepsilon(s)=\pm 1$ в зависимости от четности подстановки s. П. о. наз. **знакопеременным** (или **альтернированным**), если $f(x_1, \ldots, x_n)=0$, как только $x_i=x_j$ для нек-рых $i \neq j$. Всякое знакопеременное П. о. кососимметрично, а если в F уравнение $2y=0$ имеет единственное решение $y=0$, то верно и обратное. Симметрические П. о. образуют подмодуль в $L_n(E, F)$, естественно изоморфный модулю линейных отображений $L(S^nE, F)$, где S^nE есть n-я симметрич. степень E (см. *Симметрическая алгебра*), знакопеременные П. о.— подмодуль, естественно изоморфный $L(\Lambda^nE, F)$, где Λ^nE есть n-я внешняя степень модуля E (см. *Внешняя алгебра*). П. о. вида $\alpha_n f=\sum_{s\in S_n} sf$ наз. **симметризованными**, а П. о. вида $\sigma_n f=\sum_{s\in S_n}\varepsilon(s)sf$ — **кососимметризованными**. Симметризованные (кососимметризованные) П. о. симметричны (соответственно знакопеременны), а если в F уравнение $n!y=c$ имеет для каждого $c\in F$ единственное решение, то верно и обратное. Для того чтобы всякое знакопеременное П. о. было кососимметризованным, достаточно также, чтобы модуль E был свободным.

Лит. см. при ст. *Полилинейная форма*. *А. Л. Онищик.*

ПОЛИНИЛЬПОТЕНТНАЯ ГРУППА — группа, обладающая конечным *нормальным рядом*, факторы к-рого нильпотентны; такой ряд наз. **полинильпотентным**. Длина кратчайшего полинильпотентного ряда П. г. наз. ее **полинильпотентной длиной**. Класс всех П. г. совпадает с классом всех *разрешимых групп*; однако, вообще говоря, полинильпотентная длина меньше разрешимой. П. г. длины 2 наз. **метанильпотентными**.

Все группы, обладающие (возрастающим) полинильпотентным рядом длины l, факторы к-рого (в порядке возрастания ряда) имеют классы нильпотентности, не превосходящие чисел $c_1, c_2, \ldots, c_l$ соответственно, образуют многообразие $\mathfrak{M}$, являющееся произведением нильпотентных многообразий:

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_{c_1}\mathfrak{N}_{c_2}\ldots\mathfrak{N}_{c_l}$$

(см. *Групп многообразие*). Свободные группы такого многообразия наз. **свободными полинильпотентными группами**. Особый интерес представляют многообразия $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c$. Первое из них содержит все связные разрешимые группы Ли; во втором все конечно порожденные группы конечно аппроксимируемы и удовлетворяют условию максимальности для нормальных подгрупп.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Нейман Х., Многообразия групп, пер. с англ., М., 1969. *А. Л. Шмелькин.*

ПОЛИНОМ — то же, что *многочлен*.

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ — обобщение понятия целой рациональной функции (см. *Многочлен*). Пусть V — унитарный модуль над ассоциативно-коммутативным кольцом C с единицей. Отображение $\varphi: V\to C$ наз. П. ф., если $\varphi=\varphi_0+\ldots+\varphi_m$, где φ_i — форма степени i на V, $i=0, 1, \ldots, m$ (см. *Полилинейная форма*). Наиболее часто П. ф. рассматриваются в случае, когда V — свободный C-модуль (напр., векторное пространство над полем C) с конечным базисом $v_1, \ldots, v_n$. В этом случае отображение $\varphi: V\to C$ является П. ф. тогда и только тогда, когда $\varphi(x)=F(x_1, \ldots, x_n)$, где $F\in C[X_1, \ldots, X_n]$ — многочлен над C и $x_1, \ldots, x_n$ — координаты элемента $x\in V$ в базисе $v_1, \ldots, v_n$. Если при этом C — бесконечная область целостности, то многочлен F определяется однозначно.

П. ф. на модуле V образуют ассоциативно-коммутативную C-алгебру $P(V)$ с единицей относительно естественных операций. В случае, когда V — свободный модуль с конечным базисом над бесконечной областью целостности C, алгебра $P(V)$ канонически изоморфна симметрич. алгебре $S(V^*)$ сопряженного модуля V^*, а если V — конечномерное векторное пространство над полем характеристики 0,— алгебре симметрических полилинейных форм на V. *А. Л. Онищик.*

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, мультиномиальное распределение, — совместное распределение случайных величин $X_1, \ldots, X_k$, к-рое задается для любого набора целых неотрицательных чисел $n_1, \ldots, n_k$, удовлетворяющих условию $n_1 + \ldots + n_k = n$, $k_j = 0, 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$, формулой

$$\mathsf{P}\{X_1 = n_1, \ldots, X_k = n_k\} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}, \quad (*)$$

где $n, p_1, \ldots, p_k (p_j \geqslant 0, \sum_j p_j = 1)$ — параметры распределения. П. р. является многомерным дискретным распределением — распределением случайного вектора $(X_1, \ldots, X_k)$ с $X_1 + \ldots + X_k = n$ (это распределение является по существу $(k-1)$-мерным, т. к. в евклидовом пространстве k измерений оно вырождено). П. р. естественным образом обобщает *биномиальное распределение* и совпадает с последним при $k = 2$. Название распределения объясняется тем, что вероятность $(*)$ является общим членом разложения многочлена (полинома) $(p_1 + \ldots + p_k)^n$. П. р. появляется в следующей вероятностной схеме. Каждая из случайных величин X_i есть число появлений одного из взаимоисключающих событий A_j, $j = 1, \ldots, k$, при повторных независимых испытаниях. Если при каждом испытании вероятность появления события A_j равна p_j, $j = 1, \ldots, k$, то вероятность $(*)$ равна вероятности того, что при n испытаниях события $A_1, \ldots, A_k$ появятся $n_1, \ldots, n_k$ раз соответственно. Каждая из случайных величин X_j имеет биномиальное распределение с математич. ожиданием np_j и дисперсией $np_j(1-p_j)$.

Случайный вектор $(X_1, \ldots, X_k)$ имеет математич. ожидание $(np_1, \ldots, np_k)$ и ковариационную матрицу $B = \|b_{ij}\|$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} np_i(1-p_i), & i = j, \\ -np_i p_j, & i \neq j \end{cases}$$

$$i, j = 1, \ldots, k$$

(ранг матрицы B равен $k-1$ в силу того, что $\sum_{i=1}^k n_i = n$). Характеристич. функция П. р. равна

$$f(t_1, \ldots, t_k) = \left(p_1 e^{it_1} + \ldots + p_k e^{it_k}\right)^n.$$

При $n \to \infty$ распределение вектора $(Y_1, \ldots, Y_k)$ с нормированными компонентами

$$Y_i = \frac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i(1-p_i)}}$$

стремится к нек-рому многомерному *нормальному распределению*, а распределение суммы

$$\sum_{i=1}^k (1-p_i) Y_i^2$$

(к-рая используется в математич. статистике для построения *«хи-квадрат» критерия*) стремится к *«хи-квадрат» распределению* с $k-1$ степенями свободы.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *А. В. Прохоров.*

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ — коэффициент

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}, \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n,$$

при $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}$ в разложении многочлена (полинома) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n$. В комбинаторике П. к. выражает: а) число всевозможных перестановок из n элементов, из к-рых n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида, ..., n_m элементов m-го вида; б) число способов размещения n различных элементов по m различным ячейкам, при к-ром в i-ю ячейку помещается n_i элементов, $i = 1, 2, \ldots, m$, без учета порядка элементов в любой ячейке.

Частным случаем П. к. являются *биномиальные коэффициенты.*

Лит.: [1] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [2] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963. *С. А. Рукова.*

ПОЛИЦИКЛИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа, обладающая полициклическим рядом, т. е. субнормальным рядом с циклич. факторами (см. *Подгрупп ряд*). Класс П. г. тождествен классу разрешимых групп с условием максимальности для подгрупп; он замкнут относительно перехода к подгруппам, факторгруппам и расширениям. Число бесконечных факторов в любом полициклич. ряде — инвариант П. г. (полициклический ранг). Голоморф П. г. изоморфно вкладывается в группу матриц над кольцом целых чисел; это позволяет применять в теории П. г. методы алгебраич. геометрии, теории чисел и p-адического анализа. Если k — алгебраич. расширение конечного поля, G — конечное расширение П. г., то всякий простой kG-модуль конечномерен над k. Во всякой группе произведение двух локально полициклич. нормальных подгрупп — локально полициклич. подгруппа.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982; [2] Three lectures on polycyclic groups, L., 1973. *Ю. И. Мерзляков.*

ПОЛИЭДР — объединение локально конечного семейства выпуклых многогранников в нек-ром $\mathbb{R}^n$. Под выпуклым многогранником понимается пересечение конечного числа замкнутых полупространств в случае, если это пересечение ограничено. Локальная конечность семейства означает, что каждая точка $\mathbb{R}^n$ имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом многогранников. Компактный П. является объединением конечного числа выпуклых многогранников. Размерность П. определяется как максимальная размерность составляющих его многогранников. Любое открытое подмножество П., в частности любое открытое подмножество евклидова пространства, есть П. Полиэдрами являются также *конус* и *надстройка* над компактным П. Простые примеры (конус над интервалом) показывают, что соединение компактного и некомпактного П. может не быть П. Подполиэдром полиэдра Q наз. любой полиэдр P, лежащий в Q. Иногда ограничиваются рассмотрением только замкнутых подполиэдров. Каждая точка a полиэдра $P \in \mathbb{R}^n$ обладает в P окрестностью, являющейся конусом в $\mathbb{R}^n$ с вершиной a и с компактным основанием. Это свойство оказывается характеристическим: любое подмножество $\mathbb{R}^n$, каждая точка к-рого имеет конич. окрестность с компактным основанием, является П.

Каждый компактный полиэдр P можно так разбить на конечное число замкнутых симплексов, чтобы каждые два симплекса либо не пересекались, либо пересекались по их общей грани. В случае некомпактного П. требуется, чтобы семейство симплексов было локально конечным. Такое разбиение наз. прямолинейной триангуляцией П. Любые две триангуляции одного и того же П. имеют общее подразделение. Если P — замкнутый подполиэдр полиэдра Q, то любая триангуляция K полиэдра P продолжается до нек-рой триангуляции L полиэдра Q. В этом случае говорят, что получающаяся пара (L, K) геометрических симплициальных комплексов триангулирует пару (Q, P). Отображение f полиэдра $P \subset \mathbb{R}^n$ в полиэдр $Q \subset \mathbb{R}^n$ наз. кусочно линейным, или pl-отображением, если f является симплициальным в нек-рых триангуляциях полиэдров P и Q. Эквивалентное определение: f кусочно линейно, если f локально коническое, т. е. если каждая точка $a \in P$ имеет такую конич. окрестность $N = a * L$, что $f(\lambda a + \mu x) = \lambda f(a) + \mu f(x)$ при любых $x \in L$ и $\lambda, \mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu = 1$. Для того чтобы отображение f было кусочно линейным, необходимо и достаточно, чтобы его график $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ являлся П. Суперпозиция кусочно линейных отображений кусочно линейна. Обратное отображение к обратимому кусочно линейному отображению f кусочно линейно. В этом случае f наз. *pl*-гомеоморфизмом.

Категория, объектами к-рой являются П. (и полиэдральные пары), а морфизмами являются *pl*-отображения, обозначается PL или $\mathscr{P}$ (см. также *Кусочно линейная топология*). Категория PL является одним из основных объектов и инструментов исследования в топологии. Особенно велика роль категории PL в *алгебраической топологии* и *топологии многообразий*. Это объясняется тем, что класс П. достаточно широк.

Напр., каждое *дифференцируемое многообразие* можно естественным образом представить в виде П. Каждое *непрерывное отображение* одного П. в другой сколь угодно точно аппроксимируется *pl*-отображением. Поэтому категория PL является хорошим приближением к категории всех топологич. пространств и непрерывных отображений. С другой стороны, триангулируемость П. позволяет использовать методы комбинаторной топологии. Многие алгебраич. инварианты (напр., *гомологий группы*, *когомологий кольцо*) строятся и эффективно вычисляются с помощью разбиения на симплексы. Вопрос о том, всякие ли гомеоморфные полиэдры *pl*-гомеоморфны, носит название основной гипотезы и решается отрицательно: для $n \geqslant 5$ существуют гомеоморфные, но не *pl*-гомеоморфные n-мерные П. (см. [3]). При $n \leqslant 3$ гомеоморфные n-мерные полиэдры *pl*-гомеоморфны, при $n=4$ вопрос остается (1983) открытым для компактных П. и решается отрицательно для некомпактных: существует нестандартная *pl*-структура на $\mathbb{R}^4$. Полиэдр M наз. n-мерным *pl*-многообразием, если каждая его точка имеет окрестность, *pl*-гомеоморфную $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_+$. Всякая прямолинейная триангуляция T *pl*-многообразия M комбинаторна. Это означает, что звезда каждой ее вершины комбинаторно эквивалентна симплексу. Основная гипотеза для П., являющихся n-мерными топологич. многообразиями, естественно распадается на две гипотезы: гипотезу о комбинаторности всякой триангуляции такого П. и основную гипотезу для *pl*-многообразий. Одним из важнейших достижений современной топологии является отрицательный ответ на обе гипотезы для $n \geqslant 5$ (см. [4], [5]). Для $n \leqslant 3$ обе гипотезы справедливы.

Пусть P — компактный подполиэдр полиэдра Q и пусть пара геометрических симплициальных комплексов (L, K) триангулирует пару (Q, P) так, что K — полный подкомплекс. Это означает, что каждый симплекс комплекса L, вершины к-рого лежат в K, лежит в K, и этого всегда можно добиться с помощью перехода к производному *подразделению*. Полиэдр N, состоящий из всех замкнутых симплексов производного подразделения L', имеющих вершину в K, а также его образ при любом неподвижном на P *pl*-гомеоморфизме Q на себя, наз. регулярной окрестностью полиэдра P в полиэдре Q. Для любых двух регулярных окрестностей N_1, N_2 полиэдра P существует неподвижная на P *pl*-изотопия $h_t : N_1 \times I \to Q$, переводящая N_1 в N_2, т. е. такая, что $h_0(N_1)=N_1$ и $h_1(N_1)=N_2$. Говорят, что полиэдр P получается элементарным полиэдральным стягиванием полиэдра $P_1 \supset P$, если для нек-рого $n \geqslant 0$ пара $(\overline{P_1 \searrow P}, \overline{P_1 \searrow P} \cap P)$ *pl*-гомеоморфна паре $(I^n \times I, I^n \times \{0\})$. Полиэдр P_1 полиэдрально стягивается на свой подполиэдр P (обозначение $(P_1 \searrow P)$), если от P_1 к P можно перейти конечной последовательностью элементарных полиэдральных стягиваний. Если $P_1 \searrow P$, то в нек-рой триангуляции пары (P_1, P) полиэдр P

можно получить из P_1 последовательностью элементарных комбинаторных стягиваний, каждое из к-рых состоит в отбрасывании главного симплекса вместе с его свободной гранью. Если Q является n-мерным pl-многообразием, то любая регулярная окрестность компактного подполиэдра $P \subset Q$ является n-мерным pl-многообразием и полиэдрально стягивается на P. Это свойство оказывается характеристическим: если n-мерное pl-многообразие $N \subset Q$ таково, что $P \subset \operatorname{Int} N$ и $N \searrow P$, то N — регулярная окрестность P. При этом любая регулярная окрестность края ∂M компактного pl-многообразия M pl-гомеоморфна $\partial M \times I$.

Пусть P, Q — замкнутые подполиэдры n-мерного pl-многообразия M, $\dim P = p$, $\dim Q = q$. Говорят, что P и Q находятся в общем положении, если $\dim(P \cap Q) \leqslant p+q-n$. Любые замкнутые подполиэдры P, $Q \subset \operatorname{Int} M$ можно привести в общее положение сколь угодно малой изотопией M. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $(\varepsilon - pl)$-изотопия $h_t : M \to M$, что полиэдры P и $Q_1 = h_1(Q)$ находятся в общем положении. Иногда в определение общего положения включают условия типа трансверсальности. Напр., если $p+q=n$, то можно добиться, чтобы для каждой точки $a \in P \cap Q_1$ и нек-рой окрестности U точки a в M тройка $(U, U \cap P, U \cap Q_1)$ была pl-гомеоморфна тройке $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{R}^q)$.

Кривой, или топологический, П.— топологич. пространство X, снабженное гомеоморфизмом $f : P \to X$, где P есть П. Образы симплексов какой-либо триангуляции T полиэдра P образуют криволинейную триангуляцию X. Говорят также, что гомеоморфизм f задает на X pl-структуру. Две pl-структуры $f_i : P_i \to X$, $i=1, 2$, совпадают, если гомеоморфизм $f_2^{-1} f_1$ кусочно линеен, изотопны, если гомеоморфизм $f_2^{-1} f_1$ изотопен кусочно линейному, и эквивалентны, если P_1 и P_2 pl-гомеоморфны. Для любого дифференцируемого многообразия M существует pl-структура $f : P \to M$, согласованная с дифференцируемой структурой на M. Это означает, что для каждого замкнутого симплекса σ нек-рой триангуляции полиэдра P отображение $f|_\sigma : \sigma \to M$ дифференцируемо и не имеет особых точек. Любые две такие pl-структуры на M изотопны. Все понятия, определяемые для П. (триангуляция, подполиэдр, регулярная окрестность, общее положение), переносятся с помощью гомеоморфизма $f : P \to X$ на криволинейный полиэдр X.

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947; [2] Рурк К., Сандерсон Б., Введение в кусочно линейную топологию, М., 1974; [3] Milnor J., «Ann. Math.», 1961, v. 74, № 3, p. 575; [4] Kirby R., Siebenmann L., «Ann Math. Stud.», 1977, № 88; [5] Edwards R., «Notices A. M. S.», 1975, v. 22, № 2, p. A-334.

С. В. Матвеев.

ПОЛИЭДРАЛЬНАЯ ЦЕПЬ — линейная форма $\sum_{i=1}^{m} d_i t_i^r$ в области $U \subset \mathbb{R}^n$, где t_i^r суть r-мерные симплексы, лежащие в U. При этом под r-мерным симплексом в U понимается упорядоченное множество из $r+1$ точки U, выпуклая оболочка к-рого лежит в U. Граница П. ц. определяется обычным образом. Понятие П. ц. занимает промежуточное положение между понятиями симплициальной цепи триангуляции U и сингулярной цепи в U и отличается от последнего линейностью симплексов.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975.

С. В. Матвеев.

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС — конечное множество замкнутых выпуклых многогранников в нек-ром $\mathbb{R}^n$, к-рое вместе с каждым многогранником содержит все его грани и такое, что пересечение различных многогранников либо пусто, либо является гранью каждого из них. Примером П. к. может служить совокупность всех вершин, ребер и двумерных граней стандартного трехмерного куба. Рассматриваются также комплексы, состоящие из бесконечного, но локально конечного семейства многогранников. Понятие П. к. обобщает понятие геометрического симплициального комплекса. Тело $|P|$ П. к. P представляет собой объединение всех входящих в него многогранников и является *полиэдром.* Число многогранников в P, как правило, меньше числа симплексов в триангуляции. П. к. P_1 наз. *подразделением* комплекса P, если их тела совпадают и каждый многогранник из P_1 содержится в нек-ром многограннике из P. Звездное подразделение комплекса P с центром в точке $a \in |P|$ получается с помощью разбиения замкнутых многогранников, содержащих a, на конусы с вершиной a над теми их гранями, к-рые не содержат a. Любой П. к. P имеет подразделение K, являющееся геометрическим симплициальным комплексом. Такое подразделение можно получить без добавления новых вершин. Достаточно, напр., последовательно произвести звездные подразделения P с центрами во всех вершинах P.

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947. *С. В. Матвеев.*

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЙ ЦИКЛ — *полиэдральная цепь,* граница к-рой равна нулю. *С. В. Матвеев.*

ПОЛНАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — совокупность всех элементов аналитич. функции, получающихся при всевозможных *аналитических продолжениях* исходной аналитич. функции $f=f(z)$ комплексного переменного z, заданной первоначально в нек-рой области D расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Пара (D, f), состоящая из области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ и заданной в D однозначной аналитической, или голоморфной, функции f, наз. элементом аналитической функции, аналитическим элементом, или, короче, просто элементом. Всегда возможно, в частности, при задании аналитич. функции пользоваться вейерштрассовым, или регулярным, элементом $(U(a, R), f_a)$, состоящим при $a \neq \infty$ из степенного ряда

$$f_a=f_a(z)=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{1}$$

и круга сходимости $U(a, R)=\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z-a|<R\}$ этого ряда с центром a и радиусом сходимости $R>0$. В случае $a=\infty$ вейерштрассов элемент $(U(\infty, R), f_\infty)$ состоит из ряда

$$f_\infty=f_\infty(z)=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k} \tag{2}$$

и области сходимости этого ряда $U(\infty, R)=\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z|>R\}$, $R \geqslant 0$.

Пусть E_f — множество всех тех точек $\zeta \in \overline{\mathbb{C}}$, в к-рые исходный элемент $(U(a, R), f_a)$ аналитически продолжается хотя бы по одному пути, связывающему в $\overline{\mathbb{C}}$ точки a и ζ. Следует иметь в виду возможность такой ситуации, когда в точку $\zeta \in E_f$ аналитич. продолжение возможно вдоль нек-рого класса путей L_1 и невозможно вдоль другого класса путей L_2 (см. *Особая точка* аналитич. функции). Множество E_f есть область плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Полной аналитической функцией (в смысле Вейерштрасса) f_W, порожденной элементом $(U(a, R), f_a)$, называется совокупность всех вейерштрассовых элементов $(U(\zeta, R), f_\zeta)$, $\zeta \in E_f$, получаемых при этом аналитич. продолжении вдоль всевозможных путей $L \subset \overline{\mathbb{C}}$. Область E_f наз. (вейерштрассовой) областью существования П. а. ф. f_W. Применяя элементы общего вида (D, f), вместо вейерштрассовых на самом деле получают ту же самую П. а. ф. f_W. Элементы (D, f) П. а. ф. f_W часто наз. *ветвями аналитической функции* f_W. Любой элемент (D, f) П. а. ф.

f_W, будучи взят за исходный при аналитич. продолжении, приводит к той же самой П. а. ф. f_W. Каждый элемент $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ П. а. ф. f_W может быть получен из любого другого ее элемента $(U(a, R), f_a)$ посредством аналитич. продолжения вдоль нек-рого пути, связывающего в $\overline{\mathbb{C}}$ точки a и ζ.

Может оказаться, что исходный элемент (D, f) не допускает аналитич. продолжения ни в одну точку $\zeta \notin D$. В этом случае $D=E_f$ является естественной областью существования, или областью голоморфности, функции f, а ее граница $\Gamma=\partial D$ — естественной границей функции f. Напр., для вейерштрассова элемента

$$\left(U(0, 1), \ f_0(z)=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} z^{k!}\right)$$

естественной границей является окружность $\Gamma=\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z|=1\}$ его круга сходимости $U(0, 1)$, т. к. этот элемент нельзя продолжить аналитически ни в одну точку ζ такую, что $|\zeta| \geqslant 1$. Какова бы ни была область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, можно построить аналитич. функцию $f_D(z)$, для к-рой D есть естественная область существования $f_D(z)$, а ее граница $\Gamma=\partial D$ — естественная граница $f_D(z)$ (это следует, напр., из *Миттаг-Леффлера теоремы*).

П. а. ф. f_W в своей области существования E_f, вообще говоря, не является функцией точки в обычном смысле этого слова. Часто встречающаяся в теории аналитич. функций ситуация такова, что П. а. ф. f_W есть многозначная функция: для каждой точки $\zeta \in E_f$ существует, вообще говоря, бесконечное множество элементов $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ с центром в этой точке. Однако это множество не более чем счетное (теорема Пуанкаре — Вольтерра). В целом П. а. ф. f_W можно рассматривать как однозначную аналитич. функцию только на соответствующей римановой поверхности, являющейся многолистной накрывающей поверхностью над $\overline{\mathbb{C}}$. Напр., П. а. ф. $f(z)= = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ многозначна в своей области существования $E_f=\{z \in \overline{\mathbb{C}} : 0<|z|<\infty\}$; в каждой точке $\zeta \in E_f$ она принимает счетное множество значений

$$f_\zeta(\zeta;\ s)=\ln|\zeta|+i \arg \zeta+2\pi s i, \quad s=0, \ \pm 1, \ \ldots,$$

и каждой точке $\zeta \in E_f$ соответствует счетное множество элементов

$$(U(\zeta, |\zeta|), \ f_\zeta(z;\ s))=$$
$$=f_\zeta(\zeta;\ s)+\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k \zeta^k}(z-\zeta)^k$$

с центром ζ. Обычно используется однозначная ветвь этой П. а. ф.— главное значение логарифма $\ln z = =\ln|z|+i \arg z$, являющееся голоморфной функцией в области $D=\{z \in \overline{\mathbb{C}} : 0<|z|<\infty, \ -\pi<\arg z<\pi\}$, непрерывно продолжаемой на множество $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : 0< <|z|<\infty, \ -\pi<\arg \zeta \leqslant \pi\}$.

При обращении (см. *Обращение ряда*) вейерштрассовых элементов (1), (2) возникают элементы более общей природы, определяемые соответственно рядами Пюизё:

$$f_a=\sum\nolimits_{k=\mu}^{\infty} c_k(z-a)^{k/\nu}, \quad f_\infty=\sum\nolimits_{k=\mu}^{\infty} c_k z^{-k/\nu}, \qquad (3)$$

где μ — целое число, ν — натуральное число, и кругами сходимости этих рядов $U(a, R)$, $U(\infty, R)$. В частности, при $\mu \geqslant 0$, $\nu=1$ ряды (3) совпадают с рядами (1), (2), определяющими регулярные элементы; в отличие от них определяемые рядами (3) элементы при $\mu<0$ или $\nu>1$ наз. особыми. При $\nu=1$ и $\nu>1$ ряды (3) определяют соответственно неразветвленные и (алгебраические) разветвленные элементы.

Допуская при продолжении исходного элемента $(U(a, R), f_a)$ и особые элементы с рядами вида (3), вообще говоря, многозначные (при $\nu>1$) и имеющие особенности типа полюса (при $\mu<0$), получают более обширную, чем вейерштрассова, риманову область существования E_R и соответствующую более обширную совокупность элементов, определяемых рядами вида (3), называемую *аналитическим образом.* Аналитич. образ отличается от П. а. ф. присоединением всех особых элементов, получаемых при продолжении данного регулярного элемента. После введения соответствующей топологии аналитич. образ превращается в риманову поверхность данной функции.

При описанном построении П. а. ф. f_W можно пользоваться вместо элемента понятием ростка аналитич. функции, смысл введения к-рого заключается в локализации понятия элемента, в отвлечении от не имеющей в данном случае существенного значения величины радиуса сходимости. Два элемента (D, f) и (G, h) такие, что области D и G содержат общую точку a, наз. эквивалентными в точке a, если существует окрестность точки a, в к-рой $f\equiv h$. Это отношение эквивалентности обладает обычными свойствами рефлексивности, симметрии и транзитивности. Класс эквивалентности элементов в данной точке $a\in\overline{\mathbb{C}}$ наз. ростком аналитической функции $\mathbf{f}_a$ в точке a. Росток характеризует локальные свойства функции в данной точке. Два ростка $\mathbf{f}_a$ и $\mathbf{g}_a$ равны, если в нек-рой окрестности точки a совпадают какие-либо представители классов эквивалентности. Аналогично, при помощи представителей, определяются арифметич. действия с ростками и их дифференцирование. П. а. ф. f_W есть совокупность всех ростков аналитич. функций $\mathbf{f}_\zeta$, $\zeta\in E_f$, получаемых из данного ростка $\mathbf{f}_a$ аналитич. продолжением вдоль всевозможных путей в $\overline{\mathbb{C}}$. Равенство двух П. а. ф. f_W, g_W и действия с П. а. ф. определяются как равенство ростков $\mathbf{f}_a$, $\mathbf{g}_a$ в какой-либо точке $a\in E_f\cap E_g$ и действия с ростками.

Элементы (D, f), вейерштрассовы элементы $(U^n(a, R), f_a)$ и ростки аналитич. функции многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 1$, определяются точно так же, как выше, но с помощью областей D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ или поликругов сходимости

$$U^n(a, R)=\{z\in\mathbb{C}^n: |z_j-a_j|<R_j,\ j=1, \ldots, n\};$$
$$R_j>0,\ j=1, \ldots, n;\ a=(a_1, \ldots, a_n);$$
$$R=(R_1, \ldots, R_n),$$

кратных степенных рядов

$$f_a=f_a(z)=\sum\nolimits_{k_1, \ldots, k_n=0}^{\infty} c_{k_1\ldots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n}.$$

Понятие П. а. ф. многих комплексных переменных строится далее вполне аналогично случаю одного переменного.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [3] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [4] Фукс Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962.

Е. Д. Соломенцев.

ПОЛНАЯ ВАРИАЦИЯ функции — то же, что *вариация функции.*

ПОЛНАЯ ГРУППА — группа, в к-рой для любого ее элемента g и любого целого числа $n\neq 0$ разрешимо уравнение $x^n=g$. Абелева П. г. наз. также делимой группой. Важными примерами П. г. являются аддитивная группа всех рациональных чисел и группа всех комплексных корней из 1 степеней p^k, $k=1, 2, \ldots$, где p — простое число (квазициклическая группа). Всякая абелева П. г. разлагается в прямую сумму групп, каждая из к-рых изоморфна одной из указанных. О неабелевых П. г. известно значительно меньше. Всякая нееденичная П. г. бесконечна. Всякая группа вложима в подходящую П. г. Если в П. г. указанные в определении уравнения разрешимы однозначно, она наз. D-группой. Таковы, в частности, локально нильпотентные П. г. без кручения.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982. *А. Л. Шмелькин.*

ПОЛНАЯ КРИВИЗНА — 1) П. к. в точке поверхности Φ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ — скалярная величина K, равная произведению главных (нормальных) кривизн k_1 и k_2, вычисляемых в точке поверхности: $K=k_1k_2$; наз. также *гауссовой кривизной* поверхности. Понятие П. к. обобщается для гиперповерхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $n>2$. П. к. в этом случае есть величина $K=k_1 \ldots k_n$, где k_i — главная нормальная кривизна в точке гиперповерхности в i-м главном направлении.

П. к. в точке двумерной поверхности в трехмерном римановом пространстве равна разности внутренней кривизны — римановой кривизны двумерной поверхности, и внешней кривизны — римановой кривизны объемлющего пространства в направлении бивектора, касательного к поверхности в рассматриваемой точке.

2) П. к. области D на поверхности Φ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ — величина $\iint_D K d\sigma$, где K — гауссова кривизна поверхности в точке, $d\sigma$ — элемент площади поверхности. Аналогично определяется П. к. области нек-рого риманова многообразия, причем под K понимается риманова кривизна многообразия, вычисляемая в точках многообразия в направлении касательных бивекторов, а интегрирование ведется по площади (мере) области многообразия. *Л. А. Сидоров.*

ПОЛНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ГРУППА — группа всех обратимых матриц степени n над ассоциативным кольцом K с единицей; общепринятое обозначение: $\mathrm{GL}_n(K)$ или $\mathrm{GL}(n, K)$. П. л. г. $\mathrm{GL}(n, K)$ может быть также определена как группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}_K(V)$ свободного правого K-модуля V с n образующими.

В исследовании группы $\mathrm{GL}(n, K)$ большой интерес представляет вопрос о ее нормальном строении. Центр Z_n группы $\mathrm{GL}(n, K)$ состоит из скалярных матриц с элементами из центра кольца K. В классич. случае, когда K — поле, решающую роль играет исследование нормального строения специальной линейной группы $\mathrm{SL}(n, K)$, состоящей из матриц с определителем 1. А именно, коммутант группы $\mathrm{GL}(n, K)$ совпадает с $\mathrm{SL}(n, K)$ (кроме случая $n=2$, $|K|=2$), и всякая нормальная подгруппа группы $\mathrm{GL}(n, K)$ либо содержится в Z_n, либо содержит $\mathrm{SL}(n, K)$. В частности, специальная проективная группа

$$\mathrm{PSL}(n, K)=\mathrm{SL}(n, K)/\mathrm{SL}(n, K)\cap Z_n$$

является простой (за исключением случаев $n=2$, $|K|=2,3$).

Если K — тело и $n>1$, то всякая нормальная подгруппа группы $\mathrm{GL}(n, K)$ либо содержится в Z_n, либо содержит коммутант $\mathrm{SL}^+(n, K)$ группы $\mathrm{GL}(n, K)$, причем коммутант $\mathrm{SL}^+(n, K)$ порождается трансвекциями и факторгруппа $\mathrm{SL}^+(n, K)/\mathrm{SL}^+(n, K)\cap Z_n$ проста. Кроме того, существует естественный изоморфизм

$$\mathrm{GL}(n, K)/\mathrm{SL}^+(n, K)\simeq K^*/[K^*, K^*],$$

где K^* — мультипликативная группа тела K. Если K конечномерно над своим центром k, то роль группы

$SL(n, K)$ играет группа всех матриц из $GL(n, K)$ с приведенной нормой 1. Группы $SL(n, K)$ и $SL^{+}(n, K)$ не всегда совпадают, но если k — глобальное поле, то это так (см. *Кнезера — Титса гипотеза*).

Исследование нормального строения П. л. г. над произвольным кольцом K связано с развитием *алгебраической К-теории*. Над кольцами K общего типа группа $GL(n, K)$ может быть весьма насыщена нормальными подгруппами. Напр., если K — коммутативное кольцо без делителей нуля и с конечным числом образующих, то группа $GL(n, K)$ финитно аппроксимируема, т. е. для каждого ее элемента g существует нормальная подгруппа N_g конечного индекса, не содержащая g. В случае $K=\mathbb{Z}$ задача описания нормальных подгрупп группы $GL(n, \mathbb{Z})$ фактически эквивалентна *конгруэнц-проблеме* для группы $SL(n, \mathbb{Z})$, поскольку

$$[CL(n, \mathbb{Z}):SL(n, \mathbb{Z})]=2,$$

а всякая нескалярная нормальная подгруппа группы $SL(n, \mathbb{Z})$ при $n>2$ является конгруэнц-подгруппой.

Имеется глубокая аналогия между строением П. л. г. и строением других классич. групп, к-рая простирается далее на простые алгебраические группы и группы Ли.

Лит.: [1] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [2] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [3] Басс Х., Алгебраическая К-теория, пер. с англ., М., 1973. *В. П. Платонов.*

ПОЛНАЯ МЕРА — мера μ на σ-алгебре Σ, для к-рой равенство $|\mu|(A)=0$ влечет за собой $E\in\Sigma$ для всякого $E\subset A$. Здесь $|\mu|$ — полная вариация μ (для положительной меры $|\mu|=\mu$). *А. П. Терехин.*

ПОЛНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ — свойство *динамической системы*. Динамич. система наз. вполне неустойчивой, если все ее точки — блуждающие (см. *Блуждающая точка*).

Для того чтобы динамич. система, заданная на $\mathbb{R}^n$, была глобально выпрямляемой (т. е. чтобы существовал гомеоморфизм $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, отображающий каждую траекторию системы на нек-рую прямую $\{a\}\times\mathbb{R}$, где точка $a\in\mathbb{R}^n$ зависит от траектории), необходимо и достаточно, чтобы система была вполне неустойчивой и не имела *седла в бесконечности* (теорема Немыцкого, см. [1]).

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949. *В. М. Миллионщиков.*

ПОЛНАЯ ПОДКАТЕГОРИЯ — подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$ такая, что для любых объектов A, B из $\mathfrak{C}$ выполняется равенство

$$H_{\mathfrak{C}}(A, B)=H_{\mathfrak{K}}(A, B).$$

Таким образом, П. п. однозначно определяется классом своих объектов. Обратно, всякий подкласс класса объектов категории $\mathfrak{K}$ однозначно определяет П. п., для к-рой он служит классом объектов: в эту подкатегорию входят те и только те морфизмы, начала и концы к-рых принадлежат выделенному подклассу. В частности, П. п., соответствующая единственному объекту A, состоит из множества $H_{\mathfrak{K}}(A, A)$.

Многие важные классы подкатегорий (рефлективные и корефлективные подкатегории, многообразия и т. п.) являются П. п. *М. Ш. Цаленко.*

ПОЛНАЯ ПРОБЛЕМА собственных значений — задача вычисления всех (в отличие от *частичной проблемы*) собственных значений квадратной матрицы, обычно действительной или комплексной. Часто помимо собственных значений требуется еще и построение базиса из собственных или корневых векторов матрицы.

Решение П. п. собственных значений матрицы A сводится к построению характеристич. многочлена φ_A этой матрицы и вычислению его корней, действительных или комплексных (последнее обусловливает невозможность нахождения собственных значений конечным вычислительным процессом). Для каждого собственного значения λ соответствующие собственные векторы могут быть определены из однородной системы линейных уравнений $(A-\lambda E)x=0$ (E — единичная матрица). При вычислениях над полем комплексных чисел достаточным условием существования базиса из собственных векторов является простота спектра, а необходимое и достаточное условие состоит в том, чтобы алгебраич. кратность каждого собственного значения λ (т. е. его кратность как корня характеристич. многочлена φ_A) совпадала с его геометрич. кратностью, под к-рой понимается дефект матрицы $A-\lambda E$. При необходимости вычисления корневых векторов высоты, превосходящей единицу, приходится рассматривать однородные системы вида

$$(A-\lambda E)^k x=0,\ k \in N,\ k>1.$$

Примерно по этой схеме строились и численные методы решения П. п. собственных значений, практиковавшиеся до кон. 1940-х гг. В 1930-х гг. были разработаны высокоэффективные (по количеству арифметич. операций) алгоритмы вычисления характеристич. многочлена матрицы по ее коэффициентам. Так, в методе Данилевского построение характеристич. многочлена матрицы порядка n выполняется с затратой $\sim n^3$ мультипликативных операций (см. [1], [2]).

Методы этой группы получили название прямых, или точных, по той причине, что, проводимые в точной арифметике, они дают точные значения коэффициентов характеристич. многочлена. Их поведение в условиях реальных вычислений, сопровождающихся ошибками округлений, не могло быть проверено для задач сколько-нибудь значительного порядка до появления цифровых ЭВМ. Такая проверка произошла в 1950-х гг., в результате чего прямые методы были полностью вытеснены из численной практики. Катастрофич. неустойчивость вычисления собственных значений, связанная с этими методами, имеет две основные причины. Во-первых, коэффициенты характеристич. многочлена в большинстве точных методов прямо или косвенно определяются как компоненты решения системы линейных уравнений, матрица к-рой составлена по столбцам из векторов v, Av, A^2v, $\ldots$, $A^{n-1}v$, где v — начальный вектор метода. Такая матрица обычно очень плохо обусловлена, что видно хотя бы из того, что длины ее столбцов, как правило, весьма различны, причем тем больше, чем больше n. Тем самым коэффициенты характеристич. многочлена в общем случае вычисляются с очень большими ошибками. Во-вторых, сама по себе задача вычисления корней многочлена зачастую оказывается численно неустойчивой. В этом отношении показателен пример (см. [3]): если у многочлена

$$p(x)=(x-1)(x-2)\ldots(x-19)(x-20)=x^{20}-210x^{19}+\ldots$$

изменить коэффициент при x^{19} с -210 на $-210+2^{-23}$, то у возмущенного многочлена $\tilde{p}(x)$ появится пять пар комплексно сопряженных корней; у одной из этих пар мнимые части достигают $\pm i\cdot 2,\ 81,\ldots$.

Подобная чувствительность собственных значений матрицы к изменениям коэффициентов характеристич. многочлена обычно не сопровождается сравнимой чувствительностью в отношении элементов самой матрицы. Так, если указанный многочлен $p(x)$ является характеристич. многочленом симметрич. матрицы A, то изменения порядка 2^{-23} в любом элементе матрицы приводят самое большее к изменениям того же порядка в ее собственных значениях.

Современные численные методы решения П. п. собственных значений находят собственные значения без предварительного вычисления характеристич. многочлена (см. *Итерационные методы* решения проблемы собственных значений матрицы). Трудоемкость лучших из этих методов составляет $\sim kn^3$ мультипликативных операций, где n — порядок матрицы, k — константа, не зависящая от n и имеющая смысл среднего числа итераций метода, приходящегося на вычисление одного собственного значения. В QR-алгоритме значения k обычно заключены между 1,5 и 2.

Приближенные собственные значения (векторы) $(n\times n)$-матрицы A, вычисленные ортогональным методом M (QR-алгоритмом для матриц общего вида, методом Якоби или методами, основанными на делении спектра, в случае симметрических и эрмитовых матриц), можно интерпретировать как точные собственные значения (векторы) возмущенной(ых) матрицы (матриц) $A+F_M$. Здесь F_M— матрица эквивалентного возмущения метода M — допускает оценку вида

$$\| F_M \|_E \leqslant f(n) \| A \|_E \varepsilon, \tag{1}$$

где ε — относительная точность машинной арифметики, $\|A\|_E=(\Sigma |a_{ij}|^2)^{1/2}$— евклидова матричная норма, $f(n)$ — функция вида Ckn^{α}. Число k описано выше, а точные значения константы C и показателя α зависят от таких деталей вычислительного процесса, как способ округления, использование операции накопления скалярных произведений и т. д. Обычное значение α равно 2.

Располагая априорной оценкой (1), можно оценить точность вычисления собственных значений (векторов), достигаемую в методе M. Эта точность зависит от обусловленности отдельных собственных значений (собственных подпространств).

Пусть λ — простое собственное значение матрицы A, x — соответствующий нормированный собственный вектор, y — нормированный собственный вектор транспонированной матрицы $A^\top$ для того же собственного значения. При возмущении матрицы A на матрицу F возмущение собственного значения λ с точностью до малых 2-го порядка выражается величиной

$$\Delta\lambda \approx (y^\top Fx)/(y^\top x) \tag{2}$$

и оценивается как

$$|\Delta\lambda| \leqslant \|F\|_2/|y^\top x| \tag{3}$$

($\| \ \|_2$ — спектральная норма). Таким образом, чувствительность λ к возмущениям матрицы A характеризуется числом $s(\lambda)=|y^\top x|^{-1}$, наз. (индивидуальным) числом обусловленности этого собственного значения. В случае, когда оба вектора x и y действительные, число $s^{-1}(\lambda)$ имеет простой геометрич. смысл: это — косинус угла между векторами x и y, что объясняет другое наименование $s(\lambda)$ — коэффициент перекоса, соответствующий λ.

Если матрица A диагонализуема (т. е. имеет базис из собственных векторов), то обусловленность ее собственных значений λ_i может быть охарактеризована и интегрально. Пусть P — матрица, составленная по столбцам из собственных векторов λ_i и имеющая среди всех таких матриц наименьшее число обусловленности. Справедлива теорема (см. [4]): все собственные значения возмущенной матрицы $A+F$ заключены в области комплексной плоскости, являющейся объединением кругов

$$|z-\lambda_i| \leqslant \operatorname{cond} P \|F\|, \quad i=1, \ \ldots, \ n. \tag{4}$$

Если эта область распадается на связные компоненты, то каждая из них содержит столько собственных значений возмущенной матрицы, сколько кругов ее составляют. (В качестве нормы в (4) можно взять спектральную норму и для P — спектральное число обусловленности.)

Число $\operatorname{cond} P$ наз. числом обусловленности матрицы A по отношению к П. п. собственных значений. Выражаемое в спектральной норме, оно связано с коэффициентами перекоса следующим образом:

$$s(\lambda_i) \leqslant \operatorname{cond}_2 P \leqslant \sum_{i=1}^{n} s(\lambda_i).$$

Более сложно зависит от возмущения матрицы A возмущение собственного вектора x, относящегося к простому собственному значению λ. Оно определяется, вообще говоря, не только коэффициентом перекоса, соответствующим самому λ, но и коэффициентами перекоса для прочих собственных значений. Чувствительность собственного вектора x возрастает и при наличии собственных значений, близких к λ. В предельном случае, когда λ становится кратным, сама постановка вопроса о чувствительности отдельного собственного направления теряет смысл и нужно говорить о чувствительности собственного (или инвариантного) подпространства.

Качественно оценки (3) и (4) означают, что величина возмущения каждого собственного значения диагонализуемой матрицы A пропорциональна величине возмущения F, а множителями пропорциональности выступают числа обусловленности, индивидуальные либо глобальные. Если жорданова форма A — недиагональная и собственному значению λ отвечает элементарный делитель $(z-\lambda)^m$, то возмущение λ в общем случае пропорционально уже не $\|F\|$, а $\|F\|^{1/m}$.

Наиболее важным частным случаем П. п. собственных значений является вычисление всех собственных значений (собственных векторов) действительной симметрической либо комплексной эрмитовой матрицы A. Коэффициенты перекоса такой матрицы равны единице, и приближенная оценка (3) переходит в точное неравенство

$$|\Delta\lambda| \leqslant \|F\|_2.$$

Матрицу P в (4) можно выбрать ортогональной либо унитарной, и потому глобальное число обусловленности в спектральной норме равно единице. Независимо от кратности точек спектра A существует такое упорядочение собственных значений $\tilde{\lambda}_i$ матрицы $A+F$, что выполняются при всех i соотношения

$$|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i| \leqslant \|F\|_2.$$

Еще более точные оценки возможны, если не только сама матрица A является симметрической (эрмитовой), но и ее возмущение F (см. [5]).

Помимо указанных имеется еще ряд апостериорных оценок точности вычисленных собственных значений и векторов. Они наиболее эффективны для симметрических и эрмитовых матриц A.

Пусть $\tilde{x}_i$ — приближенный, а x_i — точный собственный вектор для простого собственного значения λ матрицы A. Оба вектора предполагаются нормированными. Наилучшую оценку λ_i, к-рую можно получить посредством вектора $\tilde{x}_i$, дает значение функционала Рэлея

$$\varphi(A, z) = (Az, z)/(z, z),$$

соответствующее $\tilde{x}_i$, т. е. число $\mu_i = \varphi(A, \tilde{x}_i)$ (этот факт имеет силу для произвольной, не обязательно эрмитовой матрицы A). Вектор $r_i = A\tilde{x}_i - \mu_i\tilde{x}_i$ наз. вектором невязки.
Пусть

$$\varepsilon = \|r_i\|_2, \quad a = \min_{j \neq i} |\lambda_j - \mu_i|.$$

Оценку величины a легко получить по вычисленным собственным значениям $\tilde{\lambda}_j$. Справедливы оценки:

$$|\lambda_i - \mu_i| \leqslant \varepsilon^2/a, \quad |\sin \angle (x_i, \tilde{x}_i)| \leqslant \varepsilon/a.$$

Если λ_i — кратное собственное значение или имеется группа близких к λ_i собственных значений, то нужно оценивать суммарное возмущение всей этой группы и возмущение соответствующего ей инвариантного подпространства (см. [5]).

Наряду с описанной П. п. собственных значений часто возникает необходимость в решении т. н. обобщенной проблемы собственных значений

$$Ax = \lambda Bx. \tag{5}$$

В наиболее важном случае обобщенной проблемы собственных значений матрицы A и B являются симметрическими (эрмитовыми), и одна из них положительно определена. Теория и методы численного решения задачи (5) в этом случае параллельны теории и методам для обычной симметрической (эрмитовой) проблемы собственных значений.

Если ни одна из матриц A и B не является определенной или хотя бы одна из них даже симметрической, то пользуются т. н. QZ-алгоритмом (см. [6]), своеобразным обобщением QR-алгоритма. Необходимо отметить, что здесь возможны новые эффекты, ненаблюдаемые в обычной П. п. собственных значений: бесконечные собственные значения, непрерывный спектр.

Еще более сложны нелинейные задачи на собственные значения

$$(A_n\lambda^n + A_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0)\, x = 0.$$

Такие задачи решают обычно путем сведения к линейным более высокого порядка (см. [7]).

Лит.: [1] Данилевский А. М., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 1, с. 169—71; [2] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М., 1963; [3] Wilkinson J. H., Rounding errors in algebraic processes, Englewood cliffs (N.Y.), 1963; [4] Уилкинсон Дж. Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [5] Парлетт Б., Симметричная проблема собственных значений. Численные методы, пер. с англ., М., 1983; [6] Moler C. B., Stewart G. W., «SIAM J. Num. Anal.», 1973, v. 10, p. 241; [7] Кублановская В. Н., в сб.: Вычислительные методы линейной алгебры, Новосиб., 1980, с. 37—53.

Х. Д. Икрамов.

ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ функции — производная по t от функции $y=f(t, u, v, \ldots, z)$, зависящей от переменной t как непосредственно, так и через промежуточные переменные $u=u(t, x_1, \ldots, x_n)$, $v=v(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, z=z(t, x_1, \ldots, x_n)$, вычисляемая по формуле

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t},$$

где $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial t}$ — *частные производные.*

Е. Д. Соломенцев.

ПОЛНАЯ РЕШЕТКА, полная структура,— *частично упорядоченное множество*, в к-ром всякое непустое подмножество A имеет точную верхнюю и точную нижнюю грань, называемые обычно объединением и пересечением элементов подмножества A и обозначаемые $\bigvee_{a_\alpha \in A} a_\alpha$ и $\bigwedge_{a_\alpha \in A} a_\alpha$ (или просто $\bigvee A$ и $\bigwedge A$) соответственно. Если частично упорядоченное множество имеет наибольший элемент и каждое его непустое подмножество обладает точной нижней гранью, то оно является П. р. Решетка L тогда и только тогда является полной, когда для любого изотонного отображения φ этой решетки в себя существует неподвижная точка, т. е. такой элемент $a \in L$, что $a\varphi = a$. Если $P(M)$ — упорядоченное включением множество подмножеств множества M и φ —

отношение замыкания на $P(M)$, то совокупность всех φ-замкнутых подмножеств является П. р. Всякое частично упорядоченное множество P можно изоморфно вложить в П. р., к-рая в этом случае наз. пополнением множества P. *Пополнение сечениями* является наименьшим из всех пополнений данного частично упорядоченного множества. П. р. образуют множество всех подалгебр универсальной алгебры, множество всех конгруэнций универсальной алгебры, множество всех замкнутых подмножеств топологич. пространства.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970. *Т. С. Фофанова.*

ПОЛНАЯ СИСТЕМА, замкнутая система (дифференциальных уравнений), — система дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка

$$F_i(x, u, p)=0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{1}$$

$$x=(x_1, \ldots, x_n), \ u=u(x_1, \ldots, x_n),$$

$$p=(p_1, \ldots, p_n)=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

со следующим свойством: для любого набора чисел (x, u, p), удовлетворяющего уравнениям (1), справедливы равенства

$$F_{ij}(x, u, p)=0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant m,$$

где $F_{ij}=[F_i, F_j]$ — *Якоби скобки.*

Для линейных однородных систем условие полноты формулируется несколько иначе. Скобка Якоби в этом случае линейна по переменным $p=(p_1, \ldots, p_n)$, и если система записана в виде

$$P_i(u)=0, \ 1 \leqslant i \leqslant m,$$

где P_i — линейные дифференциальные операторы 1-го порядка, то этой скобке отвечает коммутатор $[P_i, P_j]=P_iP_j-P_jP_i$. Полнота системы заключается в представимости всех коммутаторов $[P_i, P_j]$ в виде линейных комбинаций от P_k с коэффициентами, зависящими только от $x=(x_1, \ldots, x_n)$.

Если $u=u(x)$ — совместное решение двух уравнений

$$F_i(x, u, p)=0, \ F_j(x, u, p)=0,$$

то u является решением и уравнения

$$[F_i, F_j](x, u, p)=0. \tag{2}$$

Произвольную систему вида (1) обычно пытаются расширить до полной добавлением к ней новых независимых уравнений, полученных из старых с помощью операции образования скобок Якоби. При этом расширении в соответствии с (2) ни одно из решений переходной системы не должно теряться, если она вообще разрешима.

Свойство системы быть полной инвариантно относительно тех неособых преобразований переменных (x, u, p, F), для к-рых сохраняется смысл дифференциальных уравнений. К таким преобразованиям относится, напр., замена независимых переменных $x=g(y)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$, а также преобразование следующего типа. Пусть $A: \mathbb{R}^{2n+1+m} \to \mathbb{R}^m$ — такое гладкое отображение, что

$$y=x, \ q=p,$$

$$v=u, \ t=H(x, u, p, s),$$

$$s=(s_1, \ldots, s_m), \ t=(t_1, \ldots, t_m)$$

есть диффеоморфизм $\mathbb{R}^{2n+1+m} \to \mathbb{R}^{2n+1+m}$. Тогда рассматриваемое преобразование заключается в переходе от системы (1) к системе

$$G_i(x, u, p)=H_i(x, u, p, F)=0, \ 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, пер. с нем., М., 1966; [2] Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л.— М., 1934; [3] Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, 2 Aufl., Bd 1, Lpz., 1956; [4] Goursat E., Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, P., 1891. *А. П. Солдатов.*

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ВЫЧЕТОВ по модулю m — любой набор из m несравнимых между собой по модулю m целых чисел. Обычно в качестве П. с. в. по модулю m берутся наименьшие неотрицательные вычеты $0, 1, \ldots, m-1$ или абсолютно наименьшие вычеты, состоящие из чисел $0, \pm 1, \ldots, \pm \frac{m-2}{2}$ в случае нечетного m и чисел $0, \pm 1, \ldots, \frac{m-2}{2}, \frac{m}{2}$ в случае четного m. *С. А. Степанов.*

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ФУНКЦИЙ — *ортонормированная система* функций $\{\varphi(x)\}$ нек-рого гильбертова пространства H такая, что в H не существует функции, ортогональной всем функциям данного семейства. Система функций, полная в одном пространстве, может оказаться неполной в другом. Напр., система $\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos nx\right\}$, $n=0, 1, \ldots$, образует П. с. ф. в пространстве $L[0, \pi]$, но не образует П. с. ф. в пространстве $L[-\pi, \pi]$. *Е. Д. Соломенцев.*

ПОЛНОГО НАКОПЛЕНИЯ ТОЧКА — точка x множества M в топологич. пространстве X такая, что пересечение M с любой окрестностью x имеет мощность ту же, что и все множество M.

М. И. Войцеховский.

ПОЛНОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — обобщение понятия компактного комплексного алгебраич. многообразия. Многообразие X наз. полным, если для любого многообразия Y проекция $X \times Y \to Y$ является замкнутым морфизмом, т. е. переводит замкнутые (в топологии Зариского) подмножества $X \times Y$ в замкнутые подмножества Y. Имеется т. н. валюативный критерий полноты: для любого кольца дискретного нормирования A с полем частных K и любого морфизма u : Spec $K \to X$ должен существовать единственный морфизм v : Spec $A \to X$, продолжающий u. Это условие является аналогом требования того, чтобы любая последовательность в X имела предельную точку.

Любое проективное многообразие является полным, но не наоборот. Для любого П. а. м. X существует проективное многообразие X' и проективный бирациональный морфизм $X' \to X$ (лемма Чжоу). Для любого алгебраич. многообразия X существует открытое вложение в полное многообразие $\bar{X}$ (теорема Нагаты). Обобщением понятия П. а. м. на относительный случай служит собственный морфизм схем.

Лит.: [1] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *В. И. Данилов.*

ПОЛНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ — то же, что *вариация функции* одного переменного. П. и. ф. есть сумма *положительной вариации функции* и *отрицательной вариации функции.* *Б. И. Голубов.*

ПОЛНОЕ МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — метрическое пространство, в к-ром каждая фундаментальная, или сходящаяся в себе, последовательность сходится. П. м. п.— частный случай *полного равномерного пространства.* *М. И. Войцеховский.*

ПОЛНОЕ МНОЖЕСТВО в топологическом векторном пространстве X над полем K — множество A такое, что совокупность линейных комбинаций элементов из A (всюду) плотна в X, т. е. порожденное множеством A замкнутое подпространство, или замкнутая линейная оболочка A, совпадает с X. Напр., в нормированном пространстве C непрерывных функций на $[0, 1]$ со значениями в $\mathbb{C}$ множество $\{x^n\}$ является П. м. Если K — недискретное нормированное поле, то каждое поглощающее множество (и в частности каждая окрестность нуля в X) является П. м.

Для того чтобы $A=\{a_t\}$, $t \in T$ было П. м. в ослабленной топологии $\sigma(X, X^*)$ пространства X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\xi \in X^*$ существовал индекс t такой, что $\langle a_t, \xi \rangle \neq 0$; это означает, что никакая замкнутая гиперплоскость не содержит всех элементов a_t, т. е. что A — тотальное множество. При этом если X — *локально выпуклое пространство*, то П. м. в ослабленной топологии будет полным и в исходной топологии. *М. И. Войцеховский.*

ПОЛНОЕ ПРИРАЩЕНИЕ функции нескольких переменных — приращение, приобретаемое функцией, когда все аргументы получают (вообще говоря, ненулевые) приращения. Точнее, пусть функция f определена в окрестности точки $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$. Приращение

$$\Delta f = f(x^{(0)}+\Delta x) - f(x^{(0)})$$

функции f в точке $x^{(0)}$, где

$$\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n),$$

$$x^{(0)}+\Delta x = (x_1^{(0)}+\Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)}+\Delta x_n),$$

наз. полным приращением, если оно рассматривается как функция n всевозможных приращений $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ аргументов $x_1, \ldots, x_n$, подчиненных только условию, что точка $x^{(0)}+\Delta x$ принадлежит области определения функции f. Наряду с П. п. функции рассматриваются частные приращения $\Delta_{x_k} f$ функции f в точке $x^{(0)}$ по переменной x_k, т. е. такие приращения Δf, для к-рых $\Delta x_j=0$, $j=1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$, k — фиксировано ($k=1, 2, \ldots, n$).
Л. Д. Кудрявцев.

ПОЛНОЕ ПРОСТРАНСТВО — термин, относящийся к *метрическому пространству*, *равномерному пространству*, *топологическому пространству*, *близости пространству*, пространству *топологической группы*, пространству с *симметрикой*, *псевдометрическому пространству*; возможны употребления этого термина и в других ситуациях. Все определения полноты основаны на одной общей идее, конкретное воплощение к-рой зависит от рассматриваемого типа пространств. Общее в определениях полноты состоит в требовании сходимости достаточно широкого класса последовательностей, направленностей или центрированных систем.

Метрич. пространство наз. полным, если каждая *фундаментальная последовательность* в нем сходится. В этом же смысле понимается полнота псевдометрич. пространства и пространства с симметрикой. Равномерное пространство наз. полным, если для каждой центрированной системы множеств в нем, содержащей сколь угодно мелкие по отношению к покрытиям из данной равномерной структуры множества, пересечение элементов этой системы не пусто. На топологич. группе есть естественные правая и левая равномерные структуры. Если пространство группы в одной из этих равномерных структур полно, то оно полно и в другой, и топологич. группа наз. тогда полной по Вейлю. Полнота по отношению к двусторонней равномерной структуре на группе, получаемой структурным объединением ее правой и левой структур, наз. полной по Райкову. Полнота метрич. пространства и полнота по Райкову могут быть истолкованы как абсолютная замкнутость по отношению к любым представлениям данного пространства, как подпространства пространства того же типа. В частности, метрич. пространство полно в том и только в том случае, если оно замкнуто в любом объемлющем его метрич. пространстве. Топологич. группа полна по Райкову, если и только если она замкнута в любой топологич. группе, содержащей ее в качестве топологич. подгруппы. Это связано с фундаментальной конструкцией пополнения: каждому метрич. пространству канонич. образом сопоставляется его пополнение — полное метрич. пространство, содержащее исходное пространство в качестве всюду плотного подпространства. Аналогично, каждая топологич. группа пополняема по Райкову, но не каждая топологич. группа пополняема по Вейлю.

Для топологич. пространств требование абсолютной замкнутости — т. е. замкнутости в любом объемлющем пространстве,— приводит, если ограничиться классом вполне регулярных хаусдорфовых пространств, к бикомпактным пространствам: такие и только такие пространства обладают этим свойством. Однако есть другой полезный и естественный подход к определению полноты топологич. пространства. Вполне регулярное хаусдорфово пространство наз. полным по Чеху, если оно представимо в виде пересечения счетного семейства открытых множеств в нек-ром своем бикомпактном хаусдорфовом расширении. Все такие пространства обладают свойством Бэра: пересечение счетного семейства непустых открытых всюду плотных множеств в них всегда не пусто. Метризуемое пространство полно по Чеху в том и только в том случае, если оно метризуемо полной метрикой (теорема Александрова — Хаусдорфа). Полнота по Чеху обеспечивает правильное поведение топологич. пространства во многих существенных отношениях. Так, полное по Чеху счетное пространство имеет счетную базу и метризуемо. Паракомпактность сохраняется при операции произведения, когда пространства полны по Чеху. Полнота по Чеху сохраняется *совершенными отображениями*, а в классе метризуемых пространств она сохраняется в сторону образа открытыми непрерывными отображениями.

Другой полезный подход к определению полноты вполне регулярного хаусдорфова пространства связан с рассмотрением максимальной равномерной структуры на нем: если такое равномерное пространство полно, то топологич. пространство наз. полным по Дьёдонне. Полны по Дьёдонне в точности те пространства, к-рые гомеоморфны замкнутым подпространствам топологич. произведений метризуемых пространств. В присутствии полноты по Дьёдонне в одно свойство сливаются псевдокомпактность, счетная компактность и бикомпактность. Все паракомпакты полны по Дьёдонне, в частности полны по Дьёдонне все метрич. пространства. Отсюда видно, что из полноты по Дьёдонне не следует наличие у пространства свойства Бэра. Специальный случай полноты по Дьёдонне — полнота топологич. пространства в смысле Хьюитта, означающая гомеоморфность пространства замкнутому подпространству топологич. произведения нек-рого семейства действительных прямых.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

ПОЛНОЕ РАВНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — равномерное пространство, в к-ром всякий *Коши фильтр* сходится. Важнейший пример П. р. п.— *полное метрическое пространство*. Замкнутое подпространство П. р. п. полно; полное подпространство отделимого равномерного пространства замкнуто. Произведение П. р. п. полно; обратно, если произведение непустых равномерных пространств полно, то и все пространства сомножители полны. Всякое равномерное пространство X равномерно непрерывно отображается на нек-рое плотное подпространство П. р. п. $\hat{X}$ (см. *Пополнение*).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968; [2] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981. *М. И. Войцеховский.*

ПОЛНОЕ РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — риманово пространство с функцией расстояния ρ, полное как метрич. пространство с метрикой ρ.

Пусть M — связное риманово пространство со связностью Леви-Чивита, тогда следующие три утверждения эквивалентны: а) M — полно; б) для каждой точки $p \in M$ *экспоненциальное отображение* $\exp_p$ определено на всем M_p (где M_p — касательное пространство к M в p); в) каждое ограниченное по отношению к расстоянию ρ замкнутое множество $A \subset M$ компактно (теорема Хопфа — Ринова). Следствия: любые две точки $p, q \in M$ П. р. п. можно соединить на M геодезич. длины $\rho(p, q)$; любая геодезическая неограниченно продолжаема.

Имеется [2] обобщение этой теоремы на случай пространства с несимметричной функцией расстояния.

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959. *М. И. Войцеховский.*

ПОЛНОЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — см. *Полное пространство.*

ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ФОРМУЛА — соотношение, позволяющее вычислять безусловную вероятность события через его условные вероятности относительно событий, образующих полную группу.

Точнее, пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ — события, причем $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$$

и $P(A_k) > 0$ для всех k. Тогда имеет место формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid A_k) P(A_k).$$

П. в. ф. верна и в том случае, когда число событий $A_1, A_2, \ldots$ бесконечно.

Имеет место П. в. ф. для математич. ожиданий. Пусть $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, $\mathsf{E}X$ — ее математич. ожидание, а $\mathsf{E}(X \mid A_k)$ — условные математич. ожидания относительно событий A_k, образующих полную группу. Тогда

$$\mathsf{E}X = \sum_k \mathsf{E}(X \mid A_k) P(A_k).$$

П. Г. Ушаков.

ПОЛНОТА в математической логике — свойство, близкое к понятию максимального элемента в частично упорядоченном множестве. Термин «П.» в математич. логике употребляется в контекстах вида: полное исчисление, полная теория (или полное множество аксиом), ω-полная теория, полная в смысле Поста система аксиом, полное вложение одной модели в другую, полная формула полной теории и др.

Одним из наиболее важных в гносеологич. отношении является понятие П. исчисления относительно данной семантики. Исчисление наз. полным, если всякая верная в семантич. смысле формула этого исчисления выводима в нем. При этом понятие выводимости должно быть эффективным, т. е. имеются набор правил и инструкция их применения, позволяющая строить выводы, причем есть алгоритм, отличающий выводы от невыводов. Понятие семантически верной формулы, наоборот, формулируется, как правило, с использованием неэффективных понятий, с помощью кванторов всеобщности по бесконечным и даже несчетным совокупностям. В теоремах о полноте классического и интуиционистского исчислений предикатов П. понимается в указанном смысле. В случае классич. исчисления семантически верными считаются те формулы языка узкого исчисления предикатов (УИП), к-рые истинны во всех моделях для рассматриваемого языка. В интуиционистском случае семантически верными считаются формулы, истинные во всех *Крипке моделях*. Понятие истинной в данной модели формулы также использует кванторы по бесконечным областям (если модель бесконечна) как в классическом, так и в интуиционистском случаях. Иногда рассматривают исчисления, не удовлетворяющие требованию эффективности.

С понятием П. исчисления тесно связано понятие полной теории. Теорией (точнее, элементарной теорией) наз. произвольное множество T замкнутых формул языка УИП. Непротиворечивая теория T наз. полной, если множество всех следствий из T в классич. исчислении предикатов является максимальным непротиворечивым множеством, т. е. добавление к T любой замкнутой невыводимой из T формулы позволяет вывести любую формулу. В этом определении не предполагается, что множество T задано эффективно, так что понятие вывода становится тоже неэффективным. П. теории T эквивалентна следующему условию: для всякой замкнутой формулы φ имеет место в точности одно из двух утверждений — либо φ выводима из T, либо $\neg\varphi$ выводима из T.

Если дана какая-то модель M языка УИП, то возникает семантич. понятие формулы, истинной в модели M. Теория T наз. полной относительно M, если в классич. исчислении предикатов, пополненном формулами из T, выводимы в точности все истинные в M формулы. Между понятиями П. теории и П. относительно M имеется следующая связь. Теория T полна тогда и только тогда, когда существует модель M, относительно к-рой она полна. Модель M наз. моделью теории T, если все формулы из T истинны в M. Достаточный признак П. теории: если все модели нек-рой мощности теории T изоморфны, то теория T полна. Обратное не всегда верно.

Понятие П. теории находит применение в вопросах разрешимости теорий из-за следующего свойства полных теорий: если теория T полна и множество T конечно или даже рекурсивно перечислимо, то существует алгоритм, распознающий по любой формуле φ выводима она или нет. Если не требовать эффективного задания множества T, то всякую теорию можно пополнить, т. е. расширить добавлением новых аксиом до полной. При наличии требования эффективности дело обстоит не так, как показывает теорема Гёделя о неполноте арифметич. исчислений. Теория T' наз. расширением теории T, если всякая формула, выводимая из T, будет выводима из T'. Пусть T — непротиворечивая рекурсивно перечислимая теория. Теория T наз. эффективно непополнимой, если по всякому рекурсивно перечислимому непротиворечивому расширению T' теории T можно эффективно найти формулу φ, формально неразрешимую в T', т. е. такую, что ни φ, ни $\neg\varphi$ не выводимы из T'. Теорема Гёделя о неполноте утверждает, что нек-рая конкретная арифметич. теория Q, имеющая конечное число аксиом, эффективно не пополнима. Из этой теоремы вытекает неполнота относительно стандартной модели натуральных чисел любого арифметич. исчисления, удовлетворяющего требованию эффективности.

Арифметич. теория T наз. ω-полной, если из того, что в T выводимы все формулы вида

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ \varphi(2),\ \ldots, \qquad (*)$$

следует выводимость в T формулы $\forall x\ \varphi(x)$. Из доказательства теоремы Гёделя о неполноте следует, что существуют теории, не являющиеся ω-полными, и даже такие, в к-рых выводима бесконечная серия формул $(*)$, а также формула $\exists x\ \neg\varphi(x)$, и тем не менее противоречия вывести нельзя. Такая теория наз. непротиворечивой.

Непротиворечивая система аксиом наз. полной в смысле Поста, если добавление к ней любой схемы аксиом либо не расширяет запаса выводимых формул, либо превращает систему в противоречивую. Напр., аксиоматика классич. исчисления высказываний полна в смысле Поста, а интуиционистского исчисления высказываний не полна.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч., Теория моделей, пер. с англ., М., 1977; [3] Шенфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; [4] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [5] Фейс Р., Модальная логика, пер. с англ., М., 1974 (Дополнения). *В. Н. Гришин.*

ПОЛНОТА в топологии — свойство пространства, заключающееся в сходимости последовательностей, направленностей или семейств множеств, подчиненных условию Коши или его обобщениям (см. *Полное пространство*). *А. В. Архангельский.*

ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ функции n переменных в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — то же самое, что *дифференциал* функции в этой точке. Термин «П. д.» употребляется с целью противопоставления его термину «частный дифференциал». Понятие П. д. функции n переменных обобщается на случай отображения открытых множеств линейных топологич. пространств в подобные же пространства (см. *Гато дифференциал*, *Фреше дифференциал*, *Дифференцирование отображения*).

Л. Д. Кудрявцев.

ПОЛНЫЙ ИНТЕГРАЛ — решение $u(x, a)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $a=(a_1, \ldots, a_n)$, дифференциального уравнения с частными производными 1-го порядка

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0, \quad (1)$$

к-рое зависит от n параметров $a_1, \ldots, a_n$ и в рассматриваемой области удовлетворяет условию

$$\det\left|u_{x_i a_k}\right| \neq 0.$$

Если $u(x, a)$ рассматривать как n-параметрическое семейство решений, то огибающая любого его $(n-1)$-параметрического подсемейства, выделяемого условием $a_i=\omega_i(t_1, \ldots, t_{n-1})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, является решением уравнения (1). При этом линии касания поверхностей, задаваемых полным интегралом, и огибающей являются характеристиками (1). С помощью П. и. можно описать решения характеристич. системы обыкновенных дифференциальных уравнений, отвечающей уравнению (1), и, следовательно, обратить метод Коши, к-рый сводит решение уравнения (1) к решению характеристич. системы. Этот подход применяется в аналитич. механике, где требуется найти решение канонич. системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \quad (2)$$

Эта система является характеристической для уравнения Якоби

$$u_t+H\left(x_1, \ldots, x_n, t, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0. \quad (3)$$

Если для уравнения (3) П. и. $u=u(x_1, \ldots, x_n, t, a_1, \ldots, a_n)+a_0$ известен, то $2n$ интегралов канонич. системы (2) даются равенствами $u_{a_i}=b_i$, $u_{x_i}=p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, где a_i, b_i — произвольные постоянные.

А. П. Солдатов.

ПОЛНЫЙ ОПЕРАТОР — обобщенный волновой оператор, т. е. частично изометрич. оператор, определяемый равенством

$$W_+(A_2, A_1)=s\text{-}\lim_{t\to\infty} e^{itA_2-itA_1}P_1,$$

где A_1 и A_2 — самосопряженные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H, P_1 — ортопроектор на $H_{1,ac}$, и такой, что

$$\{W_+(A_2, A_1)\,x \mid \| W_+(A_2, A_1)\,x \| = \| x \|\} = H_{2,ac}.$$

Здесь $H_{i,ac}$, $i=1, 2$,— совокупность всех спектрально абсолютно непрерывных относительно A_i элементов x, т. е. таких, что спектральная мера $\langle E_{A_i}(\mu)\,x, x\rangle$ множества M абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\mu(x)$.

Если оператор $W_+(A_2, A_1)$ (или аналогично определяемый оператор $W_-(A_2, A_1)$) существует и является полным, то $A_{i,ac}$ — части операторов A_i на $H_{i,ac}$ унитарно эквивалентны. Если A_1 и A_2 — самосопряженные операторы в H и $A_2 = A_1 + c\langle\cdot, f\rangle f$, где $f \in H$ и c вещественно, то $W_\pm(A_2, A_1)$ и $W_\pm(A_1, A_2)$ существуют и являются полными.

Лит.: [1] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, пер. с англ., М., 1972. *В. И. Соболев.*

ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ МЕТОД, метод дихотомии,— 1) Один из методов численного решения уравнений с одним неизвестным. Пусть имеется уравнение $f(x)=0$ с непрерывной на отрезке $[a, b]$ функцией $f(x)$, принимающей на концах отрезка значения разных знаков и имеющей внутри $[a, b]$ единственный корень x_*. Для приближенного нахождения x_* отрезок $[a, b]$ делят пополам и вычисляют значение $f(x_1)$ в средней точке $x_1=(a+b)/2$. Если $f(x_1)\neq 0$, то из двух отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ для последующего деления пополам выбирается тот, на концах к-рого значения функции различны по знаку. Возникающая в процессе такого дробления последовательность середин отрезков $x_1, x_2, \ldots$ сходится к корню x_* со скоростью геометрич. прогрессии:

$$|x_n - x_*| \leqslant (b-a)/2^n, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{1}$$

причем в рассматриваемом классе функций оценка (1) неулучшаема. В случае, когда функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ более одного корня, последовательность будет сходиться к одному из них.

2) Один из методов минимизации функций одного переменного. Пусть требуется найти минимум

$$f_* = \min_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$$

унимодальной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и указать точку x_*, в к-рой он достигается. Тогда отрезок $[a, b]$ делят пополам и вблизи его середины $\bar{x}_1=(a+b)/2$ вычисляют значения функции $f(x)$ в двух точках $x_1=\bar{x}_1-\varepsilon/2$ и $x_2=\bar{x}_1+\varepsilon/2$, где число $\varepsilon>0$, являющееся параметром метода, достаточно мало. Затем значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$ сравнивают и с учетом унимодальности функции $f(x)$ из двух отрезков $[a, x_2]$ и $[x_1, b]$ выбирают тот, к-рый заведомо содержит точку x_*. Так, если $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, это будет отрезок $[a, x_2]$, в противном случае — отрезок $[x_1, b]$. Выбранный отрезок вновь делят пополам, вблизи его середины $\bar{x}_2$ берут две точки $x_1 = \bar{x}_2-\varepsilon/2$ и $x_2=\bar{x}_2+\varepsilon/2$, сравнивают в них значения функции и т. д. В результате возникает последовательность срединных точек $\{\bar{x}_n\}$, для к-рой

$$|\bar{x}_n - x_*| \leqslant (b-a-\varepsilon)/2^n + \varepsilon/2, \quad n=1, 2, \ldots \tag{2}$$

За приближения к f_* принимают значения $f(\bar{x}_n)$ при достаточно больших n.

Название метода объясняется тем, что на каждом следующем шаге описанного алгоритма отрезок, содержащий точку минимума, становится примерно вдвое короче. На классе унимодальных функций П. д. м. не является наилучшим. Существуют более эффективные методы, позволяющие при том же количестве вычислений значений функции достигнуть лучшей по сравнению с (2) точности (см., напр., *Фибоначчи метод*).

Лит.: [1] Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, 3 изд., М., 1966; [2] Уайлд Д.-Дж., Методы поиска экстремума, пер. с англ., М., 1967.

М. М. Потапов.

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИИ — одно из двух слагаемых, сумма к-рых есть полное изменение, или *вариация функции*, на данном отрезке. Пусть $f(x)$ — функция действительного переменного, заданная на отрезке $[a, b]$ и принимающая конечные значения. Пусть $\Pi=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и

$$P_{\Pi}(f)=\sum_i^+ [f(x_i)-f(x_{i-1})],$$

где суммирование производится по тем номерам i, для к-рых разность $f(x_i)-f(x_{i-1})$ неотрицательна. Величина

$$P(f)\equiv P(f;\ [a, b])=\sup_{\Pi} P_{\Pi}(f)$$

наз. положительным изменением функции f на отрезке $[a, b]$. Всегда $0\leqslant P(f)\leqslant+\infty$. Понятие «П. и. ф.» введено К. Жорданом [1]. См. также *Отрицательная вариация функции*.

Лит.: [1] Jordan C., «C. r. Acad. sci.», 1881, t. 92, p. 228—230; [2] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.—Л., 1934.

Б. И. Голубов.

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ — вид корреляционной зависимости между случайными величинами, при к-рой условные средние значения одной из них увеличиваются при возрастании значений другой величины. О П. к. между величинами с *корреляции коэффициентом* ρ говорят в том случае, когда $\rho>0$. См. *Корреляция*.

А. В. Прохоров.

ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННАЯ ФОРМА — выражение вида

$$\sum_{i,\ k=1}^n a_{ik}x_ix_k,$$

где $a_{ik}=a_{ki}$, принимающее неотрицательные значения при любых действительных значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обращающееся в нуль лишь при $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Т. о., П. о. ф. есть *квадратичная форма* специального типа. Любая П. о. ф. приводится с помощью линейного преобразования к виду

$$\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Для того чтобы форма

$$\sum_{i,\ k=1}^n a_{ik}x_ix_k$$

была П. о. ф., необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\ \ldots,\ \Delta_n>0$, где

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{k1}a_{k2} & \ldots & a_{kk}\end{vmatrix}$$

В любой аффинной системе координат расстояние точки от начала координат выражается П. о. ф. от координат точки.

Форма

$$f=\sum_{i,\ k=1}^n a_{ik}x_i\overline{x}_k$$

такая, что $a_{ik}=\overline{a}_{ki}$ и $f\geqslant 0$ для всех значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $f=0$ лишь при $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ наз. эрмитовой П. о. ф.

С понятием П. о. ф. связаны также понятия: 1) положительно определенной матрицы $\|a_{ik}\|_1^n$ — такой матрицы, что $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k$ есть эрмитова П. о. ф.; 2) *положительно определенного ядра* — такой функции $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)\,\varphi(x)\,\overline{\varphi(y)}\,dx\,dy \geqslant 0$$

для любой функции $\varphi(x)$ с интегрируемым квадратом; 3) *положительно определенной функции* — такой функции $f(x)$, что ядро $K(x, y) = f(x-y)$ является положительно определенным. Класс непрерывных положительно определенных функций $f(x)$ с $f(0)=1$ совпадает с классом характеристических функций законов распределения случайных величин. *БСЭ-3.*

ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННАЯ ФУНКЦИЯ — комплекснозначная функция φ на группе G, удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{i,\ j=1}^{m} \alpha_i \bar{\alpha}_j \varphi(x_j^{-1} x_i) \geqslant 0$$

для любых наборов $x_1, \ldots, x_m \in G$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. Совокупность П. о. ф. на G образует конус в пространстве $M(G)$ всех ограниченных функций на G, замкнутый относительно операций умножения и комплексного сопряжения.

Причина выделения этого класса функций состоит в том, что именно П. о. ф. определяют *положительные функционалы* на групповой алгебре $\mathbb{C}G$ и унитарные представления группы G. Точнее, пусть $\varphi : G \to \mathbb{C}$ — произвольная функция и $l_\varphi : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$ — функционал, заданный равенством

$$l_\varphi\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) = \sum_{g \in G} \varphi(g)\,\alpha_g g,$$

тогда для положительности l_φ необходимо и достаточно, чтобы φ была П. о. ф. Далее, l_φ определяет $*$-представление алгебры $\mathbb{C}G$ в гильбертовом пространстве H_φ и, следовательно, унитарное представление π_φ группы G, причем $\varphi(g) = (\pi_\varphi(g)\xi, \xi)$ для нек-рого $\xi \in H_\varphi$. Обратно, для любого представления π и любого вектора $\xi \in H_\varphi$ функция $g \to (\pi(g)\xi, \xi)$ является П. о. ф.

Если G — топологич. группа, то представление π_φ слабо непрерывно тогда и только тогда, когда П. о. ф. непрерывна. Если G локально компактна, то непрерывные П. о. ф. взаимно однозначно соответствуют положительным функционалам на $L^1(G)$.

Для коммутативных локально компактных групп класс П. о. ф. совпадает с классом преобразований Фурье конечных положительных мер на двойственных группах. Имеется аналог этого утверждения для компактных групп: непрерывная функция φ на компактной группе G является П. о. ф. тогда и только тогда, когда ее преобразование Фурье $\hat{f}(b)$ принимает положительные (операторные) значения на каждом элементе двойственного объекта, т. е.

$$\int_G f(g)\,(\sigma(g)\,\xi, \xi)\,dg \geqslant 0$$

для всякого представления σ и всякого вектора $\xi \in \pi_\sigma$.

Лит.: [1] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 2, М., 1975; [2] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968.

В. С. Шульман.

ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОЕ ЯДРО — комплекснозначная функция K на $X \times X$, где X — произвольное множество, удовлетворяющая условию

$$\sum K(x_i, x_j)\,\lambda_i \bar{\lambda}_j \geqslant 0$$

для любых $i, j \in \mathbb{Z}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $x_i \in X$. Измеримые **П. о. я.** на пространстве с мерой (X, μ) соответствуют положительным *интегральным операторам* в $L^2(X, \mu)$; включение в схему такого соответствия произвольных положительных операторов требует введения обобщенных П. о. я., ассоциированных с оснащенными гильбертовыми пространствами (см. [1]).

Теория П. о. я. обобщает теорию *положительно определенных функций* на группе: для положительной определенности функции f на группе G необходимо и достаточно, чтобы функция $K(x, y)=f(xy^{-1})$ на $G\times G$ была П. о. я. В частности, на П. о. я. распространяются нек-рые результаты теории положительно определенных функций. Напр., теорема Бохнера о том, что всякая положительно определенная функция есть преобразование Фурье положительной меры (т. е. интегральная линейная комбинация характеров), обобщается следующим образом: всякое П. о. я. (обобщенное) допускает интегральное представление с помощью т. н. элементарных П. о. я. относительно данного дифференциального выражения [1].

Лит.: [1] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [2] Крейн М. Г., «Укр. матем. ж.», 1949, т. 1, № 4, с. 64—98; 1950, т. 2, № 1, с. 10—59. *В. С. Шульман.*

ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ОПЕРАТОР — симметричный оператор A в гильбертовом пространстве H такой, что

$$\inf \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} > 0$$

для любого $x\in H$, $x\neq 0$. Всякий П. о. с. является *положительным оператором.* *М. И. Войцеховский.*

ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ — обобщение понятия *дивизора* положительной степени на римановой поверхности. Голоморфное векторное расслоение E над комплексным пространством X наз. положительным (обозначается $E>0$), если в E существует такая эрмитова метрика h, что функция

$$v\longmapsto -h(v, v)$$

на E строго псевдовыпукла вне нулевого сечения. Если X — многообразие, то условие положительности выражается в терминах кривизны метрики h. А именно, *кривизны форме* метрики h в расслоении E отвечает эрмитова квадратичная форма Ω на X со значениями в расслоении $\operatorname{Herm} E$ эрмитовых эндоморфизмов расслоения E. Условие положительности эквивалентно тому, что $\Omega_x(u)$ — положительно определенный оператор в E_x для любого $x\in X$ и любого ненулевого $u\in T_{X,x}$.

В случае, когда E — расслоение на комплексные прямые над многообразием X, условие положительности равносильно положительной определенности матрицы

$$\left\| -\frac{\partial^2 \log h}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta}\right\|,$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — локальные координаты на X, $h>0$ — функция, задающая эрмитову метрику при локальной тривиализации расслоения. Если X компактно, то расслоение на комплексные прямые E над X положительно тогда и только тогда, когда *Чжэня класс* $c_1(E)$ содержит замкнутую форму вида

$$i\sum_{\alpha,\beta}\varphi_{\alpha\beta}\, dz_\alpha\wedge d\bar z_\beta,$$

где $\|\varphi_{\alpha\beta}\|$ — положительно определенная эрмитова матрица. В частности, если X — риманова поверхность, то расслоение над X, определяемое дивизором степени d, положительно тогда и только тогда, когда $d>0$. В случае, когда E — расслоение ранга >1 над многообразием X размерности >1, рассматривается также следующий более узкий класс П. р.: расслоение $E\to X$ наз. положительным в смысле Накано, если на E существует такая эрмитова метрика h, что эрмитова квадратичная форма H на расслоении

$E \otimes T_X$, заданная формулой

$$H_x(v \otimes u) = h_x(v, \Omega_x(u)\ v),$$

где $x \in X$, $v \in E_x$, $u \in T_{X,\ x}$, положительно определена. Примеры: касательное расслоение T_{P_n} к проективному пространству P^n положительно, но при $n > 1$ не является положительным в смысле Накано; расслоение на комплексные прямые над P^n, определяемое гиперплоскостью, положительно.

Любое факторрасслоение положительного векторного расслоения положительно. Если E', E'' — положительные (положительные в смысле Накано) расслоения, то $E' \oplus E''$ и $E' \otimes E''$ положительны (положительны в смысле Накано).

Понятие «П. р.» было введено в связи с *Кодаиры теоремой* об обращении в нуль для случая расслоений на комплексные прямые, а затем обобщено на произвольные расслоения. Несколько позже, в связи с вопросом о существовании вложения в проективное пространство, были выделены понятия слабо положительного и слабо отрицательного расслоений.

Голоморфное векторное расслоение E над компактным комплексным пространством X наз. слабо отрицательным, если его нулевое сечение обладает строго псевдовыпуклой окрестностью в E, т. е. является исключительным аналитич. множеством. Расслоение E наз. слабо положительным, если сопряженное расслоение E^* слабо отрицательно. В случае, когда X — риманова поверхность, понятия слабо положительного и П. р. совпадают [5]. В общем случае из положительности вытекает слабая положительность; примеров слабо положительных, но не положительных расслоений пока (1983) не известно.

Слабая положительность расслоения $E \to X$ равносильна каждому из следующих свойств: для любого когерентного аналитич. пучка $\mathcal{F}$ на X существует такое $m_0 > 0$, что пучок $\mathcal{F} \otimes S^m \mathcal{E}$ при $m \geqslant m_0$ порождается глобальными сечениями; для любого когерентного аналитич. пучка $\mathcal{F}$ на X существует такое $m \geqslant 0$, что

$$H^q(X, \mathcal{F} \otimes S^m \mathcal{E}) = 0$$

для всех $q \geqslant 1$ (см. [3], [4]). Через $\mathcal{E}$ здесь обозначается пучок ростков голоморфных сечений расслоения E. Слабо положительные расслоения аналогичны, таким образом, *обильным векторным расслоениям* из алгебраич. геометрии и иногда наз. обильными аналитическими расслоениями. Слабо положительное расслоение над пространством X естественным образом определяет вложение пространства X в многообразие Грассмана и тем самым в проективное пространство.

Понятия положительного, отрицательного, слабо положительного и слабо отрицательного расслоений естественным образом обобщаются также на случай линейных пространств над комплексным пространством X (см. *Векторное аналитическое расслоение*).

См. также *Отрицательное расслоение*.

Лит.: [1] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [2] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 93—171; [4] Schneider M., «Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg», 1978, Bd 47, S. 150—170; [5] Umemura H., «Nagoya Math. J.», 1973, v. 52, p. 97—128.

А. Л. Онищик.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ КОНУС — подмножество K действительного векторного пространства E, удовлетворяющее следующим условиям:

1) если $x, y \in K$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, то $\alpha x + \beta y \in K$;

2) $K \cap (-K) = 0$.

П. к. определяет полуупорядочение в E: по определению, $x \prec y$, если $y - x \in K$.

Пусть E — банахово пространство. Если E — замкнутый воспроизводящий П. к. (т. е. такой П. к., каждый вектор $z \in E$ к-рого представим в виде $z=x-y$, где x, $y \in K$), то $\|x\|+\|y\| \leq M\|z\|$, M не зависит от z. Телесный, т. е. имеющий внутренние точки, П. к. является воспроизводящим.

Пусть E^* — сопряженное пространство к банахову пространству E. Если $K \subset E$ — воспроизводящий П. к., то множество $K^* \subset E^*$ положительных (относительно П. к.) функционалов (т. е. таких f, что $f(x) \geqslant 0$ при $x \in K$) является П. к. (это т. н. сопряженный конус). П. к. K восстанавливается на K^*, а именно:

$$K=\{x \in E \mid f(x) \geqslant 0 \text{ при } f \in K^*\}.$$

Если K — телесный П. к., то его внутренность совпадает с

$$\{x \in E \mid f(x)>0 \text{ при } f \in K^*,\ f \neq 0\}.$$

Конус в банаховом пространстве E наз. нормальным, если найдется такое $\delta>0$, что $\|x+y\| \geqslant \delta(\|u\|+\|y\|)$ при x, $y \in K$. П. к. нормален тогда и только тогда, когда сопряженный конус K^* является воспроизводящим. Если K — воспроизводящий конус, то сопряженный конус K^* нормален.

Конус K наз. миниэдральным, если каждая пара элементов x, $y \in E$ имеет точную верхнюю грань $z=\sup(x, y)$ (то есть $z \geqslant x$, y и для любого $z_1 \in E$ из $z_1 \geqslant x$, y вытекает $z_1 \geqslant z$). Если П. к. правилен и миниэдрален, то всякое счетное ограниченное подмножество имеет точную верхнюю грань.

Лит.: [1] Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962.

В. И. Ломоносов.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР, положительное отображение,— 1) П. о. в гильбертовом пространстве — линейный оператор A, для к-рого соответствующая квадратичная форма (Ax, x) неотрицательна. П. о. необходимо симметричен и допускает самосопряженное расширение, также являющееся П. о. Самосопряженный оператор A является П. о. тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих условий: а) $A=B^*B$, где B — замкнутый оператор; б) $A=B^2$, где B — самосопряженный оператор; в) спектр A содержится в $(0, \infty)$. Совокупность ограниченных П. о. в гильбертовом пространстве образует конус в алгебре всех ограниченных операторов.

2) П. о. в пространстве с конусом — отображение векторного пространства X в себя, сохраняющее выделенный в X конус K. Интегральные операторы с положительными ядрами в различных функциональных пространствах с выделенными конусами положительных функций являются линейными П. о. При нек-рых дополнительных условиях на геометрию конуса K и действие П. о. A удается установить существование A-собственных векторов из X (соответствующие собственные значения наз. позитивными, или ведущими, они превосходят абсолютные величины всех остальных собственных значений). Напр., доказано (см. [3]), что если A — вполне непрерывный П. о. с ненулевым спектром, то его *спектральный радиус* является позитивным собственным значением. Условие компактности можно заменить условиями на поведение резольвенты (см. [4]).

В случае нелинейных П. о. исследуется вопрос о существовании неподвижной точки оператора (т. е. решения уравнения $Ax=x$) и о возможности нахождения этой точки как предела определенных рекуррентных последователей.

Нек-рые результаты теории П. о. могут быть перенесены на операторы, оставляющие инвариантными выделенные подмножества более общей природы, чем конусы (см. [5]).

3) П. о. в инволютивной алгебре ($*$-алгебре) — линейное отображение $*$-алгебры A в инволютивную алгебру B, переводящее положительные элементы в положительные. Наиболее изучены П. о. *C^*-алгебр* (являющиеся, поскольку положительные элементы C^*-алгебры образуют конус, частным случаем П. о. пространств с конусом). Имеет место неравенство Шварца для П. о. C^*-алгебр: $\varphi(a^2)\geqslant(\varphi(a))^2$, если $a=a^*$. Найдены крайние точки множества унитальных (т. е. сохраняющих единичный элемент) П. о. Изучались вполне непрерывные положительные операторы (в. н. п. о.), то есть линейные отображения $\varphi: A\rightarrow B$, для к-рых положительны все отображения

$$(a_{ij})_{i,\,j=1}\longrightarrow(\varphi(a_{ij}))_{i,\,j=1}^n$$

матричных C^*-алгебр $M(A)$ в $M(B)$. Оказалось, что для в. н. п. о. справедлив аналог теоремы о продолжении положительного функционала: в. н. п. о. C^*-алгебры A в нек-рую алгебру Неймана может быть продолжен до в. н. п. о. любой C^*-алгебры, содержащей A. Если одна из C^*-алгебр A, B коммутативна (и только в этом случае), то всякий П. о. является в. н. п. о.

4) П. о. в банаховом пространстве E — линейный оператор A такой, что $AK\subset K$, где K — *положительный конус* в E. Собственный вектор A, лежащий в K, наз. положительным, а соответствующее собственное значение — позитивным. Если K — воспроизводящий конус, A — вполне непрерывный положительный оператор и $A^pu\geqslant\alpha u$ для нек-рого вектора u, не принадлежащего конусу $-K$, натурального p и $\alpha>0$, то спектральный радиус r_A оператора A является позитивным собственным значением A, причем $r_A\geqslant\alpha^{1/p}$ (теорема Крейна — Рутмана).

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [2] Sherman S., «Amer. J. Math.», 1951, v. 73, № 1, p. 227—32; [3] Крейн М. Г., Рутман М. А., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1, с. 3—95; [4] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [5] Красносельский М. А., Соболев А. В., «Докл. АН СССР», 1975, т. 225, № 6, с. 1256—59; [6] Красносельский М. А. [и др.], Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966; [7] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [8] Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962.

В. С. Шульман, В. И. Ломоносов.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ на алгебре с инволюцией $*$ — линейный функционал f на $*$-алгебре A, удовлетворяющий условию $f(x^*x)\geqslant 0$ для всех $x\in A$. Важность П. ф. и причина их введения заключается, в частности, в том, что они используются в так наз. ГНС-конструкции — одного из основных методов исследования структуры банаховых $*$-алгебр. На ней (и на ее обобщениях, напр. на веса на C^*-алгебрах) основано доказательство теоремы абстрактной характеризации равномерно замкнутых $*$-алгебр операторов в гильбертовом пространстве и теоремы о полноте системы неприводимых унитарных представлений локально компактной группы.

ГНС-конструкция есть способ построения по произвольному П. ф. f на $*$-алгебре A с единицей такого $*$-представления π_f алгебры A в гильбертовом пространстве H_f, что $f(x)=\langle\pi_f(x)\ \xi,\ \xi\rangle$ для всех $x\in A$, где $\xi\in H_f$ — нек-рый циклич. вектор, к-рый состоит в следующем. В A определяется полускалярное произведение $\langle x,\ y\rangle=f(y^*x)$; соответствующим нейтральным подпространством является левый идеал $N_f=\{x\in\in A: f(x^*x)=0\}$, поэтому в предгильбертовом пространстве A/N_f корректно определены операторы левого умножения L_a на элементы $a\in A$ $(L_a(x+N_f)=ax+N_f)$;

операторы L_a непрерывны и продолжаются до непрерывных операторов $\overline{L}_a$ в пополнении H_f пространства A/H_f. Отображение π_f, переводящее $a \in A$ в $\overline{L}_a$, и есть требуемое представление, причем в качестве ξ можно взять образ единицы при суперпозиции канонич. отображений $A \to A/H_f \to H_f$.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1948, т. 12, с. 445—80; [2] Segal I., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 53; [3] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968. *В. С. Шульман.*

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ алгебры с инволюцией $*$ — элемент x $*$-алгебры A, допускающий представление $x=y^*y$, где $y \in A$. Множество $P(A)$ П. э. банаховой $*$-алгебры A содержит множество $Q(A)$ квадратов эрмитовых элементов, содержащее, в свою очередь, множество $P_0(A)^+$ всех эрмитовых элементов с положительным спектром, но, вообще говоря, не содержит множества A^+ всех эрмитовых элементов с неотрицательным спектром. Условием $P(A) \subset A^+$ определяется класс вполне симметричных (или эрмитовых) банаховых $*$-алгебр; для того чтобы $*$-алгебра была вполне симметричной, необходимо и достаточно, чтобы все ее эрмитовы элементы имели действительный спектр. Равенство $P(A) = A^+$ имеет место тогда и только тогда, когда A есть C^*-алгебра. В этом случае $P(A)$ — воспроизводящий конус в пространстве всех эрмитовых элементов алгебры A.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [2] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [3] Райков Д. А., «Докл. АН СССР», 1946, т. 54, № 5, с. 391—94; [4] Pták V., «Bull. Lond. Math. Soc.», 1970, v. 2, p. 327—34; [5] Palmer I., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1972, v. 78, p. 522—24.
В. С. Шульман.

ПОЛОС МЕТОД — метод в теории функций комплексного переменного, опирающийся на оценки, связывающие длины нек-рого специального семейства кривых и площадь области, заполняемой этим семейством. В основе П. м. лежат леммы Грётша (см. [1]). Одна из них формулируется следующим образом.

Пусть в прямоугольнике со сторонами длины A и B имеется конечное число не налегающих друг на друга односвязных областей S_k, $k=1, \ldots, n$, с жордановыми границами, содержащими на сторонах длины A по отрезку, к-рые не вырождаются в точки (области S_k образуют полосы, идущие от одной стороны длины A к другой). Если область S_k конформно отображается на прямоугольник со сторонами длины a_k и b_k так, что упомянутые отрезки переходят в стороны длины a_k, то

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \leqslant \frac{A}{B},$$

причем равенство достигается только в том случае, если S_k, $k=1, \ldots, n$,— прямоугольники со сторонами длины a_k' и B и $\sum_{k=1}^{n} a_k' = A$.

В качестве другой леммы служит *Грётша принцип*. Леммы Грётша верны и для бесконечного множества подобластей.

П. м. как метод теории однолистных конформных и квазиконформных отображений был впервые использован Х. Грётшем [1], к-рый с помощью этого метода систематически исследовал и решил большое количество экстремальных задач для однолистных функций, заданных в конечносвязных и бесконечносвязных областях (см. [3]; о других применениях П. м. см. [2], гл. 4, § 6).

П. м. лежит в основе *экстремальной метрики метода*.

Лит.: [1] Grötzsch H., «Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-physische. Kl.», 1928, Bd 80, H. 6, S. 367—76; H. 7, S. 503—07; 1929, Bd 81, H. 1, S. 38—48; H. 2, S. 51—87; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962. *Е. Г. Голузина.*

ПОЛОС МЕТОД — метод приближенного решения одномерных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, основанный на специальном способе замены ядра на вырожденное, на получении резольвенты вырожденного уравнения и последующем уточнении приближенного решения с помощью быстросходящегося итеративного алгоритма.

Пусть исходное интегральное уравнение записано в виде

$$\varphi(x)-\lambda \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds=f(x). \qquad (1)$$

Для построения вырожденного ядра в П. м. квадрат

$$\{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant s \leqslant b\}$$

разбивается на N полос

$$\left\{\frac{b-a}{N}\, i \leqslant x \leqslant \frac{b-a}{N}\,(i+1),\ a \leqslant s \leqslant b\right\},$$

$$i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

В каждой полосе (i) функция $K(x, s)$ приближается в среднем квадратическом или равномерно функцией вида

$$K_i(x, s)=C_i(x)+P_i(x)\,Q_i(s).$$

В простейшем случае

$$K_i(x, s)=K(\xi_i, s),\ \xi_i \in \left[\frac{b-a}{N}\, i,\ \frac{b-a}{N}\,(i+1)\right]$$

При помощи функции $K_i(x, s)$ можно образовать вырожденное ядро:

$$K_N(x, s)=\sum_{i=0}^{N-1} \hat{C}_i(x)+\hat{P}_i(x)\,Q_i(s), \qquad (2)$$

$$\hat{P}_i(x)=\begin{cases} P_i(x), & x \in \left[\frac{b-a}{N}\, i,\ \frac{b-a}{N}\,(i+1)\right] \\ 0, & x \notin \left[\frac{b-a}{N}\, i,\ \frac{b-a}{N}\,(i+1)\right], \end{cases}$$

$$\hat{C}_i(x)=\begin{cases} C_i(x), & x \in \left[\frac{b-a}{N}\, i,\ \frac{b-a}{N}\,(i-1)\right] \\ 0, & x \notin \left[\frac{b-a}{N}\, i,\ \frac{b-a}{N}\,(i+1)\right]. \end{cases}$$

Решение уравнения с вырожденным ядром (2) аппроксимирует решение (1), вообще говоря, тем лучше, чем больше число полос N и чем лучше аппроксимация $K(x, s)$ в каждой полосе. Приближенное решение $\varphi_0(x)$ можно еще улучшить с помощью итеративного алгоритма:

$$\varphi_k(x)-\lambda \int_a^b K_N(x, s)\,\varphi_k(s)\,ds=$$

$$=f(x)+\lambda \int_a^b \left[K(x, s)-K_N(x, s)\right]\varphi_{k-1}(s)\,ds. \qquad (3)$$

Итерация (3) сходится к решению (1) в среднем квадратическом или равномерно при условии достаточной близости ядер $K(x, s)$ и $K_N(x, s)$.

Лит.: [1] Положий Г. Н., Чаленко П. И., «Доповіді АН УРСР», 1962, № 4, с. 427—31.

А. Б. Бакушинский.

ПОЛОСА — совокупность точек плоскости, лежащих между двумя параллельными прямыми этой плоскости. Координаты точек x, y полосы удовлетворяют неравенствам $C_1<Ax+By<C_2$, где A, B, C_1, C_2 — нек-рые постоянные, причем A и B одновременно не равны нулю. Преобразование $w=e^z$ конформно отображает полосу $0<y<\pi$ комплексной плоскости $z=x+iy$ на верхнюю полуплоскость комплексной плоскости w. *БСЭ-3.*

ПОЛОСА, поверхностная полоса (в узком смысле),— однопараметрическое семейство касательных плоскостей к поверхности. В общем смысле полосой наз. объединение кривой l и вектора $\boldsymbol{m}$, ортогонального в каждой точке кривой ее касательному вектору. Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_3$ кривая l задана уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, где s — естественный параметр кривой, $\boldsymbol{r}(s)$ — радиус-вектор точки кривой. Вдоль l задается вектор-функция $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}(s)$, где $\boldsymbol{m}(s)$ — единичный вектор, ортогональный касательному вектору $\boldsymbol{t}=d\boldsymbol{r}/ds$ в соответствующих точках кривой. В этом случае говорят, что вдоль кривой l задана поверхностная полоса $\Phi=\{l, \boldsymbol{m}\}$ с нормалью $\boldsymbol{m}(s)$. Вектор $\boldsymbol{\tau}=[\boldsymbol{m}, \boldsymbol{t}]$ наз. вектором геодезической нормали полосы Φ; вместе с векторами $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{m}$ вектор $\boldsymbol{\tau}$ образует трехгранник Френе для П. Относительно подвижного трехгранника Френе для П. записываются деривационные формулы Френе:

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=k_g\boldsymbol{\tau}+k_n\boldsymbol{m};\quad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=-k_g\boldsymbol{t}+\varkappa_g\boldsymbol{m};$$
$$\frac{d\boldsymbol{m}}{ds}=-k_n\boldsymbol{t}+\varkappa_g\boldsymbol{\tau},$$

где k_g (геодезич. кривизна П.), $k_n(s)$ (нормальная кривизна П.), $\varkappa_g(s)$ — (геодезич. кручение П.) — скалярные функции параметра s.

Если в каждой точке кривой l вектор $\boldsymbol{m}$ коллинеарен вектору главной нормали кривой l, то $k_g=0$ и в этом случае П. наз. геодезической полосой. Если в каждой точке вектор $\boldsymbol{m}$ коллинеарен бинормали кривой, то в этом случае $k_n=0$, а П. наз. асимптотической полосой.

Лит.: [1] Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957. *Л. А. Сидоров.*

ПОЛУГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ, геодезические нормальные координаты,— координаты $x^1, \ldots, x^n$ в n-мерном римановом пространстве, характеризующиеся тем, что координатные линии, соответствующие x^1, являются геодезич. линиями, на к-рых x^1 играет роль нормального параметра, а координатные поверхности $x^1=\text{const}$ — ортогональны этим геодезическим. В П. к. квадрат линейного элемента имеет вид

$$ds^2=(dx^1)^2+\sum_{i,\ j=2}^{n} g_{ij}\,dx^i\,dx^j.$$

П. к. можно ввести в достаточно малой окрестности любой точки произвольного риманова пространства. В двумерных римановых пространствах в ряде случаев (напр., для регулярных поверхностей строго отрицательной кривизны) возможно введение П. к. в целом.

В двумерном случае квадрат линейного элемента в П. к. принято записывать в виде

$$ds^2=du^2+B^2(u,\ v)\,dv^2.$$

Полная (гауссова) кривизна может быть найдена по формуле:

$$K=-\frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}.$$

При изучении двумерных римановых многообразий знакоопределенной кривизны важную роль играют специальные П. к.— геодезические полярные координаты (r, φ). В этом случае все координатные геодезич. линии $\varphi=\text{const}$ пересекаются в одной точке (полюсе), а φ является углом между координатными линиями $v=0$ и $\varphi=\text{const}$. Линия $r=\text{const}$ наз. геодезической окружностью. Квадрат линейного элемента в окрестности полюса в геодезических полярных координатах имеет вид

$$ds^2=dr^2+r^2\left\{1-\frac{K_0}{3}r^2-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{6}(K_1\cos\varphi+K_2\sin\varphi)\,r^3+o(r^3)\right\}d\varphi^2,$$

где K_0 — полная (гауссова) кривизна в точке P, K_1 — производная от K по r в точке P в направлении геодезической $\varphi=0$, K_2 — такая же производная в направлении геодезической $\varphi=\pi/2$.

При определении П. к. в псевдоримановом пространстве часто требуется, чтобы геодезические, соответствующие x^1, не были изотропными. В этом случае квадрат линейного элемента имеет вид

$$ds^2=\pm (dx^1)^2+\sum\nolimits_{i,\ j=2}^{n} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

(знак $+$ или — выбирается в зависимости от знака квадрата интервала касательного вектора к линии x^1).

Д. Д. Соколов.

ПОЛУГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — проективное n-пространство, в к-ром метрика определяется заданным абсолютом, состоящим из совокупности действительного конуса 2-го порядка Q_0 индекса l_0 с $(n-m_0-1)$-плоской вершиной T_0, $(n-m_0-2)$-действительного конуса Q_1 индекса l_1 с $(n-m_1-1)$-плоской вершиной T_1 в $(n-m_0-1)$-плоскости T_0, $(n-m_1-2)$-действительного конуса Q_2 индекса l_2 с $(n-m_2-1)$-плоской вершиной T_2 в $(n-m_1-1)$-плоскости T_1 и т. д. до $(n-m_{r-2}-2)$-действительного конуса Q_{r-1} индекса l_{r-1} с $(n-m_{r-1}-1)$-плоской вершиной T_{r-1} и невырожденной действительной $(n-m_{r-1}-2)$-квадрикой Q_r индекса l_r в плоскости T_{r-1}, $0\leqslant m_0<m_1<\ldots<m_{r-1}<n$. Такое пространство наз. П. п. индексов $l_0, l_1, \ldots, l_r$ и обозначается ${}^{l_0 l_1\ldots l_r}S_n^{m_0 m_1\ldots m_{r-1}}$.

В случае, когда конус Q_0 является парой слившихся плоскостей, совпадающих с плоскостью T_0 (при $m_0=0$), П. п. с несобственной плоскостью T_0 наз. *полуевклидовым пространством*:

$${}^{l_1 l_2\ldots l_r}R_n^{m_1 m_2\ldots m_{r-1}}.$$

Расстояние между точками X и Y определяется в зависимости от расположения прямой XY относительно плоскостей $T_0, T_1, \ldots, T_{r-1}$. Если, в частности, прямая XY не пересекает плоскость T_0, то расстояние между точками X и Y определяется с помощью скалярного произведения аналогично соответствующему определению в *квазигиперболическом пространстве*. Если же прямая XY пересекает плоскость T_0, но не пересекает плоскость T_1 или пересекает плоскость T_{a-1}, но не пересекает плоскость T_a, то расстояние между точками определяется с помощью скалярного квадрата разности соответствующих векторов точек X и Y.

В зависимости от расположения относительно плоскостей $T_0, T_1, \ldots, T_a, \ldots$ абсолюта различаются четыре типа прямых различных порядков: эллиптические, гиперболические, изотропные и параболические.

Углы между плоскостями в П. п. определяются по аналогии с определением углов между плоскостями в квазигиперболич. пространстве, т. е. с использованием расстояний в двойственном пространстве.

Проективная метрика П. п. является метрикой наиболее общего вида. Частным случаем метрики П. п., напр., является метрика квазигиперболич. пространства. В частности, 2-плоскость ${}^{01}S_2^0$ совпадает с псевдоевклидовой ${}^1R_2$, плоскость ${}^{10}S_2^1$— с копсевдоевклидовой ${}^1\overset{*}{R}_2$; 3-пространства ${}^{11}S_3^1$ и ${}^{10}S_3^1$ совпадают с квазигиперболическим 3-пространством, 3-пространство ${}^{10}S_3^2$— с копсевдоевклидовым ${}^1\overset{*}{R}_3$ и т. д.; 3-пространство ${}^{100}S_3^{12}$ двойственно псевдогалилееву пространству ${}^1\Gamma_3$, оно наз. копсевдогалилеевым пространством, его абсолют состоит из пары действительных плоскостей (конус Q_0) и точки T_1 на прямой T_0 пересечения этих плоскостей.

Движениями П. п. наз. его коллинеации, переводящие абсолют в себя. При $m_a = n - m_{r-a-1} - 1$ и при $l_a = l_{r-a}$ П. п. двойственно самому себе. В таком пространстве определяются кодвижения, определения к-рых аналогичны определению кодвижения в квазигиперболич. пространстве, двойственном самому себе. Движения, движения и кодвижения образуют группы, являющиеся группами Ли. Движения (как и кодвижения) П. п. описываются псевдоортогональными операторами индексов, определенных индексами пространства.

П. п. является *полуримановым пространством*.

Лит.: [1] Sommerville D. M. Y., «Proc. Edinburgh Math. Soc.», 1910, v. 28, p. 25—41; [2] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Л. А. Сидоров.*

ПОЛУГРУПП МНОГООБРАЗИЕ — класс полугрупп, задаваемый системой тождеств (см. *Алгебраических систем многообразие*). Всякое П. м. будет либо периодическим, т. е. состоит из периодич. полугрупп, либо надкоммутативным, т. е. содержит многообразие всех коммутативных полугрупп. Для классификации ряда свойств П. м. выделяются нек-рые типы тождеств. Тождество $u=v$ наз. нормальным (а также регулярным, однородным), если множества переменных, входящих в слова u и v, совпадают, и аномальным — в противном случае. Тождество $u=v$ наз. уравновешенным, если каждая переменная в u и v встречается одно и то же число раз. Частный случай уравновешенного тождества — перестановочное тождество — если $u=x_1 \ldots x_m$ и v получено из u перестановкой переменных. П. м. надкоммутативно тогда и только тогда, когда все его тождества уравновешенные. Базис тождеств П. м. $\mathfrak{M}$ наз. неприводимым, если любое его собственное подмножество задает многообразие, отличное от $\mathfrak{M}$. Всякое надкоммутативное П. м. имеет неприводимый базис тождеств. Существуют П. м., не имеющие неприводимый базис тождеств. Примеры конечно базируемых П. м.: любое многообразие коммутативных полугрупп, любое периодическое П. м. с перестановочным тождеством, любое П. м., заданное перестановочными тождествами. Любая полугруппа с числом элементов $\leqslant 5$ имеет конечный базис тождеств, но существует 6-элементная полугруппа, не имеющая конечного базиса тождеств.

Следующие условия для П. м. $\mathfrak{M}$ эквивалентны $\mathfrak{M}$ задано нормальными тождествами; все тождества $\mathfrak{M}$ нормальны; $\mathfrak{M}$ содержит двухэлементную полурешетку. П. м. $\mathfrak{M}$ имеет среди своих тождеств аномальное тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ периодическое и состоит из архимедовых полугрупп.

Минимальные П. м. исчерпываются многообразиями всех: 1) *полурешеток*, 2) *полугрупп левых нулей*, 3) полугрупп правых нулей (см. *Идемпотентов полугруппа*), 4) полугрупп с нулевым умножением, 5) абелевых групп экспоненты p при любом простом p. В решетке всех П. м. всякий неединичный элемент имеет покрывающий его элемент; единичный элемент не может быть равен объединению конечного числа неединичных элементов. Решетка всех П. м. не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству и имеет мощность континуум. Эту же мощность имеют подрешетка всех многообразий нильполугрупп с тождеством $x^2=0$ и подрешетка всех надкоммутативных многообразий. Для нек-рых П. м. $\mathfrak{M}$ получены явные описания решетки их подмногообразий $L(\mathfrak{M})$; описаны П. м. $\mathfrak{M}$ с нек-рыми ограничениями на решетку $L(\mathfrak{M})$.

П. м. наз. малым, если $L(\mathfrak{M})$ конечна. П. м. $\mathfrak{M}$ наз. многообразием конечного индекса, если ступени нильпотентности нильпотентных полугрупп из $\mathfrak{M}$ ограничены в совокупности (это условие эквивалентно тому, что каждая нильполугруппа из $\mathfrak{M}$ нильпотентна, а также тому, что $\mathfrak{M}$ не содержит многообразия всех коммутативных нильполугрупп с тождеством $x^2=0$). Всякое малое П. м. имеет конечный индекс.

Для периодического П. м. $\mathfrak{M}$ следующие условия эквивалентны [4]: $\mathfrak{M}$ состоит из связок архимедовых полугрупп; в любой полугруппе из $\mathfrak{M}$ каждый класс кручения есть подполугруппа; $\mathfrak{M}$ не содержит полугруппы Брандта B_2 (см. *Периодическая полугруппа*). Этим условиям удовлетворяют П. м. $\mathfrak{M}$ с модулярной решеткой $L(\mathfrak{M})$ и П. м. конечного индекса (в частности, малые П. м.). Малое П. м. **локально конечно** (т. е. состоит из локально конечных полугрупп) тогда и только тогда, когда локально конечно многообразие всех групп из $\mathfrak{M}$; малое локально конечное многообразие групп — это в точности кроссово многообразие (см. *Групп многообразие*). О других локально конечных П. м. см. *Локально конечная полугруппа*. Описаны П. м., состоящие из финитно аппроксимируемых полугрупп [3].

Множество всех П. м. относительно мальцевского умножения образует частичный группоид G. Известны все идемпотенты в G, их в точности 9. Множество всех П. м., задаваемых системами тождеств вида $w=0$, образует максимальный группоид в G.

Изучаются также П. м. полугрупп с дополнительными сигнатурными операциями: многообразия моноидов (с сигнатурной единицей), многообразия полугрупп с сигнатурным нулем, многообразия инверсных полугрупп и др.

Лит.: [1] Evans T., «Semigroup forum», 1971, v. 2, № 1, p. 1—43; [2] Айзенштат А. Я., Богута Б. К., в сб.: Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов, Л., 1979, с. 3—46; [3] Голубов Э. А., Сапир М. В., «Докл. АН СССР», 1979, т. 247, № 5, с. 1037—41; [4] Сапир М. В., Суханов Е. В., «Изв. вузов. Математика», 1981, № 4, с. 48—55.

Л. Н. Шеврин.

ПОЛУГРУППА — множество с одной бинарной операцией, удовлетворяющей закону *ассоциативности*. Понятие П. есть обобщение понятия *группы*: из аксиом группы остается лишь одна — ассоциативность; этим объясняется и термин «П.». П. называют иногда **моноидами**, но последний термин употребляется чаще всего для П. с сигнатурной единицей (т. е. с нульарной операцией, отмечающей единицу).

Теория П. принадлежит к числу сравнительно молодых областей алгебры. Первые исследования, посвященные П., относятся к 20-м гг. 20 в. и связаны с именем А. К. Сушкевича. Он, в частности, определил строение ядра (наименьшего идеала) конечной П., т. е. фактически строение конечной П. без собственных идеалов. Этот результат позднее был обобщен Д. Рисом (D. Rees) на произвольные *вполне простые полугруппы* и усовершенствован посредством введения понятия матрицы над группой (см. *Рисовская полугруппа матричного типа*). Теорема Риса, к-рую можно считать нек-рым аналогом теоремы Веддерберна о простых алгебрах, принадлежит к числу основных фактов теории П. Другие ранние исследования по теории П. принадлежат А. Клиффорду (A. Clifford), одним из первых значительных достижений к-рого было введение и изучение П., покрываемых группами; эти П. наз. теперь вполне регулярными, или *клиффордовыми полугруппами*. К кон. 50-х гг. 20 в. теория П. сформировалась в самостоятельную ветвь современной алгебры с богатой проблематикой, разнообразными методами и тесными связями с многими областями математики как собственно алгебраическими (в первую очередь, с теорией групп и теорией колец), так и другими, напр. функциональным анализом (П. операторов в банаховых пространствах), дифференциальной геометрией (П. частичных преобразований), алгебраич. теорией автоматов (П. автоматов).

Примеры П. чрезвычайно многочисленны. Это — различные множества чисел вместе с операцией сложения или умножения, замкнутые относительно рассматриваемой операции, П. матриц относительно умножения, П. функций относительно «поточечного» умножения $*$, задаваемого формулой $(f*g)(x)=f(x)g(x)$, П. множеств относительно операции пересечения или объединения и т. д. В общей теории и нек-рых приложениях важен следующий пример П. Пусть X — произвольное множество. На множестве F_X всех конечных последовательностей элементов из X определяется операция, задаваемая формулой

$$(x_1, \ldots, x_n) * (y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Тогда F_X относительно операции $*$ является П.; она наз. свободной П. на множестве X. Всякая П. есть гомоморфный образ нек-рой свободной.

Всякая совокупность преобразований произвольного множества M, замкнутая относительно операции композиции (последовательного выполнения, наз. также суперпозицией), будет П. относительно этой операции; такова, в частности, совокупность всех преобразований множества M, наз. симметрической полугруппой на множестве M. Многие важные совокупности преобразований оказываются П., причем часто они не являются группами. С другой стороны, всякая П. изоморфна нек-рой П. преобразований. Таким образом, именно понятие П. оказывается наиболее подходящим для изучения в самом общем виде преобразований, и в большой степени через рассмотрение преобразований осуществляются связи теории П. с другими областями математики. При этом очень часто П. возникают как П. эндоморфизмов (см. *Эндоморфизмов полугруппа*) тех или иных рассматриваемых систем: пространств, алгебр, графов и т. д. К П. приводит также рассмотрение частичных преобразований и бинарных отношений относительно операции умножения.

Как и в других алгебраич. теориях, одной из главных задач теории П. является классификация всевозможных П., описание их строения. Это осуществляется прежде всего наложением на рассматриваемые П. различных ограничений и выделением тем самым различных типов П. Ограничения могут иметь разную природу. П. может удовлетворять фиксированной системе тождеств (типичные примеры — коммутативные П., П. идемпотентов) или другим условиям, выражаемым формулой узкого исчисления предикатов (примеры — П. с законом сокращения, регулярные П.). Закон сокращения и регулярность представляют собой примеры ограничений, носящих так или иначе характер ослабления свойств группы; введение подобных условий было, пожалуй, особенно популярно на первых порах развития теории П. (среди выделенных здесь типов, наиболее близких к группам,— *правые группы*). Во многих случаях, впрочем, возникающие на этом пути классы П. включают в себя П., весьма далекие по своим свойствам от групп (типичный пример — П. идемпотентов).

Понятие *регулярной полугруппы* возникло по аналогии с понятием *регулярного кольца*. Класс регулярных П. принадлежит к числу наиболее интенсивно изучаемых в теории П. Он включает в себя следующие важные классы полугрупп: мультипликативные П. регулярных колец (и, в частности, П. всех матриц данного порядка над телом), симметрические П., П. всех частичных преобразований множеств, инверсные П., клиффордовы П. и, в частности, П. идемпотентов и вполне простые П., вполне 0-простые П. и др.

Другой тип распространенных ограничений — ограничения на систему всех или нек-рых подполугрупп, в частности идеалов, а также нек-рых отношений на

П., в частности конгруэнций. Так возникают, напр., разнообразные типы *простых полугрупп* и разнообразные условия конечности (см. *Полугруппа с условием конечности*, *Периодическая полугруппа*, *Локально конечная полугруппа*, *Финитно аппроксимируемая полугруппа*, *Минимальный идеал*), П. с разными типами идеальных рядов и идеальных систем (см. *Идеальный ряд*, *Нильполугруппа*); принципиальную роль в исследовании многих вопросов теории П. играют *Грина отношения эквивалентности*.

Ограничения могут относиться к порождающим множествам и выделять их типы либо с точки зрения характера порождающих элементов (напр., идемпотенты; всякая П. вложима в идемпотентно порожденную П.) или их числа (конечно порожденные П. существенно участвуют во многих исследованиях), либо с точки зрения взаимодействия порождающих элементов — изучаются П., заданные определяющими соотношениями и, в частности, конечно определенные П. (см. *Алгоритмическая проблема*, *Полугруппа с условием конечности*), либо с объединенной точки зрения (см., напр., *Бициклическая полугруппа*).

При изучении строения П. важную роль играют различные конструкции, сводящие описание рассматриваемых П. к тем или иным «более хорошим» типам. Довольно часто в качестве последних выступают группы, и принцип описания «по модулю групп» распространен в теоретико-полугрупповых исследованиях, он проявился еще в упоминавшейся классич. теореме Риса, согласно к-рой всякая вполне 0-простая (вполне простая) П. изоморфна регулярной рисовской П. матричного типа над группой с нулем (группой). Группы участвуют в конструкциях, описывающих инверсные П., и в конструкциях, описывающих коммутативные *архимедовы полугруппы* с законом сокращения и без идемпотентов. Описание П. с многими условиями конечности сводится к группам с соответствующими условиями.

Среди конструкций, участвующих в описании П., имеются как общеалгебраические, напр. прямые произведения, подпрямые произведения, так и специфически теоретико-полугрупповые. К последним относятся уже упоминавшиеся рисовские П., а также ряд других, из к-рых следует упомянуть конструкцию с в я з к и — такого разбиения на подполугруппы, что соответствующее отношение эквивалентности есть конгруэнция. Среди связок особую роль играют коммутативные связки (или полурешетки) и матричные (прямоугольные) связки (см. *Связка полугрупп*). В терминах связок описываются многие типы П. Так, теорема Клиффорда о вполне регулярных П. означает, по существу, что эти П. исчерпываются полурешетками вполне простых П.; вполне простые П. — это в точности прямоугольные связки групп; теорема Тамуры — Кимуры утверждает, что любая коммутативная П. единственным образом разложима в связку архимедовых П. (см. [3]).

Как и всюду в алгебре, существенную роль в теории П. играет понятие гомоморфизма и, соответственно, понятие конгруэнции. П. принадлежат к числу универсальных алгебр, конгруэнции к-рых не определяются однозначно нек-рым своим каноническим смежным классом («ядром») подобно тому, как это, напр., имеет место в группах и кольцах. Эта более сложная ситуация привела к развитию довольно обширного направления теории П., посвященного изучению конгруэнций П. с различных точек зрения. Решаемые здесь задачи делятся в основном на два вида: 1) выделяются те или иные специальные типы конгруэнций на произвольных П.; 2) описываются все конгруэнции на тех или иных специальных П., принадлежащих важным в каком-то отношении классам П. К первому виду относится, в частности, рассмотрение главных конгруэнций (см. [3]), а также идеальных, или рисовских, конгруэнций, сопоставляемых каждому двустороннему идеалу (если I — идеал полугруппы S, то соответствующая рисовская конгруэнция имеет своими классами I и одноэлементные подмножества $\{x\}$, где $x \in S \setminus I$), к-рые часто используются в различных вопросах и объясняют важность рассмотрения идеалов; факторполугруппу по рисовской конгруэнции наз. факторполугруппой Риса по соответствующему идеалу. Из решенных задач второго вида следует отметить описание конгруэнций на симметрических П., на вполне 0-простых П.; весьма далеко продвинуто изучение конгруэнций на инверсных П.; изучение *радикалов* П. развивается не без влияния аналогичного раздела теории колец. Рассмотрение гомоморфизмов П. в П. с заданными «хорошими» свойствами способствовало формированию направления, занимающегося аппроксимацией (см. *Сепаративная полугруппа*, *Финитно аппроксимируемая полугруппа*).

В исследованиях, связанных с рассмотрением подполугрупп, выделяется самостоятельное направление, посвященное изучению решеточных свойств П., т. е. взаимосвязей между свойствами П. и свойствами решеток их подполугрупп (см. *Решетка подалгебр*).

Широкое направление теории П. посвящено изучению различных вложений П. Истоки этого направления восходят к классич. проблеме *вложения полугрупп* в группы. О нек-рых задачах и результатах этого направления см. в ст. *Расширение* полугруппы.

Интенсивно развивается теория многообразий П.; об исследованиях в этом направлении см. в ст. *Полугрупп многообразие*. Начинает развиваться теория квазимногообразий П. (см. *Алгебраических систем квазимногообразие*) и нек-рых других классов П., близких в том или ином смысле к многообразиям.

Связи общей теории П. с конкретными П. осуществляются многими путями. Решаются проблемы абстрактной характеризации тех или иных важных конкретных П. (напр., П. преобразований: известно, в частности, несколько характеризаций симметрических П.), описываются различные их абстрактные свойства. О нек-рых основных результатах, касающихся П. преобразований, см. *Преобразований полугруппа*. Изучаются изоморфизмы и гомоморфизмы абстрактных П. в различные конкретные П., прежде всего П. преобразований и П. матриц (см. *Представление полугруппы*). Исследованием гомоморфизмов П. в нек-рые числовые П., прежде всего в мультипликативную П. комплексных чисел, занимается теория *характеров* полугрупп.

К специальным разделам теории П. приводит рассмотрение П. с дополнительными структурами, согласованными с операцией умножения. Здесь следует, в первую очередь, отметить структуру топологич. пространства (см. *Топологическая полугруппа*) и структуру порядка, частичного или линейного (см. *Упорядоченная полугруппа*).

Развивается и теория нек-рых видов обобщенных П. В первую очередь это алгебры с одной n-арной операцией, подчиненной обобщенному ассоциативному закону (их наз. n-ассоциативами, или n-полугруппами). Рассматриваются также алгебры с одной частичной ассоциативной бинарной операцией (одна из естественных ситуаций подобного рода возникает в теории категорий).

Лит.: [1] Сушкевич А. К., Теория обобщенных групп, Хар.— К., 1937; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [4] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, пер. с англ., М., 1975; [5] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965; [6] Итоги науки. Алгебра. Топология. 1962, М., 1963, с. 33—58; [7] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 161—202; [8] Итоги науки. Алгебра. Тополо-

гия. Геометрия. 1966, М., 1968, с. 9—56; [9] Semigroups, N.Y.—L., 1969; [10] Howie J., An introduction to semigroup theory, L.—N.Y.—S.F., 1976; [11] Petrich M., Introduction to semigroups, Columbus, 1973; [12] его же, Lectures in semigroups, B., 1977; [13] Redei L., The theory of finitely generated commutative semigroups, Oxf.—[a.o.], 1965; [14] Hofmann K. H., Mostert P. S., Elements of compact semigroups, Columbus, 1966; [15] Lallement G., Semigroups and combinatorial applications, N.Y.—[a.o.], 1979; [16] Eilenberg S., Automata, languages and machines, N.Y.—S.F.—L., v. A, 1974; v. B., 1976.
Л. Н. Шеврин.

ПОЛУГРУППА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ — однопараметрическое семейство операторов $S(t)$, $0\leqslant t<<\infty$, определенных и действующих в замкнутом подмножестве C банахова пространства X, обладающее свойствами:

1) $S(t+\tau)x=S(t)(S(\tau)x)$ при $x\in C$, t, $\tau>0$;
2) $S(0)x=x$ для любого $x\in C$;
3) при каждом $x\in C$ функция $S(t)x$ (со значениями в X) непрерывна по t на $[0, \infty)$.

Полугруппа $S(t)$ имеет тип ω, если

$$\|S(t)x-S(t)y\|\leqslant e^{\omega t}\|x-y\|,\ x,\ y\in C,\ t>0.$$

Полугруппа типа 0 наз. сжимающей.

Так же, как и для полугрупп линейных операторов, вводится понятие производящего оператора A_0 полугруппы $S(t)$:

$$A_0x=\lim_{h\to 0}(S(h)x-x)/h$$

на тех элементах $x\in C$, для к-рых этот предел существует. Если полугруппа сжимающая, то A_0 — диссипативный оператор. При этом оператор A в банаховом пространстве X диссипативен, если $\|x-y-\lambda(Ax-Ay)\|\geqslant\|x-y\|$ при x, $y\in\overline{D(A)}$, $\lambda>0$. Диссипативный оператор может быть многозначным, тогда в определении под Ax понимается любое его значение на x. Диссипативный оператор наз. m-диссипативным, если $\operatorname{Im}(I-\lambda A)=X$ при $\lambda>0$. Если $S(t)$ — типа ω, то $A_0-\omega I$ диссипативен.

Основная теорема о порождении полугруппы: если оператор $A-\omega I$ диссипативен и при достаточно малых $\lambda>0$ образ $\operatorname{Im}(I-\lambda A)$ оператора $I-\lambda A$ содержит $D(A)$, то существует полугруппа $S_A(t)$ типа ω на $\overline{D(A)}$ такая, что

$$S_A(t)x=\lim_{n\to\infty}\left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}x,$$

где $x\in\overline{D(A)}$, при этом сходимость равномерна на любом конечном промежутке изменения t. (Существование полугруппы $S_A(t)$ можно показать, если заменить условие $\operatorname{Im}(I-\lambda A)\supset\overline{D(A)}$ более слабым:

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}d(\operatorname{Im}(I-\lambda A),\ x)=0,$$

где d — расстояние между множествами.)

С оператором A можно связать задачу Коши

$$\frac{du}{dt}\in Au(t),\ t>0,\ u(0)=x. \qquad (*)$$

Если существует сильное решение задачи (*), т. е. непрерывная на $[0, \infty)$ функция $u(t)$, абсолютно непрерывная на любом компакте из $(0, \infty)$, принимающая при почти всех $t>0$ значения в $D(A)$, имеющая при почти всех $t>0$ сильную производную, удовлетворяющую включению (*), то $u(t)=S_A(t)x$. Любая функция $S_A(t)x$ является единственным т. н. интегральным решением задачи (*).

Если в условиях основной теоремы пространство X рефлексивно и A замкнут, то при $x\in D(A)$ функция $u(t)=S_A(t)$ дает сильное решение задачи Коши (*), при этом $\frac{du}{dt}\in A^0u(t)$ почти везде, где A^0z — множество элементов минимальной нормы из Az. В этом случае производящий оператор A_0 полугруппы $S_A(t)$ плотно задан: $\overline{D(A_0)}=\overline{D(A)}$. Если, сверх того, X и X' равномерно выпуклы, то оператор A^0 однозначен и при всех $t \geqslant 0$ существует правая производная $\frac{d^t u}{dt}=A^0 u(t)$; эта функция непрерывна справа на $[0, \infty)$ и непрерывна во всех точках, кроме, быть может, счетного множества, в этом случае $D(A_0)=D(A)$ и $A_0=A^0$.

Если X рефлексивно (соответственно $X=Y'$, где Y — сепарабельно), а оператор A однозначен и обладает тем свойством, что из $x_n \to x$ в X и $Ax_n \to y$ в *слабой топологии* $\sigma(X, X')$ (соответственно $\sigma(X, Y)$) следует $y=Ax$, то $u(t) \in D(A)$, $t \geqslant 0$, и $u(t)$ слабо (соответственно слабо *) непрерывно дифференцируемое решение задачи (*). В нерефлексивном случае известны примеры, когда выполнены условия основной теоремы при $\overline{D(A)}= =X$ и функции $u(t)=S_A(t)x$ не имеют даже слабой производной в X ни при каких $x \in X$, $t \geqslant 0$.

Пусть A — непрерывный оператор, определенный на всем X и такой, что $A-\omega I$ диссипативен. Тогда $\operatorname{Im}(I-\lambda A)=X$ при $\lambda>0$, $\lambda\omega<1$ и для любого $x \in X$ задача (*) имеет единственное непрерывно дифференцируемое на $[0, \infty)$ решение $u(t)=S_A(t)x$. Если оператор A непрерывен в замкнутой области определения $D(A)$, то для того, чтобы он был производящим оператором полугруппы типа ω на $D(A)$, необходимо и достаточно, чтобы $A-\omega I$ был диссипативным и $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda^{-1} d(x+\lambda Ax, D(A))=0$ при $x \in D(A)$.

В гильбертовом пространстве H сжимающая полугруппа на множестве C может быть продолжена для сжимающей полугруппы на замкнутом выпуклом множестве $\tilde{C}$ из H. При этом производящий оператор A_0 расширенной полугруппы будет определен на плотном в $\tilde{C}$ множестве. Существует единственный m-диссипативный оператор такой, что $\overline{D(A)}=C$ и $A_0=A^0$. Если A есть m-диссипативный оператор, то $\overline{D(A)}$ выпукло и существует единственная сжимающая на $\overline{D(A)}$ полугруппа $S(t)=S_A(t)$, для к-рой $A_0=A^0$.

Если на действительном гильбертовом пространстве H задан выпуклый полунепрерывный функционал φ и $\partial\varphi$ — его *субдифференциал*, то оператор $Ax=-\partial\varphi(x)$ (для тех x, при к-рых $\partial\varphi(x)$ непусто) является диссипативным. Полугруппа $S_A(t)$ обладает свойствами, сходными со свойствами линейных аналитич. полугрупп. В частности, $S_A(t)x \in D(A)$ $(t>0)$ при любом $x \in \overline{D(A)}$ и $u(t)=S_A(t)x$ является сильным решением задачи Коши (*), причем

$$\left\| \frac{d^+u}{dt} \right\| = \| A^0 u(t) \| \leqslant \frac{2}{t} \| x-v \| + 2 \| A^0 v \|$$

для всех $t>0$, $v \in D(A)$. Если φ достигает минимума, то $u(t)$ слабо сходится при $t \to \infty$ к нек-рой точке минимума.

Для приближенного решения задачи Коши существенную роль играют теоремы об аппроксимации полугрупп. Пусть X, X_n, $n=1, 2, \ldots,$ — банаховы пространства, операторы A в X и A_n в X_n однозначны и удовлетворяют условиям основной теоремы с общим типом ω, операторы $p_n: X \to X_n$ — линейны и $\|p_n\|_{X \to X_n} \leqslant$ $\leqslant \mathrm{const}$. Тогда из сходимости резольвент $(\lambda>0, \lambda\omega<1)$

$$\| (I-\lambda A_n)^{-1} p_n x - p_n (I-\lambda A)^{-1} x \|_{X_n} \to 0$$

при $x \in \overline{D(A)}$ следует сходимость полугрупп

$$\| S_{A_n}(t) p_n x - p_n S_A(t) x \|_{X_n} \to 0, \ x \in \overline{D(A)},$$

равномерная на каждом конечном промежутке.

Мультипликативные формулы Ли, полученные им в конечномерном линейном случае, обобщены на нелинейный случай. Если A, B и $A+B$ суть m-диссипативные однозначные операторы в гильбертовом пространстве и замкнутое выпуклое множество $C \subset \overline{D(A)} \cap \cap \overline{D(B)}$ инвариантно относительно $(I-\lambda A)^{-1}$ и $(I-\lambda B)^{-1}$, то при любом $x \in C \cap \overline{D(A) \cap D(B)}$

$$S_{A+B}(t)\, x = \lim_{n \to \infty} \left[S_A\left(\frac{t}{n}\right) S_B\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n x.$$

Эта формула справедлива также в произвольном банаховом пространстве X для любого $x \in X$, если A — плотно заданный линейный m-диссипативный оператор, а B — заданный на всем X непрерывный диссипативный оператор. В обоих случаях

$$S_{A+B}(t)\, x = \lim \left[\left(I - \frac{t}{n} B\right)^{-1} \left(I - \frac{t}{n} A\right)^{-1} \right]^n x,$$

$$x \in \overline{D(A) \cap D(B)}.$$

В приводимых ниже примерах нелинейных дифференциальных операторов, удовлетворяющих условиям основной теоремы о порождении полугрупп, указывается лишь пространство X и краевые условия, а точное описание $D(A)$ опускается. Во всех примерах Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей; β, γ — многозначные максимальные монотонные отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\beta(0) \ni 0$, $\gamma(0) \ni 0$; $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная строго возрастающая функция, $\psi(0)=0$. Пример 1. $X = L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $Au = \Delta u - \beta(u)$, $-\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u)$ на Γ.

Пример 2. $X = L_1(\Omega)$, $Au = \Delta\psi(u)$, $-\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u)$ на Γ. Пример 3. $X = W_2^{-1}(\Omega)$, $Au = \Delta\psi(u)$, $u=0$ на Γ. Пример 4. $X = C(\overline{\Omega})$ или $X = L_\infty(\Omega)$, $Au = \psi(\Delta u)$, $u=0$ на Γ. Пример 5. $X = L_1(\mathbb{R}^n)$, $Au = \operatorname{div} f(u)$, где $f \in C^1(\mathbb{R})$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, $f(0)=0$. Пример 6. $X = L_\infty(\mathbb{R})$, $Au = f(u_x)$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна.

Лит.: [1] Barbu V., Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Bucureşti, 1976; [2] Brézis H., Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Amst.—L.—N.Y., 1973; [3] Brezis H., Pazy A., «J. Funct. Anal.», 1972, v. 9, № 1, p. 63—74; [4] Crandall M. G., Liggett T. M., «Amer. J. Math.», 1971, v. 93, № 2, p. 265—98; [5] Kobayashi Y., «J. Math. Soc. Japan», 1975, v. 27, № 4, p. 640—65; [6] Konishi Y., «Proc. Japan. Acad.», 1972, v. 48, № 2, p. 62—66; [7] Martin R. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1973, v. 179, p. 399—414; [8] Webb G. F., «J. Funct. Anal», 1972, v. 10, № 2, p. 191—203; [9] Хазан М. И., «Докл. АН СССР», 1973, т. 212, № 6, с. 1309—12; [10] его же, там же, 1976, т. 228, № 4, с. 805—808.

С. Г. Крейн, М. И. Хазан.

ПОЛУГРУППА ОПЕРАТОРОВ — семейство операторов $\{T\}$ в банаховом или топологическом векторном пространстве, обладающее тем свойством, что композиция любых двух операторов семейства снова принадлежит семейству. Если операторы T «занумерованы» элементами нек-рой абстрактной полугруппы $\mathfrak{A}$ и бинарной операции полугруппы отвечает композиция операторов, то полугруппа $\{T\}$ наз. представлением полугруппы $\mathfrak{A}$. Наиболее подробно изучены *однопараметрические полугруппы* линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве X, дающие представление аддитивной полугруппы всех положительных чисел, т. е. семейства $T(t)$ со свойством

$$T(t+\tau)\, x = T(t)\, T(\tau)\, x, \quad t, \tau > 0, \quad x \in X.$$

Из сильной измеримости $T(t)$, $t>0$, следует, что $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа, поэтому в дальнейшем только такие и рассматриваются.

Существует число

$$\omega = \lim_{t \to \infty} t^{-1} \ln \| T(t) \|$$

— тип полугруппы. Все функции $T(t)x$ растут не быстрее экспоненты.

Важной характеристикой является инфинитезимальный оператор полугруппы

$$A_0x = \lim_{t \to 0} t^{-1}[T(t)x - x],$$

определенный на линейном множестве $D(A_0)$ тех элементов x, на к-рых предел существует, и его замыкание A (если оно существует) — производящий оператор полугруппы. Множество $D(A_0)$ плотно на подпространстве X_0, являющемся замыканием объединения всех значений $T(t)x$. Если в X_0 нет ненулевых элементов, на к-рых $T(t)x \equiv 0$, то существует производящий оператор A. В дальнейшем всегда предполагается, что $X_0 = X$ и что из $T(t)x \equiv 0$ следует $x = 0$.

Наиболее простой класс полугрупп — класс C_0 — выделяется условием: $T(t)x \to x$ при $t \to 0$ и любом $x \in X$. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы функция $\|T(t)\|$ была ограниченной на каком-нибудь промежутке $(0, a]$. В этом случае $T(t)$ имеет производящий оператор $A = A_0$, для резольвенты $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$ к-рого выполнено

$$\|R^n(\lambda, A)\| \leqslant M(\lambda - \omega)^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots; \ \lambda > \omega, \qquad (1)$$

где ω — тип полугруппы. Обратно, если A — замкнутый оператор с плотной в X областью определения, для резольвенты к-рого выполнено (1), то он является производящим оператором нек-рой полугруппы $T(t)$ класса C_0, причем $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$. Условия (1) выполняются, если

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant (\lambda - \omega)^{-1}$$

(условие Хилле — Иосиды). Если при этом $\omega = 0$, то $T(t)$ — *сжатий полугруппа*: $\|T(t)\| \leqslant 1$.

Суммируемая полугруппа — та, для к-рой функции $\|T(t)x\|$ суммируемы на любом конечном отрезке при всех $x \in X$. Суммируемая полугруппа имеет производящий оператор $A = \overline{A}_0$. Оператор A_0 замкнут тогда и только тогда, когда при любом $x \in X$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)\,x\,ds = x.$$

Для суммируемой полугруппы при $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ определено преобразование Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\,x\,dt = -R(\lambda)\,x, \qquad (2)$$

дающее линейный ограниченный оператор $R(\lambda)$, обладающий многими свойствами резольвенты.

Для того чтобы замкнутый оператор A с плотной в X областью определения был производящим оператором суммируемой полугруппы $T(t)$, необходимо и достаточно, чтобы для нек-рого ω существовала резольвента $R(\lambda, A)$ при $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ и выполнялись условия: а) $\|R(\lambda, A)\| \leqslant M$, $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$; б) существуют такие неотрицательная и непрерывная по совокупности переменных функция $\varphi(t, x)$, $t > 0$, $x \in X$, и неотрицательная функция $\varphi(t)$, ограниченная на любом промежутке $[a, b] \subset (0, \infty)$, что при $\omega_1 > \omega$

$$\int_0^\infty e^{-\omega_1 t} \varphi(t, x)\,dt < \infty,$$

$$\overline{\lim_{t \to \infty}}\ t^{-1} \ln \varphi(t) < \infty, \quad \varphi(t, x) \leqslant \varphi(t)\|x\|,$$

$$\|R^n(\lambda, A)\,x\| \leqslant \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} \varphi(t, x)\,dt.$$

При этом

$$\|T(t)\,x\| \leqslant \varphi(t, x), \quad \|T(t)\| \leqslant \varphi(t).$$

Если дополнительно потребовать, чтобы функция $\|T(t)\|$ была суммируемой на конечных промежутках, то необходимо и достаточно существование такой непрерывной функции $\varphi(t)$, что при $\omega_1 > \omega$

$$\int_0^\infty \varphi(t) e^{-\omega_1 t} dt < \infty, \tag{3}$$

$$\| R^n(\lambda, A) \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} \varphi(t) dt, \ \lambda > \omega, \ n = 1, 2, \ \dots \tag{4}$$

При этом $\|T(t)\| \leqslant \varphi(t)$. Выбирая различные функции, удовлетворяющие (3), можно выделять различные подклассы суммируемых полугрупп. Если $\varphi(t) = Me^{\omega t}$, то получается класс C_0 и из (4) вытекает (1). Если $\varphi(t) = Mt^{-\alpha} e^{\omega t}$, $0 \leqslant \alpha < 1$, то из (4) получается условие

$$\| R^n(\lambda, A) \| \leqslant \frac{M\Gamma(n-\alpha)}{(n-1)!\,(\lambda-\omega)^{n-\alpha}}, \ \lambda > \omega, \ n = 1, 2, \ \dots$$

Полугруппа со степенными особенностями. Если в предыдущем примере $\alpha \geqslant 1$, то в (4) интегралы при $n \leqslant \alpha - 1$ расходятся. В соответствии с этим производящий оператор соответствующих полугрупп может не иметь резольвенты ни при каких λ, т. е. иметь спектр, совпадающий со всей комплексной плоскостью. Однако для таких операторов, начиная с нек-рого n, существуют функции $S_n(\lambda, A)$, совпадающие в предыдущих случаях с $R^{n+1}(\lambda, A)$. Оператор-функция $S_n(\lambda, A)$ наз. резольвентой порядка n, если она аналитична в нек-рой области $G \subset \mathbb{C}$ и при $\lambda \in G$

$$S_n(\lambda, A) Ax = AS_n(\lambda, A) x, \ x \in D(A),$$

$$S_n(\lambda, A)(A - \lambda I)^{n+1} x = x, \ x \in D(A^{n+1}),$$

и из того, что $S_n(\lambda, A) x = 0$ при всех $\lambda \in G$, следует, что $x = 0$. Если $\overline{D}(A^{n+1}) = X$, то оператор может иметь единственную резольвенту порядка n, для к-рой имеется максимальная область аналитичности, наз. резольвентным множеством порядка n.

Пусть для сильно непрерывной полугруппы $T(t)$ выполняется неравенство

$$\| T(t) \| \leqslant Mt^{-\alpha} e^{\omega t}$$

при $\alpha \geqslant 1$. Тогда ее производящий оператор B имеет резольвенту порядка n при $n > \alpha - 1$, причем

$$S_n(\lambda, B) x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t) x \, dt, \ \operatorname{Re} \lambda > \omega,$$

$$\left\| \frac{d^k S_n(\lambda, B)}{d\lambda^k} x \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\Gamma(k+n+1-\alpha)}{n!\,(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{k+n+1-\alpha}}, \ \operatorname{Re}\lambda > \omega, \ k = 0, 1, \ \dots \tag{5}$$

Обратно, пусть оператор B имеет при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ резольвенту $S_n(\lambda, B)$ порядка n, для к-рой выполнено (5) при $n > \alpha - 1$. Тогда существует единственная полугруппа $T(t)$ с оценкой

$$\| T(t) \| \leqslant Mt^{-\alpha} e^{\omega t},$$

для производящего оператора A к-рой $S_n(\lambda, A) = S_n(\lambda, B)$.

Гладкая полугруппа. Если $x \in D(A_0)$, то функция $T(t)x$ непрерывно дифференцируема и

$$\frac{dT(t)}{dt} x = A_0 T(t) x = T(t) A_0 x.$$

Существуют полугруппы класса C_0, для к-рых при $x \notin D(A_0) = D(A)$ функции $T(t)x$ недифференцируемы при всех t. Однако для важных классов полугрупп наблюдается явление повышения их гладкости с увеличением t. Если $T(t)x$, $t > t_0$, дифференцируемы при любом $x \in X$, то из полугруппового свойства следует, что $T(t)x$ дважды дифференцируема при $t > 2t_0$, трижды — при $t > 3t_0$ и т. д. Поэтому если $T(t)x$ дифференцируемы при любых $t > 0$ и $x \in X$, то $T(t)x$ бесконечно дифференцируемы.

Для того чтобы для полугруппы класса C_0 при нек-ром $t_0 \geqslant 0$ функции $T(t)x$ были дифференцируемы при всех $x \in X$ и $t > t_0$, необходимо и достаточно существование таких чисел a, b, $c > 0$, что резольвента $R(\lambda, A)$ определена в области

$$\operatorname{Re}\lambda > a - b \ln|\operatorname{Im}\lambda|$$

и в этой области

$$\|\operatorname{Re}(\lambda, A)\| \leqslant c\,|\operatorname{Im}\lambda|.$$

Для того чтобы $T(t)x$ были бесконечно дифференцируемыми при всех $x \in X$ и $t > 0$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $b > 0$ нашлись такие a_b, c_b, что резольвента $R(\lambda, a)$ определена при

$$\operatorname{Re}\lambda > a_b - b \ln|\operatorname{Im}\lambda|$$

и

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant c_b\,|\operatorname{Im}\lambda|.$$

Достаточные условия: если при нек-ром $\mu > \omega$

$$\varlimsup_{\tau \to \infty} \ln|\tau|\,\|R(\mu + i\tau, A)\| = t_0 < \infty,$$

то $T(t)x$ дифференцируемы при $t > t_0$ и $x \in X$, если $t_0 = 0$, то $T(t)x$ бесконечно дифференцируемы при всех $t > 0$ и $x \in X$.

Иногда о гладкости полугруппы можно судить по ее поведению в нуле; напр., если для каждого $c > 0$ существует такое δ_c, что при $0 < t < \delta_c$

$$\|I - T(t)\| \leqslant 2 - ct \ln t^{-1},$$

то $T(t)x$ бесконечно дифференцируемы при всех $t > 0$, $x \in X$.

Имеются условия гладкости суммируемых полугрупп и полугрупп степенного роста. Если полугруппа степенного роста α бесконечно дифференцируема при $t > 0$, то функция

$$\frac{dT(t)}{dt}\,x = AT(t)\,x$$

часто также имеет степенной рост:

$$\|AT(t)\| \leqslant M_1 t^{-\beta} e^{\omega t}.$$

Между числами α и β в общем случае нет жесткой связи, и число β может служить для более детальной классификации бесконечно дифференцируемых полугрупп степенного роста.

Аналитическая полугруппа. Важный класс полугруппы, связанный с уравнениями с частными производными параболич. типа, состоит из полугрупп $T(t)$, допускающих аналитич. продолжение в нек-рый сектор комплексной плоскости, содержащий положительную полуось. Для того чтобы полугруппа класса C_0 обладала этим свойством, необходимо и достаточно, чтобы в нек-рой правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ для резольвенты выполнялось неравенство

$$\|\operatorname{Re}(\lambda, A)\| \leqslant M\,|\lambda - \omega|^{-1}.$$

Также необходимо и достаточно, чтобы полугруппа была сильно дифференцируемой и чтобы для ее производной имелась оценка

$$\left\|\frac{dT}{dt}\right\| \leqslant M t^{-1} e^{\omega t}.$$

Наконец, из неравенства

$$\varlimsup_{t \to 0} \|I - T(t)\| < 2$$

также следует аналитичность $T(t)$.

Если полугруппа $T(t)$ допускает аналитич. продолжение $T(z)$ в сектор $|\arg z| < \varphi \leqslant \pi/2$ и имеет степенной рост в нуле, $\|T(z)\| \leqslant c|z|^{\alpha}$, $\alpha > 0$, то резольвента $S_n(\lambda, A)$ порядка $n > \alpha - 1$ ее производящего оператора A допускает аналитич. продолжение в сектор $|\arg\lambda|<\pi/2+\varphi$ и в любом секторе $|\arg\lambda|\leqslant\pi/2+\psi$, $\psi<\varphi$, допускает оценку

$$\|S_n(\lambda,\ A)\|\leqslant|\lambda|^{\alpha-n-1}M(\psi).$$

Обратно, пусть резольвента $S_n(\lambda,\ B)$ оператора B определена в секторе $|\arg\lambda|<\pi/2+\psi$ и справедливо неравенство

$$\|S_n(\lambda,\ B)\|\leqslant\lambda^{\alpha-n-1}M.$$

Тогда существует аналитическая в секторе $|\arg z|<\psi$ полугруппа $T(z)$ роста α, для производящего оператора A к-рой $S_n(\lambda,\ A)=S_n(\lambda,\ B)$.

Полугруппа-распределение. В соответствии с общей концепцией теории распределений (*обобщенных функций*) можно отказаться от того, чтобы оператор-функция $T(t)$ была определена при каждом $t>0$, а потребовать лишь вычислимость интегралов $\int_{-\infty}^{+\infty}T(t)\varphi(t)dt$ для всех φ из пространства $D(\mathbb{R})$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций. Тогда возникает определение: полугруппой-распределением в банаховом пространстве X наз. линейное непрерывное отображение $T(\varphi)$ пространства $D(\mathbb{R})$ в пространство $L(X)$ всех линейных ограниченных операторов в X, обладающее свойствами: а) $T(\varphi)=0$, если $\operatorname{supp}\varphi\subset\subset(-\infty,\ 0)$; б) для φ, ψ из пространства $D^+(\mathbb{R})$, состоящего из всех функций из $D(\mathbb{R})$ с носителями в $(0,\ \infty)$, $T(\varphi*\psi)=T(\varphi)T(\psi)$, где свертка

$$\varphi*\psi=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-s)\,\psi(s)\,ds$$

(полугрупповое свойство); в) если $T(\varphi)x=0$ для всех $\varphi\in D^+(\mathbb{R})$, то $x=0$; г) линейная оболочка объединения всех значений $T(\varphi)x$, $\varphi\in D^+(\mathbb{R})$, $x\in X$, плотна в X; д) для любого $y=T(\psi)x$ с $\psi\in D^+(\mathbb{R})$ существует такая непрерывная на $(0,\ \infty)$ функция $u(t)$ со значениями в X, что $u(0)=y$ и

$$T(\varphi)\,y=\int_0^{\infty}\varphi(t)\,u(t)\,dt$$

для всех $\varphi\in D(\mathbb{R})$.

Инфинитезимальный оператор A_0 полугруппы-распределения определяется так: если существует дельта-последовательность $\{\rho_n\}\subset D^+(\mathbb{R})$ такая, что $T(\rho_n)x\to x$ и $T(-\rho_n')x\to y$ при $n\to\infty$, то $x\in D(A_0)$ и $y=A_0x$. Инфинитезимальный оператор допускает замыкание $A=\bar{A}_0$, к-рое наз. производящим оператором полугруппы-распределения. Множество $\bigcap_{n=1}^{\infty}D(A_0^n)$ плотно в X и содержит $T(\varphi)X$ при любой $\varphi\in D^+(\mathbb{R})$.

Замкнутый линейный оператор A с плотной в X областью определения является производящим оператором полугруппы-распределения тогда и только тогда, когда найдутся числа a, $b\geqslant0$, $c>0$ и натуральное m такие, что при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant a\ln(1+|\lambda|)+b$ существует резольвента $R(\lambda,\ A)$ и выполнено неравенство

$$\|R(\lambda,\ A)\|\leqslant C(1+|\lambda|)^m. \tag{6}$$

Если A — замкнутый линейный оператор в X, то множество $\bigcap_{n=1}^{\infty}D(A^n)$ можно превратить в пространство Фреше X_∞, введя в нем систему норм

$$\|x\|_n=\sum_{k=0}^{n}\|A^kx\|.$$

Сужение A_∞ оператора A на X_∞ оставляет X_∞ инвариантным. Если A — производящий оператор полугруппы-распределения, то A_∞ — производящий оператор полугруппы класса C_0 (непрерывный при $t\geqslant0$, $T(0)=I$) в пространстве X_∞. Обратно, если X_∞ плотно в X, оператор A имеет непустое резольвентное множество и является производящим оператором полугруппы класса

C_0 в X_∞, то A — производящий оператор полугруппы-распределения в X.

Полугруппа-распределение имеет экспоненциальный порядок роста не выше $q, 1 \leqslant q < \infty$, если при нек-ром $\omega > 0$ отображение $\exp(-\omega t^q) T(\varphi)$ непрерывно в топологии, индуцированной на D^+ пространством $S(\mathbb{R})$ быстро убывающих функций. Для того чтобы замкнутый линейный оператор был производящим оператором такой полугруппы-распределения, необходимо и достаточно, чтобы он имел резольвенту $R(\lambda, A)$, для к-рой выполнено (6) в области

$$\{\lambda: \operatorname{Re}\lambda \geqslant [\alpha \ln(1 + |\operatorname{Im}\lambda| + \beta)]^{1-1/q}, \operatorname{Re}\lambda > \omega\},$$

где $\alpha, \beta > 0$. В частности, если $q = 1$, то полугруппа наз. экспоненциальной и неравенство (6) выполняется в нек-рой полуплоскости. Имеется характеристика полугрупп указанных типов в терминах свойств оператора A_∞. Для полугруппы-распределений изучены вопросы гладкости и аналитичности.

Полугруппа операторов в (отделимом) локально выпуклом пространстве X. Определение сильно непрерывной полугруппы непрерывных в X операторов $T(t)$ остается таким же, как и в банаховом пространстве. Аналогично класс C_0 выделяется свойством $T(t)x \to x$ при $t \to 0$ и любом $x \in X$. Полугруппа наз. локально эквинепрерывной (принадлежит классу lC_0), если семейство операторов $T(t)$ равностепенно непрерывно, когда t пробегает любой конечный промежуток из $(0, \infty)$. В бочечном пространстве полугруппа класса C_0 всегда локально эквинепрерывна.

Полугруппа наз. эквинепрерывной (принадлежит классу uC_0), если семейство $T(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, равностепенно непрерывно.

Инфинитезимальный и производящий операторы полугруппы определяются так же, как и в банаховом случае.

В дальнейшем предполагается, что пространство X секвенциально полно. Для полугрупп класса lC_0 производящий оператор A совпадает с инфинитезимальным, его область определения $D(A)$ плотна в X и, более того, плотно в X множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$. Полугруппа $T(t)$ оставляет $D(A)$ инвариантной и

$$\frac{dT}{dt} x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad x \in D(A).$$

Если A — производящий оператор полугруппы класса uC_0, то при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ определена резольвента $R(\lambda, A)$ и она является преобразованием Лапласа от полугруппы.

Линейный оператор A является производящим оператором полугруппы класса uC_0 тогда и только тогда, когда он замкнут, имеет плотную в X область определения и существует такая последовательность положительных чисел $\lambda_k \to \infty$, что для любого λ_k определена резольвента $R(\lambda_k, A)$ и семейство операторов $[\lambda_k R(\lambda_k, A)]^n$, $k, n = 1, 2, \ldots$, равностепенно непрерывно. При этом полугруппа может быть построена по формуле

$$T(t)x = \lim_{k \to \infty} \left(\exp\left[-\lambda_k - \lambda_k^2 R(\lambda_k, A)\right] t\right) x,$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in X.$$

В ненормируемом локально выпуклом пространстве производящий оператор полугруппы класса lC_0 может не иметь резольвенты ни в одной точке. Пример: $A = \frac{d}{ds}$ в пространстве C^∞ бесконечно дифференцируемых функций от s на $\mathbb{R}$. В качестве оператора, заменяющего резольвенту, может быть взят непрерывный оператор, умножение к-рого на оператор $A - \lambda I$ справа и слева «мало» отличается от единичного оператора.

Непрерывный оператор $R(\lambda)$, определенный для λ из множества $\Lambda\subset\mathbb{C}$, наз. асимптотической резольвентой линейного оператора A, если оператор $AR(\lambda)$ непрерывен в X, оператор $R(\lambda)A$ допускает расширение с $D(A)$ до непрерывного оператора $B(\lambda)$ в X и существует такая предельная точка λ_0 множества Λ, что $H^+(\lambda)x\to 0$, $H^-(\lambda)x\to 0$ при $\lambda\to\lambda_0$ для любого x из X, где

$$H^+(\lambda)=(A-\lambda I)R(\lambda)-I,\quad H^-(\lambda)=B(\lambda)-\lambda R(\lambda)-I.$$

Асимптотич. резольвента обладает рядом свойств, близких к свойствам обычной резольвенты.

Для того чтобы замкнутый линейный оператор A с плотной в X областью определения был производящим оператором полугруппы класса lC_0, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа ω и $\alpha>0$, что при $\lambda>\omega$ определена асимптотич. резольвента $R(\lambda)$ оператора A, обладающая свойствами: функции $R(\lambda)$, $H^+(\lambda)$, $H^-(\lambda)$ сильно бесконечно дифференцируемы при $\lambda>\omega$, семейства операторов

$$e^{\alpha\lambda}\,\frac{d^nH^{\pm}(\lambda)}{d\lambda^n},\quad \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\,\frac{d^nR(\lambda)}{d\lambda^n},\ \lambda>\omega,\ n=0,\ 1,\ \ldots,$$

равностепенно непрерывны.

Теоремы порождения получены и для других классов П. о. в локально выпуклом пространстве.

Сопряженная полугруппа. Если $T(t)$ — полугруппа класса C_0 в банаховом пространстве X, то сопряженные операторы образуют полугруппы ограниченных операторов в сопряженном пространстве X'. Однако соотношение $T'(t)f\to f$ при $t\to 0$ и любом $f\in X'$ выполняется лишь в смысле слабой топологии $\sigma(X', X)$. Если A — производящий оператор, то сопряженный оператор A' будет слабым производящим оператором $T'(t)$ в том смысле, что $D(A')$ состоит из всех тех f, для к-рых существует в смысле слабой сходимости предел $t^{-1}[T'(t)-I]f$ при $t\to 0$, равный $A'f$. Область определения $D(A')$ плотна в X' в смысле слабой топологии, и оператор A' замкнут в этой топологии.

Пусть X^+ — совокупность тех элементов из X', для к-рых $T'(f)\to f$ при $t\to 0$ в сильном смысле, тогда X^+ — замкнутое подпространство X', инвариантное относительно всех $T'(t)$. В X^+ операторы $T(t)$ образуют полугруппы класса C_0. Пространство X^+ может быть получено как сильное замыкание в X' множества $D(A')$. Если исходное пространство рефлексивно, то $X^+=X'$. Для полугрупп класса C_0 в локально выпуклых пространствах справедливы аналогичные факты. Полугруппы классов lC_0 и uC_0 порождают полугруппы таких же классов в пространстве X^+.

Полугруппа-распределение в (отделимом) локально выпуклом пространстве. Полугруппа-распределение $T(\varphi)$ в секвенциально полном локально выпуклом пространстве определяется так же, как и в банаховом пространстве. Полугруппа $T(\varphi)$ наз. локально эквинепрерывной (класса lD'), если для любого компакта $K\subset D(\mathbb{R})$ семейство операторов $\{T(\varphi)\}$, $\varphi\in K$, равностепенно непрерывно. В бочечном пространстве X всякая полугруппа-распределение принадлежит классу lD'. Аналогично случаю банахова пространства определяется инфинитезимальный оператор A_0 полугруппы-распределения. Для полугрупп класса lD' он замкнут ($A_0=A$), $\bigcap_{n=1}^{\infty}D(A^n)$ плотно в X, при любых $x\in X$ и $\varphi\in D(\mathbb{R})$ выполнено

$$\left.\begin{aligned}T(\varphi)x\in D(A),\ T'(\varphi)x=AT(\varphi)x+\varphi(0)x,\\ T'(\varphi)x=T(\varphi)Ax+\varphi(0)x,\ x\in D(A).\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Обобщенную функцию T с носителем на $[0,\infty)$, обладающую свойствами (7), естественно назвать фундаментальной функцией оператора $\frac{d}{dt}-A$. Таким образом, если A — производящий оператор полугруппы T класса lD', то T является фундаментальной функцией оператора $\frac{d}{dt}-A$. Обратное утверждение верно при дополнительных предположениях относительно порядка сингулярности фундаментальной функции T (точнее, функций $f(T(\varphi)x)$, где $f\in X'$).

Для характеризации полугруппы в локально выпуклом пространстве полезным является понятие обобщенной резольвенты. Через $\hat{\varphi}$ обозначается образ функции $\varphi\in D(\mathbb{R})$ при преобразовании Лапласа, в пространстве $\hat{D}(\mathbb{R})$ всех образов вводится топология, индуцируемая преобразованием Лапласа из топологии $D(\mathbb{R})$. Преобразование Лапласа X-значной обобщенной функции F определяется равенством $\hat{F}(\hat{\varphi})=F(\varphi)$. При этом $\hat{F}$ является непрерывным отображением из $\hat{D}(\mathbb{R})$ в пространство $L(X)$ линейных непрерывных операторов на X. Пусть $\hat{D}'_+$ — пространство всех $\hat{F}$, полученных из F с носителем на $(0, \infty)$, с естественной топологией. Если A — линейный оператор в X, то его можно «поднять» до оператора $\tilde{A}$ в пространстве $\tilde{D}'_+$ с помощью равенства

$$(\tilde{A}\hat{F})(\hat{\varphi})=A(\hat{F}(\hat{\varphi}))=AF(\varphi).$$

Таким образом, он определен на тех $\hat{F}\in\hat{D}'_+$, для к-рых правая часть определена при любой $\varphi\in D(R)$ и продолжает обобщенную функцию из $\hat{D}'_+$. На $\hat{D}'_+$ определяется непрерывный оператор $\tilde{\lambda}$ равенством

$$(\tilde{\lambda}\hat{F})(\hat{\varphi})=\lambda\hat{F}(\hat{\varphi})=F'(\varphi)=-F(\varphi').$$

Если оператор $\tilde{A}-\tilde{\lambda}$ имеет непрерывный обратный $\tilde{R}$ на $\hat{D}'_+$, то $\tilde{R}$ наз. обобщенной резольвентой оператора A.

Оператор A имеет обобщенную резольвенту тогда и только тогда, когда у оператора $\frac{d}{dt}-A$ существует локально эквинепрерывная фундаментальная функция T, к-рая строится по формуле:

$$T(\varphi)x=(\tilde{R}(1\otimes x))(\hat{\varphi}),\ \varphi\in D(\mathbb{R}),\ x\in X,$$

где

$$(1\otimes x)(\hat{\varphi})=(\delta\otimes x)\varphi=\varphi(0)x.$$

При дополнительных условиях T будет полугруппой-распределением. В терминах обобщенной резольвенты получена также теорема порождения П. о. класса lC_0.

См. также *Полугруппа нелинейных операторов.*

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [2] Вувуникян Ю. М., в кн.: Теория операторов в функциональных пространствах, Новосиб., 1977, с. 99—120; [3] Забрейко П. П., Зафиевский А. В., «Докл. АН СССР», 1969, т. 189, № 5, с. 934—37; [4] Зафиевский А. В., «Тр. Матем. ф-та Воронеж. ун-та», 1970, в. 1, с. 206—10; [5] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [6] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967; [7] Сильченко Ю. Т., «Дифференц. уравнения», 1979, т. 15, № 2, с. 363—66; [8] Chazarain J. «J. Funct. Analys.», 1971, v. 7, № 3, p. 386—446; [9] Gioranescu J., «J. Math. Analys. and Appl.», 1971, v. 34, p. 34—41; [10] её же, «Rev. roum. math. pures et appl.», 1977, v. 22, № 8, p. 1053—68; [11] Kato T., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 25, № 3, p. 495—98; [12] Lions J., «Portugal. Math.», 1960, v. 19, p. 141—64; [13] Pazy A., «J. Math. Mech.», 1968, v. 17, № 12, p. 1131—41; [14] его же, «Proc. Amer. Math. Soc.», 1971, v. 30, № 1, p. 147—50; [15] Ushijima T., «Sci. Papers College Gen. Edic. Univ. Tokyo», 1971, v. 21, p. 93—122; [16] его же, «J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A», 1972, v. 19, № 1, p. 65—127; [17] Wild C., «C. r. Acad. sci.», 1977, t. A 285, p. 437—40.

Ю. М. Вувуникян, С. Г. Крейн.

ПОЛУГРУППА С УСЛОВИЕМ КОНЕЧНОСТИ — полугруппа, обладающая нек-рым свойством θ таким, что всякая конечная полугруппа обладает этим свойством (такое свойство θ наз. условием конечно-с т и). В определении свойства θ могут фигурировать элементы полугруппы, ее подполугруппы и т. п.

Примеры условий конечности: периодичность (см. *Периодическая полугруппа*), локальная конечность (см. *Локально конечная полугруппа*), финитная аппроксимируемость (см. *Финитно аппроксимируемая полугруппа*), конечная порожденность, конечная определенность. Исследования конечно определенных полугрупп в значительной степени ведутся с точки зрения алгоритмич. проблем. Наиболее известное условие, при к-ром конечная порожденность полугруппы влечет ее конечную определенность,— коммутативность (т е о р е м а Р е д е и). Всякая счетная полугруппа вложима в полугруппу с двумя порождающими, а также в полугруппу с тремя идемпотентными порождающими [8].

Целый ряд условий конечности формулируется в терминах решетки подполугрупп (напр., условие минимальности для подполугрупп). Полугруппа S тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для подполугрупп, когда S периодическая, имеет лишь конечное число классов кручения, в каждом классе кручения K_e наибольшая подгруппа G_e удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, а разность $K_e \setminus G_e$ конечна [2]. Аналогичное строение имеют полугруппы конечного ранга (конечность ранга означает, что минимальное число порождающих каждой конечно порожденной подполугруппы полугруппы S не превосходит фиксированного числа), полугруппы конечной ширины (конечность ширины для S означает, что из любого конечного множества M ее элементов можно выделить подмножество, порождающее ту же подполугруппу, что и M, мощность к-рого не превосходит фиксированного числа), периодические полугруппы с условием максимальности для подполугрупп и др. (см. [3], [4]).

Инверсная полугруппа удовлетворяет условию минимальности для инверсных подполугрупп тогда и только тогда, когда она обладает главным рядом (см. *Идеальный ряд* полугруппы), каждый фактор к-рого есть *Брандта полугруппа* с конечным числом идемпотентов, все максимальные подгруппы к-рой удовлетворяют условию минимальности для подгруппы. Аналогичные описания получены для условия максимальности, конечности ранга и др. (см. [5]).

Из условий конечности, формулируемых в терминах частично упорядоченного множества идеалов полугруппы, наиболее известны условия минимальности M_L, M_R, M_J для главных левых, правых, двусторонних идеалов (эти условия часто определяются в терминах $\mathcal{L}$-, $\mathcal{R}$- и $\mathcal{J}$-классов, см. *Грина отношения эквивалентности*). Аналогично определяется условие M_H для $\mathcal{H}$-классов. Конъюнкция условий M_L и M_R эквивалентна конъюнкции условий M_J и M_H, в остальном эти условия независимы; в частности, полугруппа с условиями M_L и M_J не обязательно удовлетворяет условиям M_R и M_H. Вместе с тем полупростая (см. *Главный фактор* полугруппы) полугруппа с условием M_L или M_R удовлетворяет условию M_J. Для регулярных полугрупп все четыре условия эквивалентны; всякая полугруппа с условием M_H будет квазипериодической. Конечно порожденная полугруппа с условием M_L или M_R, все подгруппы к-рой конечны, сама конечна [6].

Полугруппа с условием минимальности для правых конгруэнций является периодической, удовлетворяет условию M_L и двойственному условию максимальности для главных левых идеалов; если при этом все ее подгруппы конечны, то сама полугруппа конечна [6]. В инверсных полугруппах условие минимальности для правых конгруэнций эквивалентно условию минимальности для левых конгруэнций, а также тому, что полугруппа имеет лишь конечное число идемпотентов и удовлетворяет условию минимальности для подгрупп [7]. Изучен ряд свойств полугрупп с условием максимальности для односторонних конгруэнций. Коммутативная полугруппа удовлетворяет условию минимальности (максимальности) для конгруэнций тогда и только тогда, когда она имеет главный ряд и удовлетворяет условию минимальности для подгрупп [7] (конечно порождена).

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 2, М., 1972; [2] Шеврин Л. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, № 3, с. 553—66; [3] его же, «Матем. заметки», 1974, т. 15, № 6, с. 925—35; [4] его же, «Изв. ВУЗов. Матем.», 1974, № 5, с. 205—15; [5] Ершова Т. И., там же, 1977, № 11, с. 7—14; [6] Hotzel E., «J. Algebra», 1979, v. 60, № 2, p. 352—70; [7] Kozhukhov I. B., «Semigroup Forum», 1980, v. 21, № 4, p. 337—50; [8] Pastijn F., там же, 1977, v. 14, № 3, p. 247—64. *Л. Н. Шеврин.*

ПОЛУГРУППОВАЯ АЛГЕБРА — алгебра $\Phi(S)$ над полем Φ, обладающая базисом S, являющимся одновременно и мультипликативной полугруппой. В частности, если базис S является группой, получается *групповая алгебра.* Если полугруппа S содержит нуль, то он обычно отождествляется с нулем алгебры $\Phi(S)$. Задача описания всех линейных представлений полугруппы S над полем Φ равносильна задаче описания всех представлений алгебры $\Phi(S)$. Значение П. а. для теории полугрупп состоит в возможности применения более богатого аппарата теории алгебр для изучения линейных представлений полугрупп. Пример такого рода результата: алгебра $\Phi(S)$ конечной полугруппы S полупроста тогда и только тогда, когда все линейные представления полугруппы S над полем Φ приводимы.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972. *Л. М. Глускин.*

ПОЛУДЕДЕКИНДОВА РЕШЕТКА, полудедекиндова структура, полумодулярная решетка (структура),— решетка, в к-рой отношение модулярности симметрично, т. е. aMb влечет bMa для любых элементов решетки a и b. Отношение модулярности при этом определяется следующим образом: говорят, что элементы a и b образуют модулярную пару или что aMb, если $a(b+c)=ab+c$ для любого $c \leqslant a$. Решетка, в к-рой всякая пара элементов модулярна, наз. модулярной решеткой или *дедекиндовой решеткой.*

Решетка конечной длины полудедекиндова тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию покрытия: если x и y покрывают xy, то $x+y$ покрывает x и y (см. *Покрывающий элемент*). В любой П. р. конечной длины выполняется условие Жордана — Дедекинда для цепей (все максимальные цепи между двумя фиксированными элементами имеют одну и ту же длину), что позволяет развивать в них теорию размерности. П. р. конечной длины является решеткой с относительными дополнениями тогда и только тогда, когда каждый ее элемент есть объединение атомов. Такие решетки наз. геометрическими. Важный класс П. р. образуют близкие к геометрическим матроидные решетки (см. [3]). Каждая конечная решетка изоморфна подрешетке конечной П. р. Класс П. р. не замкнут относительно гомоморфных образов.

Наряду с П. р., называемыми также полудедекиндовыми сверху, рассматриваются полудедекиндовы снизу решетки, определяемые двойственным образом. Примерами П. р., кроме дедекиндовых решеток, являются решетки всех разбиений конечных множеств и решетки линейных многообразий аффинных пространств.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., [2 изд.], М., 1952; [2] Birkhoff G., Lattice theory, [3 ed.], Providence, 1967; [3] Maeda F., Maeda Sh., Theory of symmetric lattices, B.—Hdlb.—N. Y., 1970. *Т. С. Фофанова.*

ПОЛУЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — действительное аффинное n-пространство, в к-ром определено скалярное произведение векторов так, что при надлежащем выборе базиса скалярный квадрат (x, x) всякого вектора имеет вид

$$(x, x) = -\sum_{i=1}^{l} (x^i)^2 + \sum_{j=l+1}^{n-d} (x^j)^2.$$

Такое П. п. называется П. п. индекса l и дефекта d, обозначается ${}^{l+(d)}R_n$. При $l=0$ выражение скалярного квадрата вектора является квадратичной полуопределенной формой, и П. п. наз. n-пространством дефекта d, обозначается ${}^{(d)}R_n$.

П. п. в проективной классификации могут быть определены как соответственно полуэллиптич. пространство или полугиперболич. пространство с несобственной абсолютной плоскостью, к-рые являются пространствами с проективными метриками наиболее общего вида.

В П. п. определяется т. н. полунеевклидово пространство как метрическое n-пространство, являющееся гиперсферой с отождествленными диаметрально противоположными точками в П. п. индекса l и дефекта d. Таким образом, полуэллиптич. и полугиперболич. пространства могут быть интерпретированы как указанные гиперсферы (т. е. как полунеевклидовы пространства) в П. п. с соответствующими индексом и дефектом.

Геометрич. интерпретация механики Галилея — Ньютона приводит к П. п. ${}^{(1)}R_n$ (см. [2]).

П. п. является полуримановым пространством нулевой кривизны.

Лит.: [1] Sommerville D. M., «Proc. Edinburgh Math. Soc.», 1910, v. 28, p. 25—41; [2] Котельников А. П., Принцип относительности и геометрия Лобачевского, в кн.: In memoriam N.I. Lobačevski, т. 2, Казань, 1926; [3] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

ПОЛУИНВАРИАНТ — общий собственный вектор семейства эндоморфизмов векторного пространства или модуля. Если G — множество линейных преобразований векторного пространства V над полем K, то П. множества G — это такой вектор $v \in V$, что $v \neq 0$ и

$$gv = \chi(g)\, v, \;\; g \in G,$$

где $\chi : G \to K$ — функция, называемая весом полуинварианта v. П. веса 1 наз. также инвариантом. Чаще всего рассматривается случай, когда $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — линейная группа, тогда $\chi : G \to K^*$ есть характер группы G и продолжается до полиномиальной функции на End V. Если $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ — линейное представление группы G в пространстве V, то П. группы $\varphi(G)$ наз. также полуинвариантом представления φ. Пусть G — линейная алгебраич. группа, H — ее замкнутая подгруппа, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — алгебры Ли этих групп. Тогда существуют такое точное рациональное линейное представление $\varphi : G \to \mathrm{GL}(E)$ и такой полуинвариант $v \in E$ группы $\varphi(H)$, что H и $\mathfrak{h}$ являются максимальными подмножествами в G и $\mathfrak{g}$, для образов к-рых в End E вектор v есть П. Это означает, что соответствие $aH \mapsto K\varphi(a)v$, $a \in G$, есть изоморфизм алгебраического однородного пространства на орбиту прямой Kv в проективном пространстве $P(E)$.

Часто П. множества $G \subset \mathrm{End}\, V$ наз. полиномиальную функцию на End V, являющуюся П. множества линейных преобразований $\eta(G)$ пространства K [End V], где

$$(\eta(g) f)(X) = f(Xg)$$

$$g \in G, \; f \in K\, [\mathrm{End}\, V], \; X \in \mathrm{End}\, V.$$

Если $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — линейная алгебраич. группа, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, то G обладает такими П.

$$f_1, \; \ldots, \; f_n \in K\, [\mathrm{End}\, V]$$

одинакового веса, что G и $\mathfrak{g}$ суть максимальные подмножества в $\mathrm{GL}(V)$ и End V, для к-рых $f_1, \ldots, f_n$ суть П. (теорема Шевалле).

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 2, М., 1958.

А. Л. Онищик.

ПОЛУКОЛЬЦО — непустое множество с двумя ассоциативными бинарными операциями $+$ и $\cdot$, связанными дистрибутивными законами:

$$(a+b)\cdot c = a\cdot b + a\cdot c$$

и

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c.$$

В большинстве случаев дополнительно предполагается, что сложение коммутативно и что существует нуль 0, для к-рого $a+0=a$ при любом a. Важнейшие примеры П.— кольца и дистрибутивные решетки. При наличии единицы 1 относительно умножения оба эти класса объединяются требованием

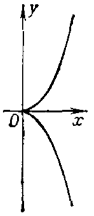
$$\forall x\, \exists y\, (x+y=1).$$

Неотрицательные целые числа с обычными операциями образуют П., не удовлетворяющее этому требованию.

Л. А. Скорняков.

ПОЛУКУБИЧЕСКАЯ ПАРАБОЛА — плоская алгебраическая кривая 3-го порядка, уравнение к-рой в прямоугольных координатах имеет вид

$$y = ax^{3/2}.$$



Начало координат есть точка возврата (см. рис.). Длина дуги от точки 0:

$$l = \frac{1}{27a^2}\left[(4+9a^2x)^{3/2} - 8\right];$$

кривизна:

$$k = \frac{6a}{\sqrt{x}\,(4+9a^2x)^{3/2}}.$$

Иногда П. п. наз. параболой Нейля.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960; [2] Смогоржевский А. С., Столова З. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961.

Д. Д. Соколов.

ПОЛУЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение α (левого) модуля M в (левый) модуль N над одним и тем же кольцом A, удовлетворяющее условиям:

$$\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y),$$

$$\alpha(cx) = c^\sigma \alpha(x),$$

где $x, y \in M$, $c \in A$, $c \to c^\sigma$ — нек-рый автоморфизм кольца A. В этом случае говорят, что α полулинейно относительно автоморфизма σ. П. о. векторных пространств над полем $\mathbb{C}$ относительно комплексного сопряжения $c^\sigma = \bar{c}$ наз. также антилинейным отображением. П. о. A-модуля M в себя наз. полулинейным преобразованием.

Пример. Гомотетия A-модуля M, т. е. отображение $x \to ax$ $(x \in M)$, где a — фиксированный обратимый элемент кольца A, есть полулинейное преобразование относительно автоморфизма $c^\sigma = aca^{-1}$.

Для П. о. остаются справедливыми многие свойства линейных отображений и гомоморфизмов модулей. В частности, ядро и образ П. о. являются подмодулями; П. о. свободных модулей с конечными базисами полностью определяются своей матрицей; для П. о. векторных пространств определяется ранг, совпадающий с рангом его матрицы, и т. д.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962.

А. Л. Онищик.

ПОЛУМАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс $X(t)$ с конечным или счетным множеством состояний $N=\{1, 2, \ldots\}$, имеющий ступенчатые траектории со скачками в моменты времени $0<\tau_1<\tau_2<\ldots$. Значения П. п. $X(\tau_n)$ в моменты скачков образуют *Маркова цепь* с переходными вероятностями

$$p_{ij} = \mathsf{P}\{X(\tau_n) = j \mid X(\tau_{n-1}) = i\}.$$

Распределения моментов скачков τ_n описываются с помощью функций распределения $F_{ij}(x)$ следующим образом:

$$\mathsf{P}\{\tau_n - \tau_{n-1} \leqslant x,\ X(\tau_n) = j \mid X(\tau_{n-1}) = i\} = p_{ij} F_{ij}(x)$$

(и при этом не зависят от состояний процесса в более ранние моменты времени). Если

$$F'_{ij}(x) = e^{-\lambda_{ij} x},\ x \geqslant 0,$$

для всех $i, j \in N$, то П. п. $X(t)$ является цепью Маркова с непрерывным временем. Если все распределения вырождены в одной точке, то получают цепь Маркова с дискретным временем.

П. п. служит моделью многих процессов массового обслуживания и теории надежности. С П. п. связаны процессы марковского восстановления (см. *Восстановления теория*), описывающие количество посещений процессом $X(t)$ состояний $i \in N$ за время $[0, t]$.

Изучение П. п. и марковских процессов восстановления аналитически сводится к системе интегральных уравнений восстановления.

Лит.: [1] Королюк В. С., Турбин А. Ф., Полумарковские процессы и их приложения, К., 1976.

Б. А. Севастьянов.

ПОЛУМАРТИНГАЛ — понятие, равносильное понятиям субмартингала или супермартингала. Именно, стохастич. последовательность $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T \subseteq [0, \infty)$, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с выделенным на нем убывающим семейством σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $s \leqslant t$, наз. полумартингалом, если $\mathsf{E}|X_t| < \infty$, X_t является $\mathcal{F}_t$-измеримой и с вероятностью 1 или

$$\mathsf{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geqslant X_s, \tag{1}$$

или

$$\mathsf{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leqslant X_s. \tag{2}$$

В случае (1) П. наз. субмартингалом, в случае (2) — супермартингалом.

В современной литературе термин «П.» или не употребляют, или отождествляют с понятием субмартингала (супермартингал определяется изменением знака из субмартингала и наз. иногда нижним П.). См. также *Мартингал*.

А. В. Прохоров.

ПОЛУНАСЛЕДСТВЕННОЕ КОЛЬЦО слева — кольцо, все конечно порожденные левые идеалы к-рого проективны. П. к. являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов от одного неизвестного над полем, *регулярные кольца* в смысле Неймана, наследственные кольца, кольца конечно порожденных свободных идеалов (полу-FI-кольца). Аналогично определяется правое П. к. Левое П. к. не обязано быть правым П. к. Однако локальное левое П. к. оказывается областью целостности и правым П. к. Кольцо матриц над П. к. является П. к. Если R есть П. к. и $e^2 = e \in R$, то eRe есть П. к. Конечно порожденный подмодуль проективного модуля над П. к. изоморфен прямой сумме нек-рого множества конечно порожденных левых идеалов основного кольца и, следовательно, проективен. Каждый такой модуль может быть представлен и как прямая сумма модулей, двойственных конечно порожденным правым идеалам основного кольца.

Для коммутативного кольца R эквивалентны следующие свойства: (1) R есть П. к.; (2) $(A \cap B)C = AC \cap BC$, где A, B и C — произвольные идеалы кольца R; (3) полное кольцо частных кольца R регулярно в смысле Неймана, и для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R кольцо частных $R_{\mathfrak{m}}$ является кольцом нормирования; (4) все 2-порожденные идеалы кольца R проективны. Кольцо многочленов от одного переменного над коммутативным кольцом R оказывается П. к. в том и только в том случае, когда R регулярно в смысле Неймана.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, с. 57—190, т. 19, М., 1981, с. 31—134. *Л. А. Скорняков.*

ПОЛУНЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ — функция из первого *Бэра класса*. Подробнее, числовая функция f, определенная на полном метрич. пространстве X, наз. полунепрерывной снизу (сверху) в точке $x_0 \in X$, если

$$\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ (\overline{\lim}_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)).$$

Функция f наз. полунепрерывной снизу (сверху) на X, если она полунепрерывна снизу (сверху) для всех $x \in X$. Предел *монотонно возрастающей (убывающей) последовательности* полунепрерывных снизу (сверху) в точке x_0 функций есть П. ф. снизу (сверху) в x_0. Если $u(x)$ и $v(x)$ есть П. ф. соответственно снизу и сверху на X и для всех $x \in X$ имеет место $u(x) \leqslant v(x)$, $u(x) > -\infty$, $v(x) < < +\infty$, то существует непрерывная на X функция f такая, что $v(x) \leqslant f(x) \leqslant u(x)$ для всех $x \in X$. Если μ — неотрицательная мера на $\mathbb{R}^n$, то для любой μ-измеримой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существуют две последовательности функций $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$, удовлетворяющие условиям: 1) $u_n(x)$ полунепрерывны снизу, $v_n(x)$ полунепрерывны сверху, 2) каждая функция $u_n(x)$ ограничена снизу, каждая функция $v_n(x)$ — сверху, 3) последовательность $\{u_n\}$ невозрастающая, последовательность $\{v_n\}$ неубывающая, 4) для всех x имеет место неравенство

$$u_n(x) \geqslant f(x) \geqslant v_n(x),$$

5) μ-почти всюду

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = \lim_{n \to \infty} v_n(x) = f(x),$$

6) если для $E \subset \mathbb{R}^n$ функция f суммируема, $f \in L(E)$, то u_n, $v_n \in L(E)$ и

$$\lim_{n \to \infty} \int_E u_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E v_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

(теорема Витали — Каратеодори).

Лит.: [1] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949. *И. А. Виноградова.*

ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ сверху (снизу) — отображение f одного топологич. пространства X в другое Y такое, что из

$$\lim x_n = x$$

следует

$$\overline{\lim} f(x_n) \leqslant f(x) \ (\underline{\lim} f(x_n) \geqslant f(x))$$

(здесь $\overline{\lim}$ ($\underline{\lim}$) — верхний (нижний) предел).

М. И. Войцеховский.

ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЕ РАЗБИЕНИЕ снизу (сверху) — разбиение D, т. е. замкнутое дизъюнктное покрытие пространства X, такое, что проекция $p : X \to D$ является открытым (замкнутым) отображением. *М. И. Войцеховский.*

ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЙ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — метод суммирования рядов и последовательностей, определенный с помощью последовательности функций. Пусть $\{a_k(\omega)\}$, $k=0, 1, \ldots$,— последовательность функций, заданных на нек-ром множестве E изменения параметра ω, и ω_0 — точка сгущения этого множества (конечная или бесконечная). Данную последовательность $\{s_n\}$ с помощью функций $a_k(\omega)$ преобразуют в функцию $\sigma(\omega)$:

$$\sigma(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega) s_k. \qquad (1)$$

Если ряд в (1) сходится для всех ω, достаточно близких к ω_0, и

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \sigma(\omega) = s,$$

то последовательность $\{s_n\}$ наз. суммируемой к пределу s полунепрерывным методом суммирования, определенным последовательностью функций $\{a_k(\omega)\}$. Если $\{s_n\}$ — последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k, \tag{2}$$

то ряд (2) в этом случае наз. суммируемым полунепрерывным методом к сумме s. П. м. с. при $\omega_0 = \infty$ является аналогом *матричного метода суммирования*, определенного матрицей $\|a_{nk}\|$, причем целочисленный параметр n заменен непрерывным параметром ω. Последовательность функций $a_k(\omega)$ в этом случае наз. полунепрерывной матрицей.

П. м. с. может задаваться преобразованием непосредственно ряда в функцию с помощью заданной последовательности функций, напр. $\{g_k(\omega)\}$:

$$\gamma(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\omega)\, u_k. \tag{3}$$

В этом случае ряд (2) наз. суммируемым к сумме s, если

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \gamma(\omega) = s,$$

где ω_0 — точка сгущения множества E изменения параметра ω, а ряд в (3) предполагается сходящимся для всех ω, достаточно близких к ω_0.

П. м. с. в нек-рых случаях являются более удобными, чем методы суммирования, определенные обычными матрицами, т. к. позволяют использовать аппарат теории функций. Примерами П. м. с. являются *Абеля метод суммирования*, *Бореля метод суммирования*, *Линделёфа метод суммирования*, *Миттаг-Леффлера метод суммирования*. Класс П. м. с. составляют методы с полунепрерывными матрицами вида

$$a_k(\omega) = p_k\, \omega^k \Big/ \sum_{l=0}^{\infty} p_l \omega^l,$$

где в знаменателе стоит целая функция, не сводящаяся к многочлену.

Условия регулярности П. м. с. аналогичны условиям регулярности матричного метода суммирования. Напр., условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(\omega)| \leqslant M$$

для всех ω, достаточно близких к ω_0,

$$\lim_{\omega \to \omega_0} a_k(\omega) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega) = 1$$

являются необходимыми и достаточными, чтобы П. м. с., определенный преобразованием (1) последовательности $\{s_k\}$ в функцию, был регулярным (см. *Регулярности признаки*).

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Zeller K., Beekmann W., Theorie der Limitierungsverfahren, 2 Aufl., B.—Hdlb.—N.Y., 1970. *И. И. Волков.*

ПОЛУНОРМА — конечная неотрицательная функция p на векторном пространстве E (над полем действительных или комплексных чисел), подчиненная условиям:

$$p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x),$$

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$$

для всех $x, y \in E$ и скаляров λ. Примером П. служит *норма*; отличие заключается в том, что для П. допустимо $p(x)=0$ при $x \neq 0$. Если на векторном пространстве задана полунорма p, а на его подпространстве — *линейный функционал* f, подчиненный условию $|f(x)| \leqslant p(x)$, то его можно продолжить на все пространство с сохранением этого условия (теорема Хана — Банаха). В математич. анализе наиболее употребительны отделимые *топологические векторные пространства*, базис окрестностей нуля в к-рых можно составить из выпуклых множеств. Такие пространства наз. локально выпуклыми. В этих пространствах базис может быть описан неравенствами $p(x)<1$, где p — непрерывные П. В то же время в практике математич. анализа встречаются и такие топологич. векторные пространства (в том числе и с метризуемой топологией), на к-рых нет нетривиальных непрерывных П. Простейший пример такого рода — пространство $L_q(0, 1)$, где $0<q<1$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975. *Е. А. Горин.*

ПОЛУОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР — *симметрический оператор* S в гильбертовом пространстве H, для к-рого существует такое число c, что

$$(Sx, x) \geqslant c(x, x)$$

для всех векторов x, лежащих в области определения S. П. о. S всегда имеет полуограниченное самосопряженное расширение A с той же нижней гранью c (теорема Фридрихса). В частности, их индексы дефекта совпадают.

Лит.: [1] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979. *В. И. Ломоносов.*

ПОЛУОПРЕДЕЛЕННАЯ ФОРМА — *квадратичная форма* над упорядоченным полем, представляющая либо только неотрицательные, либо только неположительные элементы поля. В первом случае квадратичная форма наз. неотрицательной ($q(x) \geqslant 0$ для всех значений x), во втором — неположительной квадратичной формой ($q(x) \leqslant 0$). Чаще всего П. ф. рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Над полем $\mathbb{C}$ аналогично определяются полуопределенные (неотрицательные и неположительные) эрмитовы квадратичные формы (см. *Эрмитова форма*).

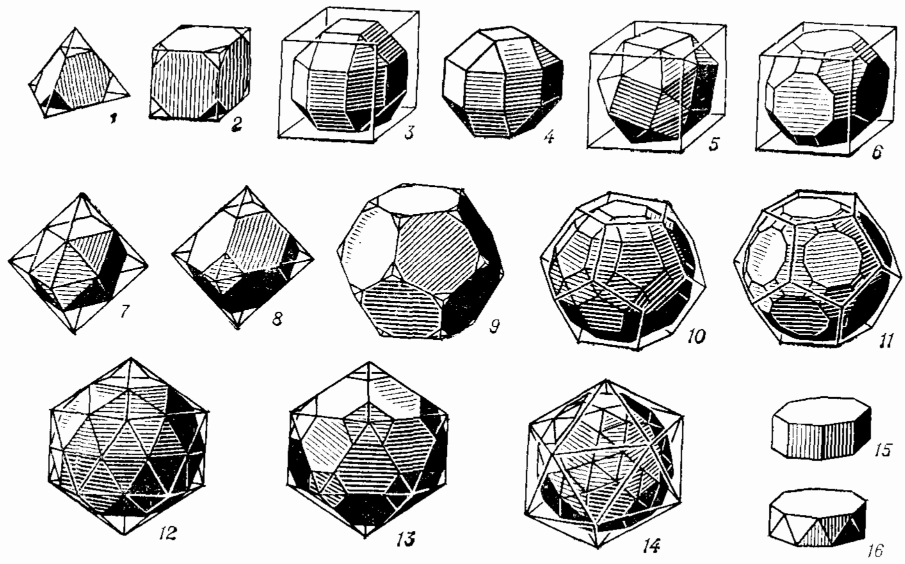
Если b — симметрическая билинейная или эрмитова форма, причем $q(x)=b(x, x)$ является П. ф., то и форму b также иногда называют полуопределенной (неотрицательной или неположительной). Если q — квадратичная или эрмитова П. ф. в векторном пространстве V, то $N=\{x \in V \mid q(x)=0\}$ является подпространством, совпадающим с ядром формы b, причем на V/N естественным образом индуцируется положительно определенная или отрицательно определенная форма. *О. А. Иванова.*

ПОЛУПЛОСКОСТЬ — совокупность точек плоскости, лежащих по одну сторону от нек-рой прямой этой плоскости. Координаты точек П. удовлетворяют неравенству $Ax+By+C>0$, где A, B, C — нек-рые постоянные, причем A и B одновременно не равны нулю. Если сама прямая $Ax+By+C=0$ (граница П.) причисляется к П., то говорят о замкнутой П. На комплексной плоскости $z=x+iy$ рассматриваются верхняя полуплоскость $y=\operatorname{Im} z>0$, нижняя полуплоскость $y=\operatorname{Im} z<0$, левая полуплоскость $x=\operatorname{Re} z<0$, правая полуплоскость $x=\operatorname{Re} z>0$ и т. д. Верхняя П. комплексной плоскости z конформно отображается на круг $|w|<1$ с помощью дробно-линейной функции

$$w=e^{i\theta} \frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}},$$

где θ — произвольное действительное число, а $\operatorname{Im} \beta>0$. *БСЭ-3.*

ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ, тела Архимеда,— выпуклые многогранники, все грани к-рых суть правильные многоугольники, а многогранные углы конгруэнтны или симметричны. Данные о П. м. приведены в таблице, где B — число вершин, P — число ребер, Γ — число граней, Γ_k — число n_k-угольных граней, s — число граней, сходящихся в каждой вершине, в том числе s_1 n_1-угольных, s_2 n_2-угольных и т. д. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ существует 13 П. м. [см. рис., *1—14*, иногда выделяют два вида ромбокубооктаэдра (рис., *3—4*), к-рые различаются тем, что верхняя часть многоугольника, состоящая из 5 квадратов и 4 правильных треугольников, повернута как целое на угол $\pi/4$] и две бесконечные серии — призмы (рис., *15*) и антипризмы (рис., *16*).



Полуправильные многогранники

	№ на рис.	B	P	Γ	n_1	n_2	n_3	Γ_1	Γ_2	Γ_3	s_1	s_2	s_3	s
Усеченный тетраэдр	1	12	18	8	6	3	—	4	4	—	2	1	—	3
Усеченный куб	2	24	36	14	8	3	—	6	8	—	2	1	—	3
Ромбокубооктаэдр	3, 4	24	48	26	4	3	—	18	8	—	3	1	—	4
Плосконосый куб	5	24	60	38	3	4	—	32	6	—	4	1	—	5
Усеченный кубооктаэдр	6	48	72	26	4	6	8	12	8	6	1	1	1	3
Кубооктаэдр	7	12	24	14	3	4	—	8	6	—	2	2	—	4
Усеченный октаэдр	8	24	36	14	6	4	—	8	6	—	2	1	—	3
Усеченный додекаэдр	9	60	90	32	10	3	—	12	20	—	2	1	—	3
Ромбоикосододекаэдр	10	60	120	62	4	3	5	30	20	12	2	1	1	4
Усеченный икосододекаэдр	11	120	180	62	4	6	10	30	20	12	1	1	1	3
Икосододекаэдр	12	30	60	32	3	5	—	20	12	—	2	2	—	4
Усеченный икосаэдр	13	60	90	32	6	5	—	20	12	—	2	1	—	3
Плосконосый додекаэдр	14	60	150	92	3	5	—	80	12	—	4	1	—	5
Правильная призма ($n=3$, 5, 6,...)	15	$2n$	$3n$	$n+2$	4	n	—	n	2	—	2	1	—	3
Антипризма ($n=4$, 5, 6,...)	16	$2n$	$4n$	$2n+2$	3	n	—	$2n$	2	—	3	1	—	4

Невыпуклых (звездчатых) П. м. больше 51.

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4— Геометрия, М.—Л., 1963; [2] Люстерник Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956; [3] Brückner M., Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte, Lpz., 1900; [4] Веннинджер М., Модели многогранников, пер. с англ., М., 1974.

А. Б. Иванов.

ПОЛУПРОСТАЯ АЛГЕБРА относительно радикала r — алгебра, являющаяся r-полупростым кольцом (см. *Полупростое кольцо*). В нек-рых классах алгебр при подходящем выборе радикала r удается описать строение П. а. (см. *Классически полупростое кольцо*, *Альтернативные кольца и алгебры*, *Йорданова алгебра*, *Ли полупростая алгебра*).

Часто под П. а. понимается конечномерная алгебра над полем, являющаяся прямой суммой простых алгебр.

Л. А. Скорняков.

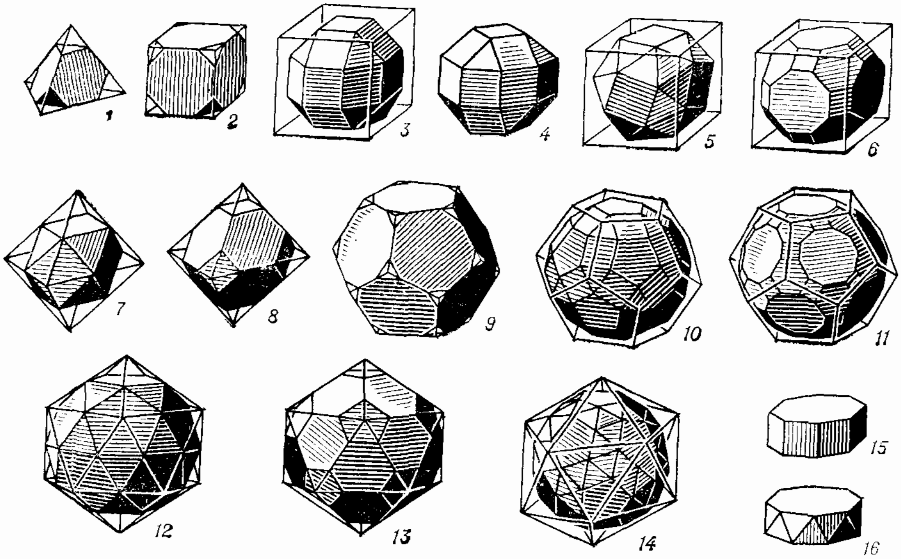
ПОЛУПРОСТАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГРУППА — связная линейная алгебраич. группа положительной размерности, содержащая лишь тривиальные разрешимые (или, что равносильно, абелевы) связные замкнутые нормальные подгруппы. Факторгруппа связной неразрешимой линейной алгебраич. группы по радикалу полупроста.

Связная линейная алгебраич. группа G положительной размерности наз. **простой**, если она не содержит собственных связных замкнутых нормальных подгрупп. Центр $Z(G)$ простой группы G конечен, и $G/Z(G)$ проста как абстрактная группа. Алгебраич. группа G полупроста тогда и только тогда, когда G разлагается в произведение простых связных замкнутых нормальных подгрупп.

В случае, когда основное поле есть поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, П. а. г.— это не что иное как полупростая группа Ли над $\mathbb{C}$. Оказывается, что классификация П. а. г. над произвольным алгебраически замкнутым полем K аналогична случаю $K=\mathbb{C}$, т. е. что П. а. г. определяется с точностью до изоморфизма своей корневой системой и нек-рой подрешеткой в решетке весов, содержащей все корни. Точнее, пусть T — максимальный тор в П. а. г. G, $X(T)$ — группа характеров тора T, рассматриваемая как решетка в пространстве $E=X(T)\otimes\mathbb{R}$. Для любого рационального линейного представления ρ группы G группа $\rho(T)$ является диагонализируемой. Ее собственные значения, являющиеся элементами группы $X(T)$, наз. **весами представления** ρ. Ненулевые веса присоединенного представления Ad наз. **корнями** группы G. Оказывается, что система $\Sigma\subset X(T)$ всех корней группы G является приведенной *корневой системой* в пространстве E, причем неприводимые компоненты системы Σ — это системы корней простых замкнутых нормальных подгрупп группы G. Далее, $Q(\Sigma)\subseteq X(T)\subseteq P(\Sigma)$, где $Q(\Sigma)$ — решетка радикальных весов, а $P(\Sigma)=\{\lambda\in E \mid \alpha^*(\lambda)\in\mathbb{Z}$ для всех $\alpha\in\Sigma\}$ — **решетка весов** корневой системы Σ. В случае $K=\mathbb{C}$ пространство E естественно отождествляется с вещественным подпространством $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}\subset\mathfrak{t}^*$, где $\mathfrak{t}$ — алгебра Ли тора T, натянутом на дифференциалы всех характеров, а решетки в $\mathfrak{t}$, двойственные к $Q(\Sigma)\subseteq X(T)\subseteq P(\Sigma)$, совпадают (с точностью до множителя $2\pi i$) с $\Gamma_1\supseteq\Gamma(G)\supseteq\Gamma_0$ (см. *Ли полупростая группа*).

Основная теорема классификации утверждает, что если G' — другая П. а. г., T' — ее максимальный тор, $\Sigma'\subset E'$ — система корней группы G' и если существует линейное отображение $E\to E'$, определяющее изомор-

ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ, тела Архимеда,— выпуклые многогранники, все грани к-рых суть правильные многоугольники, а многогранные углы конгруэнтны или симметричны. Данные о П. м. приведены в таблице, где B — число вершин, P — число ребер, Γ — число граней, Γ_k — число n_k-угольных граней, s — число граней, сходящихся в каждой вершине, в том числе s_1 n_1-угольных, s_2 n_2-угольных и т. д. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ существует 13 П. м. [см. рис., *1—14*, иногда выделяют два вида ромбокубооктаэдра (рис., *3—4*), к-рые различаются тем, что верхняя часть многоугольника, состоящая из 5 квадратов и 4 правильных треугольников, повернута как целое на угол $\pi/4$] и две бесконечные серии — призмы (рис., *15*) и антипризмы (рис., *16*).



Полуправильные многогранники

	№ на рис.	B	P	Γ	n_1	n_2	n_3	Γ_1	Γ_2	Γ_3	s_1	s_2	s_3	s
Усеченный тетраэдр	*1*	12	18	8	6	3	—	4	4	—	2	1	—	3
Усеченный куб	*2*	24	36	14	8	3	—	6	8	—	2	1	—	3
Ромбокубооктаэдр	*3, 4*	24	48	26	4	3	—	18	8	—	3	1	—	4
Плосконосый куб	*5*	24	60	38	3	4	—	32	6	—	4	1	—	5
Усеченный кубооктаэдр	*6*	48	72	26	4	6	8	12	8	6	1	1	1	3
Кубооктаэдр	*7*	12	24	14	3	4	—	8	6	—	2	2	—	4
Усеченный октаэдр	*8*	24	36	14	6	4	—	8	6	—	2	1	—	3
Усеченный додекаэдр	*9*	60	90	32	10	3	—	12	20	—	2	1	—	3
Ромбоикосододекаэдр	*10*	60	120	62	4	3	5	30	20	12	2	1	1	4
Усеченный икосододекаэдр	*11*	120	180	62	4	6	10	30	20	12	1	1	1	3
Икосододекаэдр	*12*	30	60	32	3	5	—	20	12	—	2	2	—	4
Усеченный икосаэдр	*13*	60	90	32	6	5	—	20	12	—	2	1	—	3
Плосконосый додекаэдр	*14*	60	150	92	3	5	—	80	12	—	4	1	—	5
Правильная призма ($n=3$, 5, 6,...)	*15*	$2n$	$3n$	$n+2$	4	n	—	n	2	—	2	1	—	3
Антипризма ($n=4$, 5, 6,...)	*16*	$2n$	$4n$	$2n+2$	3	n	—	$2n$	2	—	3	1	—	4

Невыпуклых (звездчатых) П. м. больше 51.

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4— Геометрия, М.—Л., 1963; [2] Люстерник Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956; [3] Brückner M., Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte, Lpz., 1900; [4] Веннинджер М., Модели многогранников, пер. с англ., М., 1974.

А. Б. Иванов.

ПОЛУПРОСТАЯ АЛГЕБРА относительно радикала r — алгебра, являющаяся r-полупростым кольцом (см. *Полупростое кольцо*). В нек-рых классах алгебр при подходящем выборе радикала r удается описать строение П. а. (см. *Классически полупростое кольцо*, *Альтернативные кольца и алгебры*, *Йорданова алгебра*, *Ли полупростая алгебра*).

Часто под П. а. понимается конечномерная алгебра над полем, являющаяся прямой суммой простых алгебр.

Л. А. Скорняков.

ПОЛУПРОСТАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГРУППА — связная линейная алгебраич. группа положительной размерности, содержащая лишь тривиальные разрешимые (или, что равносильно, абелевы) связные замкнутые нормальные подгруппы. Факторгруппа связной неразрешимой линейной алгебраич. группы по радикалу полупроста.

Связная линейная алгебраич. группа G положительной размерности наз. простой, если она не содержит собственных связных замкнутых нормальных подгрупп. Центр $Z(G)$ простой группы G конечен, и $G/Z(G)$ проста как абстрактная группа. Алгебраич. группа G полупроста тогда и только тогда, когда G разлагается в произведение простых связных замкнутых нормальных подгрупп.

В случае, когда основное поле есть поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, П. а. г.— это не что иное как полупростая группа Ли над $\mathbb{C}$. Оказывается, что классификация П. а. г. над произвольным алгебраически замкнутым полем K аналогична случаю $K=\mathbb{C}$, т. е. что П. а. г. определяется с точностью до изоморфизма своей корневой системой и нек-рой подрешеткой в решетке весов, содержащей все корни. Точнее, пусть T — максимальный тор в П. а. г. G, $X(T)$ — группа характеров тора T, рассматриваемая как решетка в пространстве $E=X(T)\otimes\mathbb{R}$. Для любого рационального линейного представления ρ группы G группа $\rho(T)$ является диагонализируемой. Ее собственные значения, являющиеся элементами группы $X(T)$, наз. весами представления ρ. Ненулевые веса присоединенного представления Ad наз. корнями группы G. Оказывается, что система $\Sigma\subset X(T)$ всех корней группы G является приведенной *корневой системой* в пространстве E, причем неприводимые компоненты системы Σ — это системы корней простых замкнутых нормальных подгрупп группы G. Далее, $Q(\Sigma)\subseteq X(T)\subseteq P(\Sigma)$, где $Q(\Sigma)$ — решетка радикальных весов, а $P(\Sigma)=\{\lambda\in E|\alpha^*(\lambda)\in\mathbb{Z}$ для всех $\alpha\in\Sigma\}$ — решетка весов корневой системы Σ. В случае $K=\mathbb{C}$ пространство E естественно отождествляется с вещественным подпространством $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}\subset\mathfrak{t}^*$, где $\mathfrak{t}$ — алгебра Ли тора T, натянутом на дифференциалы всех характеров, а решетки в $\mathfrak{t}$, двойственные к $Q(\Sigma)\subseteq X(T)\subseteq P(\Sigma)$, совпадают (с точностью до множителя $2\pi i$) с $\Gamma_1\supseteq\Gamma(G)\supseteq\Gamma_0$ (см. *Ли полупростая группа*).

Основная теорема классификации утверждает, что если G' — другая П. а. г., T' — ее максимальный тор, $\Sigma'\subset E'$ — система корней группы G' и если существует линейное отображение $E\to E'$, определяющее изоморфизм корневых систем Σ и Σ' и отображающее $X(T)$ на $X(T')$, то $G \cong G'$. Кроме того, для любой приведенной корневой системы Σ и любой решетки Λ, удовлетворяющей условию $Q(\Sigma) \subseteq \Lambda \subseteq P(\Sigma)$, существует такая П. а. г. G, что Σ есть система ее корней относительно максимального тора T и $\Lambda = X(T)$.

Классифицированы также все *изогении* (в частности, все автоморфизмы) П. а. г.

Лит.: [1] Стейнберг Р. Г., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [2] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980. *А. Л. Онищик.*

ПОЛУПРОСТАЯ ГРУППА (в смысле нек-рого радикала) — группа, *радикал* к-рой совпадает с единичной подгруппой. Таким образом, понятие П. г. целиком определяется выбором радикального класса групп. В теории конечных групп и групп Ли под радикалом обычно понимают наибольшую (связную) разрешимую нормальную подгруппу. В этих случаях описание П. г. сводится к описанию простых групп.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973. *А. Л. Шмелькин.*

ПОЛУПРОСТАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица над полем F, подобная матрице вида $\operatorname{diag}[d_1, \ldots, d_l]$, где d_j — матрица над F с неприводимым в $F[x]$ характеристическим многочленом, $j=1, \ldots, k$. Для матрицы A над полем F следующие три утверждения эквивалентны: (1) A полупроста; (2) минимальный многочлен матрицы A не имеет кратных множителей в $F[x]$; (3) алгебра $F[A]$ полупроста.

Если F — совершенное поле, то П. м. над F подобна диагональной матрице над нек-рым расширением F. Для всякой квадратной матрицы A над совершенным полем имеется единственное представление в виде $A = A_S + A_N$, где A_S есть П. м., A_N нильпотентна, $A_S A_N = A_N A_S$; матрицы A_S и A_N принадлежат алгебре $F[A]$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра, пер. с франц., М., 1966, гл. 8. *Д. А. Супруненко.*

ПОЛУПРОСТОЕ КОЛЬЦО — кольцо R с нулевым радикалом. Точнее, если r — нек-рый радикал (см. *Радикалы* колец и алгебр), то кольцо R наз. r-полупростым в случае, когда $r(R)=0$. Часто, говоря об ассоциативном П. к., имеют в виду *классически полупростое кольцо*. *Л. А. Скорняков.*

ПОЛУПРОСТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — то же, что вполне приводимое представление (см. *Вполне приводимое множество*).

ПОЛУПРОСТОЙ МОДУЛЬ — то же, что *вполне приводимый модуль*.

ПОЛУПРОСТОЙ ЭЛЕМЕНТ линейной алгебраической группы G — элемент $g \in G \subset \operatorname{GL}(V)$, где V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем K, являющийся *полупростым эндоморфизмом* пространства V. Понятие П. э. не зависит от реализации группы G в виде линейной группы, а определяется лишь структурой алгебраич. группы на G. Элемент $g \in G$ полупрост тогда и только тогда, когда для оператора правого сдвига ρ_g в $K[G]$ существует базис из собственных векторов. При любом рациональном линейном представлении $\varphi: G \to \operatorname{GL}(W)$ множество П. э. группы G отображается на множество П. э. группы $\varphi(G)$.

Аналогично определяются полупростые элементы алгебраической алгебры Ли $\mathfrak{g}$, отвечающей группе G; дифференциал $d\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$ представления φ отображает множество П. э. алгебры $\mathfrak{g}$ на множество П. э. своего образа.

Полупростой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это элемент $X \in \mathfrak{g}$ такой, что присоединенное линейное преобразование $\operatorname{ad} X$ является полупростым эндоморфизмом векторного пространства $\mathfrak{g}$. Если

$\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(V)$ — алгебра Ли редуктивной линейной алгебраич. группы, то X есть П. э. алгебры $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда X — полупростой эндоморфизм пространства V.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Мерзляков Ю. И., Рациональные группы, М., 1980; [3] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980. *А. Л. Онищик.*

ПОЛУПРОСТОЙ ЭНДОМОРФИЗМ, полупростое линейное преобразование, векторного пространства V над полем K — эндоморфизм α пространства V такой, что всякое подпространство в V, инвариантное относительно α, обладает инвариантным прямым дополнением. Другими словами, требуется, чтобы α определял на V структуру полупростого модуля над кольцом $K[X]$. Напр., любое ортогональное, симметрическое или кососимметрическое линейное преобразование конечномерного евклидова пространства, а также любое диагонализируемое (т. е. записывающееся в нек-ром базисе диагональной матрицей) линейное преобразование конечномерного векторного пространства являются П. э. Полупростота эндоморфизма сохраняется при переходе к инвариантному подпространству $W\subset V$ и к факторпространству V/W.

Пусть $\dim V<\infty$. Эндоморфизм $\alpha: V\to V$ является П. э. тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен не имеет кратных множителей. Пусть, кроме того, L — расширение поля K и $\alpha_{(L)}=\alpha\otimes 1$ — продолжение эндоморфизма α на пространство $V_{(L)}=V\otimes_K L$. Если $\alpha_{(L)}$ полупрост, то и α полупрост, а если L сепарабельно над K, то верно и обратное. Эндоморфизм α наз. абсолютно полупростым, если $\alpha_{(L)}$ полупрост для любого расширения $L\supset K$; для этого необходимо и достаточно, чтобы минимальный многочлен не имел кратных корней в алгебраич. замыкании $\overline{K}$ поля K, т. е. чтобы эндоморфизм $\alpha_{(\overline{K})}$ был диагонализируем.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966. *А. Л. Онищик.*

ПОЛУПРЯМАЯ — одна из частей прямой, на к-рые разбивается прямая любой ее точкой O. Если точка O отнесена к П., то П. наз. замкнутой П. (или лучом). *БСЭ-3.*

ПОЛУПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ группы A на группу B — группа $G=AB$, являющаяся произведением своих подгрупп A и B, причем B нормальна в G, и $A\cap B=\{1\}$. Если также и A нормальна в G, то П. п. превращается в *прямое произведение.* П. п. по группам A и B строится неоднозначно. Для построения П. п. нужно еще знать, какие автоморфизмы на группе B вызывают сопряжения элементами из A. Точнее, если $G=AB$ — П. п., то каждому элементу $a\in A$ соответствует автоморфизм $\alpha_a\in\operatorname{Aut}B$, являющийся сопряжением элементом a:

$$\alpha_a(b)=aba^{-1},\ b\in B.$$

При этом соответствие $a\mapsto\alpha_a$ есть гомоморфизм $A\to\operatorname{Aut}B$. Обратно, если A и B — произвольные группы, то для любого гомоморфизма $\varphi: A\to\operatorname{Aut}B$ существует единственное П. п. группы A на группу B такое, что $\alpha_a=\varphi(a)$ для любого $a\in A$. П. п. является частным случаем *расширения* группы B с помощью группы A, такое расширение наз. расщепляющимся.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *А. Л. Шмелькин.*

ПОЛУПСЕВДОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — векторное пространство с вырожденной индефинитной метрикой. П. п. ${}^{l_1\ldots l_r}R_n^{m_1\ldots m_{r-1}}$ определяется как n-мерное пространство, в к-ром задано r скалярных произведений

$$(x,\ y)_a=\sum\varepsilon_{i_a}x^{i_a}y^{i_a},$$

где $0=m_0<m_1<\ldots<m_r=n$; $a=1, 2, \ldots, r$; $i_a=m_{a-1}+1, \ldots, m_a$, $\varepsilon_{i_a}=\pm 1$, причем -1 среди чисел ε_{i_a} встречается l_a раз. Произведение $(x, y)_a$ определено для тех векторов, для к-рых все координаты x^i при $i\leqslant m_{a-1}$ равны нулю. На этих векторах справедливо равенство $(x, y)_{a-1}=0$. Первый скалярный квадрат произвольного вектора x П. п. является вырожденной квадратичной формой от координат вектора:

$$(x, x)=-(x_1)^2-(x_2)^2-\ldots-(x^{l_1})^2+(x^{l+1})^2+\ldots+(x^{n-d})^2,$$

где l — индекс, $d=n-m_1$ — дефект П. п. При $l_1=l_2=\ldots=l_r=0$ П. п. является *полуевклидовым пространством*. В П. п. определяются m-мерные плоскости ($m<n$), прямые, параллельность, длина вектора так же, как в псевдоевклидовых пространствах. В П. п. ${}^{l+(d)}R_n$ можно выбрать ортогональный базис, состоящий из l векторов мнимой длины, $n-l-d$ вещественной длины и d изотропных векторов. Через каждую точку П. п. дефекта d можно провести d-мерную изотропную плоскость, каждый вектор к-рой ортогонален всем векторам П. п. См. также *Галилеево пространство*.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Д. Д. Соколов.*

ПОЛУПСЕВДОРИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — многообразие с вырожденной индефинитной метрикой. П. п. ${}^{l_1\ldots l_r}V_n^{m_1\ldots m_{r-1}}$ определяется как n-мерное многообразие с координатами x^i, в к-ром задано r линейных элементов

$$ds_a^2=g_{(a)ij}\,dx^{i_a}\,dx^{j_a},$$

где $0=m_0<m_1<\ldots<m_r=n$; $a=1, 2, \ldots, r$; $i_a=m_{a-1}+1, \ldots, m_a$, причем индекс квадратичной формы $g_{(a)ij}$ равен l_a. Линейный элемент ds_a^2 определен для тех векторов, для к-рых все координаты dx^i при $i\leqslant m_{a-1}$ равны нулю (для этих векторов справедливо равенство $ds_{a-1}^2=0$). При $l_1=l_2=\ldots=l_r=0$ П. п. является *полуримановым пространством*. Пространства V_n^m и ${}^{kl}V_n^m$ являются квазиримановыми пространствами. В П. п. определяются основные понятия дифференциальной геометрии (напр., кривизна) по аналогии с римановыми пространствами (см. [1]).

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Д. Д. Соколов.*

ПОЛУРЕШЕТКА, полуструктура,— коммутативная идемпотентная полугруппа, т. е. полугруппа с тождествами $x+y=y+x$ и $x+x=x$. Всякая полурешетка $p=\langle p, +\rangle$ может быть превращена в *частично упорядоченное множество* (частичный порядок $\leqslant$ вводится соотношением $a\leqslant b\Leftrightarrow a+b=b$), в к-ром для любой пары элементов существует точная верхняя грань $\sup\{a, b\}=a+b$. Обратно, всякое частично упорядоченное множество с точными верхними гранями для любых пар элементов является П. относительно операции $a+b=\sup\{a, b\}$. В этом случае говорят, что частично упорядоченное множество является верхней полурешеткой (или полурешеткой по объединениям, или V-полурешеткой). Нижняя полурешетка, называемая также полурешеткой по пересечениям, или Λ-полурешеткой, определяется дуально как частично упорядоченное множество, в к-ром для любых двух элементов существует точная нижняя грань.

Т. С. Фофанова.

ПОЛУРИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство с полуримановой метрикой (с вырожденным метрич. тензором). П. п. является обобщением понятия *риманова пространства*. Определение П. п. может быть выражено с помощью понятий, применяемых при определении риманова пространства. В определении риманова пространства V_n используется в качестве касательного пространства евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, причем касательные векторы в каждой точке $X(x^1 \ldots x^n) \in V_n$ инвариантны при параллельных переносах V_n (метрич. тензор a_{ij} пространства V_n абсолютно постоянен). Если в качестве касательного пространства в каждой точке пространства V_n берется *полуевклидово пространство* $R_n^{m_1 m_2 \ldots m_{r-1}}$, то метрика пространства V_n будет являться вырожденной, метрич. тензор также абсолютно постоянен, но является теперь вырожденным, его матрица имеет ранг m_1 и имеет неособенную подматрицу. Определяется второй вырожденный метрич. тензор в $(n-m_1)$-плоскости $(a_{ij}x^j=0)$, к-рая наз. нулевой $(n-m_1)$-плоскостью тензора a_{ij}; его матрица также обладает неособенной подматрицей и т. д. Последний, r-й метрич. тензор, определенный в нулевой $(n-m_{r-1})$-плоскости $(r-1)$-го тензора,— невырожденный тензор с неособенной матрицей. Такое пространство и наз. П. п. и в этом случае обозначается символом $V_n^{m_1 m_2 \ldots m_{r-1}}$. Аналогично определяется П. п. вида ${}^{l_1 l_2 \ldots l_r}V^{m_1 m_2 \ldots m_{r-1}}$, т. е. когда в качестве касательного пространства берется полупсевдоевклидово пространство ${}^{l_1 l_2 \ldots l_r}R_n^{m_1 m_2 \ldots m_{r-1}}$. Пространства V_n^m и ${}^{kl}V_n^m$ наз. квазиримановыми пространствами.

Как и в римановом пространстве, в П. п. вводится понятие кривизны в двумерном направлении. Полугиперболич. и полуэллиптич. пространства являются П. п. постоянной ненулевой кривизны, а полуевклидово пространство — П. п. постоянной нулевой кривизны.

Таким образом, П. п. может быть определено как пространство аффинной связности (без кручения), касательные пространства к-рого в каждой точке являются полуевклидовыми (или полупсевдоевклидовыми), причем метрич. тензор П. п. является абсолютно постоянным.

В П. п. дифференциальная геометрия линий и поверхностей строится по аналогии с дифференциальной геометрией линий и поверхностей в V_n с учетом указанной выше специфичности П. п. Поверхности полугиперболич. и полуэллиптич. пространств сами являются П. п. В частности, m-орисфера полугиперболич. пространства ${}^{m+1}S_n$ изометрична П. п. $V_{n-1}^{m;\, n-m-1}$, метрика к-рого сводится к метрике полуэллиптич. пространства S_{n-m-1}^m; этот факт является обобщением изометричности орисферы пространства Лобачевского евклидовому пространству.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Л. А. Сидоров.*

ПОЛУСИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — проективное $(2n+1)$-пространство, в к-ром задана $(2n-2m_0-1)$-плоскость T_0, в ней — $(2n-2m_1-1)$-плоскость T_1 и т. д. до $(2n-2m_{r-1}-1)$-плоскости T_{r-1}, при этом в пространстве задана нуль-система, переводящая все точки пространства в плоскости, проходящие через плоскость T_0; в плоскости T_0 задана абсолютная нуль-система, переводящая все ее точки в $(2n-2m_0-2)$-плоскости, лежащие в ней и проходящие через $(2n-2m_1-1)$-плоскость T_1 и т. д. до абсолютной нуль-системы $(2n-2m_{r-1}-1)$-плоскости T_{r-1}, переводящей все ее точки в $(2n-2m_{r-1}-2)$-плоскости, лежащие в ней, $0 \leqslant m_0 < m_1 < \ldots < m_{r-1} < n$. П. п. обозначается $\mathrm{Sp}_{2n+1}^{2m_0+1,\, \ldots,\, 2m_{r-1}+1}$.

П. п. получается методом, аналогичным переходу от эллиптич. и гиперболич. пространств к полуэллиптич. и полугиперболич. пространствам, и является более общим по отношению к квазисимплектич. пространству.

Коллинеации П. п., переводящие в себя плоскости T_i, перестановочные с нуль-системами, наз. полусимплектическими преобразованиями П. п.

Существуют инварианты полусимплектич. преобразований, аналогичные симплектич. инварианту симплектич. пространств. Полусимплектич. преобразования образуют группу, являющуюся группой Ли.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Л. А. Сидоров.*

ПОЛУСИМПЛИЦИАЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС — прежнее название симплициального множества, данное при первом рассмотрении объектов такого рода.

М. И. Войцеховский.

ПОЛУСОВЕРШЕННОЕ КОЛЬЦО — кольцо, каждый конечно порожденный левый (или каждый конечно порожденный правый) модуль над к-рым обладает проективным накрытием. Кольцо R с радикалом Джекобсона J оказывается П. к. тогда и только тогда, когда R полулокально и у каждого идемпотента факторкольца R/J имеется идемпотентный прообраз в R. Первое условие можно заменить требованием классич. полупростоты факторкольца R/J, а второе — возможностью «поднимать» из R/J в R модульные прямые разложения. П. к. характеризуются также условием, что каждый модуль допускает прямое разложение, относительно к-рого дополняемы максимальные прямые слагаемые. Кольцо матриц над П. к. является П. к.

См. также *Совершенное кольцо* и лит. при этой статье.

Л. А. Скорняков.

ПОЛУТОРАЛИНЕЙНАЯ ФОРМА — функция от двух переменных на модуле (напр., на векторном пространстве), линейная по одному переменному и полулинейная по другому. Точнее, П. ф. на унитарном модуле E над ассоциативно-коммутативным кольцом A с единицей, снабженным автоморфизмом $a \to a^\sigma$, наз. отображение $\varphi : E \times E \to A$, линейное при фиксированном втором аргументе и полулинейное (см. *Полулинейное отображение*) при фиксированном первом аргументе. Аналогично определяется полуторалинейное отображение $E \times F \to G$, где E, F, G — A-модули. В случае, когда $a^\sigma = a$ $(a \in A)$, получается понятие *билинейной формы* (и *билинейного отображения*). Другой важный пример П. ф. получается, когда V — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ и $a^\sigma = \bar{a}$. Специальным случаем П. ф. являются *эрмитовы формы* (а также косоэрмитовы формы).

П. ф. можно рассматривать и на модулях над некоммутативным кольцом A; в этом случае предполагается, что σ — антиавтоморфизм, т. е. что

$$(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma, \ a, \ b \in A.$$

Для П. ф. удается ввести многие понятия теории билинейных форм, напр. понятия ортогонального подмодуля, левого и правого ядра, невырожденной формы, матрицы формы в данном базисе, ранга формы, сопряженных гомоморфизмов.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968. *А. Л. Онищик.*

ПОЛУУПОРЯДОЧЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО — общее название векторных пространств, в к-рых определено бинарное отношение частичного порядка, согласованное определенным образом с векторной структурой пространства. Введение порядка в функциональных пространствах позволяет исследовать в общих рамках функционального анализа такие задачи, к-рые существенно связаны с неравенствами между функциями, с выделением классов положительных функций. Однако, в отличие от множества действительных чисел, допускающего полное упорядочение, естественный порядок в функциональных пространствах оказывается лишь частичным; напр., в пространстве $C[a, b]$ естественно считать, что функция f мажорирует функцию g, если $f(t) \geqslant g(t)$ при всех $t \in [a, b]$. Но при таком определении порядка многие функции окажутся несравнимыми между собой.

Упорядоченные векторные пространства (у. в. п.). Векторное пространство X над полем действительных чисел наз. упорядоченным, если в нем определено бинарное отношение порядка, причем $x \geqslant y$ влечет $x+z \geqslant y+z$ для любого $z \in X$ и $\lambda x \geqslant \lambda y$ для любого числа $\lambda \geqslant 0$. Таково, напр., $C[a, b]$ с естественным порядком. Если отношение $\geqslant$ есть порядок, то множество $X_+ = \{x \in X : x > 0\}$ — конус, наз. положительным конусом. Обратно, если в векторном пространстве X задан конус K с вершиной в нуле, то в X может быть введен такой порядок, при к-ром $X_+ = K$: следует положить $x \geqslant y$, если $x-y \in K$. Рассматриваются и более общие у. в. п., в к-рых определена лишь структура квазипорядка. В этом случае множество X_+ есть клин, а всякий клин с вершиной в нуле порождает в X квазипорядок.

Пусть у. в. п. X наделено порядком. Конус X_+ наз. воспроизводящим, если $X_+ - X_+ = X$. Это свойство конуса X_+ необходимо и достаточно, для того чтобы любое конечное подмножество из X было ограниченным (сверху и снизу). Те у. в. п., в к-рых всякое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань, иначе — точную верхнюю границу, или супремум (а тогда и всякое ограниченное снизу множество имеет нижнюю грань, иначе — точную нижнюю границу, или инфимум), наз. порядково полными или (o)-полными. Более слабый вид полноты в у. в. п. определяется следующим образом: у. в. п. наз. дедекиндово полным, если всякое его ограниченное сверху и направленное вверх подмножество имеет верхнюю грань (множество $E \subset X$ направлено вверх, если для любых $x_1, x_2 \in E$ существует такой $x_3 \in E$, что $x_3 \geqslant x_1, x_2$). Если это требование выполнено для ограниченных возрастающих последовательностей, то у. в. п. наз. дедекиндово (o)-полным. Дедекиндова полнота слабее (o)-полноты. Напр., если X — произвольное бесконечномерное банахово пространство, $u \in X$, $0 < r \leqslant \|u\|$, а K — конус, натянутый на замкнутый шар $S(u; r)$ и элемент 0, и с помощью K в X введен порядок, то X — дедекиндово полное, но не (o)-полное. У. в. п. наз. архимедовым, если в нем выполнена *Архимеда аксиома*. В частности, архимедовым является всякое дедекиндово (o)-полное у. в. п.

В у. в. п. вводится понятие порядковой сходимости: последовательность $\{x_n\}$ (o)-сходится к элементу x $(x_n \xrightarrow{(o)} x)$, если существуют такие возрастающая и убывающая последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$, что $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ и $\sup y_n = x = \inf z_n$. (o)-предел обладает многими свойствами предела в множестве действительных чисел, однако нек-рые из них справедливы лишь в архимедовых у. в. п.

Линейный оператор A, действующий из у. в. п. X в у. в. п. Y (в частности, линейный функционал с действительными значениями), наз. положительным, если $AX_+ \subset Y_+$. Для положительных функционалов справедлива следующая теорема о распространении. Пусть E — линейное подмножество в X, мажорирующее конус X_+ (это означает, что для любого $x \in X_+$ существует такой $y \in E$, что $y \geqslant x$). Всякий линейный функционал, заданный на E и положительный относительно конуса $E \cap X_+$, допускает линейное положительное распространение на все X.

Векторная решетка (в. р.) — у. в. п., в к-ром отношение порядка определяет структуру решетки. При этом для определения в. р. достаточно постулировать для любых двух элементов из у. в. п. существование одной из граней: верхней $x \vee y$ или нижней $x \wedge y$. Напр., если существует $x \vee y$, то $x \wedge y = x + y - x \vee y$. Если X — в. р., то конус X_+ наз. миниэдральным. В в. р. для любого ее элемента x существуют положительная и отрицательная части: $x_+ = x \vee 0$ и $x_- = (-x) \vee 0$.

При этом $x=x_+-x_-$, и эта формула дает «минимальное» представление x в виде разности положительных элементов, т. е. если $x=y-z$, где $y, z\geqslant 0$, то $x_+\leqslant y$, $x_-\leqslant z$. Миниэдральный конус является воспроизводящим. Элемент $|x|=x_++x_-$ наз. модулем элемента x. В пространстве $C[a, b]$ с естественным упорядочением положительный конус миниэдрален, положительная часть любой функции $x(t)$ из C получается из $x(t)$ заменой ее отрицательных значений нулем, а модуль есть функция $|x(t)|$. В в. р. всякое конечное множество элементов имеет обе грани. Модуль элемента в. р. обладает многими свойствами абсолютной величины действительного числа.

В. р. наз. дистрибутивной, если для произвольного множества ее элементов $\{x_\alpha\}$, у к-рого существует $\sup x_\alpha$, при любом $y\in X$ справедлива формула: $y\wedge\wedge\sup x_\alpha=\sup\{y\wedge x_\alpha\}$. Тогда верна и двойственная формула: $y\vee\inf x_\alpha=\inf\{y\vee x_\alpha\}$.

Теорема о двойном разбиении положительных элементов: если $x=y+z$, где $y, z\geqslant 0$, и одновременно $x=x_1+\ldots+x_n$, где все $x_i\geqslant 0$, то каждый x_i можно представить в виде $x_i=y_i+z_i$ так, что все $y_i, z_i\geqslant 0$ и что

$$y=y_1+\ldots+y_n,\ z=z_1+\ldots+z_n.$$

Два элемента x, y в. р. наз. дизъюнктными (xdy), если $|x|\wedge|y|=0$. Два множества A, B наз. дизъюнктными, если adb для любых $a\in A, b\in B$. В пространстве $C[a, b]$ дизъюнктность xdy означает, что $x(t)y(t)\equiv 0$. Положительный элемент e наз. слабой единицей (единицей в смысле Фрейденталя), если 0 — единственный элемент, дизъюнктный с e. В $C[a, b]$ слабой единицей является любая функция, к-рая больше 0 на всюду плотном множестве. Если же элемент e таков, что для любого x существует λ, при к-ром $|x|\leqslant\lambda e$, то e наз. сильной единицей, а X с сильной единицей наз. в. р. ограниченных элементов. В $C[a, b]$ сильная единица — любая функция, для к-рой $\min x(t)>0$. Если в архимедовой в. р. X с сильной единицей e положить $\|x\|=\min\{\lambda : |x|\leqslant\lambda e\}$, то X становится нормированной решеткой.

На плоскости любой конус, кроме одномерного (т. е. луча), миниэдрален. Но в пространствах с большим числом измерений среди замкнутых конусов много не миниэдральных, напр. таковы все «круглые» конусы в $\mathbb{R}^3$. Для того чтобы конус (с вершиной в нуле) в n-мерном архимедовом у. в. п. был миниэдральным, необходимо и достаточно, чтобы он был натянут на $(n-1)$-мерный симплекс с линейно независимыми вершинами. Всякая архимедова n-мерная в. р. изоморфна пространству $\mathbb{R}^n$ с покоординатным упорядочением.

***K*-пространства** (К.-п.), пространства Канторовича, суть (o)-полные в. р. Это — основной класс П. п., они всегда архимедовы. (o)-сходимость в К.-п. описывается с помощью верхнего и нижнего пределов, именно, для огранич. последовательности $\{x_n\}$

$$\overline{\lim}\, x_n=\inf_n\sup_{m\geqslant n} x_m,\ \underline{\lim}\, x_n=\sup_n\inf_{m\geqslant n} x_m$$

и тогда $x_n\xrightarrow{(o)}x$ означает, что $x=\overline{\lim}\, x_n=\underline{\lim}\, x_n$. Пусть X есть К.-п. Для любого множества $E\subset X$ его дизъюнктным дополнением наз. множество $E^d=\{x\in X : x\,dE\}$. Всякое множество, к-рое является дизъюнктным дополнением (к какому-либо множеству), наз. полосой. Для любого множества E существует наименьшая полоса, содержащая E, именно E^{dd}; она наз. полосой, порожденной множеством E. Если само E есть полоса, то $E^{dd}=E$. Полоса, порожденная одноэлементным множеством, наз. главной. Понятие полосы вводится и в любой в. р., однако в К.-п. оно играет особую роль, поскольку справедлива теорема о проектировании на полосу: если E — полоса в X, то для любого $x \in X$ существует единственное разложение $x=y+z$, где $y \in E$, $z \in E^d$. Определенный при этом линейный оператор $y=\mathrm{Pr}_E x$ наз. проектором на полосу E. Если задана произвольная совокупность попарно дизъюнктных полос E_α, полная в том смысле, что 0 — единственный элемент из X, дизъюнктный всем E_α, то любой $x \in X_+$ представим в виде $x=\sup x_\alpha$, где $x_\alpha=\mathrm{Pr}_{E_\alpha} x$. Всякий l-идеал $Y \subset X$ также является К.-п. Однако если $x_n \in Y$ и $x_n \xrightarrow{(o)} x$ в X, то это соотношение верно и в Y только в том случае, когда последовательность $\{x_n\}$ ограничена в Y.

Примером К.-п. служит пространство S всех действительных почти всюду конечных измеримых функций на [0, 1], в к-ром эквивалентные функции отождествляются. Функция $x \in S$ считается положительной, если $x(t) \geqslant 0$ почти всюду. Если $A=\{x_n\}$ — счетное ограниченное сверху подмножество из S (ограниченность сверху означает, что существует такая $y \in S$, что $x_n(t) \leqslant y(t)$ почти всюду для любого n), то функция $x(t)=\sup x_n(t)$ и будет верхней гранью множества A, т. е. $\sup A$ вычисляется поточечно. Однако для несчетных множеств вычисление граней таким же способом уже невозможно, и существование у несчетных множеств ограниченных множеств в S устанавливается сложнее. (o)-сходимость в S означает сходимость почти всюду. Все пространства $L_p=[0, 1]$, $p>0$, являются l-идеалами в S, и потому они тоже являются К.-п.

Важную роль играет теорема Рисса — Канторовича о том, что множество всех порядково ограниченных операторов (т. е. линейных операторов, переводящих ограниченные по упорядочению множества в такие же) из в. р. в К.-п. при естественном порядке ($A \leqslant B$ означает, что $Ax \leqslant Bx$ при всех $x \geqslant 0$) само является К.-п. Теория К.-п. нашла приложения в выпуклом анализе и теории экстремальных задач. Многие результаты здесь основываются на теореме Хана — Банаха — Канторовича о продолжении линейных операторов со значениями в К.-п.

К.-п. наз. расширенным, если всякое множество его попарно дизъюнктных элементов ограничено. В расширенном К.-п. всегда существует слабая единица. Для любого К.-п. X существует единственное (с точностью до изоморфизма) расширенное К.-п. Y, в к-рое X погружается как l-идеал, а полоса в Y, порожденная X, совпадает с Y. Такое Y наз. максимальным расширением К.-п. Пространство S [0, 1] — максимальное расширение для всех пространств L_p[0, 1}. Понятие расширенного К.-п. играет существенную роль во всей теории П. п., в частности при представлении К. п. с помощью функций.

С в. р. и К.-п. тесно связано понятие решеточно-нормированного пространства — векторного пространства, каждому элементу к-рого сопоставлена его обобщенная норма, являющаяся элементом фиксированной в. р. и удовлетворяющая обычным для нормы аксиомам, в к-рых знак неравенства понимается в смысле *порядка в* указанной в. р. Такие пространства используются в теории функциональных уравнений (теоремы существования; методы приближенного решения; метод Ньютона — Канторовича; монотонные процессы последовательных приближений и т. д.).

Топологические полуупорядоченные пространства. В функциональном анализе используются также у. в. п., в к-рых одновременно определена еще нек-рая топология, согласованная с порядком. Простейший и важнейший пример такого пространства — *банахова решетка*. Обобщением понятия банаховой решетки служит локально выпуклая решетка.

Важный класс банаховых К.-п. составляют КВ-пространства (КВ-п.), Канторовича —

Банаха пространства. Так называется банахово К.-п., удовлетворяющее двум дополнительным условиям: 1) $x_n\downarrow 0$ влечет $\|x_n\|\to 0$ (порядковая непрерывность нормы); 2) если последовательность $\{x_n\}$ возрастает и не ограничена по порядку, то $\|x_n\|\to+\infty$. В КВ-п. удается описать с помощью нормы многие факты, опирающиеся по своему смыслу только на порядок. Напр., $x_n \xrightarrow{(o)} 0$ означает, что $\||x_n|\vee\ldots\vee|x_{n+m}|\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ равномерно относительно m. Для того чтобы множество в КВ-п. E было ограничено по порядку, необходимо и достаточно, чтобы ограниченным было множество всех чисел вида $\||x_1|\vee\ldots\vee|x_n|\|$, где $x_i\in E$. КВ-п. есть регулярное К.-п.

Пример КВ-п.: $L_p[0, 1]$ при $1\leqslant p<+\infty$.

Пусть X — произвольное локально выпуклое пространство, наделенное структурой у. в. п. и имеющее т. н. нормальный конус X_+; при этом нормальность X_+ равносильна тому, что в X существует база окрестностей нуля, состоящая из абсолютно выпуклых и порядково насыщенных множеств U (последнее означает, что если $x, y\in U$ и $x\leqslant y$, то и весь интервал $[x, y]\in U$). Для того чтобы каждый непрерывный линейный функционал на локально выпуклом у. в. п. был представим в виде разности положительных непрерывных линейных функционалов, необходима и достаточна нормальность конуса X_+ в слабой топологии. Для нормированных пространств нормальность конуса в слабой и сильной топологии равносильны.

Лит.: [1] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961; [2] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.— Л., 1950; [3] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [4] Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962; [5] Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А., Топологические алгебры Буля, Таш., 1963; [6] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [7] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [8] Функциональный анализ, М., 1972 (Справоч. матем. б-ка); [9] Вулих Б. З., Введение в теорию конусов в нормированных пространствах, Калинин, 1977; [10] Крейн М. Г., Рутман М. А., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1, с. 3—95; [11] Бухвалов А. В., Векслер А. И., Лозановский Г. Я., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 2, с. 137—83; [12] Акилов Г. П., Кутателадзе С. С., Упорядоченные векторные пространства, Новосибирск, 1978. *Б. З. Вулих.*

ПОЛУЦЕПНОЕ КОЛЬЦО, полуцепное слева (справа) кольцо,— кольцо, являющееся левым (правым) *полуцепным модулем* над самим собой.

Л. А. Скорняков.

ПОЛУЦЕПНОЙ МОДУЛЬ — модуль, разлагающийся в прямую сумму цепных подмодулей (см. *Цепной модуль*). Все левые R-модули оказываются П. м. тогда и только тогда, когда R — обобщенно *однорядное кольцо.*

Л. А. Скорняков.

ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — проективное n-пространство, в к-ром метрика определяется заданным абсолютом, состоящим из совокупности мнимого конуса 2-го порядка Q_0 с $(n-m_0-1)$-плоской вершиной T_0, $(n-m_0-2)$-мнимого конуса Q_1 с $(n-m_1-1)$-плоской вершиной T_1 в $(n-m_0-1)$-плоскости T_0, $(n-m_1-2)$-мнимого конуса Q_2 с $(n-m_2-1)$-плоской вершиной T_2 в $(n-m_1-1)$-плоскости T_1 и т. д. до $(n-m_{r-1}-2)$-мнимого конуса Q_{r-1} с $(n-m_{r-1}-2)$-плоской вершиной T_{r-1} и невырожденной мнимой $(n-m_{r-1}-2)$-квадрикой Q_r в $(n-m_{r-1}-1)$-плоскости T_{r-1}, $0\leqslant m_0<m_1<\ldots<m_{r-1}<n$. Индексы конусов Q_k, $k=0, 1, \ldots, r-1$ равны: $l_0=m_0+1$; $l_a=m_0-m_{a-1}$, $0<a<r$; $l_r=n-m_{r-1}$. П. п. обозначается $S_n^{m_0m_1\ldots m_{r-1}}$.

В случае, когда конус Q_0 является парой слившихся плоскостей, совпадающих с плоскостью T_0 (при $m_0=0$), пространство с несобственной плоскостью T_0 наз. *полуевклидовым пространством* $R_n^{m_1m_2\ldots m_{r-1}}$.

Расстояние между точками X и Y определяется в зависимости от расположения прямой XY относительно плоскостей T_0, T_1, ..., T_{r-1}. Если, в частности, прямая XY не пересекает плоскость T_0, то расстояние между точками X и Y определяется с помощью скалярного произведения аналогично определению расстояния в *квазиэллиптическом пространстве*. Если же прямая XY пересекает плоскость T_0, но не пересекает плоскость T_1 или пересекает плоскость T_{a-1}, но не пересекает плоскость T_a, расстояние между точками определяется с помощью скалярного квадрата разности соответствующих векторов точек X и Y.

В зависимости от расположения относительно плоскостей абсолюта в П. п. различаются четыре типа прямых.

Углы между плоскостями в П. п. определяются аналогично определению углов между плоскостями в квазиэллиптич. пространстве, т. е. с использованием расстояний в двойственном пространстве.

Проективная метрика П. п. является метрикой наиболее общего вида. Частным случаем метрики П. п. является, напр., метрика квазиэллиптич. пространства. В частности, 2-плоскость S_2^0 совпадает с евклидовой, S_2^1 — с коевклидовой, 3-пространство S_3^1 — с квазиэллиптическим, S_3^0 — с евклидовыми 3-пространствами, 3-пространство S_3^{01} является галилеевым, S_3^{012} — флаговым пространством и т. д. 3-пространство S_3^{12} соответствует по принципу двойственности галилееву 3-пространству Γ_3 и наз. когалилеевым пространством. (Абсолют когалилеева пространства состоит из пары мнимых плоскостей (конус Q_0) и точки T_1 на прямой T_0 пересечения этих плоскостей.)

Движениями П. п. являются его коллинеации, переводящие абсолют в себя. В случае $m_a = n - m_{r-a-1} - 1$, $l_a = l_{r-a}$ П. п. является двойственным самому себе, в нем определяются кодвижения, определение к-рых аналогично определению кодвижений квазиэллиптич. пространства.

Движения, движения и кодвижения образуют группы, являющиеся группами Ли. Движения (как и кодвижения) описываются ортогональными операторами.

П. п. являются *полуримановыми пространствами*.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Л. А. Сидоров.*

ПОЛЬКЕ — ШВАРЦА ТЕОРЕМА: любой полный плоский четырехугольник может служить параллельной проекцией тетраэдра, подобного любому данному.

Теорема впервые высказана в иной форме К. Польке (K. Pohlke, 1853), обобщена Г. Шварцем (H. Schwarz, 1864).

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4— Геометрия, М., 1963. *А. Б. Иванов.*

ПОЛЮС — 1) П. координат — начало координат в *полярных координатах*.

2) П.— центр *инверсии*.

3) П. прямой p относительно линии 2-го порядка — точка P, для к-рой прямая p является *полярой* точки P относительно данной линии 2-го порядка. *А. Б. Иванов.*

ПОЛЮС — изолированная *особая точка* a однозначного характера аналитич. функции $f(z)$ комплексного переменного z такая, что $|f(z)|$ неограниченно возрастает при приближении к a, $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$. В достаточно малой проколотой окрестности $V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}$ точки $a \neq \infty$ или $V' = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < \infty\}$ в случае бесконечно удаленной точки $a = \infty$ функция $f(z)$ представима в виде ряда Лорана специального вида:

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad a \neq \infty, \quad c_{-m} \neq 0, \quad z \in V, \quad (1)$$

или соответственно

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{\infty}\frac{c_k}{z^k},\ a=\infty,\ c_{-m}\neq 0,\ z\in V', \qquad (2)$$

с конечным числом отрицательных степеней в главной части при $a\neq\infty$ или соответственно конечным числом положительных степеней при $a=\infty$. Натуральное число m в этих разложениях наз. порядком, или кратностью, полюса a; при $m=1$ П. наз. простым. Разложения (1) и (2) показывают, что функция $p(z)=(z-a)^m f(z)$ при $a\neq\infty$ или $p(z)=z^{-m}f(z)$ при $a=\infty$ аналитически продолжается в полную окрестность полюса a, причем $p(a)\neq 0$. Иначе полюс a порядка m можно еще охарактеризовать тем, что функция $1/f(z)$ имеет в этой точке a нуль кратности m.

Точка $a=(a_1, \dots, a_n)$ комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 2$, наз. П. аналитич. функции $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, \dots, z_n)$, если выполняются следующие условия: 1) $f(z)$ голоморфна всюду в нек-рой окрестности U точки a, за исключением множества $P\subset\subset U$, $a\in P$; 2) $f(z)$ не продолжается аналитически ни в одну точку P; 3) существует голоморфная в U функция $q(z)\not\equiv 0$ такая, что голоморфная в $U\setminus P$ функция $p(z)=q(z)f(z)$ голоморфно продолжается во всю окрестность U, причем $p(a)\neq 0$. Здесь также

$$\lim_{z\to a} f(z)=\lim_{z\to a}\frac{p(z)}{q(z)}=\infty,$$

однако при $n\geqslant 2$ П., как и особые точки вообще, не могут быть изолированными.

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

ПОЛЯ ОПЕРАТОР — линейное слабо непрерывное отображение $f\to\varphi_f$, $f\in D^L(\mathbb{R}^4)$, пространства $D^L(\mathbb{R}^4)$ основных функций $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^4$, принимающих значения из конечномерного векторного пространства L, в множество операторов (вообще говоря, неограниченных), определенных на плотном линейном многообразии $D_0\in H$ нек-рого гильбертова пространства H. При этом предполагается, что как в L, так и в H действуют нек-рые представления $g\to T_g$(в L) и $g\to U_g$ (в H), $g\in G$, неоднородной группы Лоренца G, причем так, что выполнено равенство

$$U_g\varphi_f U_g^{-1}=\varphi_{\tau_g f},\ g\in G,\ f\in D^L(\mathbb{R}^4), \qquad (*)$$

где

$$(\tau_g f)(x)=T_g f(g^{-1}x),\ x\in\mathbb{R}^4.$$

В зависимости от представления в L (скалярного, векторного, спинорного и т. д.) поле $\{\varphi_f, f\in D^L(\mathbb{R}^4)\}$ наз. соответственно скалярным, векторным или спинорным. Семейство П. о. $\{\varphi_f, f\in D^L(\mathbb{R}^4)\}$ вместе с представлениями $\{T_g, g\in G\}$ и $\{U_g, g\in G\}$, для к-рых выполнено условие (*), а также еще ряд общих требований (см. [1]), наз. квантовым (или квантованным) полем.

Кроме нек-рых моделей, относящихся к двумерному или трехмерному миру (см. [2], [4]), построены (1983) только простые примеры т. н. свободных квантовых полей [3].

Лит.: [1] Йост Р., Общая теория квантованных полей, пер. с англ., М., 1967; [2] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [3] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957; [4] Евклидова теория поля. Марковский подход, пер. с англ., М., 1978. *Р. А. Минлос.*

ПОЛЯРА — 1) П. точки P относительно невырожденной линии 2-го порядка — множество точек N, гармонически сопряженных с точкой P относительно точек M_1 и M_2 пересечения линии 2-го порядка секущими, проходящими через точку P. Поляра является прямой линией. Точку P наз. *полюсом.* Если точка P лежит вне линии 2-го порядка (через точку P можно провести две касательные к линии), то П. проходит через точки касания данной линии с прямыми, проведенными через точку P (см. рис. 1). Если точка P лежит на линии 2-го порядка, то П. является прямая, касательная к данной линии в этой точке. Если П. точки P проходит через точку Q, то П. точки Q проходит через точку P (см. рис. 2).

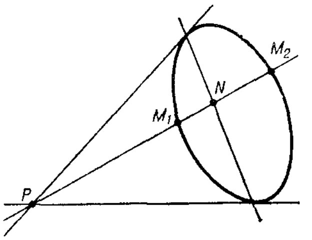


Рис. 1.

Всякая невырожденная линия 2-го порядка определяет биекцию точек проективной плоскости и множества ее прямых — *поляритет* (полярное преобразование). Соответствующие при этом преобразовании фигуры наз. взаимно полярными. Фигура, совпадающая со своей взаимно полярной, наз. автополярной (см., напр., автополярный трехвершинник PQR на рис. 2).

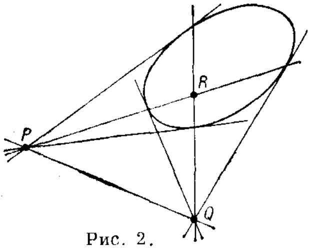


Рис. 2.

Аналогично определяется П. (полярная плоскость) нек-рой точки относительно невырожденной поверхности 2-го порядка.

Понятие П. относительно линии 2-го порядка обобщается на линии n-го порядка. При этом заданной точке плоскости ставится в соответствие $n-1$ поляр относительно линии n-го порядка. Первая из этих П. является линией порядка $n-1$, вторая, являющаяся П. заданной точки относительно первой П., имеет порядок $n-2$ и т. д. и, наконец, $(n-1)$-я П. является прямой линией.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [2] Постников М. М., Аналитическая геометрия, М., 1973.
А. Б. Иванов.

2) П. A° подмножества A локально выпуклого топологического векторного пространства E — множество функционалов f из сопряженного пространства E', для к-рых $|\langle x, f\rangle| \leqslant 1$ для всех $x \in A$ (здесь $\langle x, f\rangle$ значение f в x). Биполярой $A^{\circ\circ}$ наз. множество векторов x пространства E, для к-рых $|\langle x, f\rangle| \leqslant 1$ для всех $f \in A^\circ$.

П. выпукла, уравновешена и замкнута в слабой топологии. Биполяра $A^{\circ\circ}$ является слабым замыканием выпуклой уравновешенной оболочки множества A. Кроме того, $(A^{\circ\circ})^\circ = A^\circ$. Если A — окрестность нуля в пространстве E, то ее поляра A° является компактом в слабой $*$ топологии (теорема Банаха — Алаоглу).

П. объединения $\bigcup_\alpha A_\alpha$ любого семейства $\{A_\alpha\}$ множеств из E есть пересечение П. этих множеств. П. пересечения слабо замкнутых выпуклых уравновешенных множеств A_α есть замкнутая в слабой $*$ топологии выпуклая оболочка их П. Если A — подпространство в E, то его П. совпадает с подпространством в E', ортогональным к A.

За фундаментальную систему окрестностей нуля, определяющих слабую $*$ топологию пространства E', можно принять систему множеств вида M°, где M пробегает все конечные подмножества пространства E.

Подмножество функционалов пространства E' равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда оно содержится в П. нек-рой окрестности нуля.

Лит.: [1] Эдвардс Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969.
В. И. Ломоносов.

ПОЛЯРИЗОВАННОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — пара (V, ξ), где V — полное гладкое многообразие над алгебраически замкнутым полем k, ξ из $\mathrm{Pic}\, V/\mathrm{Pic}^\circ V$ — класс нек-рого обильного обратимого пучка, $\mathrm{Pic}^\circ V$ — связная компонента абелевой схемы Пикара $\mathrm{Pic}\, V$. В случае, когда V — абелево многообразие, определено также понятие **степени поляризации** П. а. м.; она совпадает со степенью изогении $\varphi_{\mathscr{L}}: V \to \mathrm{Pic}^\circ V$, определяемой пучком $\mathscr{L} \in \xi$, а именно:

$$\varphi_{\mathscr{L}}(x) = T_x^* \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1} \in \mathrm{Pic}^\circ V,$$

где T_x — морфизм сдвига на x, $x \in V$. Поляризация степени 1 наз. **главной поляризацией**.

Понятие П. а. м. тесно связано с понятием поляризованного семейства алгебраич. многообразий. Пусть $f: X \to S$ — семейство многообразий с базой S, то есть f — гладкий проективный морфизм схемы X на нётерову схему S, слоями к-рого являются алгебраич. многообразия. **Поляризованным семейством** наз. пара $(X/S, \xi/S)$, где X/S — семейство $f: X \to S$ с базой S, а ξ/S — класс относительно обильного обратимого пучка $\mathscr{L}_{X/S}$ в $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{Pic}\, X/S)$ по модулю $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{Pic}^\circ X/S)$, где $\mathrm{Pic}\, X/S$ — относительная схема Пикара.

Введение понятий поляризованного семейства и П. а. м. необходимо для построения пространств модулей алгебраич. многообразий (см. *Модулей теория*). Так, напр., не существует пространства модулей всех гладких алгебраич. кривых рода $g \geqslant 1$, а для поляризованных кривых такое пространство модулей существует [4]. Одним из первых вопросов, связанных с понятием поляризации многообразий, является вопрос об одновременном погружении в проективное пространство поляризованных многообразий с фиксированными численными инвариантами. Если (V, ξ) содержится в качестве слоя в поляризованном семействе $(X/S, \xi/S)$ со связной базой S и относительно обильным пучком $\mathscr{L}_{X/S} \in \xi/S$, то существует ли такая константа c, зависящая только от многочлена Гильберта $h(n) = \chi(V, \mathscr{L}^n)$, что при $n > c$ пучки $\mathscr{L}_s^n$ с многочленом Гильберта $h(n)$ и с $H^i(X_s, \mathscr{L}_s^n) = 0$ при $i > 0$ очень обильны для всех П. а. м. (X_s, ξ_s), где $s \in S$? Для гладких П. а. м. над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 ответ на этот вопрос положителен [3], а в случае поверхностей основного типа с канонич. поляризацией константа c не зависит даже от многочлена Гильберта (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Bombieri E., «Publ. math. IHES», 1972, № 42, p. 447—95; [2] Kodaira K., «J. Math. Soc. Jap.», 1968, v. 20, № 1—2, p. 170—92; [3] Matsusaka T., Mumford D., «Amer. J. Math.», 1964, v. 86, № 3, p. 668—84; [4] Mumford D., Geometric invariant theory, B., 1965.

В. С. Куликов.

ПОЛЯРИТЕТ, **полярное преобразование**, — *корреляция* π, для к-рой $\pi^2 = \mathrm{id}$, то есть $\pi(Y) = X$ тогда и только тогда, когда $\pi(X) = Y$. П. разбивает все подпространства на пары, в частности, если пара образована подпространствами S_0 и S_{n-1}, где $S_0 = \pi(S_{n-1})$ — точка, а $S_{n-1} = \pi(S_0)$ — гиперплоскость, то S_0 наз. **полюсом гиперплоскости** S_{n-1}, а S_{n-1} наз. **полярой точки** S_0. Пространство $\Pi_n(K)$ над телом K обладает П. тогда и только тогда, когда тело допускает **инволютивный инверсный автоморфизм** α (т. е. $\alpha^2 = \mathrm{id}$). Пусть π представляется полубилинейной формой $f_\alpha(x, y)$. Тогда π будет П. в том и только в том случае, когда из $f_\alpha(x, y) = 0$ следует $f_\alpha(y, x) = 0$.

Поляритет π является либо **симплектической корреляцией**, характеризующейся тем, что $P \subset \pi(P)$ для любой точки P (в этом случае $f(x, y)$ является кососимметрич. формой на A_{n+1}, а K — полем), либо π представляется α-симметрич. формой на $A_{n+1}: \alpha(f_\alpha(x, y)) = f_\alpha(y, x)$ (**симметрический П.**), в этом случае существование нестрого изотропного нулевого подпространства равносильно тому, что характеристика тела car $K=2$ (в частности, если Car $K \neq 2$, то любое нулевое подпространство строго изотропно).

Относительно поляритета π определяется разложение проективного пространства на подпространства, позволяющее привести полубилинейную форму, представляющую π, к канонич. виду. Важнейшими среди них являются:

M — максимальное неизотропное нулевое подпространство, его размерность $n(\pi)-1$, где n четно и наз. дефектом π, f кососимметрична;

U — максимальное строго изотропное нулевое подпространство, его размерность $i(\pi)-1$, i наз. индексом π, $f\equiv 0$;

J — компонента, свободная от нулевых подпространств, неизотропна, причем f является положительно или отрицательно определенной, $M \cap J = \varnothing$;

$W=M+U$ — максимальное нулевое подпространство, его размерность $i(\pi)+n(\pi)-1$.

Проективное преобразование F наз. π-допустимым (относительно поляритета π), если $\pi F=F\pi$. Полулинейное преобразование $(\bar{F}, \varphi)$ тогда и только тогда индуцирует π-допустимое проективное преобразование, когда в K существует c такое, что $f(\bar{F}x, \bar{F}y)=c\varphi(f(x, y))$. π-допустимые преобразования образуют группу G_π (наз. группой П.). Если группа G_π транзитивна, то либо каждая точка пространства Π_n является нулевой (и G_π в этом случае наз. симплектической), либо нет ни одной нулевой точки (и G_π наз. в этом случае ортогональной при $\alpha=\mathrm{id}$ и унитарной при $\alpha\neq\mathrm{id}$).

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978.

М. И. Войцеховский.

ПОЛЯРНОЕ МНОЖЕСТВО — 1) П. м. аналитической функции $f(z)$ комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 1$,— такое множество P точек нек-рой области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, что: а) $f(z)$ голоморфна всюду в $D\setminus P$; б) $f(z)$ не продолжается аналитически ни в одну точку P; в) для любой точки $a\in P$ существуют такие окрестность U_a и голоморфная в U_a функция $q_a(z)\not\equiv 0$, что голоморфная в $D\cap\{U_a\setminus P\}$ функция $p_a(z)=q_a(z)f(z)$ продолжается голоморфно в U_a. Во всякой точке $a\in P$ имеем $q_a(a)=0$. П. м. P состоит из *полюсов* $a\in P$ функции $f(z)$, в к-рых $p_a(a)\neq 0$, и точек неопределенности $a\in P$ функции $f(z)$, в к-рых $p_a(a)=0$ (предполагается, что $p_a(z)$ и $q_a(z)$ не имеют общих множителей, голоморфных и равных нулю в a). Всякое П. м. есть аналитич. множество комплексной размерности $n-1$.

2) П. м. в теории потенциала — множество E точек евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, такое, что существует потенциал $U_\mu(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, нек-рой борелевской меры μ, принимающий значение $+\infty$ в точках E и только в них.

В случае *логарифмического потенциала* при $n=2$ и *ньютонова потенциала* при $n\geqslant 3$ для того, чтобы ограниченное множество E было П. м., необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа G_δ и имело нулевую внешнюю емкость. При этом в определении П. м. можно заменить «потенциал» на «супергармоническую функцию». Основные свойства П. м. для этого случая: а) множество $\{a\}$, состоящее из одной точки $a\in\mathbb{R}^n$, есть П. м.; б) счетное объединение П. м. есть П. м.; в) любое П. м. имеет лебегову меру нуль в $\mathbb{R}^n$; г) при конформных отображениях П. м. переходит в П. м.

Локальный критерий П. м. см. в ст. *Разреженность множества.*

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [2] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [3] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

ПОЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ — 1) П. р. *линейного преобразования* — разложение линейного преобразования конечномерного евклидова (или унитарного) пространства L в произведение самосопряженного и ортогонального (соответственно унитарного) преобразования. Каждое линейное преобразование A пространства L допускает П. р.

$$A = S \cdot U,$$

где S — положительно полуопределенное самосопряженное линейное преобразование, а U — ортогональное (или унитарное) линейное преобразование, причем S определяется единственным образом. Если A невырожденно, то преобразование S является даже положительно определенным, а U также определяется однозначно. Для одномерного унитарного пространства П. р. совпадает с представлением комплексного числа z в тригонометрич. форме. *А. Л. Онищик.*

2) П. р. *оператора* — представление оператора A, действующего в гильбертовом пространстве, в виде

$$A = UT,$$

где U — частично изометрический, а T — положительный операторы. Всякий замкнутый оператор A допускает П. р., причем $T = (A^*A)^{1/2}$ (часто используют обозначение $T = |A|$), а U отображает замыкание $\overline{R}_{A^*}$ области определения сопряженного оператора A на замыкание области значений $\overline{R}_A$ оператора A (*теорема Неймана*, см. [1]). П. р. становится единственным, если потребовать, чтобы начальное и конечное подпространства оператора U совпадали соответственно с $\overline{R}_{A^*}$ и $\overline{R}_A$. С другой стороны, U всегда можно выбрать унитарным, изометрическим или коизометрическим — в зависимости от соотношения коразмерностей подпространств $\overline{R}_{A^*}$ и R_A. В частности, если

$$\dim H \ominus \overline{R}_{A^*} = \dim H \ominus \overline{R}_A,$$

то можно выбрать U унитарным и найти такой эрмитов оператор Φ, что $U = \exp(i\Phi)$. Тогда П. р. оператора A запишется в виде

$$A = |A| \exp(i\Phi),$$

полностью аналогичном П. р. комплексного числа. Перестановочность сомножителей в П. р. имеет место тогда и только тогда, когда оператор нормален.

Получен (см. [2], [3]) аналог П. р. для операторов в пространстве с индефинитной метрикой.

3) П. р. *функционала на алгебре Неймана* — представление нормального функционала f на алгебре Неймана A в виде $f = up$, где p — положительный нормальный функционал на A, $u \in A$ — частичная изометрия (то есть u^*u и uu^* — проекторы), умножение понимается как действие на функционал p оператора, сопряженного к левому умножению на u в A: $f(x) = p(ux)$ для всех $x \in A$. П. р. всегда можно осуществить таким образом, чтобы выполнялось условие: $u^*f = p$. При этом условии П. р. определено однозначно.

Всякий ограниченный линейный функционал f на произвольной C^*-алгебре A можно рассматривать как нормальный функционал на универсальной обертывающей алгебре Неймана A''; соответствующее П. р. $f = up$ наз. *обертывающим полярным разложением функционала* f. Сужение функционала p на A называется *абсолютной величиной функционала* и обозначается $|f|$; следующие свойства однозначно определяют функционал

$$|f| : \| |f| \| = \|f\| \text{ и } |f(x)|^2 \leqslant \|f\| \cdot |f| (x^* x).$$

В случае, когда $A=C(X)$ — алгебра всех непрерывных функций на компакте, абсолютная величина функционала соответствует полной вариации определенной им меры.

П. р. функционала во многом позволяет сводить изучение функционалов на C^*-алгебрах к изучению положительных функционалов. С его помощью, напр., можно построить для каждого $f \in A'$ такое представление π алгебры A, в к-ром f реализуется векторно (т. е. существуют векторы ξ, η из H_π такие, что $f(x)=(\pi(x)\xi, \eta)$, $x \in A$),— таким свойством будет обладать представление $\pi_{|f|}$, построенное по положительному функционалу $\pi_{|f|}$ с помощью конструкции Гельфанда — Наймарка — Сегала Г Н С - к о н с т р у к ц и и).

4) П. р. э л е м е н т а C^*-а л г е б р ы — представление элемента C^*-алгебры в виде произведения положительного элемента на частично изометрический. П. р. возможно не для всех элементов: в обычном П. р. оператора T в гильбертовом пространстве положительный сомножитель принадлежит C^*-алгебре, порожденной T, но о частично изометрическом сомножителе можно утверждать лишь, что он принадлежит порожденной T алгебре Неймана. Поэтому определяют и используют т. н. о б е р т ы в а ю щ е е П. р. элемента $a \in A$: $a=ut$, где $t=(a^*a)^{1/2} \in A$ — частично изометрич. элемент универсальной *обертывающей алгебры* Неймана A'' (предполагается, что A канонически вложена в A'').

Лит.: [1] Н а й м а р к М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [2] B o g n á r J., «Stud. Scient. Math. Hung.», 1966, t. 1, № 1/2, p. 97—102; [3] Д и к с м ь е Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974. *В. С. Шульман.*

ПОЛЯРНОЕ СООТВЕТСТВИЕ — соответствие двух поверхностей, при к-ром в соответствующих точках радиус-вектор одной из них параллелен нормали другой и наоборот. Для каждой гладкой поверхности F в E^3 с радиус-вектором x существует (при определенных условиях) полярная ей поверхность F^* с радиус-вектором $x^* = -\frac{n}{(x, n)}$, где n — нормаль, а (x, n) — опорная функция к F, так что

$$(x^*, x)=1,\ (x_i, x)=(x_i, x^*)=0.$$

Иногда эти условия также входят в определение П. с.

Понятие П. с. получает наиболее яркое выражение (в смысле полной двойственности) в центроаффинной геометрии. *М. И. Войцеховский.*

ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ — числа ρ и φ (см. рис.), связанные с декартовыми прямоугольными координатами x и y формулами:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,$$

где $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Координатные линии: концентрической окружности ($\rho=\mathrm{const}$) и лучи ($\varphi=\mathrm{const}$). Система П. к.— *ортогональная система.* Каждой точке плоскости Oxy (за исключением точки 0, для к-рой $\rho=0$, а φ не определено, т. е. может быть любым числом $0 \leqslant \varphi < 2\pi$) соответствует пара чисел (ρ, φ) и обратно. Расстояние ρ точки P от точки (0, 0) (п о л ю с а) наз. п о л я р н ы м р а д и у с о м, а угол φ — п о л я р н ы м у г л о м.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\rho = 1,\ L_\varphi = \rho.$$

Элемент площади:

$$d\sigma = \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad}_\rho f=\frac{\partial f}{\partial \rho}, \ \operatorname{grad}_\varphi f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi};$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho} a_\rho+\frac{\partial a_\rho}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi};$$

$$\Delta f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Обобщенными П. к. наз. числа r и ψ, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x и y формулами:

$$x=ar\cos\psi, \ y=br\sin\psi,$$

где $0\leqslant r<\infty$, $0\leqslant\psi<2\pi$, $a>0$, $b>0$, $a\neq b$. Координатные линии: эллипсы ($r=\text{const}$) и лучи ($\psi=\text{const}$).

Д. Д. Соколов.

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ — понятие, характеризующее способность системы передачи информации противостоять искажающему действию помех. Предельно достижимую П. для оптимального метода передачи часто наз. потенциальной П. В теории передачи информации П. конкретной системы передачи информации характеризуют *сообщений точностью воспроизведения* и, в частности, *ошибочного декодирования вероятностью* переданного сообщения.

Лит.: [1] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965; [2] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ПОНТРЯГИНА ДВОЙСТВЕННОСТЬ — 1) П. д.— двойственность между абелевыми топологич. группами и их *характеров группами.* Теорема двойственности утверждает, что если G — локально компактная абелева группа и $X(G)$ — ее группа характеров, то естественный гомоморфизм $G\to X(X(G))$, переводящий $a\in G$ в характер $\omega_a: X(G)\to T$, заданный формулой

$$\omega_a(\alpha)=\alpha(a), \ \alpha\in X(G),$$

есть изоморфизм топологич. групп. Из этой теоремы выводятся следующие утверждения.

I. Если H — замкнутая подгруппа в G и

$$H^*=\{\alpha\in X(G) \mid \alpha(H)=0\}$$

— ее аннулятор в $X(G)$, то H совпадает с аннулятором

$$\{a\in G \mid \alpha(a)=0 \ \forall\alpha\in H^*\}$$

подгруппы H^*; при этом группа $X(H)$ естественно изоморфна $X(G)/H^*$, а $X(G/H)$ — группе H^*.

II. Если $\varphi: G\to H$ — непрерывный гомоморфизм локально компактных абелевых групп, то после отождествления группы G с $X(X(G))$ и группы H с $X(X(H))$ при помощи изоморфизмов $a\to\omega_a$ гомоморфизм $(\varphi^*)^*$ отождествляется с φ.

III. *Вес* группы $X(G)$ (как топологич. пространства) совпадает с весом группы G.

П. д. сопоставляет компактным группам G дискретные группы $X(G)$ и наоборот. При этом компактная группа G метризуема тогда и только тогда, когда $X(G)$ счетна, и связна тогда и только тогда, когда группа $X(G)$ без кручения. Конечномерность компактной группы G равносильна тому, что $X(G)$ имеет конечный ранг (см. *Ранг* абелевой группы). Конечномерная компактная группа G локально связна тогда и только тогда, когда $X(G)$ конечно порождена. Если G конечна, то П. д. совпадает с *двойственностью* конечных абелевых групп, рассматриваемой над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Топологич. группы, для к-рых верна теорема двойственности, наз. рефлексивными. Они не исчерпываются локально компактными группами, т. к. любое банахово пространство, рассматриваемое как топологич. группа, рефлексивно [8]. О характеризации рефлексивных групп см. [9].

Аналог П. д. известен и для некоммутативных групп (теорема двойственности Танака — Крейна) (см. [4], [6], [7]). Пусть G — компактная топологич. группа, R — алгебра комплекснозначных представляющих функций на G, $S(R)$ — множество всех ненулевых гомоморфизмов алгебр $\omega: R \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $\omega(\bar{f}) = \overline{\omega(f)}$, $f \in R$. В $S(R)$ определяется умножение $(\alpha, \beta) \to \alpha\beta$, удовлетворяющее следующему условию: если $\rho: G \to U(m)$ — неприводимое непрерывное унитарное представление группы G и $\rho_{ij}(g)$ — его матричные элементы, то

$$\|(\alpha\beta)(\rho_{ij})\| = \|\alpha(\rho_{ij})\| \cdot \|\beta(\rho_{ij})\|.$$

Это умножение и естественная топология превращают $S(R)$ в топологич. группу. Каждому $g \in G$ отвечает гомоморфизм $\alpha_g \in S(R)$, задаваемый формулой

$$\alpha_g(f) = f(g), \ f \in R.$$

Тогда соответствие $g \to \alpha_g$ есть изоморфизм топологич. группы G на $S(R)$. Дано также алгебраич. описание категории алгебр R, к-рая оказывается, таким образом, двойственной категории компактных топологич. групп. Эта теория допускает обобщение на случай однородных пространств компактных топологич. групп (см. [4]).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Ann. Math.», 1934, v. 35, № 2, p. 361—88 (рус. пер.— «Успехи матем. наук», 1936, в. 2, с. 177—95); [2] его же, Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Kampen E. van, «Ann. Math.», 1935, v. 36, p. 448—63; [4] Крейн М. Г., «Укр. матем. ж.», 1949, т. 1, № 4, с. 64—98; 1950, т. 2, № 1, с. 10—59; [5] Моррис С., Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп, пер. с англ., М., 1980; [6] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [7] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 2, М., 1975; [8] Smith M. F., «Ann. Math.», 1952, v. 56, № 2, p. 248—53; [9] Venkataraman R., «Math. Z.», 1976, Bd 149, H. 2, S. 109—19. *А. Л. Онищик.*

2) П. д. в топологии — изоморфизм между p-мерной группой когомологий Александрова — Чеха $H^p(A; G)$ с коэффициентами в группе G компактного множества A, лежащего в n-мерном компактном ориентируемом многообразии M^n, и $(n-p-1)$-мерной группой гомологий $H^c_{n-p-1}(B; G)$ дополнения $B = M^n \setminus A$ в предположении, что $H^p(M^n; G) = H^{p+1}(M^n; G) = 0$ (гомологии и когомологии в размерности нуль — приведенные; символ c означает компактные носители). Для случая, когда A или B — конечный полиэдр, этот изоморфизм был установлен Дж. Александером (J. Alexander). Н. Стинрод (N. Steenrod) установил наличие такого изоморфизма для любого открытого подмножества $A \subset M^n$, а К. А. Ситников — для произвольного подмножества A.

В приведенном виде закон двойственности Понтрягина был сформулирован П. С. Александровым. В первоначальной форме утверждалась двойственность в смысле теории характеров между группами $H_p(A; G^*)$ и $H^c_{n-p-1}(B; G)$, где G^* — бикомпактная группа характеров дискретной группы G. Эквивалентность обеих формулировок закона двойственности следует из того, что группа $H_p(A; G^*)$ есть группа характеров группы $H^p(A; G)$. Из предположения об ацикличности многообразия в размерностях p и $p+1$ и из точной последовательности когомологий пары (M^n, A) вытекает, что $H^p(A; G) = H^{p+1}(M^n, A; G)$, поэтому П. д.— простое следствие двойственности Пуанкаре — Лефшеца (см. *Пуанкаре двойственность*).

Наиболее общая форма соотношений двойственности рассматриваемого типа состоит в следующем. Пусть M^n — произвольное многообразие (возможно, обобщенное, не обязательно компактное и не обязательно ориентируемое), $\mathcal{G}$ — локально постоянная система коэффициентов со слоем G, A — произвольное подмножество в M^n и Φ — семейство всех замкнутых в M^n множеств, содержащихся в $B=M^n\setminus A$. Тогда если $H_p(M^n;\ \mathcal{G})=H_{p+1}(M^n;\ \mathcal{G})=0$, то $H^p(A;\ \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))=H^{\Phi}_{n-p-1}(B;\ \mathcal{G})$. Здесь H^{Φ}_q — гомологии с замкнутыми носителями, содержащимися в Φ (т. е. прямой предел групп $H_q(F;\ \mathcal{G})$, $F\in\Phi$), а $\mathcal{H}_n(\mathcal{G})$ — локально постоянная система коэффициентов, образованная группами $H_n(M^n,\ M^n\setminus x;\ \mathcal{G})$, $x\in M^n$. В приведенном равенстве коэффициенты $\mathcal{H}_n(\mathcal{G})$ для когомологий могут быть заменены на $\mathcal{G}$, если рассматривать гомологии с коэффициентами в нек-рой специально определяемой системе.

Лит.: [1] Александров П. С., Топологические теоремы двойственности, ч. 1 — Замкнутые множества, М., 1955 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 48); [2] Масси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981.

Е. Г. Скляренко.

ПОНТРЯГИНА ИНВАРИАНТ — инвариант оснащенных перестроек поверхности с заданным на ней оснащением. Пусть $(M^2,\ U)$ — замкнутая ориентируемая поверхность с n-мерным оснащением U в S^{n+2}, т. е. тривиализацией нормального n-мерного расслоения над поверхностью M^2 в S^{n+2}. Любой элемент $z\in H_1(M^2,\ \mathbb{Z})$ может быть реализован гладко иммерсированной окружностью с самопересечениями, к-рые являются только двойными и трансверсальными. Пусть выбрана и зафиксирована нек-рая ориентация окружности S^1; пусть $u_1(y),\ u_2(y),\ \ldots,\ u_n(y)$ — ортогональные векторы, возникающие из оснащения U, ограниченного на точку $f(y)$, $y\in C$; $u_{n+2}(y)$ — вектор, касательный в точке $f(y)$ к кривой $C=f(y)$, согласно выбранной ориентации S^1; $u_{n+1}(y)$ — вектор, касательный к M^2 в точке $f(y)$, ортогональный $u_{n+2}(y)$ и направленный так, что последовательность векторов $u_1(y),\ \ldots,\ u_n(y),\ u_{n+1}(y),\ u_{n+2}(y)$ дает стандартную ориентацию сферы S^{n+2}. Возникающее отображение $h:S^1\to SO_{n+2}$ задает элемент из группы $\pi_1(SO_{n+2})$, к-рая при $n\geqslant 1$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$. Пусть $\beta=0$, если h гомотопно нулю, и $\beta=1$, если h не гомотопно нулю, и пусть значение функции $\Phi_0:H_1(M^2,\ \mathbb{Z})\to\mathbb{Z}_2$ равно сумме по mod 2 числа двойных точек кривой C, реализующей элемент z, и числа β, определенного по кривой C. Так, определенное значение $\Phi_0(z)$ зависит только от гомологич. класса z, и функция $\Phi_0(z)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\Phi_0(z_1+z_2)=\Phi_0(z_1)+\Phi_0(z_2)+\Phi(z_1,\ z_2) \bmod 2,$$

где $\Phi:H_1(M^2,\ \mathbb{Z})\times H_1(M^2,\ \mathbb{Z})\to\mathbb{Z}$ — форма пересечений одномерных гомологий поверхности M^2. arf-*инвариант* функции Φ_0 и наз. инвариантом Понтрягина пары $(M^2,\ U)$. Пара $(M^2,\ U)$ оснащенно перестраивается до пары $(S^2,\ U)$ тогда и только тогда, когда П. и. пары $(M^2,\ U)$ равен нулю (теорема Понтрягина).

П. и. может быть реализован $(n+2)$-мерным оснащением на торе, $n\geqslant 2$, и является единственным инвариантом двумерных оснащенных *кобордизмов*. П. и. задает изоморфизм $\pi_{n+2}(S^n)\approx\mathbb{Z}_2$, $n\geqslant 2$.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976.

М. А. Штанько.

ПОНТРЯГИНА КВАДРАТ — *когомологическая операция* $\mathcal{P}_2$ типа $(\mathbb{Z}_{2^k},\ 2n;\ \mathbb{Z}_{2^{k+1}},\ 4n)$, т. е. отображение

$$\mathcal{P}_2\colon\ H^{2n}\left(X,\ Y;\ \mathbb{Z}_{2^k}\right)\longrightarrow H^{4n}\left(X,\ Y;\ \mathbb{Z}_{2^{k+1}}\right),$$

определенное для любой пары топологич. пространств $(X,\ Y)$ и такое, что для любого непрерывного отображения $f:(X,\ Y)\to(X',\ Y')$ имеет место равенство $f^*\mathcal{P}_2=\mathcal{P}_2f^*$ (естественность).

П. к. обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{P}_2(u+v)=\mathcal{P}_2u+\mathcal{P}_2v+i(uv)$, где $i\colon\mathbb{Z}_{2^k}\longrightarrow\mathbb{Z}_{2^{k+1}}$

— вложение;

2) $\rho\mathcal{P}_2 u = u^2$ и $\mathcal{P}_2 \rho u = u^2$, где $\rho: H^*(X, Y; \mathbb{Z}_{2^{k+1}}) \to H^*(X, Y; \mathbb{Z}_{2^k})$

— гомоморфизм приведения по mod 2;

3) $\mathcal{P}_2 \Sigma = \Sigma \mathcal{P}$, где $\Sigma : H^{2n-1}(X; G) \to H^{2n}(\Sigma X; G)$ — изоморфизм надстройки, а $\mathcal{P}$ — *Постникова квадрат* (иными словами, когомологич. надстройкой над $\mathcal{P}_2$ является $\mathcal{P}$). Если

$$\mathcal{P}_2: K(\mathbb{Z}_{2^k}, 2n) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_{2^{k+1}}, 4n)$$

и

$$\mathcal{P}: K(\mathbb{Z}_{2^k}, 2n-1) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_{2^{k+1}}, 4n-1)$$

— представляющие отображения, то $\Omega\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}$.

Свойства 1), 2) однозначно характеризуют П. к. и потому могут быть приняты за определяющие его аксиомы. Конструктивно П. к. определяется формулой

$$\mathcal{P}_2\{u\} = \{uv_0 u + uv_1 \delta u\} \bmod 2^{k+1},$$

где $u \in C^{2n}(X; \mathbb{Z})$ — коцикл mod 2^k (о U_i-произведениях см. ст. *Стинрода квадрат*).

Существует (см. [5], [6]) обобщение П. к. на случай произвольного нечетного простого p. Это обобщение является когомологич. операцией типа ($\mathbb{Z}_{p^k}$, $2n$; $\mathbb{Z}_{p^{k+1}}$, $2pn$) и наз. p-й степенью Понтрягина $\mathcal{P}_p$. Для операции $\mathcal{P}_p$ имеют место формулы (к-рые эту операцию однозначно характеризуют):

$$\mathcal{P}_p(u+v) = \mathcal{P}_p u + \mathcal{P} v + i\left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i} u^i u^{p-i}\right),$$

где $i : \mathbb{Z}_{p^k} \to \mathbb{Z}_{p^{k+1}}$ — вложение;

$$\rho\mathcal{P}_p u = u^p \text{ и } \mathcal{P}_p \rho u = u^p,$$

где $\rho : H^*(X, Y; \mathbb{Z}_{p^{k+1}}) \to H^*(X, Y; \mathbb{Z}_{p^k})$ — гомоморфизм приведения по модулю p, обобщающие соответствующие формулы для $\mathcal{P}_2$. Аналог формулы 3) для $\mathcal{P}_p$ имеет вид $\mathcal{P}_p \Sigma = 0$, означающий, что когомологич. надстройка над $\mathcal{P}_p$ при $p > 2$ равна нулю. При $p > 2$ имеет место равенство $\mathcal{P}_p(uv) = (\mathcal{P}_p u)(\mathcal{P}_p v)$, в к-ром умножение можно считать как внешним ($\times$-умножением), так и внутренним ($\cup$-умножением). При $p = 2$ соответствующее равенство имеет место только с точностью до слагаемых порядка 2.

Наиболее общим образом П. к. определяется для когомологий над произвольной конечно порожденной абелевой группой π (см. [2], [3]). Окончательный вид этого обобщения (см. [6]): П. к. представляет собой кольцевой гомоморфизм

$$\mathcal{P}^*: \Gamma(H^{2n}(X; \pi)) \longrightarrow H^*(X; \Gamma(\pi)),$$

где Γ — функтор разделенных степеней алгебры. Если $\pi = \mathbb{Z}_p$, то p-я компонента этого гомоморфизма совпадает с p-й степенью Понтрягина $\mathcal{P}_p$ (при $p = 2$ — с П. к. $\mathcal{P}_2$).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Докл. АН СССР», 1942, т. 34, с. 39—41; [2] Болтянский В. Г., Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, М., 1955; [3] Постников М. М., «Докл. АН СССР», 1949, т. 64, № 4, с. 461—62; [4] Browder W., Thomas E., «Quart. J. Math.», 1962, v. 13, p. 55—60; [5] Thomas E., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1956, v. 42, p. 266—69; [6] его же, The generalized Pontrjagin cohomology operations and rings with divided powers, Providence, 1957.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников.

ПОНТРЯГИНА КЛАСС — *характеристический класс*, определенный для действительных векторных расслоений; П. к. введены в 1947 Л. С. Понтрягиным [1]. Для векторного расслоения ξ с базой B П. к. обозначаются символом $p_i(\xi) \in H^{4i}(B)$ и полагаются равными $p_i(\xi) = (-1)^i c_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C})$, где $\xi \otimes \mathbb{C}$ — комплексификация расслоения ξ, а c_k — *Чжэня классы*. **Полным** П. к. наз. неоднородный характеристич. класс $p=1+p_1+p_2+\ldots$. Иначе говоря, П. к. определяются как классы когомологий $p_i \in H^{4i}(BO_n)$, задаваемые равенством $p_i=f^*((-1)^i c_{2i})$, где $f: BO_n \to (BU_n)$ — отображение, соответствующее комплексификации универсального расслоения, а $c_n \in H^{2k}(BU_n)$ — классы Чжэня.

Пусть $(\varkappa_n)_{\mathbb{R}}$ — овеществление универсального расслоения $\varkappa_n$ над BU_n. Полный П. к. $p((\varkappa_n)_{\mathbb{R}})$ расслоения $(\varkappa_n)_{\mathbb{R}}$ совпадает с $\Pi_{i=1}^n(1+x_i^2) \in H^*(BU_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — образующие Ву (см. *Характеристический класс*).

Частичное описание кольца когомологий $H^*(BO_n)$ может быть получено в терминах образующих Ву следующим образом. Отображение $g: BU_{[n/2]} \to BO_n$, соответствующее расслоению $(\varkappa_{[n/2]})_{\mathbb{R}}$ либо $(\varkappa_{[n/2]})_{\mathbb{R}} \otimes \theta_1$, где θ_1 — одномерное тривиальное расслоение, индуцирует гомоморфизм колец $g^*: H^*(BO_n) \to H^*(BU_{[n/2]})$, при к-ром подкольцо кольца $H^*(BO_n)$, порождаемое П. к. $p_1, p_2, \ldots, p^{[n/2]}$, отображается мономорфно на подкольцо кольца $H^*(BU_n)$, состоящее из всех четных симметрич. полиномов от образующих Ву. Четность понимается в том смысле, что каждая переменная x_i должна входить в полином в четной степени. Тем самым получается выражение любого элемента кольца $\mathbb{Z}(p_1, \ldots, p_{[n/2]}) \subset H^*(BO_n)$ через образующие Ву, что важно для практич. вычислений с П. к. Характеристич. класс, определяемый четным симметрич. полиномом от образующих Ву, может быть выражен через П. к. следующим образом. Полином выражается через элементарные симметрич. функции переменных $x_1^2, \ldots, x_n^2$, а затем вместо элементарных симметрич. функций подставляется П. к.

Если ξ, η — два действительных векторных расслоения над общей базой, то класс когомологий $p(\xi \oplus \eta) - p(\xi)p(\eta)$ имеет порядок не больше двух; это связано с тем, что для первого класса Чжэня $c_1(\lambda)=-c_1(\bar{\lambda})$.

Пусть нек-рое кольцо Λ, содержащее $1/2$, рассматривается в качестве кольца коэффициентов и пусть p_i — П. к. со значениями в $H^*(\cdot; \Lambda)$. В этом случае имеет место равенство

$$p(\xi \oplus \eta)=p(\xi)\, p(\eta)$$

или

$$p_k(\xi \oplus \eta)=\sum_i p_{k-i}(\xi)\, p_i(\eta), \quad p_0=1.$$

Кольцо $H^{**}(BO_n; \Lambda)$ мономорфно отображается в $H^{**}(BU_{[n/2]}; \Lambda)$, и образ этого отображения совпадает с подкольцом всех четных симметрич. рядов с образующими Ву в качестве переменных. При этом полный П. к. переходит в полином $\Pi_{i=1}^{[n/2]}(1+x_i^2)$, а П. к.— в элементарные симметрич. функции от переменных $x_1^2, \ldots, x_n^2$. Теорема:

$$H^{**}(BO_n; \Lambda)=\Lambda[[p_1, \ldots, p_{[n/2]}]].$$

Кольцо когомологий $H^*(BSO_n)$ содержит кроме П. к. также *эйлеров класс* $e \in H^n(BSO_n)$. Теорема:

$$H^{**}(BSO_{2k+1}; \Lambda)=\Lambda[[p_1, \ldots, p_k, e]],$$
$$H^{**}(BSO_{2k}; \Lambda)=\Lambda[[p_1, \ldots, p_{k-1}, e]],$$

для пространства BSO_{2k} имеет место равенство $p_k=e^2$.

Отображение $g: BU_{[n/2]} \to BO_n$ пропускается через $BU_{[n/2]} \to BSO_n$. Индуцированное отображение $H^{**}(BSO_n) \to H^{**}(BU)_{[n/2]}$ переводит e в нуль при нечетном n и в $\Pi_{i=1}^{n/2} x_i$ при четном n.

Пусть $f(t) \in \mathbb{Q}[[t]]$ — четный формальный степенной ряд над полем $\mathbb{Q}$. Тогда ряд $\Pi_{i=1}^{[n/2]} f(x_i)$ определяет нек-рый неоднородный элемент кольца $H^{**}(BO_n; \mathbb{Q})$, т. е. характеристич. класс. Допуская нек-рую вольность, можно записать

$$x = \prod_{i=1}^{[n/2]} f(x_i) \in H^{**}(BO_n; \mathbb{Q}).$$

Характеристич. класс x стабилен (то есть $x(\xi \oplus \theta) = x(\xi)$, где θ — тривиальное расслоение) тогда и только тогда, когда свободный член ряда $f(t)$ равен единице. Если положить $f(t) = t/\operatorname{th} t$, то построенный описанным способом характеристич. класс обозначается через L и наз. L-классом Хирцебруха,

$$L = \prod_{i=1}^{[n/2]} x_i/\operatorname{th} x_i \in H^{**}(BO_n; \mathbb{Q}).$$

Стандартная процедура выражения ряда $\Pi f(x_i)$ через элементарные симметрич. функции переменных $x_1^2, \ldots$ $\ldots, x_n^2$ приводит к представлению класса L в виде ряда от П. к. Другой важный для приложений характеристич. класс получается, если положить

$$f(t) = \frac{t/2}{\operatorname{sh}(t/2)} = \frac{t}{e^{t/2} - e^{-t/2}}.$$

Класс, задаваемый четным симметрич. рядом

$$\prod f(x_i) = \prod \frac{x_i/2}{\operatorname{sh}(x_i/2)},$$

наз. $\hat{A}$-классом. Аналогично, A-классом наз. характеристич. класс, задаваемый рядом $\Pi f(x_i)$, где $f(t) = \frac{2t}{\operatorname{sh}(2t)}$. Оба эти класса, как и L, могут быть выражены через П. к.

Топологическая инвариантность. В 1965 С. П. Новиков [2] доказал, что П. к. с рациональными коэффициентами двух гомеоморфных многообразий совпадают. До этой работы было известно, что рациональные П. к. кусочно линейно инвариантны, т. е. совпадают для двух кусочно линейных гомеоморфных многообразий. Более того, были определены (см. [4]) рациональные П. к. для кусочно линейных многообразий (возможно с краем). Был дан пример (см. [5]), показывающий, что целочисленные П. к. не являются топологич. инвариантами.

В 1969 было доказано (см. [7]), что слой Top/PL расслоения $BPL \to B\,\mathrm{Top}$ имеет гомотопич. тип пространства Эйленберга — Маклейна $K(\mathbb{Z}_2, 3)$. Отсюда следует топологич. инвариантность рациональных П. к., а также вытекает опровержение основной гипотезы комбинаторной топологии (Hauptvermutung).

Обобщенные классы Понтрягина. Пусть h^* — обобщенная теория когомологий, в к-рой определены классы Чжэня σ_i. Если для одномерного комплексного векторного расслоения λ выполнено равенство $\sigma_1(\lambda) = -\sigma_1(\bar{\lambda})$, то П. к. со значениями в теории h^* можно определить прежней формулой $P_i(\xi) = (-1)^i \sigma_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C})$. Определенные таким образом классы будут обладать свойством $P(\xi \oplus \eta) = P(\xi) P(\eta)$, где $P = 1 + P_1 + P_2 + \ldots$ — полный П. к., рассматриваемый в теории $h^* \otimes \mathbb{Z}$ [1/2].

Однако во многих практически используемых обобщенных теориях (напр., в K-теории) приведенное равенство для σ_1 не имеет места. В таких теориях нецелесообразно определять П. к. описанным способом, т. к. при таком определении не выполняется обычная формула для полного класса суммы двух расслоений, даже после включения $^1/_2$ в коэффициенты. Можно определять обобщенные П. к. следующим образом. Пусть h^* — мультипликативная теория когомологий, в к-рой универсальным образом задана ориентация $u(\xi \otimes \mathbb{C}) \in$

$\in \widehat{h}^{2n}(B^{\xi \otimes \mathbb{C}})$ расслоения $\xi \otimes \mathbb{C}$, где ξ — произвольное n-мерное действительное расслоение над B. Пусть $e(\xi \otimes \mathbb{C})$ — эйлеров класс расслоения $\xi \otimes \mathbb{C}$, $e(\xi \otimes \mathbb{C}) = i^* u(\xi \otimes \mathbb{C})$, где $i : B \to B^{\xi \otimes \mathbb{C}}$ — включение нулевого сечения. П. к. в теории h^* наз. характеристич. классы P_i, определенные для действительных векторных расслоений и удовлетворяющие следующим условиям.

1) $P_i(\xi) = 0$, если $i > 2 \dim \xi$;

2) $P_i(\xi \oplus \theta) = P_i(\xi)$, где θ — тривиальное расслоение;

3) $P_k(\xi \oplus \eta) - \Sigma_i P_i(\xi) P_{k-i}(\eta)$ — элемент порядка степени двойки;

4) $P_n(\xi) = (-1)^n e(\xi \otimes \mathbb{C})$, где $n = \dim \xi$.

Доказано существование и единственность характеристич. классов с перечисленными свойствами. П. к. в этом смысле приводят к понятию двузначной формальной группы над кольцом $h^*(pt)$, соответствующей теории h^*.

Характеристич. классы π_i в K-теории определяются следующей формулой:

$$\sum_i \pi_i(\xi) s^i = \sum_i (-1)^i t^i \gamma_i(\xi \otimes \mathbb{C}) = \gamma_{-t}(\xi \otimes \mathbb{C}) =$$

$$= \lambda_{t/(1-t)}((\xi \oplus (-\dim \xi)) \otimes \mathbb{C}),$$

где $s = t - t^2$, здесь γ_i — *Чжэня классы* в $\mathbb{Z}_2$-градуированной K-теории.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Матем. сб.», 1947, т. 21, с. 233—84; [2] Новиков С. П., «Докл. АН СССР», 1965, т. 163, с. 298—300; [3] Бухштабер В. М., «Матем. сб.», 1970, т. 83, с. 575—95; [4] Рохлин В. А., Шварц А. С., «Докл. АН СССР», 1957, т. 114, с. 490—93; [5] Милнор Дж., «Математика», 1959, т. 3, № 4, с. 3—53; 1965, т. 9, № 4, с. 3—40; [6] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [7] Kirby R., Siebenmann L., Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations, Princeton, 1977. *А. Ф. Харшиладзе.*

ПОНТРЯГИНА ПОВЕРХНОСТИ — лежащие в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ двумерные континуумы C_m, $\dim C_m = 2$, такие, что их *гомологическая размерность* по данному модулю $m = 2, 3, \ldots$ равна 1 и что они в этом смысле «размерно неполноценны». Л. С. Понтрягин [1] построил такие поверхности C_2, C_3, что их топологич. произведение $C = C_2 \times C_3$ есть континуум размерности 3. Этим была опровергнута гипотеза, что при топологич. перемножении двух (метрических) компактов их размерности складываются. Им же эта гипотеза доказана для гомологич. размерности по простому модулю и вообще по всякой группе коэффициентов, являющейся полем. Построен также [2] двумерный континуум C в $\mathbb{R}^4$, топологич. квадрат к-рого $C^2 = C \times C$ трехмерен.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «C.r. Acad. sci.», 1930, t. 190, p. 1105—07; [2] Болтянский В., «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 3, с. 99—128; [3] Александров П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975. *П. С. Александров.*

ПОНТРЯГИНА ПРИНЦИП МАКСИМУМА — соотношения, выражающие необходимые условия сильного экстремума для неклассической вариационной задачи *оптимального управления математической теории*. Сформулирован в 1956 Л. С. Понтрягиным (см. [1]).

Принятая формулировка П. п. м. относится к следующей задаче оптимального управления. Дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $u \in \mathbb{R}^p$ — управляющий параметр, f — вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемая по x. В пространстве $\mathbb{R}^p$ задано множество U допустимых значений управляющего параметра u; в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ даны точки x^0 и x^1; фиксирован начальный момент времени t_0. Допустимым управлением является любая кусочно непрерывная функция $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, со значениями во множестве U. Говорят, что допустимое управление $u=u(t)$ переводит фазовую точку из положения x^0 в положение x^1 ($x^0 \to x^1$), если соответствующее ему решение $x(t)$ системы (1), удовлетворяющее условию $x(t_0)=x^0$, определено при всех $t \in [t_0, t_1]$ и $x(t_1)=x^1$. Среди всех допустимых управлений, переводящих фазовую точку из положения x^0 в положение x^1, требуется найти оптимальное управление — функцию $u^*(t)$, минимизирующую функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),\ u(t))\, dt, \tag{2}$$

здесь $f^0(x, u)$ — заданная функция того же класса, что и компоненты $f(x, u)$, $x(t)$ — решение системы (1) с начальным условием $x(t_0)=x^0$, отвечающее управлению $u(t)$, t_1 — момент прохождения этого решения через точку x^1. Под решением задачи понимают пару, состоящую из оптимального управления $u^*(t)$ и отвечающей ему оптимальной траектории $x^*(t)$ системы (1).

Пусть

$$H(\psi, x, u) = (\psi, f(x, u))$$

— скалярная функция (гамильтониан) переменных ψ, x, u, где $\psi=(\psi_0, \psi^1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\psi_0 \in \mathbb{R}^1$, $\psi^1 \in \mathbb{R}^n$, $f=(f^0, f)$. Функции $H(\psi, x, u)$ ставится в соответствие каноническая (гамильтонова) система (относительно ψ, x)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi},\quad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{3}$$

(первое из этих уравнений есть система (1)). Пусть

$$M(\psi, x) = \sup\{H(\psi, x, u) \mid u \in U\}.$$

Принцип максимума Понтрягина: если $u^*(t)$, $x^*(t)$ ($t \in [t_0, t_1]$) — решение задачи оптимального управления (1), (2) ($x^0 \to x^1$, $u \in U$), то существует такая ненулевая абсолютно непрерывная функция $\psi(t)$, что тройка функций $\psi(t)$, $x^*(t)$, $u^*(t)$ удовлетворяет на $[t_0, t_1]$ системе (3) и для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ выполняется условие максимума

$$H(\psi(t), x^*(t), u^*(t)) = M(\psi(t), x^*(t)), \tag{4}$$

а в конечный момент t_1 — условия

$$M(\psi(t_1), x(t_1)) = 0,\quad \psi_0(t_1) \leqslant 0. \tag{5}$$

Если функции $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют соотношениям (3), (4) (то есть $x(t)$, $u(t)$ образуют экстремаль Понтрягина), то имеют место условия

$$\mathscr{M}(t) = M(\psi(t), x(t)) \equiv \mathrm{const},\quad \psi_0(t) \equiv \mathrm{const}.$$

Из данного утверждения вытекает принцип максимума для задачи о быстродействии ($f^0=1$, $J=t_1-t_0$). Это утверждение допускает естественное обобщение на неавтономные системы, задачи с подвижными концами траекторий и задачи с ограничениями на фазовые координаты (условием $x(t) \in X$, где X — замкнутое множество фазового пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее нек-рым дополнительным ограничениям (см. [1])).

Допущение к рассмотрению замкнутых множеств U, X (эти области могут, в частности, задаваться системами нестрогих неравенств) обусловило неклассич. характер задачи. Основные необходимые условия классического вариационного исчисления с обыкновенными производными вытекают из П. п. м. (см. [1], а также *Вейерштрасса условия*).

Распространенное доказательство изложенной формулировки П. п. м., основанное на использовании т. н. игольчатых вариаций (т. е. на рассмотрении допустимых управлений, отклоняющихся от оптимального произвольным образом, но зато лишь на конечном числе малых интервалов времени), состоит в линеаризации задачи в окрестности оптимального решения, в построении нек-рого выпуклого конуса вариаций оптимальной траектории и последующем использовании теоремы об отделимости выпуклых конусов (см. [1]). Соответствующее условие далее записывается в аналитич. форме (4), (3), в терминах максимума гамильтониана $H(\psi, x, u)$ от фазовых переменных x, управлений u и сопряженных переменных ψ, играющих роль, аналогичную *Лагранжа множителям* в классическом вариационном исчислении. Эффективное использование П. п. м. часто приводит к необходимости решать двухточечную краевую задачу для системы (3).

Наиболее полное решение задачи оптимального управления получено для линейных систем, где соотношения П. п. м. часто выступают не только как необходимое, но и как достаточное условие оптимальности.

П. п. м. получил многочисленные обобщения, напр., в направлении охвата более сложных неклассич. ограничений (в том числе смешанных ограничений на управления и фазовые координаты функциональных и разнообразных форм интегральных ограничений), в изучении достаточности соответствующих условий, в рассмотрении обобщенных решений, т. н. скользящих режимов, систем дифференциальных уравнений с негладкой правой частью, дифференциальных включений, задач оптимального управления для дискретных систем и систем с бесконечным числом степеней свободы, описываемых, в частности, уравнениями с частными производными, уравнениями с последействием (в том числе с запаздыванием), эволюционными уравнениями в банаховом пространстве и т. д. Последнее привело к рассмотрению новых классов вариаций соответствующих функционалов, введению т. н. интегрального принципа максимума, линеаризованного принципа максимума и т. д. Весьма общие классы вариационных задач с неклассич. ограничениями (в том числе в виде нестрогих неравенств) или негладкими функционалами принято называть задачами понтрягинского типа. Открытие П. п. м. послужило важным стимулом в создании математич. теории оптимального управления. Оно стимулировало новые исследования в теории дифференциальных уравнений, функциональном анализе и теории экстремальных задач, вычислительной математике и других смежных областях.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976.

А. Б. Куржанский.

ПОНТРЯГИНА ПРОСТРАНСТВО — *гильбертово пространство с индефинитной метрикой* $\Pi_\varkappa$, имеющей конечный ранг индефинитности $\varkappa$. Основные факты геометрии П. п. установлены Л. С. Понтрягиным [1]. Помимо фактов, общих для пространств с индефинитной метрикой, имеют место следующие.

Если $\mathcal{P}$ — любой неотрицательный линеал в $\Pi_\varkappa$, то $\dim \mathcal{P} \leqslant \varkappa$; если $\mathcal{P}$ — положительный линеал и $\dim \mathcal{P} = \varkappa$, то его J-ортогональное дополнение N является отрицательным линеалом и $\Pi_\varkappa = \mathcal{P} \oplus N$. При этом N представляет собой полное пространство по отношению к норме $|x| = \sqrt{-J(x, x)}$. Если линеал $L \subset \Pi_\varkappa$ невырожден, то невырождено его J-ортогональное дополнение M и $\Pi_\varkappa = M \oplus L$.

Спектр (в частности, дискретный спектр) J-унитарного (J-самосопряженного) оператора симметричен относительно единой окружности (действительной оси), все элементарные делители, отвечающие собственным числам λ, $|\lambda| > 1$, имеют конечный порядок ρ_λ, $\rho_\lambda \leqslant \varkappa$, $\rho_{\bar\lambda} = \rho_\lambda - 1$. Сумма размерностей корневых подпространств J-унитарного (J-самосопряженного) оператора, отвечающих собственным числам λ, $|\lambda| > 1$ ($\mathrm{Im}\,\lambda > 0$), не превосходит числа $\varkappa$.

Основой теории J-самосопряженных операторов, действующих в П. п. $\Pi_\varkappa$, является следующая теорема [1]: у каждого J-самосопряженного оператора A ($\overline{D(A)}=\Pi_\varkappa$) существует $\varkappa$-мерное (максимальное) неотрицательное инвариантное подпространство $\mathscr{T}$, в к-ром все собственные значения оператора A имеют неотрицательную мнимую часть, и $\varkappa$-мерное неотрицательное инвариантное подпространство $\mathscr{T}'$, в к-ром все собственные значения имеют неположительную мнимую часть. Аналогичное утверждение с заменой верхней (нижней) полуплоскости на внешность (внутренность) единичного круга справедливо и для J-унитарных операторов, а при нек-рых дополнительных условиях — даже для операторов в пространстве Π_∞.

Если U есть J-унитарный оператор, то его максимальные инвариантные неотрицательные подпространства $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}'$ могут быть выбраны таким образом, чтобы порядки элементарных делителей операторов $U_{\mathscr{T}}=U|\mathscr{T}$, $U_{\mathscr{T}'}=U|\mathscr{T}'$ были минимальны. Для того чтобы многочлен $P(\lambda)$, не имеющий корней внутри единичного круга, обладал свойством: $(P(U)x, P(U)x)\leqslant 0$, $x\in\Pi_\varkappa$, необходимо и достаточно, чтобы он делился на минимальный *аннулирующий многочлен оператора* $U_{\mathscr{T}}$. Если оператор U — циклический, то его неотрицательные инвариантные подпространства размерности $\varkappa$ определяются единственным образом. В этом случае указанное свойство многочлена P, корни $\{\lambda_i\}$ к-рого лежат вне единичного круга $|\lambda_i|>1$, эквивалентно делимости $P(\lambda)$ на характеристич. многочлен оператора $U_{\mathscr{T}}$.

В П. п. $\Pi_\varkappa$ у каждого вполне непрерывного J-самосопряженного оператора A такого, что нуль принадлежит его непрерывному спектру, остаточный спектр отсутствует. Корневые векторы такого оператора образуют базис Рисса в $\Pi_\varkappa$ по отношению к (дефинитной) норме $(|J|x, x)$.

Многие факты об инвариантных подпространствах и спектре обобщаются на случай J-изометрических и J-нерастягивающих операторов. Так, если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — произвольная совокупность собственных значений J-изометрического оператора, $\lambda_i\bar{\lambda}_k\neq 1$, $i, k=1, \ldots, n$, и порядок элементарного делителя в точке λ_i, то $\sum_1^n \rho_i\leqslant\varkappa$. Всякий J-нерастягивающий ограниченно обратимый оператор T обладает $\varkappa$-мерным инвариантным неотрицательным подпространством $\mathscr{T}$ таким, что все собственные значения сужения $T|\mathscr{T}$ лежат в единичном круге [2]. Аналогичный факт верен для максимальных J-диссипативных операторов. Вообще J-диссипативный оператор A, $D(A)\subset D(A^*)$, имеет не более $\varkappa$ собственных значений в верхней полуплоскости. Между J-изометрическими и J-симметрическими (и, более широко, J-нерастягивающими и J-диссипативными) операторами устанавливается связь с помощью *Кэли преобразования*, к-рое в пространстве $\Pi_\varkappa$ обладает всеми естественными свойствами [2]. Это позволяет развивать теорию расширений одновременно для J-изометрических и J-симметрических операторов. В частности, всякий J-изометрический (J-симметрический) оператор может быть расширен до максимального. Если его индексы дефекта не одинаковы, то у него нет J-унитарных (J-самосопряженных) расширений. Если же они одинаковы и конечны, то любое максимальное расширение является J-унитарным (J-самосопряженным).

Для вполне непрерывных J-диссипативных операторов в П. п. $\Pi_\varkappa$ верен также ряд утверждений о полноте системы корневых векторов, аналогичных соответствующим фактам из теории диссипативных операторов в пространствах с дефинитной метрикой.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1944, т. 8, с. 243—80; [2] Иохвидов И. С., Крейн М. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1956, т. 5, с. 367—432; [3] их же, там же, 1959, т. 8, с. 413—96; [4] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 4, с. 43—92; [5] Крейн М. Г., в кн.: Вторая летняя математическая школа, [т.]1, К., 1965, с. 15—92; [6] Наймарк М. А., Исмагилов Р. С., в кн.: Итоги науки. Математический анализ, 1968, в. 17, М., 1969, с. 73—105; [7] Надь К., Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1969.

Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.

ПОНТРЯГИНА ХАРАКТЕР ph — *характеристический класс*, определяемый равенством $\mathrm{ph}(\xi)=\mathrm{ch}(\xi\otimes\otimes\mathbb{C})$, где $\xi\otimes\mathbb{C}$ — комплексификация расслоения ξ, ch — *Чжэня характер.* П. х. как элемент кольца $H^{**}(BO_n;\ \mathbb{Q})$ задается четным симметрич. рядом $\sum_{i=1}^{[n/2]}(e^{x_i}+e^{-x_i})$ и обладает свойствами

$$\mathrm{ph}(\xi\otimes\eta)=\mathrm{ph}\,\xi\cdot\mathrm{ph}\,\eta,\qquad \mathrm{ph}(\xi\oplus\eta)=\mathrm{ph}\,\xi+\mathrm{ph}\,\eta.$$

Индексный класс $I(\xi)$ полагается равным $T(\xi\otimes\mathbb{C})$, где $T\in H^{**}(BU_n;\ \mathbb{Q})$ — *Тодда класс.* Индексный класс $I\in H^{**}(BO_n;\ \mathbb{Q})$ выражается через образующие Ву по формуле

$$I=\Pi\frac{x_i}{1-e^{-x_i}}\,\Pi\frac{-x_i}{1-e^{x_i}}\ .$$

Имеет место следующая теорема о связи П. х. с классом $\hat{A}$. Пусть ξ — действительное векторное расслоение над базой B, имеющее Spin_n-структуру, $n=\dim\xi=8k$. Для таких расслоений имеется изоморфизм Тома в действительной K-теории:

$$\Phi\colon KO^*(B)\longrightarrow \widetilde{KO}^*(B^{\xi}).$$

Пусть

$$\Phi_H\colon H^*(B;\ \mathbb{Q})\longrightarrow \tilde{H}^*(B^{\xi};\ \mathbb{Q})$$

— изоморфизм Тома, однозначно определенный ориентацией расслоения ξ. Тогда

$$\Phi_H^{-1}\,\mathrm{ph}\,(\Phi(1))=\hat{A}(-\xi).$$

Эта формула является точным аналогом соответствующего утверждения о связи характера Чжэня с классом Тодда.

Если ξ — комплексное векторное расслоение, то $T(\xi)=\hat{A}((\xi)_{\mathbb{R}})e^{c_1(\xi)/2}$, здесь $(\xi)_{\mathbb{R}}$ — овеществление расслоения, T — класс Тодда.

Лит. см. при ст. *Понтрягина класс.* *А. Ф. Харшиладзе.*

ПОНТРЯГИНА ЧИСЛО — *характеристическое число*, определенное для действительных замкнутых многообразий и принимающее рациональные значения. Пусть $x\in H^{**}(BO;\ \mathbb{Q})$ — произвольный (необязательно однородный) стабильный *характеристический класс.* Для замкнутого ориентированного многообразия M рациональное число $x[M]=\langle x(\tau M),\ [M]\rangle$ наз. числом Понтрягина многообразия M, соответствующим классу x, здесь τM — касательное расслоение. П. ч. $x[M]$ зависит лишь от однородной компоненты степени $\dim M$ класса x. Пусть $\omega=\{i_1,\ \ldots,\ i_k\}$ — разбиение числа n, т. е. набор целых неотрицательных чисел $i_1,\ldots,i_k$ с $i_1+\ldots+i_k=n$ и $p_\omega=p_{i_1},\ldots,p_{i_k}\in H^{4n}(BO)$.

Рациональные числа $p_\omega[M]$ определены для замкнутого многообразия M размерности $4n$ и всех разбиений ω числа n.

П. ч. $x[M]$, $x[N]$ двух бордантных (в ориентированном смысле) многообразий M, N равны: $x[M]=x[N]$ (теорема Понтрягина).

Согласно этой теореме каждый характеристич. класс $x\in H^{**}(BO;\ \mathbb{Q})$ индуцирует гомоморфизм $x[\quad]\colon\Omega_*^{SO}\to\to\mathbb{Q}$, а каждый элемент $[M]\in\Omega_*^{SO}$ индуцирует гомоморфизм $H^{**}(BO;\ \mathbb{Q})\to\mathbb{Q}$, $x\to x[M]$. Другими словами, имеется отображение

$$\varphi\colon\ \Omega_*^{SO}\longrightarrow \mathrm{Hom}\,(H^{**}(BO;\mathbb{Q});\ \mathbb{Q}).$$

Если все П. ч. и *Штифеля числа* двух ориентированных замкнутых многообразий совпадают, то эти многообразия бордантны (в ориентированном смысле).

Задача, аналогичная проблеме Милнора — Хирцебруха для квазикомплексных многообразий, состоит в том, чтобы описать образ отображения φ. Решение этой задачи основано на рассмотрении П. ч. в K-теории, соответствующих *Понтрягина классам* π_i в K-теории. Пусть $\omega=\{i_1, \ldots, i_n\}$ — набор целых неотрицательных чисел, $S_\omega(p)$ и $S_\omega(e_p)$ — характеристич. классы, определяемые четными симметрич. рядами

$$S^\omega(x_1^2, \ldots, x_n^2) \text{ и } S^\omega(e^{x_1}+e^{-x_1}-2, \ldots, e^{x_n}+e^{-x_n}-2)$$

соответственно, здесь $S^\omega(t_1, \ldots, t_n)$ — минимальный симметрич. полином, содержащий одночлен $t_1^{i_1}, \ldots, t_k^{i_k}$, $n \geqslant i_1+\ldots+i_k$. Пусть $B_* \subset \mathrm{Hom}(H^{**}(BO; \mathbb{Q}); \mathbb{Q})$ — множество таких гомоморфизмов $b: H^{**}(BO; \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$, для к-рых $b(S_\omega(p)) \in \mathbb{Z}$, $b(S_\omega(e_p)L) \in \mathbb{Z}[1/2]$ при всех наборах ω. Тогда образ гомоморфизма

$$\varphi\colon \Omega_*^{SO} \to \mathrm{Hom}(H^{**}(BO; \mathbb{Q}); \mathbb{Q})$$

совпадает с B_* (т е о р е м а С т о н г а — Х а т т о р и).

Характеристич. числа $L\{M\}$ и $\hat{A}[M]$, соответствующие классам $L, \hat{A} \in H^{**}(BO; \mathbb{Q})$, наз. L-р о д о м и $\hat{A}$-р о д о м соответственно многообразия M.

Для замкнутого многообразия M, размерность к-рого делится на 4, имеет место равенство $L[M]=I(M)$, где $I(M)$ — *сигнатура* многообразия, т. е. сигнатура квадратичной формы пересечения, определенной на $H_{n/2}(M)$, $n=\dim M$ (т е о р е м а Х и р ц е б р у х а). Для замкнутого спинорного многообразия M четной размерности спинорный индекс M, т. е. индекс оператора Дирака на M, совпадает с $\hat{A}[M]$.

Лит. см. при ст. *Понтрягина класс*. *А. Ф. Харшиладзе.*

ПОПЕРЕЧНИК м н о ж е с т в а — величина, характеризующая уклонение множества в метрич. пространстве от нек-рой системы объектов (как правило, конечномерных) при определенном методе приближения, а также величина, характеризующая точность восстановления элемента из данного множества при определенном методе кодирования. Наиболее изучены П., характеризующие возможность аппроксимации множества конечномерными компактами и конечномерными линейными многообразиями (поперечники по Александрову и поперечник по Колмогорову).

Пусть X — нормированное пространство с единичным шаром B, $C \subset X$ — аппроксимируемое подмножество в X, $\mathfrak{A}=\{A\}$, $A \subset X$,— нек-рая совокупность аппроксимирующих подмножеств, $F(C, A)$ — нек-рая совокупность отображений $f: C \to A$, наконец, $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}(C, \mathfrak{A})=U_{A \in \mathfrak{A}} F(C, A)$ — заданная совокупность отображений из аппроксимируемого в аппроксимирующее множества. Число

$$p_{\mathfrak{F}}(C, X) = \inf_{f \in \mathfrak{F}} \sup_{x \in C} \|x-f(x)\| \quad (1)$$

характеризует величину уклонения аппроксимируемого множества C от совокупности аппроксимируемых множеств $\mathfrak{A}$ при методе аппроксимации $\mathfrak{F}$.

Большинство П., характеризующих аппроксимационные свойства того или иного аппарата приближения, задаются по типу (1).

Если $\mathfrak{A}=\mathfrak{M}_N$ — совокупность $\{M_N\}$ всех линейных многообразий (т. е. сдвигов линейных подпространств) размерности $\leqslant N$, а $F(C, M_N)$ — совокупность всех отображений из C в M_N, то величина (1), называемая N-п о п е р е ч н и к о м п о К о л м о г о р о в у множества C и обозначаемая обычно $d_N(C, X)$, характеризует минимальное уклонение данного множества C

от N-мерных линейных многообразий, т. е. характеризует аппроксимативные возможности N-мерных линейных многообразий. Другие равносильные и общепринятые определения d_N таковы (см. [1]):

$$d_N(C, X) = \inf_{\{M_N\}} \sup_{x \in C} \inf_{y \in M_N} \|x-y\| = \inf_{\{M_N\}} \inf_{\varepsilon} \{\varepsilon > 0 \mid C \subset M_N + \varepsilon B\}. \qquad (1')$$

Если $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}_N$ (или $= \mathfrak{L}_N$ — совокупности всех подпространств $\{L_N\}$ размерности $\leqslant N$, а $F(C, M_N)(F(C, L_N))$ — совокупность всех аффинных (линейных) непрерывных отображений из C в $M_N(L_N)$, то величина (1), обозначаемая $\alpha_N(C, X)(\lambda_N(C, X))$ и называемая а ф ф и н н ы м (л и н е й н ы м) N-п о п е р е ч н и к о м, характеризует аппроксимативные возможности аффинных (линейных) N-мерных отображений.

Если $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}_N$ есть совокупность $\{K_N\}$ всех N-мерных компактов (или, равнозначно, всех N-мерных полиэдров), а $F(C, K_N)$ — множество всех непрерывных отображений из C в K_N, то величина (1), называемая N-п о п е р е ч н и к о м п о А л е к с а н д р о в у и обозначаемая $a_N(C, X)$, характеризует степень аппроксимации множества C N-мерными компактами.

Если $\mathfrak{A} = \Sigma_N$ — совокупность $\{\xi_N\}$ всех N-точечных множеств $\xi_N\{x_1, \ldots, x_N\}$ в X, а $F(C, \xi_N)$ — совокупность всех отображений из C в ξ_N, то П. (1), обозначаемый $\varepsilon_N(C, X)$, характеризует наименьшее уклонение данного C от N-точечных множеств, т. е. характеризует аппроксимативные возможности N-точечных множеств.

Все введенные выше аппроксимативные П. зависят от объемлющего пространства X и могут изменяться при погружении C с его метрикой в другое нормированное пространство.

Другой тип П. связан с задачами «кодирования» элементов множества C элементами другой природы или, как этот процесс еще иначе называют, с задачей восстановления. Пусть C — метрич. пространство, $Z = \{\zeta\}$ — нек-рая совокупность «кодирующих» множеств, $\varphi(C, \zeta)$ — нек-рая совокупность отображений $f: C \to \zeta$. Наконец, $\Phi = \Phi(C, Z) = \bigcup_{\zeta \in Z} \varphi(C, \zeta)$ — заданная совокупность методов кодирования. Величина

$$p^{\Phi}(C) = \inf_{f \in \Phi} \sup_{z \in f(C)} D(f^{-1}(z)), \qquad (2)$$

где через $D(E)$ обозначен диаметр множества E, характеризует восстановимость элементов множества C по информации, «закодированной» элементами множеств ζ из Z с помощью отображений из Φ. Большинство П., связанных с процессами восстановления, задается по типу (2).

Если Φ — совокупность всевозможных отображений из C в Z, состоящего из одного множества $\{1, \ldots, N\}$, то П. (2), обозначаемый $\varepsilon^N(C)$, характеризует точность восстановления элемента с помощью таблицы, состоящей из N элементов. Если C лежит в линейном нормированном пространстве X и Φ — совокупность всех непрерывных аффинных отображений из X в $\mathbb{R}^N$, то величина, равная $p^{\Phi}(C)/2$, где $p^{\Phi}(C)$ определено в (2), называемая N-п о п е р е ч н и к о м п о Г е л ь ф а н д у и обозначаемая $d^N(C)$, характеризует точность восстановления элементов по их образам при аффинных отображениях в $\mathbb{R}^N$. Для центрально-симметричных множеств величины d^N имеется другое равносильное определение:

$$d^N(C) = \inf_{\{N\}} \sup_{x \in C \cap L^N} \|x\| = \inf_{\{N\}} \sup_{\varepsilon} \{\varepsilon > 0 \mid C \cap \overset{N}{L} \subset \varepsilon B\}, \quad (2')$$

где L^N — замкнутое подпространство коразмерности N. Пусть Z состоит из всех N-мерных компактов $\{K_N\}$, $\varphi(C, K_N)$ — совокупность всех непрерывных отображений из C в K_N, $\Phi=\bigcup\limits_{\{K_N\}}\varphi(C,\ K_N)$, тогда (2) называется N-поперечником по Урысону и обозначается $u_N(C)$. Другое равносильное и общепринятое определение поперечника Урысона таково: $u_N(C)$ есть нижняя грань диаметров покрытий множества C кратности $\leqslant N+1$. Поперечник по Урысону характеризует степень N-мерности (с точки зрения брауэровской размерности) множества C.

Впервые величину, названную впоследствии П., ввел в 1923 П. С. Урысон (см. [2]), когда он определил u_N. В 1933 П. С. Александров [3] вскрыл аппроксимативные аспекты теории размерности, что привело его к определению a_N. В 1936 А. Н. Колмогоров [1] определил d_N — именно этот П. наиболее интенсивно изучался далее в теории приближений. В 1931 Л. С. Понтрягин и Л. Г. Шнирельман (см. [4]) выразили размерность (топологич. характеристику), использовав асимптотическую метрич. характеристику $N_\varepsilon(C)$ (обратную к поперечнику $\varepsilon^N(C)$), равную для метрич. пространства C наименьшему числу элементов 2ε-покрытия для множества C. Интерес к подобным величинам возрос в 50-х гг., когда А. Н. Колмогоров [5], базируясь на идеях теории информации, ввел величину $N_\varepsilon(C,\ X)$ (обратную к поперечнику $\varepsilon_N(C,\ X)$) и сформулировал программу исследований величин типа $N_\varepsilon(C)$, $N_\varepsilon(C,\ X)$ и им подобных как специальный раздел теории приближений, связанный с вопросами наилучшего табулирования функций. Двоичный логарифм величины $N_\varepsilon(C,\ X)$ получил название *ε-энтропии* множества C, а $\log_2 N_\varepsilon(C)$ — абсолютной ε-энтропии множества C.

Получено множество конкретных результатов, где те или иные П. (названные выше и иные) вычислялись для различных функциональных классов и геометрич. объектов. Такие вычисления можно разделить на две группы — асимптотические и точные.

Вот нек-рые результаты, касающиеся асимптотич. вычислений П. соболевских классов. Пусть W_p^r — совокупность функций $x(\cdot)$ на конечном отрезке (скажем, на $[0,\ 1]$), у к-рых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна и для r-й производной выполнено неравенство

$$\|x^{(r)}(\cdot)\|_p=\left(\int_0^1|x^{(r)}(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\leqslant 1,\ \ p\geqslant 1, k=1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Доказана следующая асимптотич. формула:

$$d_N(W_p^r,\ L_q)\asymp\begin{cases} N^{-(r-(1/p-1/q)_+)}, \\ 1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty \ \text{ или } 1\leqslant p\leqslant q\leqslant 2, \\ N^{-(r-(1/p-1/2)_+)}, \\ 1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty,\ \ q\geqslant 2. \end{cases}\qquad (3)$$

Из частных случаев верхней строки формулы (3) следует, что асимптотически наилучшим аппроксимирующим пространством является пространство тригонометрич. полиномов или пространство сплайнов с равномерно распределенными узлами.

Ожидалось, что всегда имеет место такая асимптотика, т. е. подпространство тригонометрич. полиномов данной степени всегда будет асимптотически экстремальным. Однако оказалось, что это не так (см. [10], [13]). Тригонометрич. полиномы $\mathrm{lin}\,\{\cos nt,\ \sin nt,\ 0\leqslant n\leqslant N\}$ оказались асимптотически не экстремальными. Однако в ряде случаев «переставленные» гармоники, т. е. $\asymp N$ гармоник, взятых в «неправильном» порядке, все-таки оказались экстремальными.

Решение задачи о П. соболевских классов опирается на исследование вопроса о поперечнике n-октаэдров в $\mathbb{R}^n$:

$$O_p^n=\left\{x\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\sum_{i=1}^n\left|x_i\right|^p\leqslant 1\right\}.$$

При $p \geqslant q$ величина $d_N(O_p^n, l_q^n)$ определяется точно; при $p<q$ точно вычислена величина $d_N(O_1^n, l_2^n)$, она оказалась равной $\left(1-\frac{N}{n}\right)^{1/2}$. Принципиальную роль при вычислении колмогоровских П. соболевских классов играют следующие оценки (см. [13]):

А) $d_N\left(O_1^n, l_\infty^n\right) \leqslant 2N^{-1/2}(\ln n)^{1/2}$;

Б) $d_N\left(O_2^n, l_\infty^n\right) \leqslant AN^{-1/2}\left(1+\ln\frac{n}{N}\right)^{3/2}$,

где A — постоянная;

В) если $\lambda \in (0, 1)$, то при $n^\lambda \leqslant N \leqslant n$ имеет место неравенство

$$d_N\left(O_1^n, l_\infty^n\right) \leqslant C_\lambda N^{-1/2}.$$

Рассмотрен вопрос и об асимптотич. поведении александровских П. соболевских классов. Оказалось, что

$$a_N\left(W_p^r, L_q\right) \asymp \frac{1}{N^r} \quad \text{при } 1<p,\ q<\infty,\ r \in N.$$

Решить вопрос о точном вычислении П.— это найти экстремальный для данного класса аппарат приближения. Первый результат этого рода принадлежит А. Н. Колмогорову [1], к-рый решил задачу о вычислении поперечника $d_N(W_2^r, L_2[0, 1])$ и аналогичную задачу для периодич. класса $\tilde{W}_2^r$ в метрике $L_2([-\pi, \pi])$. Для вычисления точного значения поперечника $d_N(\tilde{W}_\infty^r, L_\infty[-\pi, \pi])$ впервые привлечены (см. [7]) топологич. методы (теорема о поперечнике шара, сводящаяся к теореме Борсука об антиподах). Эта теорема была обобщена (см. [12]) и применена к нахождению других точных решений. Впоследствии обнаружились интересные связи с вариационным исчислением и оптимальным управлением (см. [9]).

О поперечниках ε_N, ε^N и обратных к ним величинах $N_\varepsilon(C)$ и $N_\varepsilon(C, X)$ см. *ε-энтропия*.

Вопросы о П. имеют тесное соприкосновение с разнообразными задачами геометрии. Напр., задача об асимптотике величины $N_\varepsilon(C, \mathbb{R}^n)$ тесно связана с задачей о наилучшем замощении пространства $\mathbb{R}^n$ сферами. Зависимость асимптотических П. от объемлющего пространства привела к идее введения абсолютных П.— величин

$$p_F^A(C) = \inf p_F(C, X),$$

где нижняя грань берется по всем вложениям C с его метрикой в объемлющее пространство X. При этом оказывается (см. [9]), напр., что

$$\varepsilon_N^A(C) = \frac{1}{2}\varepsilon^N(C),$$

$$a_N^A(C) = \frac{1}{2}u_N(C).$$

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Ann. Math.», 1936, v. 37, p. 107—10; [2] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, М.— Л., 1951, с. 483; [3] Александров П. С., «Fund. math.», 1933, v. 20, p. 140—50; [4] Понтрягин Л., Шнирельман Л. Г., в кн.: Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948, с. 210—18; [5] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 3, с. 385—88; [6] Брудный Ю. А., Тиман А. Ф., там же, 1959, т. 126, № 5, с. 927—30; [7] Тихомиров В. М., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 3, с. 81—120; 1965, т. 20, в. 1, с. 227—30; [8] его же, Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [9] его же, в кн.: Теория приближения функций. Тр. Межд. конф. по теории приближения функций. Калуга. 1975, М., 1977, с. 359—65; [10] Исмагилов Р. С., в кн.: Геометрия линейных пространств и теория операторов, Ярославль, 1977, с. 75—113; [11] его же, «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 3, с. 161—78; [12] Маковоз Ю. И., «Матем. сб.», 1972, т. 87, № 1, с. 136—42; [13] Кашин Б. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1977, т. 41, № 2, с. 334—51; [14] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976.

В. М. Тихомиров.

ПОПОЛНЕНИЕ топологического векторного пространства X — топологическое векторное пространство $\hat{X}$ такое, что X является подпространством $\hat{X}$ и X плотно в $\hat{X}$. Под П. понимают также и операцию перехода от X к $\hat{X}$; стандартное ее осуществление — с помощью *направленностей* (в частности, последовательностей Коши). *М. И. Войцеховский.*

ПОПОЛНЕНИЕ РАВНОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА X — отделимое *полное равномерное пространство* $\hat{X}$ такое, что существует равномерно непрерывное отображение $i\colon X \to \hat{X}$ и для любого равномерно непрерывного отображения f пространства X в отделимое полное равномерное пространство Y существует, и притом единственное, равномерно непрерывное отображение $g\colon \hat{X} \to Y$, причем $f = g \circ i$. Подпространство $i(X)$ плотно в $\hat{X}$, и образы при отображении $i \times i$ окружений для X являются окружениями для $i(X)$, а замыкания последних в $\hat{X} \times \hat{X}$ образуют фундаментальную систему окружений для $\hat{X}$. Когда X отделимо, i инъективно (что позволяет отождествить X с $i(X)$. Отделимое пополнение подпространства $A \subset X$ изоморфно замыканию $i(A) \subset \hat{X}$. Отделимое пополнение произведения равномерных пространств изоморфно произведению отделимых пополнений пространств-сомножителей.

Доказательство существования $\hat{X}$ по существу обобщает построение Г. Кантора (G. Cantor) множества действительных чисел из чисел рациональных.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968. *М. И. Войцеховский.*

ПОПОЛНЕНИЕ СЕЧЕНИЯМИ, пополнение Мак-Нейла, частично упорядоченного множества M — *полная решетка* L, получаемая из множества M следующим образом. Пусть $\tilde{M} = M$ (если M обладало нулем) или получается внешним присоединением наименьшего элемента 0 к M (если M не имело нуля). И пусть $P(\tilde{M})$ — упорядоченное отношением включения множество всех непустых подмножеств множества $\tilde{M}$. Для любого $X \in P(\tilde{M})$ пусть

$$X^{\Delta} = \{a \in \tilde{M} \mid a \geq x \text{ для всех } x \in X\},$$

$$X^{\nabla} = \{a \in \tilde{M} \mid a \leq x \text{ для всех } x \in X\}.$$

Условие $\varphi(X) = (X^{\Delta})^{\nabla}$ определяет *замыкания отношение* φ на множестве $P(\tilde{M})$. Решетка L всех φ-замкнутых подмножеств множества $P(\tilde{M})$ является полной. Для любого $x \in M$ множество $(x^{\Delta})^{\nabla}$ является главным идеалом, порожденным элементом x. Полагая $i(x) = (x^{\Delta})^{\nabla}$ для всех $x \in M$, получают изоморфное вложение i множества M в полную решетку L, сохраняющее все точные верхние и нижние грани, существующие в M. В применении к упорядоченному множеству рациональных чисел описанная конструкция дает пополнение множества рациональных чисел дедекиндовыми сечениями.

Лит.: [1] Macneille H. M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1937, v. 42, p. 416—60. *Т. С. Фофанова.*

ПОПОЛНЕНИЯ МЕТОД — метод вычисления обратной матрицы, основанный на рекуррентном переходе, использующем вычисление матрицы $(C+uv)^{-1}$, где u— вектор-столбец, v — вектор-строка, по формуле

$$(C+uv)^{-1} = C^{-1} - \frac{1}{\gamma} C^{-1}uvC^{-1}, \ \gamma = 1 + vC^{-1}u.$$

Вычислительная схема метода такова. Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — данная матрица n-го порядка. Рассматривается последовательность $A_0 = E,\ A_1, \ldots, A_n$, где $A_k = A_{k-1} + e_k a_k$, e_k есть k-й столбец единичной матрицы E, $a_k = (a_{k1}, \ldots, a_{k,\,k-1},\ a_{k,\,k-1},\ a_{k,\,k+1}, \ldots, a_{kn})$.

Тогда $A_n = A$ и матрица A^{-1} получается в результате n-кратного применения описанного выше процесса. Расчетные формулы при этом имеют следующий вид: если $a_j^{(k)}$ есть j-й столбец A_k, то для $k=1, 2, \ldots, n$;

$$a_j^{(k)} = a_j^{(k-1)} - \frac{a_k a_j^{(k-1)}}{1 + a_k a_k^{(k-1)}} a_k^{(k-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (*)$$

Для матрицы A_k^{-1} достаточно вычислять элементы первых k строк, т. к. последующие строки совпадают со строками единичной матрицы.

Известны другие способы организации вычислений в П. м., основанные на модификации (*), напр. т. н. метод Ершова (см. [1]).

Лит.: [1] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963.

Г. Д. Ким.

ПОРИСТОСТИ ТОЧКА для множества E из n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ — точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, для к-рой существует последовательность открытых шаров B_k с радиусами $r_k \to 0$ и общим центром в точке x_0 таких, что для каждого $k=1, 2, \ldots$ найдется открытый шар $G_k \subset B_k \setminus E$ радиуса $\geqslant Cr_k$, где C положительно и не зависит от k (но, вообще говоря, зависит от x_0 и E). Множество E наз. пористым, если каждая его точка является П. т. для него. Множество E наз. σ-пористым, если его можно представить в виде конечного или счетного объединения пористых множеств (см. [1]). П. т. для E является П. т. для его замыкания $\overline{E}$ и не является точкой плотности в смысле Лебега ни для E, ни для $\overline{E}$. Каждое пористое или σ-пористое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет первую категорию по Бэру и нулевую меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Обратное, вообще говоря, неверно: существуют даже совершенные нигде не плотные множества $E \subset \mathbb{R}^1$, имеющие меру нуль, но не являющиеся σ-пористыми (см. [2]). Для множества E, лежащего на гладком многообразии $S \subset \mathbb{R}^n$, П. т. $x_0 \in S$ множества E относительно многообразия S определяется, как выше, при дополнительном условии, что центры шаров B_k лежат на S.

Лит.: [1] Долженко Е. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 1, с. 3—14; [2] Zajíček L., «Časopis pěst. mat.», 1976, sv. 101, s. 350—59.

Е. П. Долженко.

ПОРЦИЯ множества — пересечение множества с интервалом в случае множества на прямой и с открытым кругом или шаром, с открытым прямоугольником или параллелепипедом в случае множества в n-мерном ($n \geqslant 2$) пространстве. Важность этого понятия оправдывается следующими обстоятельствами. Множество A является всюду плотным в множестве B, если каждая П. множества B содержит точку множества A, иначе говоря, если замыкание $\overline{A} \supset B$. Множество A является нигде не плотным в множестве B, если A не будет всюду плотным ни в какой П. множества B, т. е. если не существует П. множества B, содержащейся в $\overline{A}$.

А. А. Конюшков.

ПОРЯДКА СООТНОШЕНИЕ, сравнение функций, O — o-соотношения, асимптотические соотношения,— понятие, возникающее при изучении поведения одной функции относительно другой в окрестности нек-рой точки (быть может, бесконечной).

Пусть x_0 — предельная точка множества E. Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют такие постоянные $c>0$ и $\delta>0$, что $|f(x)| \leqslant c|g(x)|$ при $|x-x_0|<\delta$, $x \neq x_0$, то говорят, что f является ограниченной по сравнению с g функцией в нек-рой окрестности точки x_0, и пишут

$$f(x) = O(g(x)) \text{ при } x \longrightarrow x_0$$

(читается: «$f(x)$ есть O большое от $g(x)$»); $x \to x_0$ означает, что рассматриваемое свойство имеет место лишь в нек-рой окрестности точки x_0. Естественным образом это определение переносится на случай $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f=O(g)$ и $g=O(f)$ при $x \to x_0$, то они наз. функциями одного порядка при $x \to x_0$. Напр., если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ таковы, что $\alpha(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$ и существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0,$$

то они одного порядка при $x \to x_0$.

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ наз. эквивалентными (асимптотически равными) при $x \to x_0$ и пишут $f \sim g$, если в нек-рой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, определена такая функция $\varphi(x)$, что

$$f(x) = \varphi(x) g(x) \text{ и } \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \qquad (*)$$

Условие эквивалентности двух функций симметрично, т. е. если $f \sim g$, то и $g \sim f$ при $x \to x_0$, и транзитивно, т. е. если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$ при $x \to x_0$. Если в нек-рой окрестности точки x_0 при $x \neq x_0$ справедливы неравенства $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, то условие $(*)$ эквивалентно любому из следующих

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

Если $\alpha(x) = \varepsilon(x) f(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, то говорят, что α является бесконечно малой функцией по сравнению с функцией f, и пишут

$$\alpha = o(f) \text{ при } x \to x_0$$

(читается: «α есть o малое от f»). Если $f(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$, то $\alpha = o(f)$, когда $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha/f = 0$. В случае, если f является бесконечно малой при $x \to x_0$, то говорят, что функция $\alpha = o(f)$ при $x \to x_0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем f. Если же $g(x)$ и $[f(x)]^k$ — величины одного порядка, то говорят, что g является величиной порядка k относительно f. Все формулы указанного выше вида наз. асимптотическими оценками, они наиболее интересны для бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Примеры: $e^x - 1 = o(1)$ $(x \to 0)$; $\cos x^2 = O(1)$, $(\ln x)^\alpha = o(x^\beta)$ $(x \to \infty$; α, β — любые положительные числа); $[x/\sin(1/x)] = O(x^2)$ $(x \to \infty)$.

Некоторые свойства символов o и O:

$$O(\alpha f) = O(f) \quad (\alpha \text{— const});$$
$$O(O(f)) = O(f);$$
$$O(f) O(g) = O(f \cdot g);$$
$$O(o(f)) = o(O(f)) = o(f);$$
$$O(f) o(g) = o(f \cdot g);$$

если $0 < x < x_0$ и $f = O(g)$, то

$$\int_{x_0}^{x} f(y)\, dy = O\left(\int_{x_0}^{x} |g(y)|\, dy\right) \quad (x \to x_0).$$

Формулы, содержащие o-, O-символы, читаются только слева направо, это не исключает того, что отдельные формулы оказываются справедливыми и при чтении справа налево. Символы o и O для функций комплексного переменного и для функций многих переменных вводятся аналогично тому, как они были определены выше для функций одного действительного переменного.

М. И. Шабунин.

ПОРЯДКОВАЯ СТАТИСТИКА — член *вариационного ряда*, построенного по результатам наблюдений. Пусть наблюдается случайный вектор $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, принимающий значения $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть в $\mathbb{R}^n$ задана функция $\varphi(\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенная по следующему правилу:

$$\varphi(x) = x^{(\cdot)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $x^{(\cdot)} = (x_{(n1)}, x_{(n2)}, \ldots, x_{(nn)})$ — вектор из $\mathbb{R}^n$, полученный из вектора x в результате перестановки его координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в возрастающем порядке, т. е. компоненты $x_{(n1)}, x_{(n2)}, \ldots, x_{(nn)}$ вектора $x^{(\cdot)}$ удовлетворяют следующему соотношению

$$x_{(n1)} \leqslant x_{(n2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(nn)}. \tag{1}$$

В этом случае статистика $X^{(\cdot)} = \varphi(X) = (X_{(n1)}, \ldots, X_{(nn)})$ наз. вариационным рядом (или вектором) порядковых статистик, а ее k-я компонента X_{nk} ($k=1, 2, \ldots, n$) наз. k-й порядковой статистикой.

В теории П. с. наиболее полно изучен случай, когда компоненты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ случайного вектора X суть независимые одинаково распределенные случайные величины, что в дальнейшем и будет предполагаться. Если $F(u)$ — функция распределения случайной величины X_i, $i=1, 2, \ldots, n$, то функция распределения $F_{nk}(u)$ k-й П. с. $X_{(nk)}$ вычисляется по формуле

$$F_{nk}(u) = \mathsf{P}\{X_{(nk)} \leqslant u\} = I_{F(u)}(k, n-k+1), \ |u| < \infty, \tag{2}$$

где

$$I_y(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^y x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

— неполная бета-функция. Из (2) следует, что если функция распределения $F(u)$ имеет плотность вероятности $f(u)$, то плотность вероятности $f_{nk}(u)$ k-й П. с. $X_{(nk)}$, $k=1, 2, \ldots, n$, тоже существует и выражается формулой

$$f_{nk}(u) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(u)]^{k-1}[1-F(u)]^{n-k} f(u), \ |u| < \infty. \tag{3}$$

В предположении существования плотности $f(u)$ была получена совместная плотность вероятности $f_{r_1 r_2 \ldots r_k}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ П. с. $X_{(nr_1)}, X_{(nr_2)}, \ldots, X_{(nr_k)}$, $1 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_k \leqslant n$; $k \leqslant n$, к-рая выражается формулой

$$f_{r_1 r_2 \ldots r_k}(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \frac{n!}{(r_1-1)!(r_2-r_1-1)!\ldots(n-r_k)!} \times$$
$$\times F_1^{r_1-1}(u_1) f(u_1) [F(u_2)-F(u_1)]^{r_2-r_1-1} f(u_2) \ldots$$
$$\ldots [1-F(u_k)]^{n-r_k} f(u_k), \tag{4}$$
$$-\infty < u_1 < u_2 < \ldots < u_k < \infty.$$

Формулы (2) — (4) позволяют, напр., найти распределение вероятностей т. н. экстремальных П. с.

$$X_{(n1)} = \min_{1 \leqslant i \leqslant n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ и}$$
$$X_{(nn)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

а также распределение статистики $W_n = X_{(nn)} - X_{(n1)}$, к-рую наз. размахом. Напр., если функция распределения $F(u)$ непрерывна, то функция распределения размаха W_n выражается формулой

$$\mathsf{P}\{W_n < w\} = n \int_{-\infty}^{\infty} [F(u+w) - F(u)]^{n-1} dF(u), \ w \geqslant 0. \tag{5}$$

Формулы (2) — (5) показывают, что, как и в общей теории выборочных методов, точные распределения П. с. невозможно использовать при получении статистич. выводов, если функция распределения $F(u)$ неизвестна. Именно поэтому в теории П. с. получили широкое развитие асимптотич. методы исследования распределений П. с. при неограниченном увеличении размерности n вектора наблюдений. В асимптотич. теории П. с. изучаются предельные распределения соответствующим образом нормированных последовательностей П. с. $\{X_{(nk)}\}$, когда $n \to \infty$; при этом, вообще говоря, порядковый номер k может меняться в зависимости от n. Если с ростом n порядковый номер k меняется таким образом, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} k/n$, отличный от 0 и 1, то соответствующие П. с. $X_{(nk)}$ рассматриваемой последовательности $\{X_{(nk)}\}$ наз. центральными или средними П. с. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} k/n$ равен 0 или 1, то П. с. $X_{(nk)}$ наз. крайними.

В математич. статистике центральные П. с. используют при построении состоятельных последовательностей оценок для *квантилей* неизвестной функции распределения $F(u)$ по реализации случайного вектора X или, иначе говоря, при оценивании функции $F^{-1}(u)$. Напр., пусть x_P — квантиль уровня P $(0<P<1)$ функции распределения $F(u)$, про к-рую известно, что ее плотность вероятности $f(u)$ непрерывна и строго положительна в нек-рой окрестности точки x_P. В этом случае последовательность центральных П. с. $\{X_{(nk)}\}$ с порядковыми номерами $k=[(n+1)P+0{,}5]$, где $[a]$ — целая часть действительного числа a, является состоятельной последовательностью оценок для квантили x_P, $n\to\infty$. Более того, эта последовательность П. с. $\{X_{(nk)}\}$ асимптотически нормально распределена с параметрами

$$x_P \text{ и } \frac{P(1-P)}{f^2(x_P)(n+1)},$$

т. е. для любого действительного числа x

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{X_{(nk)}-x_P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n+1}}} f(x_P) < x\right\} = \Phi(x), \tag{6}$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Пример 1. Пусть $X^{(\cdot)}=(X_{(n1)}, \ldots, X_{(nn)})$ — вектор П. с., построенный по случайному вектору $X=(X_1, \ldots, X_n)$, компоненты к-рого суть независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же вероятностному закону, плотность вероятности к-рого непрерывна и строго положительна в нек-рой окрестности медианы $x_{1/2}$. В этом случае при $n\to\infty$ последовательность выборочных медиан $\{\mu_n\}$, определяемых для любого $n \geqslant 2$ по правилу

$$\mu_n = \begin{cases} X_{(n,\, m+1)}, & \text{если } n \text{ — нечетное число,} \\ \frac{1}{2}\left(X_{(nm)}+X_{(n,\, m+1)}\right), & \text{если } n \text{ — четное число,} \end{cases}$$

асимптотически нормально распределена с параметрами

$$x_{1/2} \text{ и } \{4(n+1) f^2(x_{1/2})\}^{-1}.$$

В частности, если

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \ |a|<\infty, \ \sigma>0,$$

то есть X_i подчиняется нормальному закону $N(a, \sigma^2)$, то в этом случае последовательность $\{\mu_n\}$ асимптотически нормально распределена с параметрами $x_{1/2}=a$ и $\frac{\sigma^2\pi}{2(n+1)}$. Если последовательность статистик $\{\mu_n\}$ сравнить с последовательностью наилучших несмещенных оценок

$$\{\overline{X}_n\}, \ \overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i,$$

математич. ожидания a нормального закона, то следует отдать предпочтение последовательности $\{\overline{X}_n\}$, т. к.

$$\mathsf{D}\overline{X}_n=\frac{\sigma^2}{n}<\frac{\sigma^2\pi}{2(n+1)}\approx\mathsf{D}\mu_n$$

для любого $n\geqslant 2$.

Пример 2. Пусть $X^{(\cdot)}=(X_{(n1)}, \ldots, X_{(nn)})$ — вектор П. с., построенный по случайному вектору $X=(X_1, \ldots, X_n)$, компоненты к-рого независимы и равномерно распределены на отрезке $[a-h; a+h]$, причем параметры a и h неизвестны. В этом случае последовательности статистик $\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$, где

$$Y_n=\frac{1}{2}(X_{(n1)}+X_{(nn)}) \text{ и } Z_n=\frac{n+1}{2(n-1)}(X_{(nn)}-X_{(n1)}),\ n\geqslant 2,$$

являются состоятельными последовательностями сверхэффективных несмещенных оценок для параметров a и h соответственно, причем

$$\mathsf{D}Y_n=\frac{2h^2}{(n+1)(n+2)} \text{ и } \mathsf{D}Z_n=\frac{2h^2}{(n-1)(n+2)}. \qquad (7)$$

Можно показать, что последовательности статистик $\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$ определяют наилучшие оценки для a и h в смысле минимума квадратичного риска в классе линейных несмещенных оценок, выраженных в терминах П. с.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [3] Дэйвид Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979; [4] Гумбель Э., Статистика экстремальных значений, пер. с англ., М., 1965; [5] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [6] Гнеденко Б. В., «Докл. АН СССР. Новая серия», 1941, т. 32, № 1, с. 7—9; [7] его же, «Ann. Math.», 1943, v. 44, № 3, p. 423—53; [8] Смирнов Н. В., «Тр. Матем. ин-та», 1949, т. 25, с. 5—59; [9] его же, «Теория вероятн. и ее применен.», 1967, т. 12, № 2, с. 391—92; [10] Чибисов Д. М., там же, 1964, т. 9, № 1, с. 159—65; [11] Craig A. T., «Amer. J. Math.», 1932, v. 54, p. 353—66; [12] Tippett L. H. C., «Biometrika», 1925, v. 17, p. 364—87; [13] Pearson E. S., там же, 1932, v. 24, p. 404—17.

М. С. Никулин.

ПОРЯДКОВАЯ ТОПОЛОГИЯ — топология $\mathcal{T}_<$ на линейно упорядоченном множестве X, порожденная линейным упорядочением $<$, базу к-рой образуют всевозможные интервалы из X. *М. И. Войцеховский.*

ПОРЯДКОВОЕ ЧИСЛО, трансфинитное число, ординальное число, ординал, — *порядковый тип* вполне упорядоченного множества. Понятие П. ч. ввел Г. Кантор (G. Cantor, 1883, см. [2]). Напр., П. ч. множества натуральных чисел, упорядоченного отношением $\leqslant$, есть ω. П. ч. множества, состоящего из числа 1 и чисел вида $1-\frac{1}{n}$, если $n=1, 2, \ldots$, упорядоченного отношением $\leqslant$, есть $\omega+1$. Говорят, что П. ч. α равно (меньше) П. ч. β, и пишут $\alpha=\beta$ $(\alpha<\beta)$, если множество типа α подобно множеству (отрезку) типа β. Для произвольных П. ч. α и β выполняется одна и только одна из возможностей $\alpha<\beta$, $\alpha=\beta$, $\alpha>\beta$. Множество $\{\beta : \beta<\alpha\}$ всех П. ч., меньших α, вполне упорядочено по типу α отношением $\leqslant$. Более того, каждое множество П. ч. вполне упорядочено отношением $\leqslant$, т. е. в каждом непустом множестве П. ч. есть наименьшее П. ч. Для каждого множества Z П. ч. существует П. ч., превосходящее каждое П. ч. из Z. Таким образом, не существует множества всех П. ч. Наименьшее среди П. ч., следующих за П. ч. α, наз. последователем α и обозначается $\alpha+1$. П. ч. α наз. предшественником П. ч. $\alpha+1$. П. ч. наз. предельным числом, если оно не имеет предшественника. Таким образом, 0 — предельное число. Каждое П. ч. можно представить в виде $\alpha=\lambda+n$, где λ — предельное число, n — натуральное, а сумма понимается как сложение порядковых типов.

Трансфинитной последовательностью типа α, или α-последовательностью, наз. функция φ, определенная на $\{\beta : \beta<\alpha\}$. Если значениями этой последовательности служат П. ч. и из $\gamma<\beta<\alpha$ следует $\varphi(\gamma)<\varphi(\beta)$, то эта последовательность наз. возрастающей. Пусть φ обозначает λ-последовательность, где λ — предельное число. Наименьшее среди П. ч., бо́льших каждого из чисел $\varphi(\gamma)$, где $\gamma<\lambda$, наз. пределом последовательности $\varphi(\gamma)$ для $\gamma<\lambda$ и обозначается $\lim\limits_{\gamma<\lambda}\varphi(\gamma)$. Напр., $\omega=\lim\limits_{n<\omega} n=\lim\limits_{n<\omega} n^2$. П. ч. λ конфинально предельному числу α, если λ является пределом возрастающей α-последовательности: $\lambda=\lim\limits_{\xi<\alpha}\varphi(\xi)$.

П. ч. наз. регулярным, если оно не конфинально никакому меньшему П. ч., и сингулярным в противном случае. П. ч. наз. начальным П. ч., мощности τ, если оно наименьшее среди П. ч. мощности τ (т. е. среди порядковых типов вполне упорядоченных множеств мощности τ). Начальное П. ч. мощности τ обозначается $\omega(\tau)$. Множество $\{\omega(\delta) : \delta\leqslant\tau\}$ всех начальных П. ч. бесконечных мощностей, меньших чем τ, вполне упорядочено. Если П. ч. α является его порядковым типом, то полагается $\omega(\tau)=\omega_\alpha$. Таким образом, каждое начальное П. ч. снабжается индексом, равным порядковому типу множества всех начальных П. ч., меньших, чем данное. Различным начальным числам соответствуют различные индексы. Каждое П. ч. α является индексом нек-рого начального числа. Каждое предельное П. ч. $\lambda\neq0$ конфинально начальному числу ω_α — наименьшему из П. ч., конфинальных λ.

Начальное число ω_α наз. слабо недостижимым, если оно регулярно и его индекс α — предельное число. Напр., $\omega=\omega_0$ слабо недостижимо, а ω_ω сингулярно и потому не будет слабо недостижимо. Если $\alpha>0$, то ω_α слабо недостижимо тогда и только тогда, когда $\alpha=\omega_\alpha=cf(\alpha)$, где $cf(\alpha)$ — наименьшее число ξ такое, что α конфинально ω_ξ.

Слабо недостижимые П. ч. допускают классификацию, аналогичную классификации недостижимых *кардинальных чисел*. Сумма и произведение двух П. ч. являются П. ч. Если множество индексов вполне упорядочено, то вполне упорядоченная сумма П. ч. является П. ч. Для П. ч. можно определить возведение в степень по трансфинитной индукции: $\gamma^0=1$, $\gamma^{\xi+1}=\gamma^\xi\cdot\gamma$, $\gamma^\lambda=\lim\limits_{\xi<\lambda}\gamma^\xi$, где λ — предельное число. Число γ^α наз. степенью числа γ, γ — *основанием степени* и α — *показателем степени*. Напр., взяв $\gamma=\omega$, $\alpha_0=1$, получают $\alpha_1=\gamma^{\alpha_0}=\omega$, $\alpha_2=\omega^\omega$, $\alpha_3=\omega^{\omega^\omega}$, ... Предел этой последовательности $\varepsilon=\lim\limits_{n<\omega}\alpha_n$ является наименьшим критич. числом функции ω^ξ, т. е. наименьшим из П. ч., для к-рых $\omega^\varepsilon=\varepsilon$. Числа ε, для к-рых выполняется это равенство, наз. эпсилон-ординалами.

Возведение в степень можно использовать для представления П. ч. в виде, напоминающем представление натуральных чисел в десятичной системе. Если $\gamma>1$, $1\leqslant\alpha<\gamma^\eta$, то существуют такое натуральное число n и такие последовательности $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, что

$$\alpha=\gamma^{\eta_1}\beta_1+\gamma^{\eta_2}\beta_2+\ldots+\gamma^{\eta_n}\beta_n, \tag{1}$$

$$\eta>\eta_1>\eta_2>\ldots>\eta_n,\ 0\leqslant\beta_i<\gamma, \tag{2}$$

для $i=1, 2, \ldots, n$. Формула (1) для чисел β_j и η_j, удовлетворяющих условиям (2), наз. разложением числа α по основанию γ. Числа β_i наз. цифрами, а числа η_i — показателями степеней этого разложения. Разложение П. ч. по данному основанию единственно.

Разложение П. ч. по основанию ω используется для определения натурального сложения и натурального умножения П. ч.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948; [2] Кантор Г., в кн.: Новые идеи в математике. Сб. 6, СПБ, 1914, с. 90—184; [3] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [4] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [5] Sierpiński W., Cardinal and ordinal numbers, 2 ed., Warsz., 1965.

Б. А. Ефимов.

ПОРЯДКОВЫЙ ТИП *линейно упорядоченного множества* A — свойство множества A, к-рое присуще любому линейно упорядоченному множеству B, подобному A. При этом два множества A и B, линейно упорядоченные соотношениями R и S, наз. подобными, если существует функция f, взаимно однозначно отображающая A на B и такая, что для любых точек $x, y \in A$ выполнено $xRy \Longleftrightarrow f(x)Sf(y)$. Г. Кантор (G. Cantor) определял П. т. как такое свойство линейно упорядоченного множества, к-рое остается, если отвлечься лишь от свойств элементов этого множества, но не от их порядка. Чтобы подчеркнуть, что проведен один этот акт абстракции, Г. Кантор для обозначения П. т. множества A ввел символ $\overline{A}$. Для часто встречающихся множеств их П. т. обозначается специальными буквами. Напр., если $\mathbb{Z}^+$ — множество всех натуральных чисел, упорядоченное отношением $\leqslant$, то $\overline{\mathbb{Z}}^+ = \omega$. Если Q — множество всех рациональных чисел, также упорядоченное отношением $\leqslant$, то $\overline{\mathbb{Q}} = \eta$. Линейно упорядоченное множество A имеет тип ω тогда и только тогда, когда: (1) A имеет первый элемент a_0, (2) каждый элемент x множества A имеет последующий $x+1$, (3) если $a_0 \in X \subset A$ и множество X содержит последователь каждого своего элемента, то $X = A$. Существует только один П. т. η непустых множеств, плотных, счетных, не имеющих ни первого, ни последнего элемента (теорема Кантора). Линейно упорядоченное множество имеет П. т. λ — множества всех действительных чисел, если оно непрерывно и содержит плотное в нем подмножество A, П. т. к-рого есть η, имеющее с ним общее начало и общий конец. Доказана независимость в системе аксиом (ZF) *Суслина проблемы*, см. [1].

Для П. т. определяются операции, до нек-рой степени аналогичные арифметич. операциям.

Пусть α и β — два П. т., A и B — такие два линейно упорядоченные множества, что $\overline{A} = \alpha$, $\overline{B} = \beta$ и $A \cap B = \varnothing$. Суммой $\alpha + \beta$ наз. П. т. $\alpha + \beta = \overline{A \cup B}$, где множество $A \cup B$ упорядочено так, что все элементы множества A предшествуют всем элементам множества B, а в каждом из множеств A и B порядок сохраняется. В частности, если α и β — натуральные числа, то определение суммы П. т. совпадает с определением суммы натуральных чисел. Имеют место равенства $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ и $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$, где 0 — П. т. пустого множества. Закон коммутативности в общем случае не выполняется, напр. $\omega + 1 \neq 1 + \omega$.

Пусть $\alpha = \overline{A}$ и $\beta = \overline{B}$. Произведением $\alpha \cdot \beta$ наз. П. т. $\alpha \cdot \beta = \overline{A \times B}$, где множество $A \times B$ упорядочено так, что если $\{x, y\}$, $\{x_1, y_1\}$ — два его элемента, то первый элемент предшествует второму, когда $y < y_1$ или (в случае совпадения ординат) $x < x_1$ (принцип последних различных членов). Имеют место равенства $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$, $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha$, $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$, где 1 — П. т. одноэлементного множества. Умножение, как и сложение, некоммутативно. Напр., $\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega$. Закон дистрибутивности выполняется: $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. Произведение $\lambda \cdot \lambda$ представляет непрерывный П. т. мощности континуума, не содержащий счетного плотного подмножества.

С суммой и произведением П. т. тесно связаны сумма произвольного упорядоченного множества П. т. и лексикографич. произведение вполне упорядоченного множества П. т. Пусть $\{A_m : m \in M\}$ — семейство линейно упорядоченных множеств, индексированное вполне упорядоченным множеством M, и $A = \Pi\{A_m : m \in M\}$ — декартово произведение этого семейства.

Лексикографическим произведением семейства $\{A_m : m \in M\}$ наз. множество A, наделенное следующим порядком. Если $\{a_m\}$ и $\{b_m\}$ элементы из A, то $\{a_m\} < \{b_m\}$ тогда и только тогда, когда или $a_1 < b_1$, или существует $m_0 \in M$ такое, что $a_m = b_m$ для всех $m < m_0$ и $a_{m_0} < b_{m_0}$ (принцип первых различных членов). Если $\alpha_m = \overline{A}_m$ и A — лексикографич. произведение семейства $\{A_m : m \in M\}$, то $\alpha = \Pi\{\alpha_m : m \in M\} = \overline{A}$ наз. произведением семейства П. т. $\{\alpha_m : m \in M\}$. С помощью лексикографич. произведения и обобщенной *континуум-гипотезы* построено для каждого *кардинального числа* τ такое линейно упорядоченное множество η_τ мощности τ, что каждое линейно упорядоченное множество мощности $\leqslant \tau$ подобно нек-рому подмножеству множества η_τ. Если τ является сильно недостижимым кардинальным числом, то обобщенная континуум-гипотеза для доказательства этой теоремы не нужна. В частности, для $\tau = \aleph_0$ таким множеством является любое линейно упорядоченное множество П. т. η.

Лит.: [1] Иех Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973. *Б. А. Ефимов.*

ПОРЯДОК — 1) П. алгебраич. кривой $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен от x и y, наз. наивысшую степень членов этого многочлена. Напр., эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ есть кривая второго П., а лемниската $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ — кривая четвертого П. 2) П. бесконечно малой величины α относительно бесконечно малой величины β есть такое число n, что существует конечный предел $\lim \frac{\alpha}{\beta^n}$, отличный от нуля. Напр., $\sin^2 3x$ при $x \to 0$ есть бесконечно малая второго П. относительно x, так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2} = 9$. Вообще говорят, что α — бесконечно малая высшего П., чем β, если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, и низшего П., чем β, если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$. Аналогично определяют П. бесконечно больших величин. 3) П. нуля (соответственно полюса) a функции $f(x)$ есть такое число n, что существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n}$ (соответственно $\lim (x-a)^n f(x)$), отличный от нуля. 4) П. производной — число дифференцирований, к-рые надо произвести над функцией, чтобы получить эту производную. Напр., y''' — производная третьего П., $\frac{\partial^4 z}{\partial^2 x \partial^2 y}$ — производная четвертого П. Аналогично определяют П. дифференциала. 5) П. дифференциального уравнения — наивысший из П. производных, входящих в уравнение. Напр., $y'''y' - (y'')^2 = 1$ — уравнение третьего П., $y'' - 3y' + y = 0$ — уравнение второго П. 6) П. квадратной матрицы — число ее строк или столбцов. 7) П. конечной группы — число элементов группы. Если группа G бесконечна, то говорят, что G — группа бесконечного П. Не следует путать порядок группы с порядком в группе, о к-ром см. *Упорядоченная группа*, *Частично упорядоченная группа*. 8) П. элемента группы — целое положительное число, равное числу различных элементов в циклической подгруппе, порождаемой этим элементом, либо ∞, если эта подгруппа бесконечна. В последнем случае элемент наз. элементом бесконечного

П. Если П. элемента a конечен и равен n, то n является наименьшим из чисел, для к-рых $a^n=1$. 9) Правый П. в кольце Q — такое подкольцо R кольца Q, что для всякого $x \in Q$ найдутся a, $b \in R$ такие, что b обратим в Q и $x=ab^{-1}$. Другими словами, R — это такое подкольцо в Q, что Q является классич. правым кольцом частных кольца R (см. *Частных кольцо*). 10) Если при нек-ром исследовании или вычислении отбрасываются все степени нек-рой малой величины, начиная с $(n+1)$-й, то говорят, что исследование или вычисление ведется с точностью до величин n-го П. Напр., при исследовании малых колебаний струны пренебрегают величинами, содержащими вторые и высшие степени прогиба и его производных, получая благодаря этому линейное уравнение (линеаризуя задачу). 11) Слово «П.» употребляется также в исчислении конечных разностей (разности различных П.), в теории многих специальных функций (напр., цилиндрич. функции n-го П.) и т. д. 12) При измерениях говорят о величине порядка 10^n, подразумевая под этим, что она заключена между $0{,}5 \cdot 10^n$ и $5 \cdot 10^n$.

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

ПОРЯДОК, отношение порядка,— *бинарное отношение* на нек-ром множестве A, обычно обозначаемое символом $\leqslant$ и обладающее следующими свойствами: (1) $a \leqslant a$ (рефлексивность); (2) если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$ (транзитивность); (3) если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a=b$ (антисимметричность). Если $\leqslant$ — П., то отношение $<$, определяемое условием $a<b$, если $a \leqslant b$ и $a \neq b$, наз. строгим П. Строгий П. может быть определен и как отношение, обладающее свойствами (2) и (3′) : $a<b$ и $b<a$ не могут выполняться одновременно. Запись $a \leqslant b$ обычно читается как «a меньше или равно b» или «b больше или равно a», а $a<b$ — как «a меньше b» или «b больше a». П. наз. линейным, если для любых a, $b \in A$ имеет место $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$. Отношение, обладающее свойствами (1) и (2), наз. предпорядком или квазипорядком. Если $\lhd$ — квазипорядок, то отношение $a \sim b$, определяемое условиями $a \lhd b$ и $b \lhd a$, оказывается *эквивалентностью*. На фактормножестве по этой эквивалентности можно определить П., полагая $[a] \leqslant [b]$, где $[a]$ — смежный класс, содержащий элемент a, если $a \lhd b$. Примеры и лит. см. при ст. *Частично упорядоченное множество*. *Л. А. Скорняков.*

ПОСЛЕДОВАНИЯ ОТОБРАЖЕНИЕ для гладкого или хотя бы непрерывного *потока* $\{S_t\}$ и трансверсальной к нему гиперповерхности V — отображение T, сопоставляющее точке $v \in V$ первую по времени точку пересечения с V исходящей из v положительной полутраектории потока (и определенное для тех v, для к-рых такое пересечение имеется). (Гиперповерхность V наз. при этом сечением, секущей поверхностью, трансверсалью.) Когда размерность $\dim V=1$ (так что $\{S_t\}$ — поток на плоскости или двумерной поверхности; в этом случае V наз. также дугой без контакта) и V параметризована числовым параметром s, то смещение точек V под действием П. о. описывается нек-рой числовой функцией f одного переменного (если v отвечает значению параметра s, то Tv — значению параметра $s+$ $+f(s)$), к-рая наз. функцией последования. Впервые П. о. использовал А. Пуанкаре (H. Poincaré, [1]), поэтому иногда П. о. наз. отображением Пуанкаре.

Если любая полутраектория пересекает V, то П. о. (определенное в данном случае на всем V) в значительной степени определяет поведение всех траекторий потока. Однако такие «глобальные» сечения существуют далеко не всегда (в частности, у гамильтоновой системы на многообразии постоянной энергии, не проходящем через критич. точки гамильтониана, т. е. *равнове-*

сия положения, нет замкнутых — как многообразия — глобальных сечений; см. [3] гл. VIII, п. 4.7).

Для неавтономной системы с периодической правой частью

$$\dot{x}=f(t, x), \quad f(t+\tau, x)=f(t, x), \qquad (*)$$

возникает аналог П. о.: точке x сопоставляют точку $Tx=\varphi(\tau, x)$, где $\varphi(t, x)$ — решение системы (*) с начальным значением $\varphi(0, x)=x$. Это «отображение сдвига на период» можно даже формально рассматривать как П. о., если (*) рассматривать как автономную систему в «цилиндрическом» фазовом пространстве. Отображение T определено всюду, если решения системы (*) определены при всех t.

Чаще приходится иметь дело с «локальным» сечением — его пересекает только часть траекторий и нередко только часть пересекающих его траекторий вновь возвращается на V. Примером может служить маленькая гладкая «площадка» коразмерности один, трансверсально пересекающая нек-рую замкнутую траекторию L. В этом случае П. о. определено вблизи $V\cap L$ и характеризует поведение траекторий вблизи L.

В теории *слоений* также вводится П. о. (см. [2]), являющееся обобщением предыдущего примера (и охватывающее также П. о. для обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области).

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М., 1947; [2] Тамура И., Топология слоений, пер. с япон., М., 1979; [3] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973. *Д. В. Аносов.*

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КАТЕГОРИЯ — частный случай общей конструкции категории функторов или категории диаграмм. Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, снабженное обычным отношением порядка. Тогда $\mathbb{Z}$ можно рассматривать как малую категорию, объектами к-рой являются целые числа, а морфизмами — всевозможные пары вида (i, j), где $i, j\in\mathbb{Z}$ и $i\leqslant j$. Пара (i, j) — это единственный морфизм объекта i в объект j. Композиция морфизмов определяется следующим равенством: $(i, j)(j, k)=(i, k)$.

Для произвольной категории $\mathfrak{K}$ категория ковариантных функторов $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}, \mathfrak{K})$ из $\mathbb{Z}$ в $\mathfrak{K}$ наз. категорией последовательностей над $\mathfrak{K}$. Чтобы задать функтор $F:\mathbb{Z}\to\mathfrak{K}$, достаточно указать семейство объектов из $\mathfrak{K}$, занндексированное целыми числами, и для каждой пары объектов A_i, A_{i+1} выбрать произвольный морфизм $\alpha_{i,\, i+1}: A_i\to A_{i+1}$. Тогда отображения $F(i)=A_i$, $F(i, i+1)=\alpha_{i,\, i+1}$ однозначно продолжаются до функтора $F: Z\to\mathfrak{K}$. Естественное преобразование φ функтора $F:\mathbb{Z}\to\mathfrak{K}$ в функтор $G:\mathbb{Z}\to\mathfrak{K}$, т. е. морфизм категории последовательностей, задается таким семейством морфизмов $\varphi_i: F(i)\to G(i)$, что $\varphi_i G(i, i+1)=F(i, i+1)\cdot\varphi_{i+1}$ для любого $i\in\mathbb{Z}$.

Если $\mathfrak{K}$ — категория с нулевыми морфизмами, то в П. к. $\mathfrak{F}(Z, \mathfrak{K})$ выделяется полная подкатегория комплексов, т. е. таких функторов $F:\mathbb{Z}\to\mathfrak{K}$, что $F(i, i+1)\,F(i+1, i+2)=0$ для любого $i\in\mathbb{Z}$. Для абелевой категории $\mathfrak{A}$ П. к. и подкатегория комплексов являются абелевыми категориями.

Вместо категории $\mathbb{Z}$ можно рассматривать ее подкатегории, состоящие только из неотрицательных или только из неположительных чисел. Соответствующие категории диаграмм также наз. П. к. *М. Ш. Цаленко.*

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ элементов заданного множества — функция, определенная на множестве натуральных чисел, множество значений к-рой содержится в рассматриваемом множестве.

Элементом, или членом, последовательности $f: N\to X$, где N — множество натуральных чисел, X — заданное множество, наз. упорядоченная пара (n, x), $x=f(n)$, $n\in N$, $x\in X$, к-рая обозначается через

x_n. Натуральное число n наз. **номером элемента последовательности** x_n, а элемент $x \in X$ — его **значением**. Последовательность $f: N \to X$ обычно обозначается через $\{x_n\}$ или x_n, $n=1, 2, \ldots$.

Множество элементов П. всегда счетно, причем два различных члена П. отличаются по крайней мере номерами. Множество значений элементов П. может быть и конечным; так, множество значений всякой **стационарной** П., т. е. последовательности $\{x_n\}$, все элементы к-рой имеют одно и то же значение: $x_n=a$, $n=1, 2, \ldots$, состоит из одного элемента.

Если $n_1 < n_2$, то член x_{n_1} последовательности $\{x_n\}$ наз. **предшествующим** члену x_{n_2}, а член x_{n_2} — **следующим** за членом x_{n_1}. Таким образом, множество элементов П. упорядочено.

Того или иного рода П. встречаются в различных разделах математики и с их помощью описываются многие свойства изучаемых объектов. Напр., если X — топологич. пространство, то среди П. его точек важную роль играют **сходящиеся** П., т. е. П., к-рые имеют предел в этих пространствах. В терминах сходящихся П. удобно (во всяком случае, при наличии счетной базы) описывать свойство компактности, существование предела отображения, его непрерывность и т. п. Если все элементы П. нек-рых объектов (точек, множеств, отображений и т. д.) обладают каким-либо свойством, то часто бывает нужным выяснить, сохраняется ли это свойство для предела П.; напр., выяснить, как ведут себя свойства измеримости, непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости при предельном переходе для различных видов сходимости функций (поточечной, почти всюду, равномерной, по мере, в среднем и т. п.).

Иногда отображение $f: \overline{1, n} \to X$ конечного множества $\overline{1, n} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \ldots, n\}$ натуральных чисел в множество X наз. **конечной** П. и обозначается через $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где $x_n=f(k)$, $k=1, 2, \ldots, n$. П. может задаваться формулой ее общего члена (напр., П. членов арифметич. прогрессии), рекуррентной формулой (напр., П. чисел Бернулли) или просто словесным описанием с той или иной степенью эффективности (напр., П. всех простых натуральных чисел в порядке их возрастания). См. также *Двойная последовательность*, *Кратная последовательность*. Обобщением понятия П. является *направленность*. *Л. Д. Кудрявцев.*

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ — раздел математич. статистики, характерной чертой к-рого является то, что число производимых наблюдений (момент остановки наблюдений) не фиксируется заранее, а выбирается по ходу наблюдений в зависимости от значений поступающих данных. Стимулом к интенсивному развитию и применению в статистич. практике последовательных методов послужили работы А. Вальда (A. Wald). Им было установлено, что в задаче различения (по результатам независимых наблюдений) двух простых гипотез т. н. последовательный критерий отношений вероятностей дает значительный выигрыш в среднем числе производимых наблюдений по сравнению с наиболее мощным классич. способом различения (определяемой леммой Неймана — Пирсона) с фиксированным объемом выборки и теми же вероятностями ошибочных решений.

Основные принципы П. а. состоят в следующем. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и функция распределения $F_\theta(x) = \mathsf{P}_\theta\{\xi_1 \leqslant x\}$ зависит от неизвестного параметра θ, принадлежащего нек-рому параметрич. множеству Θ. Задача состоит в том, чтобы по результатам наблюдений вынести то или иное решение об истинном значении неизвестного параметра θ.

В основе любой статистич. задачи решения лежат пространство D заключительных (терминальных) решений d (о значениях параметра θ) и правило τ, определяющее момент прекращения наблюдений, в к-рый и выносится заключительное решение. В классич. методах наблюдений момент τ является неслучайным и фиксированным заранее; в последовательных методах τ является случайной величиной, не зависящей от «будущего» (марковский момент, момент остановки). Формально, пусть $\mathcal{F}_n = \sigma\{\omega : \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ есть σ-алгебра, порожденная случайными величинами $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Случайная величина $\tau = \tau(\omega)$, принимающая значения $0, 1, \ldots, +\infty$, наз. марковским моментом, если событие $\{\tau \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$ для каждого $n \geqslant 0$ ($\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$). Пусть $\mathcal{F}_\tau$ — совокупность тех измеримых множеств A, для к-рых $A \cap \{\tau \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$ и для каждого $n \geqslant 0$. Если $\mathcal{F}_n$ интерпретируется как совокупность событий, наблюдаемых до случайного момента n (включительно), то $\mathcal{F}_\tau$ можно интерпретировать как совокупность событий, наблюдаемых до случайного момента τ (включительно). Заключительное (терминальное) решение $d = d(\omega)$ есть $\mathcal{F}_\tau$-измеримая функция со значениями в пространстве D. Пара $\delta = (\tau, d)$ таких функций наз. (последовательным) решающим правилом.

Для выделения среди решающих правил «оптимального» задают функцию риска $W(\tau, \theta, d)$ и рассматривают математич. ожидание $\mathsf{E}_\theta W(\tau, \theta, d)$. Существуют разные подходы к определению понятия оптимального решающего правила $\delta^* = (\tau^*, d^*)$. Один из них, бейесовский, основан на предположении, что параметр θ является случайной величиной с априорным распределением $\pi = \pi(d\theta)$. Тогда имеет смысл говорить о π-риске

$$R^\delta(\pi) = \int_\Theta \mathsf{E}_\theta W(\tau, \theta, d)\, \pi(d\theta)$$

и называть правило $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ оптимальным бейесовским решением (или π-оптимальным), если $R^{\delta^*}(\pi) \leqslant R^\delta(\pi)$ для любого другого (допустимого) правила. Наиболее распространенной формой риска $W(\tau, \theta, d)$ является риск вида $c\tau + W_1(\theta, d)$, где константа $c \geqslant 0$ интерпретируется как стоимость единичного наблюдения, а $W_1(\theta, d)$ является функцией потерь от заключительного решения.

В бейесовских задачах отыскание оптимального заключительного решения d^*, как правило, не вызывает трудностей, и основные усилия направлены на отыскание оптимального момента остановки τ^*. При этом большинство задач П. а. укладывается в следующую схему «оптимальных правил остановки».

Пусть $X = (x_n, \mathcal{F}_n, \mathsf{P}_x)$, $n \geqslant 0$, $x \in E$, — цепь Маркова в фазовом пространстве $(E, \mathcal{B})$, где x_n — состояние цепи в момент времени n, σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ интерпретируется как совокупность событий, наблюдаемых до момента времени n (включительно), а P_x — распределение вероятностей, отвечающее начальному состоянию $x \in \mathsf{E}$. Предполагается, что, прекращая наблюдение в момент времени n, получают выигрыш $g(x_n)$. Тогда средний выигрыш от остановки в момент τ есть $\mathsf{E}_x g(x_\tau)$, где x — начальное состояние. Функцию $s(x) = \sup \mathsf{E}_x g(x_\tau)$, где sup берется по всем (конечным) моментам остановки τ, наз. ценой, а момент τ_ε, для к-рого $s(x) \leqslant \mathsf{E}_x g(x_{\tau_\varepsilon}) + \varepsilon$ для всех $x \in E$, наз. ε-оптимальным моментом остановки. O-оптимальные моменты наз. оптимальными. Основные вопросы теории «оптимальных правил остановки» таковы: какова структура цены $s(x)$, как ее найти, когда существуют ε-оптимальные и оптимальные моменты, какова их структура. Ниже приведен один из типичных результатов, касающихся поставленных вопросов.

Пусть функция $g(x)$ ограничена: $|g(x)| \leqslant c < \infty$. Тогда цена $s(x)$ является наименьшей эксцессивной мажорантой функции $g(x)$, т. е. наименьшей из функций $f(x)$, удовлетворяющих двум свойствам

$$g(x) \leqslant f(x), \quad Tf(x) \leqslant f(x),$$

где $Tf(x) = \mathsf{E}_x g(x_1)$. При этом момент

$$\tau_\varepsilon = \inf\{n \geqslant 0:\ s(x_n) \leqslant g(x_n) + \varepsilon\}$$

является ε-оптимальным для всякого $\varepsilon > 0$, цена $s(x)$ удовлетворяет уравнению Вальда — Беллмана

$$s(x) = \max\{g(x),\ Ts(x)\}$$

и может быть найдена по формуле

$$s(x) = \lim_{n \to \infty} Q^n g(x),$$

где

$$Qg(x) = \max\{g(x),\ Tg(x)\}.$$

В том случае, когда множество E конечно, момент

$$\tau_0 = \inf\{n \geqslant 0:\ s(x_n) = g(x_n)\}$$

будет оптимальным. В общем случае момент τ_0 является оптимальным, если $\mathsf{P}_x\{\tau_0 < \infty\} = 1$, $x \in E$.

Пусть

$$C = \{x:\ s(x) > g(x)\}, \quad \Gamma = \{x:\ s(x) = g(x)\}.$$

В соответствии с определением

$$\tau_0 = \inf\{n \geqslant 0:\ x_n \in \Gamma\}.$$

Иначе говоря, прекращение наблюдений следует производить при первом попадании в множество Γ. В связи с этим множество C наз. множеством продолжения наблюдений, а Γ — множеством прекращения наблюдений.

Иллюстрацией этих результатов может служить задача различения двух простых гипотез, на к-рой А. Вальд продемонстрировал преимущество последовательных методов по сравнению с классическими. Пусть параметр θ принимает два значения 1 и 0 с априорными вероятностями π и $1-\pi$ соответственно и множество заключительных решений D состоит также из двух точек: $d=1$ (принимается гипотеза $H_1:\theta=1$) и $d=0$ (принимается гипотеза $H_0:\theta=0$). Если функцию $W_1(\theta, d)$ выбрать в виде

$$W_1(\theta, d) = \begin{cases} a, & \theta = 1,\ d = 0, \\ b, & \theta = 0,\ d = 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и положить

$$W(\tau, \theta, d) = c\tau + W_1(\theta, d),$$

то для $R^\delta(\pi)$ получают выражение

$$R^\delta(\pi) = c\mathsf{E}_\pi \tau + a\alpha_\pi(\delta) + b\beta_\pi(\delta),$$

где

$$\alpha_\pi(\delta) = \mathsf{P}_\pi\{d=0 \mid \theta=1\}, \quad \beta_\pi(\delta) = \mathsf{P}_\pi\{d=1 \mid \theta=0\}$$

— вероятности ошибок первого и второго рода, а P_π означает распределение вероятностей в пространстве наблюдений, отвечающее априорному распределению π. Если $\pi_n = \mathsf{P}\{\theta=1 \mid \mathcal{F}_n\}$ — апостериорная вероятность гипотезы $H_1:\theta=1$ относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_n = \sigma\{\omega : \xi_1, \ldots, \xi_n\}$, то

$$R^\delta(\pi) = \mathsf{E}_\pi[c\tau + g(\pi_\tau)],$$

где

$$g(\pi) = \min(a\pi,\ b(1-\pi)).$$

Из общей теории оптимальных правил остановки, примененной к $x_n = (n, \pi_n)$, следует, что функция $\rho(\pi) = \inf_\tau R^\delta(\pi)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho(\pi) = \min\{g(\pi),\ c + T\rho(\pi)\}.$$

Отсюда, в силу выпуклости вверх функций $\rho(\pi)$, $g(\pi)$, $T\rho(\pi)$, можно вывести, что найдутся два числа $0 \leqslant A < B \leqslant 1$ такие, что область продолжения $C = \{\pi : A < \pi < B\}$, а область прекращения наблюдений $\Gamma = [0, 1] \setminus (A, B)$. При этом момент остановки

$$\tau_0 = \inf\{n \geqslant 0:\ \pi_n \in \Gamma\}$$

является оптимальным ($\pi_0 = \pi$).

Если $p_0(x)$ и $p_1(x)$ — плотности распределений $F_0(x)$ и $F_1(x)$ (по мере $d\mu = \frac{1}{2}(dF_0 + dF_1)$), а

$$\varphi = \frac{p_1(\xi_1)\ldots p_1(\xi_n)}{p_0(\xi_1)\ldots p_0(\xi_n)}$$

— отношение правдоподобия, то область продолжения наблюдений (см. рис. 1) может быть записана в виде

$$C = \left\{ \varphi : \frac{A}{1-A}\frac{1-\pi}{\pi} < \varphi < \frac{B}{1-B}\frac{1-\pi}{\pi} \right\}$$

и $\tau_0 = \inf\ \{n \geqslant 0 : \varphi_n \notin C\}$.

При этом если $\varphi_{\tau_0} \geqslant \frac{B}{1-B}\frac{1-\pi}{\pi}$, то выносится решение $d=1$, т. е. принимается гипотеза $H_1 : \theta = 1$. Если же $\varphi_{\tau_0} \leqslant \frac{A}{1-A}\frac{1-\pi}{\pi}$, то — гипотеза $H_0 : \theta = 0$.

Структура этого оптимального решающего правила сохраняется и для задачи различения гипотез в условноэкстремальной постановке, состоящей в следующем. Для каждого решающего правила $\delta = (\tau, d)$ вводят вероятности ошибок $\alpha(\delta) = P_1(d = 0)$, $\beta(\delta) = P_0(d = 1)$ и задают два числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$; и пусть, далее, $\Delta(\alpha, \beta)$ — совокупность всех решающих правил с $\alpha(\delta) \leqslant \alpha$, $\beta(\delta) \leqslant \beta$ и $\mathsf{E}_0\tau < \infty$, $\mathsf{E}_1\tau < \infty$.

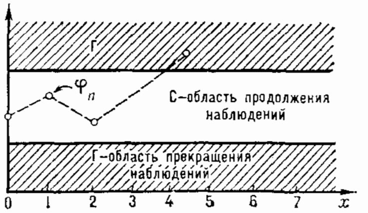


Рис. 1.

Следующий фундаментальный результат был получен А. Вальдом. Если $\alpha + \beta < 1$ и среди критериев $\delta = (\tau, d)$, основанных на отношении правдоподобия φ_n и имеющих вид

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0:\ \varphi_n \notin (a,\ b)\},$$

$$d = \begin{cases} 1, & \varphi_\tau \geqslant b, \\ 0, & \varphi_\tau \leqslant a, \end{cases}$$

найдутся такие $a = a^*$ и $b = b^*$, что вероятности ошибок первого и второго рода в точности равны α и β, то решающее правило $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ с $a = a^*$ и $b = b^*$ является в классе $\Delta(\alpha, \beta)$ оптимальным в том смысле, что

$$\mathsf{E}_0\tau^* \leqslant \mathsf{E}_0\tau,\ \ \mathsf{E}_1\tau^* \leqslant \mathsf{E}_1\tau$$

для любого $\delta \in \Delta(\alpha, \beta)$.

Преимущества последовательного решающего правила $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ по сравнению с классическим проще проиллюстрировать на примере задачи различения двух гипотез $H_0 : \theta = 0$ и $H_1 : \theta = 1$ относительно локального среднего значения θ винеровского процесса ξ_t с единичной диффузией. Оптимальное последовательное решающее правило $\delta^* = (\tau^*, d^*)$, обеспечивающее заданные вероятности ошибок α и β первого и второго рода соответственно, описывается следующим образом:

$$\tau^* = \inf\{t \geqslant 0:\ \lambda_t \notin (a^*,\ b^*)\},$$

$$d^* = \begin{cases} 1, & \lambda_{\tau^*} \geqslant b^*, \\ 0, & \lambda_{\tau^*} \leqslant a^*, \end{cases}$$

где $\lambda_t = \ln \varphi_t$ и отношение правдоподобия (производная меры, отвечающей $\theta=1$, по мере, отвечающей $\theta=0$) $\varphi_t = e^{\xi_t - \frac{1}{2} t}$, а $b^* = \ln \frac{1-\alpha}{\beta}$, $a^* = \ln \frac{\alpha}{1-\beta}$ (см. рис. 2).

Оптимальное классич. правило $\tilde{\delta} = (\tilde{\tau}, \tilde{d})$ (согласно лемме Неймана — Пирсона) описывается следующим образом:

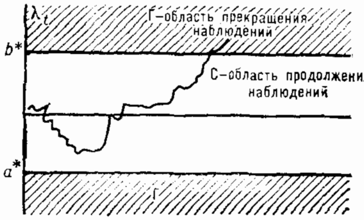


Рис. 2.

$$\tilde{t} = t(\alpha, \beta),$$

$$\tilde{d} = \begin{cases} 1, & \lambda_{\tilde{t}} \geq h(\alpha, \beta), \\ 0, & \lambda_{\tilde{t}} < h(\alpha, \beta), \end{cases}$$

где

$$t(\alpha, \beta) = (c_\alpha + c_\beta)^2,$$

$$h(\alpha, \beta) = \frac{c_\beta^2 - c_\alpha^2}{2},$$

а c_γ — корень уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c_\gamma}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \gamma.$$

Поскольку $\mathsf{E}_0 \tau^* = 2\omega(\alpha, \beta)$, $\mathsf{E}_1 \tau^* = 2\omega(\beta, \alpha)$, где

$$\omega(x, y) = (1-x) \ln \frac{1-x}{y} + x \ln \frac{x}{1-y},$$

то

$$\frac{\mathsf{E}_0 \tau^*}{t(\alpha, \beta)} = 2 \frac{\omega(\beta, \alpha)}{(c_\alpha + c_\beta)^2}, \quad \frac{\mathsf{E}_1 \tau^*}{t(\alpha, \beta)} = 2 \frac{\omega(\alpha, \beta)}{(c_\alpha + c_\beta)^2}.$$

Численный подсчет показывает, что при $\alpha, \beta \leqslant 0{,}03$

$$\frac{\mathsf{E}_0 \tau^*}{t(\alpha, \beta)} \leqslant \frac{17}{30}, \quad \frac{\mathsf{E}_1 \tau^*}{t(\alpha, \beta)} \leqslant \frac{17}{30}.$$

Иначе говоря, при рассматриваемых значениях ошибок первого и второго рода оптимальный последовательный метод различения требует примерно в два раза меньше наблюдений, чем оптимальный метод с фиксированным числом наблюдений. Более того, если $\alpha = \beta$, то

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\mathsf{E}_0 \tau^*}{t(\alpha, \alpha)} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\mathsf{E}_1 \tau^*}{t(\alpha, \alpha)} = \frac{1}{4}.$$

Лит.: [1] Вальд А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1976. *А. Н. Ширяев.*

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МЕТОД, метод повторных подстановок, метод простой итерации,— один из общих методов приближенного решения операторных уравнений. Во многих случаях хорошая сходимость построенных этим методом приближений позволяет применять его в практике вычислений.

Пусть E — нек-рое множество, на к-ром задан оператор A, отображающий E в себя. Требуется найти неподвижную точку этого отображения, т. е. решение уравнения

$$x = A(x), \quad x \in E. \tag{1}$$

Пусть уравнение (1) имеет решение x_* и какимлибо способом указано его начальное приближение $x_0 \in E$. Все остальные приближения в П. п. м. строятся по формуле

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Этот процесс наз. простой одношаговой итерацией.

Для исследования сходимости последовательности (2), а также для доказательства существования решения уравнения (1) широко применяется ниже сформулированный принцип сжимающих отображений.

Пусть E — полное метрич. пространство с метрикой ρ; оператор A определен в замкнутом шаре S радиуса δ с центром в x_0:

$$S = \{x \in E:\ \rho(x,\ x_0) \leqslant \delta\};$$

для всяких элементов x и y из шара S верно соотношение

$$\rho(Ax,\ Ay) \leqslant \alpha\rho(x,\ y),\ 0 < \alpha = \text{const} < 1;$$

для начального приближения x_0 выполнено неравенство $\rho(Ax_0,\ x_0) \leqslant m$, для чисел α, δ, m соблюдается условие $m/(1-\alpha) \leqslant \delta$.

Тогда: 1) последовательные приближения x_n, вычисляемые по правилу (2), могут быть найдены при всяком значении n, и все они принадлежат шару S; 2) последовательность x_n сходится к нек-рой точке $x_* \in S$; 3) предельный элемент x_* есть решение уравнения (1); 4) для приближения x_n верна следующая оценка близости к решению x_*:

$$\rho(x_n,\ x_*) \leqslant \frac{m}{1-\alpha}\alpha^n.$$

Далее, во всяком подмножестве пространства E, где для двух любых точек x, y верно неравенство $\rho(Ax,\ Ay) < \rho(x,\ y)$, уравнение (1) не может иметь более одного решения.

Пусть $E = \mathbb{R}^n$ — арифметическое n-мерное пространство и оператор A в (1) имеет вид $Ax = Bx + b$, где $B = \|a_{ik}\|$ — квадратная матрица n-го порядка, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — заданный, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — искомый векторы в $\mathbb{R}^n$. Если в этом пространстве метрика определена формулой

$$\rho(x,\ y) = \max_i |x_i - y_i|$$

и элементы матрицы B удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| < 1$$

для всех i, $i = 1, \ldots, n$, то из принципа сжимающих отображений следует, что система алгебраич. уравнений $x = Ax$ имеет единственное решение в $\mathbb{R}^n$, к-рое можно получить П. п. м., исходя из произвольного начального приближения $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Если в $\mathbb{R}^n$ действует евклидова метрика

$$\rho(x,\ y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

тогда получается другое условие сходимости последовательных приближений:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 < 1.$$

Пусть (1) — интегральное уравнение, в к-ром

$$Ax(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,\ s)\, x(s)\, ds,$$

где известные функции f, K интегрируемы с квадратом соответственно на множествах $[a,\ b]$ и $[a,\ b] \times [a,\ b]$, λ — числовой параметр. Тогда из принципа сжимающих отображений следует, что если

$$|\lambda| < \left(\int_a^b \int_a^b K^2(s,\ t)\, dt\, ds \right)^{-1/2},$$

то рассматриваемое интегральное уравнение имеет единственное решение в пространстве $L_2([a,\ b])$, к-рое можно построить П. п. м.

Лит.: [1] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963; [2] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы, т. 1—2, М., 1976—77; [3] Коллатц Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, пер. с нем., М., 1969. *Б. В. Хведелидзе.*

ПОСТА АЛГЕБРА — алгебра вида $(P\ \Omega)$, где P является множеством функций, а Ω — множеством операций, равносильных операциям композиции с различного рода ограничениями. Примерами П. а. являются конечнозначные и счетнозначные логики, логики неоднородных функций и т. п. Проблематика П. а. по существу совпадает с проблематикой для многозначных логик.

Лит. см. при ст. *Многозначная логика*. *В. Б. Кудрявцев.*

ПОСТА КАНОНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, исчисление Поста,— способ задания *перечислимых множеств* слов. Понятие П. к. с., предложенное Э. Постом (E. Post) в 1943, было первым общим понятием *исчисления*, пригодным для задания произвольных перечислимых множеств и не привязанным к логич. структуре порождаемых объектов, к их семантике и к логике *вывода правил*. П. к. с. задается четверкой A, P, $\mathcal{A}$, π, где A — алфавит исчисления, P (не имеющий общих букв с A) — алфавит переменных, $\mathcal{A}$ — список слов в A (аксиом исчисления), π — список правил вывода вида

$$\frac{\begin{array}{c} G_{1,1}p_{1,1}\cdots G_{1,n_1}p_{1,n_1}G_{1,n_1+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{m,1}p_{m,1}\cdots G_{m,n_m}p_{m,n_m}G_{m,n_m+1}\end{array}}{G_1p_1\cdots G_np_nG_{n+1}} \qquad (*)$$

($G_{i,j}$ суть обозначения слов в A, $p_{i,j}$ — обозначения букв из P). Слово Q получается из $Q_1,\ldots,Q_m$ применением правила (*), если для каждой входящей в (*) буквы из P можно подобрать слово в A (значение этой переменной), подставляя к-рое вместо всех вхождений рассматриваемой переменной в (*), мы получим после такого замещения всех переменных слова $Q_1,\ldots,Q_m$ — над чертой и Q — под чертой. На основе этого понимания правил определяется выводимость в П. к. с. В теории исчислений применяется следующее определение перечислимого множества слов в A, эквивалентное обычному: M наз. перечислимым, если оно совпадает с множеством слов в A, выводимых в нек-рой П. к. с., алфавит к-рой содержит A (необходимость расширения A хотя бы одной буквой ξ неустранима, но можно потребовать, чтобы помимо M были выводимы лишь слова вида ξQ, где Q из A).

Рассматриваются различные специализации понятия П. к. с.: 1) нормальные системы Поста (все правила имеют вид $\frac{Gp}{pG'}$), 2) локальные исчисления (правила вида $\frac{p_1Gp_2}{p_1G'p_2}$), 3) ограниченные исчисления (алфавит однобуквенный, правила однопосылочны) и др. Упомянутые специализации предполагаются одноаксиомными, к каждой из них можно свести произвольную П. к. с. (установленная Постом эквивалентность П. к. с. и нормальных исчислений имеет фундаментальное значение для работ этого направления, для нахождения неразрешимых систем).

Лит. см. при ст. *Исчисление*. *С. Ю. Маслов.*

ПОСТА КЛАСС — замкнутый относительно операции суперпозиции класс функций *алгебры логики* (ф. а. л.). Э. Пост (E. Post) установил, что таких классов в точности счетное множество, и дал их явное описание. Им же показано, что все они являются конечно порожденными, построена решетка по включению, образованная этими классами. Множество указанных классов исчерпывается списком C_i, A_i, D_j, L_k, O_l, S_r, P_r, F_s^{μ}, F_s^{∞}, где $i=1, 2, 3, 4$; $j=1, 2, 3$; $k=1,\ldots,5$; $l=1,\ldots,9$; $r=1, 3, 5, 6$; $s=1,\ldots,8$; $\mu=2, 3,\ldots$

Класс C_1 содержит все ф. а. л.; C_2 состоит из всех ф. а. л. $f(x_1,\ldots,x_n)$ таких, что $f(0,\ldots,0)=0$; C_3 — из всех ф. а. л. таких, что $f(1,\ldots,1)=1$; $C_4=C_2\cap C_3$. Класс A_1 состоит из всех монотонных ф. а. л.;

$A_2=C_2\cap A_1$; $A_3=C_3\cap A_1$; $A_4=A_2\cap A_3$. Класс D_3 состоит из всех ф. а. л. $f(x_1,\ldots,x_n)=\overline{f}(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)$; $D_1=C_4\cap D_3$; $D_2=A_1\cap D_3$. Класс L_1 состоит из всех ф. а. л. $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)=x_1+x_2+\ldots+x_n+d \pmod 2$, $d\in\{0, 1\}$; $L_2=C_2\cap L_1$; $L_3=C_3\cap L_1$; $L_4=L_2\cap L_3$; $L_5=D_3\cap L_1$.

Класс O_9 состоит из всех ф. а. л., существенно зависящих не более чем от одного переменного; $O_8=A_1\cap O_9$; $O_4=D_3\cap O_9$; $O_5=C_2\cap O_9$; $O_6=C_3\cap O_9$; $O_1=O_5\cap O_6$; O_7 состоит из всех константных функций; $O_2=O_5\cap O_7$; $O_3=O_6\cap O_7$.

Класс S_6 состоит из всех ф. а. л. $f(x_1,\ldots,x_n)=x_1\vee x_2\vee\ldots\vee x_n$ и всех константных ф. а. л.; $S_3=C_2\cap S_6$; $S_5=C_3\cap S_6$; $S_1=S_3\cap S_5$.

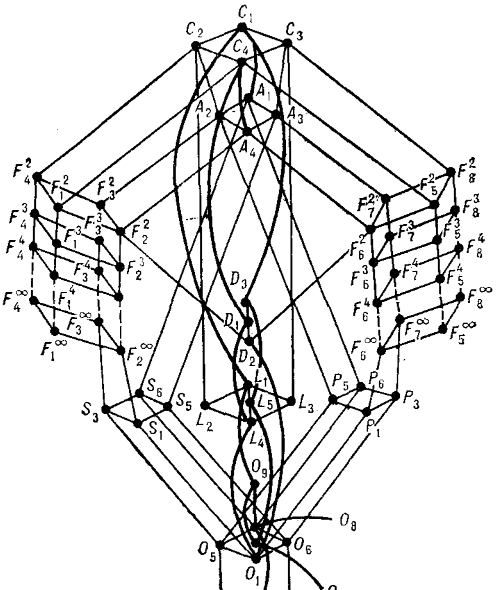
Класс P_6 состоит из всех ф. а. л. $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)=x_1\& x_2\&\ldots\& x_n$ и всех константных ф. а. л.; $P_5=C_2\cap P_6$; $P_3=C_3\cap P_6$; $P_1=P_5\cap P_3$.

Ф. а. л. удовлетворяет условию a^μ, если любые μ наборов, на к-рых она равна 0, имеют общую координату, равную нулю. Аналогично с заменой 0 на 1 вводится условие A^μ.

Класс F_4^μ состоит из всех ф. а. л. со свойством a^μ; $F_1^\mu=C_4\cap F_4^\mu$; $F_3^\mu=A_1\cap F_4^\mu$; $F_2^\mu=F_1^\mu\cap F_3^\mu$; F_8^μ состоит из всех ф. а. л. со свойством A^μ; $F_5^\mu=C_4\cap F_8^\mu$; $F_7^\mu=A_3\cap F_8^\mu$; $F_6^\mu=F_5^\mu\cap F_7^\mu$.

Ф. а. л. удовлетворяет условию a^∞, если все наборы, на к-рых она равна нулю, имеют общую координату, равную нулю. Аналогично с заменой 0 на 1 вводится свойство A^∞. Класс F_4^∞ состоит из всех ф. а. л. со свойством a^∞; $F_1^\infty=C_4\cap F_4^\infty$; $F_3^\infty=A_1\cap F_4^\infty$; $F_2^\infty=F_1^\infty\cap F_3^\infty$; F_8^∞ состоит из всех ф. а. л. со свойством A^∞; $F_5^\infty=C_4\cap F_8^\infty$; $F_7^\infty=A_3\cap F_8^\infty$; $F_6^\infty=F_5^\infty\cap F_7^\infty$.

Решетка по включению, образованная этими классами, изображена на рисунке. На нем классы изобра-



жены точками. Две точки соединены дугой, если нижележащая точка обозначает класс, непосредственно содержащийся в верхнем классе (т. е. между ними нет промежуточных классов).

Лит.: [1] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1966.

В. Б. Кудрявцев.

ПОСТА МАШИНА — один из вариантов *Тьюринга машины*.

ПОСТА НОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА, нормальное исчисление,— важный частный случай *Поста канонической системы*. *С. Ю. Маслов.*

ПОСТА РЕШЕТКА — решетка по включению *Поста алгебр*.

ПОСТА СИСТЕМА ПРОДУКЦИЙ, нормальная система Поста, нормальное исчисление Поста,— частный случай *Поста канонической системы*, когда все правила вывода имеют вид $\frac{Gp}{pG}$ и имеется только одно исходное слово (одна аксиома рассматриваемого исчисления). Э. Пост [1] установил эквивалентность П. с. п. и канонич. систем Поста в широком смысле. П. с. п. были использованы Э. Постом и А. А. Марковым (1947) при построении первых примеров *ассоциативных исчислений* с неразрешимой проблемой распознавания равенства слов (проблема Туэ).

Лит.: [1] Post E. L., «Amer. J. Math.», 1943, v. 65, № 2, p. 197—215; [2] Марков А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 42). *С. И. Адян.*

ПОСТНИКОВА КВАДРАТ — *когомологическая операция* типа $0(1, A, 3, B)$, где A, B — абелевы группы с фиксированным гетероморфизмом η: $A \to B$, т. е. таким отображением, что функция

$$h(g_1, g_2) = \eta(g_1 + g_2) - \eta(g_1) - \eta(g_2)$$

билинейна и $\eta(-g) = \eta(g)$. Пусть $\xi : F \to A$ — эпиморфизм, а $F = \bigoplus \mathbb{Z}$ — свободная абелева группа. Для 1-коциклов П. к. определен формулой

$$e^1 \longrightarrow \tilde{\eta}\tilde{\xi}\left(e_0^1 \cup \delta e_0^1\right),$$

где e_0^1 — такая коцепь с коэффициентами в F, что $\tilde{\xi}e_0^1 = e^1$. *Надстройкой* над П. к. является *Понтрягина квадрат*. Для односвязного X П. к., для к-рого $A = \pi_2(X)$, $B = \pi_3(X)$, а η определяется композицией с отображением Хопфа $S^3 \to S^2$, используется при классификации отображений трехмерных полиэдров в X. П. к. введен М. М. Постниковым [1].

Лит.: [1] Постников М. М., «Докл. АН СССР», 1949, т. 64, № 4, с. 461—62. *А. Ф. Харшиладзе.*

ПОСТНИКОВА СИСТЕМА, натуральная система, гомотопическая резольвента, П-разложение общего типа,— последовательность расслоений

$$\cdots \xrightarrow{p_{n+1}} X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \cdots \xrightarrow{p_1} X_0 = pt,$$

слоями к-рых являются *Эйленберга — Маклейна пространства* $K(\pi_n, n)$, где π_n — нек-рая группа (абелева при $n > 1$). Введена М. М. Постниковым [1]. Пространство X_n наз. n-м членом (или n-м этажом) П. с. $\{p_n : X_n \to X_{n-1}\}$. П. с. $\{p_n : X_n \to X_{n-1}\}$ наз. сходящейся к пространству X, если ее обратный предел $\varprojlim \{p_n : X_n \to X_{n-1}\}$ слабо гомотопически эквивалентен пространству X. В этом случае пространство X наз. пределом П. с. $\{p_n : X_n \to X_{n-1}\}$.

Морфизмом П. с. $\{p_n : X_n \to X_{n-1}\}$ в П. с. $\{q_n : Y_n \to Y_{n-1}\}$ наз. последовательность непрерывных отображений $f_n : X_n \to Y_n$, для к-рых диаграмма гомотопически коммутативна. Морфизм $\{f_n\}$ индуцирует отображение $\varprojlim f_n : \varprojlim X_n \to \varprojlim Y_n$, называемое его пределом.

Из определения П. с. следует, что для каждого $n \geqslant 1$ отображение p_n является $(n-1)$-эквивалентностью (см. *Гомотопический тип*), в частности $\pi_i(X_{n-1}) \cong \pi_i(X_n)$ при $i < n$, $\pi_n(X_n) \cong \pi_n$ и $\pi_i(X_n) = 0$ при $i > n$. Пространства X и X_n имеют один и тот же $(n+1)$-тип. В частности, если П. с. конечна, т. е. для нек-рого числа N при всех $n > N$ группа π_n тривиальна, то пространства X и X_N гомотопически эквивалентны. В общем случае при $i \leqslant n$ имеют место изоморфизмы $H_i(X_n) \cong H_i(X)$ и $\pi_i(X_n) \cong \pi_i(X)$, т. е. с ростом n группы гомологий и гомотопич. группы стабилизируются. Для любого клеточного разбиения K размерности $\leqslant n$ множества $[K, X]$ и $[K, X_n]$ совпадают. Характеристич. класс $k_n = c(p_n) \in H^{n+1}(X_{n-1}; \{\pi_n\})$ расслоения $p_n: X_n \to X_{n-1}$, т. е. образ при *трансгрессии*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "f_n"] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
\cdots \arrow[r] & Y_n \arrow[r, "g_n"] & Y_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_1
\end{tikzcd}$$

Рис. 1.

$$\tau\colon H^n(K(\pi, n); \pi) \longrightarrow H^{n+1}(B; \{\pi\})$$

фундаментального класса $\iota_n \in H^n(K(\pi, n); \pi)$, наз. n-м k-инвариантом (или n-м постниковским фактором) П. с. или ее предела X. Для любого $n \geqslant 1$ n-й член П. с., а потому и $(n+1)$-тип пространства X полностью определяются группами $\pi_1, \ldots, \pi_n$ и k-инвариантами $k_1, \ldots, k_{n-1}$. Часто П. с. наз. двойная последовательность

$$\{\pi_1, k_1, \ldots, \pi_n, k_n, \ldots\}.$$

Пространство X тогда и только тогда является пределом П. с. $\{p_n: X_n \to X_{n-1}\}$, когда существуют такие $(n-1)$-эквивалентности $\rho_n: X \to X_n$, что $\rho_{n-1} \sim \rho_n \circ \rho_n$ для любого $n \geqslant 1$. Аналогично характеризуются пределы морфизмов П. с.

Существует вариант понятия П. с., иногда оказывающийся более полезным. В этом варианте пространства X_n предполагаются клеточными разбиениями, обладающими тем свойством, что $X_{n-1} \subset X_n^n$ и $X_{n-1}^{n-1} = X_n^{n-1}$, а отображения $p_n: X_n \to X_{n-1}$ — такими клеточными отображениями (уже не являющимися расслоениями), что, во-первых, $p_n | X_n^{n-1} = \mathrm{id}$ и, во-вторых, гомотопич. слой отображения p_n (т. е. слой этого отображения, превращенного в расслоение) является пространством $K(\pi_n, n)$. Такие П. с. наз. клеточными. Пределом клеточной П. с. является клеточное разбиение X, для к-рого $X^n = X_n^n$ при любом $n \geqslant 1$. Произвольная П. с. гомотопически эквивалентна клеточной П. с.

Основная теорема теории П. с. утверждает (см. [1], [6]), что каждое пространство X является пределом нек-рой однозначно (с точностью до изоморфизма) определенной П. с. $\{p_n: X_n \to X_{n-1}\}$. Эта П. с. наз. системой Постникова пространства X. Имеет место также вариант основной теоремы для отображений: любое отображение $f: X \to Y$ является пределом нек-рого морфизма $\{f_n: X_n \to Y_n\}$ П. с. $\{p_n: X_n \to X_{n-1}\}$ пространства X в П. с. $\{q_n: Y_n \to Y_{n-1}\}$ пространства Y. Этот морфизм наз. системой Постникова отображения f (др. названия: гомотопическая резольвента отображения, П-система общего типа отображения, система Мура—Постникова отображения). Для постоянного отображения $c: X \to pt$ линейно связного пространства X его П. с. совпадает с П. с. пространства X.

В приложениях большое распространение получили т. н. стандартные системы Постникова (к-рые зачастую наз. просто системами Постникова), представляющие собой П. с., составленные из главных расслоений $p_n: X_n \to X_{n-1}$, индуцирующихся из стандартных расслоений Серра $K(\pi_n, n) \to EK(\pi_n, n+1) \to K(\pi_n, n+1)$ постниковскими факторами $k_n \in H^{n+1}(X_{n-1}; \pi_n)$, интерпретируемыми в силу представимости групп когомологий как отображения $k_n: X_{n-1} \to K(\pi_n, n+1)$. Стандартными П. с. обладают все пространства, гомотопически простые во всех размерностях (в терминологии [2] — абелевы пространства), и только они (см. [3], [4]).

Стандартные П. с. применяются для решения задач распространения и задач поднятия, к которым сводятся многие задачи алгебраической топологии. Объединенная постановка этих задач заключается в следующем. Пусть имеется (гомотопически) коммутативный квадрат пространств и отображений, в котором отображение i является замкнутым корасслоением с кослоем X/A, а p — расслоением со слоем F. Спрашивается, существует ли такое отображение $X \to Y$, чтобы оба получающихся треугольника были (гомотопически) коммутативными.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Рис. 2.

Далее, если такое отображение существует, то требуется вычислить множество $[X, Y]_B^A$ гомотопич. классов отображений $X \to Y$ «под A» (то есть rel A) и «над B».

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d, "i"'] & Y_n \arrow[r] \arrow[d, "p_n"] & EK[\pi_n(F), n+1] \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f_{n-1}"] & Y_{n-1} \arrow[r, "k_n"] & K[\pi_n(F), n+1] \end{tikzcd}$$

Рис. 3 .

Пусть для расслоения $p: Y \to B$ существует стандартная П. с. $\{p_n : Y_n \to Y_{n-1},\ Y_0 = B\}$ (для этого достаточно, напр., потребовать, чтобы пространства Y и B были односвязными). Задачу относительного поднятия решают шаг за шагом.

Рассмотрим «элементарную» задачу относительного поднятия отображения $f_{n-1}: X \to Y_{n-1}$ с $(n-1)$-го члена П. с. на n-й член П. с. (рис. 3).

Отображения f_{n-1} и g_{n-1} определяют отображение $X/A \to K(\pi_n,\ (F),\ n+1)$, т. е. класс когомологий $c^{n+1} \in H^{n+1}(X,\ A,\ \pi_n(F))$, называемый препятствием. Отображение f_{n-1} тогда и только тогда можно поднять в Y_n, когда $c^{n+1}=0$. Два поднятия f'_n и f''_n определяют элемент $d^n \in H^n(X,\ A;\ \pi_n(F))$, называемый различающей, к-рый тогда и только тогда равен нулю, когда поднятия f'_n и f''_n гомотопны.

Таким образом, задача относительного поднятия будет решена, если последовательно возникающие препятствия c^{n+1} равны нулю (напр., если $H^{n+1}(X,\ A;\ \pi_n(F))=0$. Поднятие будет единственно, если последовательно возникающие различающие d^n равны нулю (напр., если $H^n(X,\ A;\ \pi_n(F))=0$). В случае, когда корасслоение i является вложением клеточных разбиений, препятствие c^{n+1} и различающая d^n совпадают с обычными «поклеточными» *препятствием* и *различающей*.

Для односвязных пространств X, группы гомологий к-рых конечно порождены, П. с. эффективно вычислима [5] и, следовательно, эффективно вычислим гомотопич. тип пространства X. Однако на практике для большинства пространств из-за резко возрастающей сложности вычислений удается вычислить только начальные отрезки П. с. Для вычислений используется метод *когомологических операций*.

Двойственной к П. с. является система Картана — Серра

$$\cdots \longrightarrow X_n^{CS} \longrightarrow X_{n-1}^{CS} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{k-1}^{CS} = X$$

пространства X, состоящая из расслоений, слоями к-рых являются пространства Эйленберга — Маклейна $K(\pi_n\ (X),\ n-1)$. Пространство X_n^{CS} наз. $(n+1)$-м убивающим пространством для X. Члены X_n^{CS} системы Картана — Серра являются гомотопич. слоями $(n-1)$-эквивалентностей $\rho_n : X \to X_n$ для П. с. пространства X, а члены X_n П. с. — пространствами петель над слоями расслоений $X_n^{CS} \to X$.

Расщепленной П. с. наз. последовательность главных расслоений

$$\cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 = pt,$$

слоями к-рых являются пространства Эйленберга — Маклейна $K(\pi_n, s_n)$, где $s_n \leqslant s_{n+1}$. Расщепленные П. с. являются основным технич. средством изучения т. н. нильпотентных пространств и, в частности, их *локализаций* (см. [2], [6], [7]). Имеются и другие варианты П. с. (см. [6]).

Лит.: [1] Постников М. М., Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений, ч. 1—2, М., 1955; [2] его же, «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 6, с. 117—81; [3] Мошер Р., Тангора М., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970, гл. 13; [4] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971, гл. 8; [5] Браун Э. Х., «Математика», 1958, т. 2, № 2, с. 3—24; [6] Baues H. J., Obstruction theory of the homotopy classification of maps, B.—Hdlb.—N.Y., 1977; [7] Hilton P., Mislin G., Roitberg J., Localization of nilpotent groups and spaces, Amst., 1976.

С. Н. Малыгин.

ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВО — риманово пространство M, у к-рого секционная кривизна $K(\sigma)$ по всем двумерным направлениям σ постоянна: если $K(\sigma)=k$, то говорят, что П. к. п. имеет кривизну k. Согласно теореме Шура, риманово пространство M^n, $n>2$, есть П. к. п., если для любой точки $p \in M$ секционная кривизна $K(\sigma)$ по направлению любых двумерных подпространств σ касательного пространства T_pM одна и та же. Тензор кривизны П. к. п. выражается через кривизну k и метрич. тензор g_{ij} по формуле

$$R^i_{jkl}=k\left(\delta^i_k g_{jl}-\delta^i_l g_{jk}\right).$$

П. к. п. является локально симметрическим пространством.

С точностью до изометрии существует единственное полное односвязное n-мерное риманово пространство $S^n(k)$ постоянной кривизны k. При $k=0$ это *евклидово пространство*, при $k>0$ — сфера радиуса $1/\sqrt{k}$, при $k<0$ — *Лобачевского пространство*.

Пространства $S^n(k)$ являются максимально однородными пространствами, т. е. обладают группой движений максимально возможной размерности $\frac{n(n+1)}{2}$. Все отличные от $S^n(k)$ максимально однородные римановы пространства исчерпываются проективными (иначе, эллиптическими) пространствами, к-рые получаются из сфер отождествлением диаметрально противоположных точек.

Полные, но неодносвязные П. к. п. наз. **пространственными формами**. Они получаются из односвязного пространства $S^n(k)$ факторизацией по свободно действующей дискретной группе движений пространства $S^n(k)$. Известны все пространственные формы положительной кривизны. Проблема классификации пространственных форм нулевой и отрицательной кривизны до конца (1983) не решена.

П. к. п. выделяются среди всех римановых пространств одним из следующих характеристич. свойств: 1) П. к. п. удовлетворяют аксиоме плоскости, т. е. любое геодезическое в точке подмногообразие в П. к. п. является вполне геодезическим. 2) П. к. п. является локально проективно плоским пространством, т. е. допускает локально проективные отображения в евклидово пространство.

Понятие П. к. п. не обладает свойством корректности, т. е. пространство с мало меняющимися секционными кривизнами может сильно отличаться от П. к. п. Однако нек-рые общие свойства П. к. п., напр. топологич. строение, при этом сохраняются (теорема Адамара — Картана, теорема о сфере и др., см. *Кривизна*, [2]). Совершенно иначе обстоит дело для псевдоримановых П. к. п. — любое псевдориманово пространство знакоопределенной секционной кривизны, размерность к-рого больше двух, является П. к. п.

П. к. п. являются также локально конформно евклидовыми, т. е. допускают локальные конформные отображения в евклидово пространство.

Лит.: [1] Вольф Дж., Пространства постоянной кривизны, пер. с англ., М., 1982; [2] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 3, с. 3—55. *Д. Д. Соколов.*

ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ КРИВАЯ — плоская выпуклая кривая для к-рой расстояние между любыми парами параллельных опорных прямых одинаково. Это расстояние наз. ширино й П. ш. к. Кроме окружности, существует бесконечно много других, вообще говоря, негладких П. ш. к. Простейшей из них является треугольник Рёло, состоящий из трех дуг окружности одного радиуса a, к-рые соединяют вершины равностороннего треугольника со стороной a (см. рис. 1). Ширина треугольника Рёло равна a.

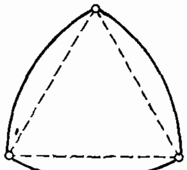


Рис. 1.

Площадь фигуры, ограниченной треугольником Рёло, равна $\frac{a^2}{2}\left(\pi^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Из всех П. ш. к. данной ширины a треугольник Рёло ограничивает фигуру наименьшей площади. Примеры других П. ш. к., где дуги П. ш. к., описанные вокруг различных многоугольников, представляют собой дуги окружностей, см. на рис. 2. Длина П. ш. к. ширины a равна πa (*Барбье теорема*).

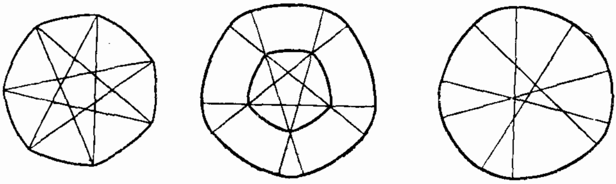


Рис. 2.

Понятие П. ш. к. можно обобщить на случай объектов с высокой коразмерностью. Пусть V — гладкое подмногообразие n-мерного евклидова пространства. Пространство V наз. трансиормальным пространством (см. [2]), если для каждой точки p на V нормальное многообразие $\nu(p)$ таково, что для каждой точки $q \in \nu(p) \cap V$ выполнено условие $\nu(q)=\nu(p)$. Класс плоских трансиормальных кривых совпадает с классом гладких П. ш. к. (о пространственных трансиормальных кривых см. [3]).

Лит.: [1] Бляшке В., Круг и шар, пер. с нем., М., 1967; [2] Robertson S. A., «Michigan Math. J.», 1964, v. 11, p. 97—105; [3] Wegner B., «Math. Nachr.», 1972, Bd 53, S. 337—44; 1975, Bd 67, S. 213—23. *Д. Д. Соколов.*

ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ ТЕЛО — выпуклое тело, для к-рого расстояние между любыми парами параллельных опорных плоскостей одинаково. Это расстояние наз. шириной П. ш. т. Кроме шара существует бесконечно много других, вообще говоря, негладких П. ш. т. Простейшим из них является тело, ограниченное поверхностью, полученной путем вращения треугольника Рёло вокруг одной из его осей симметрии. Класс П. ш. т. совпадает с классом выпуклых тел постоянного охвата, для к-рых границы ортогональных проекций на всевозможные плоскости имеют совпадающие длины.

Кроме П. ш. т., иногда рассматривают тела постоянной яркости, к-рые характеризуются тем, что площади поперечного сечения всевозможных ортогональных проекций этих тел совпадают.

Лит.: [1] Бляшке В., Круг и шар, пер. с нем., М., 1967. *Д. Д. Соколов.*

ПОТЕНЦИАЛ, потенциальная функция, — одна из характеристик векторного поля.

Скалярный потенциал — скалярная функция $v(M)$ такая, что $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}v(M)$ во всех точках области задания поля $\boldsymbol{a}(M)$ (иногда, напр. в физике, П. наз. величину, противоположную по знаку). Если такая функция существует, то векторное поле наз. *потенциальным полем*.

Векторный потенциал — векторная функция $A(M)$ такая, что $\boldsymbol{a}=\operatorname{rot}A(M)$ во всех точках области задания поля $\boldsymbol{a}(M)$. Если такая функция существует, то векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ наз. *соленоидальным полем*.

В зависимости от распределения порождающих П. масс или зарядов рассматриваются П. точечного заряда, поверхностный П. (простого или двойного слоя), объемный П. и др. (см. *Потенциала теория*). *А. Б. Иванов.*

ПОТЕНЦИАЛА ТЕОРИИ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ — задачи, в к-рых требуется найти форму и плотности притягивающего тела по заданным значениям внешнего (внутреннего) потенциала этого тела (см. *Потенциала теория*). В другой постановке одна из таких задач состоит в отыскании такого тела, чтобы его внешний объемный потенциал заданной плотности совпадал вне этого тела с заданной гармонич. функцией. Первоначально П. т. о. з. рассматривались в связи с задачами теории фигуры Земли и небесной механики. П. т. о. з. связаны с задачами фигур равновесия вращающейся жидкости и задачами геофизики.

Центральное место в исследовании П. т. о. з. составляют проблемы существования, единственности, устойчивости, а также создание эффективных численных методов их решения. Теоремы существования решений в малом имеются для случая тела, близкого к данному, но при этом имеются значительные трудности в исследовании уравнений, как правило, нелинейных, к к-рым сводятся эти задачи. Критериев существования глобальных решений нет (1983). Во многих случаях существование глобальных решений предполагается заранее, что естественно во многих приложениях, и исследуются проблемы единственности и устойчивости. Одним из основных моментов в исследовании проблемы единственности является выявление дополнительных условий на решения, обеспечивающих их единственность. С проблемой единственности связана проблема устойчивости. Для задач, записанных в виде уравнения 1-го рода, вообще говоря, сколь угодно малым вариациям правой части могут соответствовать конечные вариации решений, т. е. эти задачи относятся к некорректно поставленным задачам. Для того чтобы задача стала корректной, накладывается ряд дополнительных ограничений на решения; при этих ограничениях получаются различные характеристики отклонения решения в зависимости от отклонения правой части.

Ниже сформулированы обратные задачи ньютонова (объемного) потенциала и потенциала простого слоя для уравнения Лапласа в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, хотя указанные задачи исследуются и в n-мерном ($n>2$) евклидовом пространстве для потенциалов общих эллиптич. уравнений (см. [7]).

Пусть T_α, $\alpha=1, 2,$ — односвязные ограниченные области с кусочно гладкими границами S_α;

$$U_\alpha(x)=\int_{T_\alpha}\frac{1}{|x-y|}\mu_\alpha(y)\,dy$$

— ньютонов потенциал;

$$V_\alpha(x)=\int_{S_\alpha}\frac{1}{|x-y|}\zeta_\alpha(y)\,dS_y$$

— потенциал простого слоя, где $|x-y|$ — расстояние между точками $x=(x_1, x_2, x_3)$ и $y=(y_1, y_2, y_3)$ в $\mathbb{R}^3$, $\mu_\alpha(y)\neq 0$ ($\zeta_\alpha(y)\neq 0$) почти всюду в $T_\alpha(S_\alpha)$. И пусть

$$Z_\alpha(x)=\beta U_\alpha(x)+\gamma V_\alpha(x),$$

где β, γ — действительные числа, $\beta^2+\gamma^2\neq 0$.

Общая **в н е ш н я я** П. т. о. з. состоит в нахождении формы и плотности притягивающего тела по заданным значениям внешнего потенциала $Z(x)$. Для получения условий единственности решения этой задачи она формулируется следующим образом: найти такие условия для областей T_α и плотностей μ_α, ζ_α, чтобы из равенства внешних потенциалов $Z_1(x)$ и $Z_2(x)$:

$$Z_1(x) = Z_2(x) \text{ для } x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{T}_1 \cup \bar{T}_2) \quad (1)$$

следовало равенство $T_1 = T_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $\zeta_1 = \zeta_2$. Если множество $\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{T}_1 \cup \bar{T}_2)$ состоит из одной компоненты, то условие (1) выполняется, когда $Z_1(x) = Z_2(x)$ для $|x| > R$, где R — достаточно большое, или когда на границе шара $|x| = R$ задаются данные, обеспечивающие совпадение $Z_1(x)$ и $Z_2(x)$ вне этого шара. В качестве таких данных могут быть выбраны данные Дирихле на всей границе шара либо данные Коши на куске границы шара и т. д. В дальнейшем для простоты считается, что множества $T' = T_1 \cap T_2$ и $T'' = \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{T}_1 \cup \bar{T}_2)$ состоят из одной компоненты.

Решение общей внешней П. т. о. з. единственно, если $\mu_1 = \mu_2 = \mu > 0$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta > 0$, а области T_α контактны, т. е. такие, что для каждого из множеств T' и T'' существует общий участок S_* ($\operatorname{mes} S_* \neq 0$) границ S_α, причем $\operatorname{mes}[(S_1 \cup S_2) \setminus S_*] = 0$.

П. т. о. з. для ньютоновых потенциалов получается, когда в (1) $\beta = 1$ и $\gamma = 0$. Пусть T_α, $\alpha = 1, 2,$ — области, звездные относительно общей точки, а функции $\mu_\alpha(y)$ имеют вид $\mu_\alpha(y) = \delta_\alpha \nu(y)$, где $\delta_\alpha = \text{const}$, $\nu > 0$ и не зависит от $\rho = |y|$. Если ньютоновы потенциалы удовлетворяют условию (1) и, кроме того, существует точка $x_0 \in T_1 \cap T_2$ такая, что $U_1(x_0) = U_2(x_0)$, то $T_1 = T_2$, $\mu_1 = \mu_2$.

Если в условиях (1) положить $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, то получается задача об определении формы притягивающего тела по известным значениям внешнего ньютонова потенциала $U(x)$ заданной плотности. Решение этой задачи единственно в классе областей T_α, звездных относительно общей точки, в случае заданных плотностей $\mu(y)$, монотонно неубывающих с ростом $|y|$.

Если в условиях (1) положить $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\zeta_1 = \zeta_2$, то получается задача об определении формы притягивающего тела по известным значениям внешнего потенциала простого слоя $V(x)$ заданной плотности ζ. Для выпуклых тел постоянной плотности решение этой задачи единственно.

Если в условиях (1) положить $T_1 = T_2 = T$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, то получается задача об определении плотности притягивающего тела по известным значениям внешнего ньютонова потенциала. Решение задачи единственно, если функции $\mu_\alpha(y)$ имеют вид $\mu_\alpha(y) = \eta(y)\nu_\alpha(y)$, где $\frac{\partial \nu_\alpha}{\partial \rho} = 0$, $\eta \geqslant 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \geqslant 0$.

Общая **в н у т р е н н я я** П. т. о. з. состоит в нахождении формы и плотностей притягивающего тела по заданным значениям внутреннего потенциала $Z(x)$. Для получения теорем единственности используется следующая формулировка этой задачи: найти условия для областей T_α и плотностей μ_α, ζ_α, чтобы из совпадения внутренних потенциалов $Z_1(x)$ и $Z_2(x)$:

$$Z_1(x) = Z_2(x) \text{ для } x \in T_1 \cap T_2 \quad (2)$$

следовали равенства $T_1 = T_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $\zeta_1 = \zeta_2$.

Если в условиях (2) $\beta = 1$, $\gamma = 0$, то в классе выпуклых тел переменной положительной плотности решение единственно. Если же в условиях (2) $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta = \text{const}$, то в классе выпуклых тел решение также единственно.

Пусть ищется тело T такое, что его внешний ньютонов потенциал $U(x;\ T_1,\ \mu)$ данной плотности $\mu(x)$ равен вне тела T_1 заданной гармонич. функции $H(x)$,

$H(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ и $H(x)$ близка в смысле нек-рой функциональной метрики к внешнему ньютонову потенциалу $U(x;\ T,\ \mu)$ заданного тела T плотности μ. Для односвязных областей T с гладкой границей S при условии $\mu(x)|_S \neq 0$ решение задачи существует и единственно.

Внутренняя задача ставится аналогично внешней, причем $H(x)$ является решением неоднородного уравнения Лапласа в конечной области $G_0 \supset \bar{T}$:

$$\Delta H = -\mu(x) \text{ для } x \in G_0.$$

Ищется тело T_1 такое, что для

$$\operatorname{grad} H(x) = \operatorname{grad} U(x;\ T_1,\ \mu).$$

В отличие от внешней внутренняя задача имеет, вообще говоря, не единственное решение; число решений определяется уравнением разветвлений.

Плоские П. т. о. з. ($n=2$) ставятся аналогично пространственным с учетом соответствующего поведения потенциалов на бесконечности. В связи с этим ряд утверждений, приведенных выше для $n=3$, видоизменяется. Плоские П. т. о. з. иногда удобно исследовать методами теории функций комплексного переменного и конформных отображений.

Плоская внешняя П. т. о. з. Пусть $\mu=1$ — заданная плотность, причем вместо логарифмич. потенциала масс введена его производная $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$; на комплексной плоскости $z=x+iy$ вне круга $K(0,\ R) = \{|z| < R\}$ задана аналитич. функция $H(z)$, $H(\infty)=0$, особые точки к-рой при ее аналитич. продолжении находятся внутри области D_*, $0 \in D_*$. Требуется найти конечную односвязную область D с жордановой границей, $\bar{D}_* \subset D \subset \bar{D} \subset K(0,\ R)$, такую, чтобы $H(z) = U(z,\ D)$ для $|z| > R$, где

$$U(z,\ D) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{1}{z-\zeta}\, d\varepsilon\, d\eta,\ \zeta = \xi + i\eta.$$

Решением этой задачи считается функция $z(t)$, отображающая конформно единичный круг $|t| < 1$ комплексной плоскости t на область D плоскости $z=x+iy$ и удовлетворяющая условиям $z(0)=0$, $z'(0)>0$.

Пусть D — заданная конечная односвязная область с жордановой границей, функция $U_\alpha(z) = U(z,\ D)$ для $z \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Тогда функция удовлетворяет уравнению

$$z^*(s) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{U_\alpha[z(t)]\, dt}{t-s},\ |s| > 1, \tag{3}$$

где

$$z^*(s) = \overline{z\left(\frac{1}{\bar{s}}\right)} \text{ при } |s| \geqslant 1.$$

Если $z(t)$ является решением уравнения (3), в к-ром $U_\alpha(z)$ заменена указанной выше функцией $H(z)$, причем $z(t)$ однолистна при $|t| < 1$, $z(0)=0$, $z'(0) > 0$, то $H(z) = U(z,\ D)$ для $|z| > R$.

Из уравнения (3) можно получить ряд связей между функцией $U_\alpha(z)$ и функцией $z(t)$. Напр., если внешний потенциал $U_\alpha(z)$ можно аналитически продолжить внутрь D через всю границу ∂D, то $z(t)$ — аналитич. функция при $|t|=1$; если

$$U_\alpha(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{z^k} \text{ при } |z| > R,\ c_m \neq 0,$$

то

$$z(t) = \alpha_1 t + \ldots + \alpha_m t^m,\ \alpha_m \neq 0.$$

Это позволяет иногда решить плоскую П. т. о. з. в конечном виде. Пусть $H(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{z^k}$, $c_m \neq 0$. Тогда соответствующее нелинейное уравнение для $z(t)$ эквивалентно, вообще говоря, нелинейной системе алгебраич. уравнений относительно коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Функция $z(t)$, вообще говоря, не однолистная при $|t|<1$, находится как решение этой алгебраич. системы уравнений. Класс однолистных в круге $|t|<1$ решений $z(t)$, удовлетворяющих условиям $z(0)=0$, $z'(0)>0$, является решением поставленной П. т. о. з.

Аналогичное исследование можно провести для внешней обратной задачи логарифмич. потенциала простого слоя, а также для внутренних обратных задач логарифмич. потенциалов, причем как для внешних, так и для внутренних П. т. о. з. можно рассматривать переменные плотности.

Лит.: [1] Новиков П., «Докл. АН СССР», 1938, т. 18, № 3, с. 165—68; [2] Тихонов А. Н., там же, 1943, т. 39, № 5, с. 195—98; [3] Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.—Л., 1946; [4] Иванов В. К., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1956, т. 20, № 6, с. 793—818; [5] его же, «Докл. АН СССР», 1955, т. 105, № 3, с. 409—11; 1956, т. 106, № 4, с. 598—99; [6] Лаврентьев М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосиб., 1962; [7] Прилепко А. И., «Дифференциальные уравнения», 1966, т. 2, № 1, с. 107—24; 1967, т. 3, № 1, с. 30—44; 1970, т. 6, № 1, с. 27—49; 1972, т. 8, № 1, с. 118—25; его же, «Сиб. матем. ж.», 1965, т. 6, № 6, с. 1332—56; 1971, т. 12, № 3, с. 630—47; № 4, с. 828—36; № 6, с. 1341—53; [8] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979. *А. И. Прилепко.*

ПОТЕНЦИАЛА ТЕОРИЯ — в первоначальном понимании — учение о свойствах сил, действующих по закону всемирного тяготения. В формулировке этого закона, данной И. Ньютоном (I. Newton, 1687), речь идет только о силах взаимного притяжения, действующих на две материальные частицы малых размеров, или материальные точки, прямо пропорциональные произведению масс этих частиц и обратно пропорциональные квадрату расстояния между частицами. Поэтому первой и важнейшей с точки зрения небесной механики и геодезии задачей было изучение сил притяжения материальной точки ограниченным гладким материальным телом — сфероидом и, в частности, эллипсоидом (ибо многие небесные тела имеют именно эту форму). После первых частных достижений И. Ньютона и др. ученых основное значение здесь имели работы Ж. Лагранжа (J. Lagrange, 1773), А. Лежандра (A. Legendre, 1784—94) и П. Лапласа (P. Laplace, 1782—99). Ж. Лагранж установил, что поле сил тяготения, как говорят теперь, — потенциальное, и ввел функцию, к-рую позже Дж. Грин (G. Green, 1828) назвал потенциальной, а К. Гаусс (C. Gauss, 1840) — просто потенциалом. Ныне достижения этого первоначального периода обычно входят в курсы классич. небесной механики (см. также [2]).

Еще К. Гаусс и его современники обнаружили, что *потенциалов метод* применим не только для решения задач теории тяготения, но и вообще для решения широкого круга задач математич. физики, в частности электростатики и магнетизма. В связи с этим стали рассматриваться потенциалы не только физически реальных в вопросах взаимного притяжения положительных масс, но и «масс» произвольного знака, или зарядов. В П. т. определились основные краевые задачи такие, как *Дирихле задача* и *Неймана задача*, электростатич. задача о статич. распределении зарядов на проводниках, или *Робена задача*, задача о выметании масс (см. *Выметания метод*). Для решения указанных задач в случае областей с достаточно гладкой границей оказались эффективным средством специальные разновидности потенциалов, т. е. специальные виды интегралов, зависящих от параметров, такие, как потенциал объемно распределенных масс, потенциалы простого и двойного слоя, логарифмич. потенциалы, потенциалы Грина и др. Основную роль в создании строгих методов решения основных краевых задач сыграли работы А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова кон. 19 в. Изучение свойств потенциалов различных видов приобрело в П. т. и самостоятельное значение.

Мощный стимул в направлении обобщения основных задач и законченности формулировок П. т. получила начиная с 1-й пол. 20 в. на основе использования общих понятий меры в смысле Радона, емкости и обобщенных функций. Современная П. т. тесно связана в своем развитии с теорией аналитич. функций, гармонич. функций, субгармонич. функций и теорией вероятностей.

Наряду с дальнейшим углубленным изучением классических краевых задач и обратных задач (см. *Потенциала теории обратные задачи*) для современного периода развития П. т. характерно применение методов и понятий современной топологии и функционального анализа, применение абстрактных аксиоматич. методов (см. *Потенциала теория абстрактная*).

Основные типы потенциалов и их свойства. Пусть S — гладкая замкнутая поверхность, то есть $(n-1)$-мерное гладкое многообразие без края, в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, ограничивающая конечную область $G = G^+$, $\partial G = S$, и пусть $G^- = \mathbb{R}^n \setminus (G^+ \cup S)$ — внешняя бесконечная область. Пусть

$$E(x, y) = E(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n (n-2)} \dfrac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n \geqslant 3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x-y|}, & n = 2, \end{cases}$$

— главное фундаментальное решение уравнения Лапласа $\Delta u \equiv \sum_{k=1}^{n} \partial^2 u / \partial x_k^2 = 0$ в $\mathbb{R}^n$, где

$$|x-y| = \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right]^{1/2}$$

— расстояние между точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ в $\mathbb{R}^n$, $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, Γ — гамма-функция. Три интеграла, зависящих от x как от параметра:

$$\left.\begin{aligned} Z(x) &= \int_G \rho(y) E(x, y)\, dy, \\ V(x) &= \int_S \mu(y) E(x, y)\, dS(y), \\ W(x) &= \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y)\, dS(y), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где n_y — направление внешней относительно G^+ нормали к S в точке $y \in S$, наз. соответственно объемным потенциалом, потенциалом простого слоя и потенциалом двойного слоя. Функции $\rho(y)$, $\mu(y)$ и $\nu(y)$ наз. плотностями соответствующих потенциалов; ниже они будут предполагаться абсолютно интегрируемыми соответственно на G или S. При $n=3$ (а иногда и при $n \geqslant 3$) интегралы (1) наз. ньютоновым объемным потенциалом, ньютоновыми потенциалами простого и двойного слоя, при $n=2$ — логарифмическими потенциалами масс, простого и двойного слоя.

Пусть ρ принадлежит классу $C^1(G \cup S)$. Тогда объемный потенциал и его производные 1-го порядка непрерывны всюду в $\mathbb{R}^n$, причем их можно вычислить посредством дифференцирования под знаком интеграла, то есть $Z \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Далее,

$$\lim_{|x| \to \infty} (Z(x)/E(x, 0)) = M, \quad M = \int_G \rho(y)\, dy.$$

Производные 2-го порядка непрерывны всюду вне S, но при переходе через поверхность S они претерпевают разрыв, причем в области G^+ удовлетворяется уравнение Пуассона $-\Delta Z = \rho(x)$, $x \in G^+$, а в G^- — уравнение Лапласа $\Delta Z = 0$, $x \in G^-$. Перечисленные свойства характеризуют объемный потенциал.

Если G_1 — конечная область пространства $\mathbb{R}^n$ с границей $S_1 = \partial G_1$ класса C^1, то справедлива **формула Гаусса для объемного потенциала**:

$$\int_{S_1} \frac{\partial Z}{\partial n_x} dS_1(x) = -\int_{G \cap G_1} \rho(y)\, dy.$$

Пусть $\mu \in C^1(S)$. Потенциал простого слоя $V(x)$ есть гармонич. функция при $x \notin S$, причем

$$\lim_{|x| \to \infty} (V(x)/E(x, 0)) = M, \quad M = \int_S \mu(y)\, dS(y);$$

в частности, $\lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = 0$ при $n \geqslant 3$, но $\lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = 0$ при $n=2$ тогда и только тогда, когда $\int_S \mu(y) dS(y) = 0$. Потенциал простого слоя непрерывен всюду в $\mathbb{R}^n$, $V \in C(\mathbb{R}^n)$, причем $V(x)$ и его касательные производные непрерывны при переходе через поверхность S. Нормальная производная потенциала простого слоя при переходе через поверхность S испытывает скачок:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_x}\right)^+ = \frac{1}{2}\mu(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial n_x},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_x}\right)^- = -\frac{1}{2}\mu(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial n_x}, \quad x \in S,$$

где $\left(\frac{\partial V}{\partial n_x}\right)^+$ и $\left(\frac{\partial V}{\partial n_x}\right)^-$ — предельные значения нормальной производной соответственно из G^+ и G^-, то есть

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_x}\right)^+ = \lim_{x' \to x,\ x' \in G^+} \frac{\partial V(x')}{\partial n_x},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_x}\right)^- = \lim_{x' \to x,\ x' \in G^-} \frac{\partial V(x')}{\partial n_x}.$$

Через $\partial V(x)/\partial n_x$ здесь обозначено т. н. **прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя**, вычисленное на поверхности S, то есть

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n_x} = \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} E(x, y)\, dS(y), \quad x \in S,$$

к-рое является непрерывной функцией точки $x \in S$, а ядро $\partial E(x, y)/\partial n_x$ имеет слабую особенность на S,

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_x} E(x, y)\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|x-y|^{n-2}}, \quad x, y \in S.$$

Перечисленные свойства характеризуют потенциал простого слоя.

Пусть $\nu \in C^1(S)$. Потенциал двойного слоя $W(x)$ есть гармонич. функция при $x \notin S$, причем

$$\lim_{|x| \to \infty} \omega_n |x|^{n-1} W(x) = M, \quad M = \int_S \nu(y)\, dS(y).$$

При переходе через поверхность S потенциал двойного слоя испытывает скачок:

$$W^+(x) = -\frac{1}{2}\nu(x) + W(x), \quad W^-(x) = \frac{1}{2}\nu(x) + W(x),$$
$$x \in S,$$

где $W^+(x)$ и $W^-(x)$ — предельные значения потенциала двойного слоя соответственно из G^+ и G^-, то есть

$$W^+(x) = \lim_{x' \to x,\ x' \in G^+} W(x'), \quad W^-(x) = \lim_{x' \to x,\ x' \in G^-} W(x').$$

Через $W(x)$ при $x \in S$ обозначено т. н. **прямое значение потенциала двойного слоя**, вычисленное на поверхности S, то есть

$$W(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y)\, dS(y), \quad x \in S,$$

к-рое является непрерывной функцией точки $x \in S$, а ядро $\partial E(x, y)/\partial n_y$ имеет слабую особенность на S,

$$\left| \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y) \right| \leqslant \frac{\text{const}}{|x-y|^{n-2}}, \quad x, y \in S.$$

Касательные производные потенциала двойного слоя также испытывают скачок при переходе через поверхность S, но нормальная производная $\partial W(x)/\partial n_x$ сохраняет свое значение при переходе через S:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n_x}\right)^+ = \left(\frac{\partial W}{\partial n_x}\right)^-, \quad x \in S.$$

Перечисленные свойства характеризуют потенциал двойного слоя.

В случае постоянной плотности $\nu = 1$ имеет место формула Гаусса для потенциала двойного слоя:

$$-\int_S \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y)\, dS(y) = q(x) = \begin{cases} 1, & x \in G^+, \\ 1/2, & x \in S, \\ 0, & x \in G^-. \end{cases}$$

Интеграл в левой части этого равенства интерпретируется как (деленный на $\omega_n(n-2)$) телесный угол, под к-рым видна поверхность S из точки x.

Ниже дополнительно приводятся нек-рые свойства потенциалов при меньших ограничениях на плотности и поверхность S.

Если $\rho \in L_1(G)$, то $Z(x)$ — гармонич. функция при $x \in G^-$ и $Z(x)$ суммируема в G^+. Если $\rho \in L_p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant n/2$, то $Z \in L_q(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < q < np/(n-2p)$; если $\rho \in L_p(G)$, $p > n/2$, то $Z \in C(\mathbb{R}^n)$. Если $\rho \in L_p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant n$, то $Z \in W_q^1(\mathbb{R}^n)$, $1 < q < np/(n-p)$; если $\rho \in L_p(G)$, $p > n$, то $Z \in G^1(\mathbb{R}^n)$. Если $\rho \in L_2(G)$, то существуют обобщенные производные 2-го порядка от $Z(x)$, они также принадлежат классу $L_2(G)$ и выражаются с помощью сингулярных интегралов:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{n} \delta_{ij} \rho(x) + \int_G \rho(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} E(x, y)\, dy,$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$; если $\rho \in L_p(G)$, $1 < p < \infty$, то все обобщенные производные $\partial^2 Z/\partial x_i \partial x_j$ также существуют и принадлежат $L_p(\mathbb{R}^n)$. Если $\rho \in L_p(G)$, $1 \leqslant p < +\infty$, то $Z(x)$ есть обобщенное решение уравнения Пуассона $-\Delta Z = \rho(x)$, $x \in G$. Если $\rho \in C^{(0, \alpha)}(G)$ и $S \in C^{(1, \alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, то $Z \in C^{(2, \alpha)}$ в G^+ или G^-. Если $\rho \in C^{(l, \alpha)}(G)$ и $S \in C^{(k+1, \alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, l, k — целые, $0 \leqslant l \leqslant k$, то $Z \in C^{(l+2, \alpha)}(G^+)$.

Пусть $S \in C^{(1, \alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, $\overline{D}$ — замкнутая конечная область такая, что $G^+ \cup S \subset D \subset \overline{D} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если $\mu \in L_p(S)$, $p = 1, 2$, то $V \in L_p(\overline{D})$, $V \in L_p(S)$, $\partial V/\partial x_i \in L_p(\overline{D})$, $p = 1, 2$; $i = 1, 2, \ldots, n$. Если плотность μ ограниченная и суммируемая, то

$$V \in C^{(0, \lambda)} \forall \lambda \in (0, 1).$$

Если $\mu \in C^{(0, \alpha)}(S)$, $0 < \alpha < 1$, то $V \in C^{(1, \alpha)}$ в G^+ или G^-. Если $\nu \in C^{(0, \alpha)}(S)$, то $W \in C^{(0, \alpha)}$ в G^+ или G^-.

Если $\mu \in C^{(l, \alpha)}(S)$ и $S \in C^{(k+1, \alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, l, k — целые, $0 \leqslant l \leqslant k$, то $V \in C^{(l+1, \alpha)}$ в G^+ или G^-. Если $\nu \in C^{(l, \alpha)}(S)$ и $S \in C^{(k+1, \alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, l, k — целые, $0 \leqslant l \leqslant k+1$, то $W \in C^{(l, \alpha)}$ в G^+ или G^-.

Для доопределенных по непрерывности потенциалов и их производных на поверхности S описанные выше свойства гладкости также остаются в силе при соответствующих условиях гладкости на плотность и поверхность S.

Представление функций и решение основных краевых задач теории потенциала с помощью потенциалов. Пусть $\Phi(x)$ — функция класса $C^2(G \cup S)$, S — гладкая поверхность класса C^2. Тогда справедливо интегральное тождество (формула Грина):

$$-\int_G \Delta\Phi(y)\, E(x, y)\, dy + \int_S \left(\frac{\partial\Phi(y)}{\partial n_y} E(x, y) - \Phi(y) \frac{\partial E(x, y)}{\partial n_y}\right) dS(y) = q(x)\,\Phi(x). \quad (2)$$

В частности, в области G функция $\Phi(x)$ представима в виде суммы объемного потенциала и потенциалов простого и двойного слоя соответственно с плотностями

$$\rho(y) = -\Delta\Phi(y),\ \mu(y) = \partial\Phi(y)/\partial n_y,\ \nu(y) = -\Phi(y).$$

Для гармонической в области G функции $u(x)$ класса $C^1(G\bigcup S)$ имеет место тождество

$$\int_S \left(\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} E(x, y) - u(y) \frac{\partial E(x, y)}{\partial n_y}\right) dS(y) = q(x)\, u(x), \quad (3)$$

и поэтому такая функция $u(x)$ представима в G в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя соответственно с плотностями $\mu(y) = \partial u(y)/\partial n_y$, $\nu(y) = -u(y)$. Однако эти плотности в формуле (3) не могут задаваться произвольно на S, они связаны интегральным соотношением, получающимся из (3) при $x \in G^-$.

Центральное место в П. т. занимают краевые задачи Дирихле и Неймана (наз. также первой и второй краевыми задачами) для областей G^+ (внутренние задачи) и G^- (внешние задачи), к-рые в предположении достаточной гладкости поверхности удается полностью исследовать сведением их к *интегральным уравнениям* П. т.

Внутренняя задача Дирихле: найти гармоническую в G^+ функцию $u(x)$ класса $C(G^+\bigcup S)$, $S \in C^{(1,\ \alpha)}$, $0<\alpha<1$, удовлетворяющую краевому условию $u(x) = \varphi^+(x)$, $x \in S$, где $\varphi^+(x)$ — данная непрерывная функция на S. Решение этой задачи всегда существует, единственно и может быть найдено в виде потенциала двойного слоя

$$u(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y)\, dS(y)$$

с плотностью ν, к-рая находится как единственное решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$-\frac{1}{2}\nu(x) + \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y)\, dS(y) = \varphi^+(x), \quad x \in S.$$

Внутренняя задача Неймана: найти гармоническую в области G^+ функцию $u(x)$ класса $C^1(G^+\bigcup S)$, $S \in C^{(1,\ \alpha)}$, $0<\alpha<1$, удовлетворяющую краевому условию $\partial u(x)/\partial n_x = \psi^+(x)$, $x \in S$, где $\psi^+(x)$ — данная непрерывная функция на S. Решение этой задачи существует тогда и только тогда, когда функция $\psi^+(x)$ удовлетворяет условию ортогональности

$$\int_S \psi^+(x)\, dS(x) = 0. \quad (4)$$

Это решение определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной C в виде $u(x) = V(x) + C$, где

$$V(x) = \int_S \mu(y)\, E(x, y)\, dS(y)$$

— потенциал простого слоя, плотность μ к-рого определяется из интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} E(x, y)\, dS(y) = \psi^+(x),\ x \in S. \quad (5)$$

Соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальное решение $\mu_0(x)$, а неоднородное уравнение (5) разрешимо при выполнении условия (4), причем его общее решение имеет вид $\mu(x) + c\mu_0(x)$, где c — произвольная постоянная.

Внешняя задача Дирихле: найти гармоническую в области G^-, $0 \in G^+$, функцию $u(x)$ класса

$C(G^- \cup S)$, $S \in C^{(1,\ \alpha)}$, $0<\alpha<1$, удовлетворяющую краевому условию $u(x)=\varphi^-(x)$, $x \in S$, где $\varphi^-(x)$ — данная непрерывная функция на S; при этом $u(x)$ предполагается регулярной на бесконечности, т. е.

$$\lim_{|x| \to \infty} |x|^{n-2} u(x) = \text{const}.$$

Решение этой задачи всегда существует, единственно и может быть найдено в виде

$$u(x) = W(x) + A/|x|^{n-2},$$

где A — постоянная,

$$W(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x,\ y)\, dS(y)$$

— потенциал двойного слоя, плотность ν к-рого является решением интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\frac{1}{2}\nu(x) + \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x,\ y)\, dS(y) = \\ = \varphi^-(x) - \frac{A}{|x|^{n-2}}, \quad x \in S. \tag{6}$$

Соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальное решение $\tilde{\nu}_0 = 1$. При надлежащем выборе постоянной A решение неоднородного уравнения (6) имеет вид

$$\nu(y) = \nu^-(y) + C,$$

где C — произвольная постоянная, а $\nu^-(y)$ — частное решение ур-ния (6). Постоянная A подбирается в виде

$$A = -\int_S \varphi^-(x)\, \nu_0(x)\, dS(x),$$

где плотность ν_0 должна удовлетворять условию

$$\int_S \nu_0(y) \frac{1}{|y|^{n-2}}\, dS(y) = 1. \tag{7}$$

Эта плотность ν_0 есть нетривиальное решение уравнения (5) внутренней задачи Неймана с данными $\psi^+(x)=0$, $x \in S$, удовлетворяющее эквивалентному (7) при $n \geqslant 3$ условию нормировки

$$V_0(x) \equiv \int_S \nu_0(y)\, E(x,\ y)\, dS(y) = 1, \quad x \in G^+ \cup S.$$

Потенциал простого слоя $V_0(x)$ плотности $\nu_0(x)$ наз. *равновесным потенциалом*, или *потенциалом Робена*. Плотность $\nu_0(x)$ дает решение задачи Робена или электростатич. задачи о распределении зарядов на проводнике S, создающем равновесный потенциал, постоянный в области G^+. Нек-рая сложность решения внешней задачи Дирихле происходит из-за того, что регулярная на бесконечности гармонич. функция $u(x)$, вообще говоря, убывает при $|x| \to \infty$ медленнее, чем потенциал двойного слоя, и поэтому $u(x)$ в общем случае нельзя представить в виде одного только потенциала двойного слоя.

Внешняя задача Неймана: найти гармоническую в области G^-, $0 \in G^+$, функцию $u(x)$ класса $C^1(G^- \cup S)$, $S \in C^{(1,\ \alpha)}$, $0<\alpha<1$, удовлетворяющую краевому условию $\partial u(x)/\partial n_x = \psi^-(x)$, $x \in S$, где $\psi^-(x)$ — данная непрерывная функция на S; при этом $u(x)$ предполагается регулярной на бесконечности. При $n \geqslant 3$ решение этой задачи всегда существует и единственно; при $n=2$ решение существует тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\int_S \psi^-(x)\, dS(x) = 0, \tag{8}$$

причем решение определено лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Решение внешней задачи Неймана представимо в виде потенциала простого слоя

$$u(x)=\int_S \mu(y)\,E(x,\ y)\,dS(y),$$

плотность μ к-рого есть решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$-\frac{1}{2}\mu(x)+\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}E(x,\ y)\,dS(y)=\\ =\psi^-(x),\quad x\in S. \qquad (9)$$

При $n\geqslant 3$ решение этого уравнения всегда существует и единственно. При $n=2$ соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальное решение $\mu_0(x)$, поэтому неоднородное уравнение (9) при выполнении условия разрешимости (8) имеет единственное решение $\tilde{\mu}(x)$ такое, что

$$\int_S \tilde{\mu}(x)\,dS(x)=0,$$

а его общее решение имеет вид $\mu(x)=\tilde{\mu}(x)+c\mu_0(x)$, где c — произвольная постоянная.

Решение краевых задач П. т. может быть получено также с помощью *Грина функции*. Напр., для (внутренней) задачи Дирихле функция Грина имеет вид

$$G(x,\ y)=E(x,\ y)+g(x,\ y),\quad x\in G^+\cup S,\quad y\in G^+,$$

где $g(x,\ y)$ — гармонич. функция в G^+ и непрерывная в $G^+\cup S$ по x, для каждого $y\in G^+$ удовлетворяющая краевому условию $G(x,y)=0$, $x\in S$. Решение (внутренней) задачи Дирихле $u(x)$ класса $C^2(G^+)\cap C(G^+\cup S)$ для уравнения Пуассона $-\Delta u(x)=f(x)$, $x\in G^+$, с краевым условием $u(x)=\varphi^+(x)$, $x\in S$, представимо в виде

$$u(x)=\int_{G^+} f(y)\,G(x,\ y)\,dy+\\ +\int_S \varphi^+(y)\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,\ y)\,dS(y),\quad x\in G^+.$$

Зависящие от параметра x интегралы

$$\int_G \rho(y)\,G(x,\ y)\,dy,\ \int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,\ y)\,dS(y)$$

наз. соответственно объемным потенциалом Грина (задачи Дирихле), потенциалом Грина двойного слоя. Их свойства аналогичны свойствам потенциалов (1).

С помощью функции Грина к интегральным уравнениям сводятся задачи на собственные значения. Напр., задача Дирихле $-\Delta u=\lambda u(x)$, $x\in G^+$, с краевым условием $u(x)=0$, $x\in S$, сводится к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с самосопряженным ядром

$$u(x)-\lambda\int_{G^+} u(y)\,G(x,\ y)\,dy=0,\quad x\in G^+.$$

Дальнейшее обобщение некоторых основных понятий теории потенциала. Параллельно с углубленным изучением свойств потенциалов (1), определяемых плотностями более или менее общего вида, и их применений само понятие потенциала подверглось начиная примерно с 20-х гг. 20 в. глубокому обобщению, связанному с понятием меры и интеграла Радона.

Пусть $\lambda\geqslant 0$ — положительная борелевская мера на пространстве $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\lambda$. Потенциал меры

$$E\lambda(x)=\int E(x,\ y)\,d\lambda(y) \qquad (10)$$

существует всюду в $\mathbb{R}^n$ в смысле отображения $E\lambda:\mathbb{R}^n\to[0,\ \infty]$ при $n\geqslant 3$ и $E\lambda:\mathbb{R}^2\to(-\infty,\ \infty]$ при $n=2$ (т. е. здесь допускается и значение $+\infty$) и является *супергармонической функцией* всюду в $\mathbb{R}^n$, гармонической — вне носителя меры $\operatorname{supp}\lambda$. Для меры λ произвольного знака с компактным носителем потенциал $E\lambda$ определяется, исходя из канонич. разложения $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, $\lambda^+ \geqslant 0$, $\lambda^- \geqslant 0$, в виде $E\lambda = E\lambda^+ - E\lambda^-$. В тех точках $x \in \mathbb{R}^n$, где оба потенциала $E\lambda^+(x)$ и $E\lambda^-(x)$ принимают значение $+\infty$, этот потенциал не определен. Если мера $\lambda \geqslant 0$ сосредоточена на гладкой поверхности S, то аналогично (10) определяется и потенциал двойного слоя меры λ:

$$\frac{\partial E}{\partial n_y} \lambda(x) = \int \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, \ y)\, d\lambda(y).$$

Потенциал (10) конечен, $E\lambda < +\infty$, всюду в $\mathbb{R}^n$, за исключением точек полярного множества, к-рое характеризуется как множество внешней емкости нуль. Если $E\lambda(x) = 0$ всюду, кроме множества внешней емкости нуль, то $\lambda = 0$. Если мера $\lambda \geqslant 0$, $\lambda \neq 0$ сосредоточена на множестве емкости нуль, то $\sup\ E\lambda = +\infty$. Справедлив следующий принцип максимума:

$$E\lambda(x) \leqslant \operatorname{supp}\{E\lambda(y): \ y \in \operatorname{supp}\lambda\},$$

т. е. верхняя грань $E\lambda(x)$ есть верхняя грань сужения $E\lambda$ на $\operatorname{supp}\lambda$. Если это сужение непрерывно (в обобщенном смысле, включая значение $+\infty$) в точке $x_0 \in \operatorname{supp}\lambda$, то потенциал $E\lambda(x)$ непрерывен в точке x_0 в $\mathbb{R}^n$. Потенциалы мер $E\lambda$ сводятся к потенциалам плотностей (1) тогда и только тогда, когда мера λ абсолютно непрерывна по мере Лебега соответственно на G или на S (см. [3]—[6]).

Если T — обобщенная функция, или распределение, в $\mathbb{R}^n$, то потенциал распределения определяется как свертка $E * T$, являющаяся также обобщенной функцией. Напр., если T — финитная обобщенная функция, то в $\mathbb{R}^n$ в смысле обобщенных функций справедливо уравнение Пуассона $\Delta(ET) = -T$. Потенциалы мер можно рассматривать как частный случай потенциалов распределений. О потенциалах распределений см. [3], [4], [9].

Для областей $G = G^+$ с достаточно гладкой границей S метод потенциалов дает эффективное решение задачи Дирихле. Одно из основных направлений развития П. т. состоит в открытии методов доказательства существования и единственности решения задачи Дирихле для все более широких классов областей (см. *Выметания метод*, *Дирихле принцип*, *Перрона метод*, *Шварца альтернирующий метод*). Однако в 1910 С. Заремба (S. Zaremba) заметил, что для плоской области G при наличии изолированных точек границы $\partial G = S$ задача Дирихле в приведенной выше классич. постановке не всегда разрешима; более того, в 1912 А. Лебег (H. Lebesgue) показал, что она не всегда разрешима и для пространственных областей, гомеоморфных шару, при наличии достаточно острого входящего в область острия границы (т. н. острие Лебега, см. *Иррегулярная граничная точка*), т. е. существуют такие непрерывные функции $\varphi^+(x)$, $x \in \partial G$, для к-рых задача Дирихле не разрешима никаким способом.

Поэтому важное значение имеет полученное в ходе развития метода Перрона обобщенное решение в смысле Перрона — Винера задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Как показал Н. Винер (N. Wiener, 1924), при этом любая конечная непрерывная функция $\varphi = \varphi^+$, заданная на границе $S = \partial G$ произвольной конечной области $G \subset \mathbb{R}^n$, разрешима, т. е. для нее существует и притом единственное обобщенное решение $H_\varphi(x)$ в смысле Перрона — Винера. Вообще, в 1939 М. Брело (M. Brelot) показал, что конечная измеримая функция φ на S разрешима тогда и только тогда, когда φ интегрируема по *гармонической мере* на S.

Обобщенное решение $H_\varphi(x)$ не во всех граничных точках принимает заданные значения φ. Точка $x_0 \in S$ наз. регулярной, если для любой конечной непрерывной функции φ на S обобщенное решение $H_\varphi(x)$ принимает значение $\varphi(x_0)$, то есть

$$\lim_{x \to x_0} H_\varphi(x) = \varphi(x_0), \quad x \in G.$$

Прочие точки $x_0 \in S$ наз. **иррегулярными**, к ним относятся изолированные точки границы при $n \geqslant 2$ и острие Лебега при $n \geqslant 3$. Как оказалось (*Келлога — Эванса теорема*, 1933), множество иррегулярных точек имеет внешнюю емкость нуль, т. е. является в нек-ром смысле разреженным. Множество регулярных точек плотно на S.

Для задачи Дирихле строится соответственно и **обобщенная функция Грина** G, к-рую можно определить, напр., для произвольно фиксированной точки $y \in G$ следующим образом:

$$G(x, y) = E(x, y) - H_{E(x, y)}(x), x \in G.$$

Обобщенная функция Грина сохраняет нек-рые свойства классич. функции Грина, напр. свойство симметрии $G(x, y) = G(y, x)$, но $\lim\limits_{x \to x_0} G(x, y) = 0$, $x \in G$, тогда и только тогда, когда x_0 — регулярная точка границы S (см. [4], [6]).

Важное значение имеют также исследования задачи Дирихле для компактов и устойчивости задачи Дирихле (см. [6], [4]).

Интенсивно развивается изучение потенциалов с другими ядрами, отличными от ядра $E(x, y)$, и их применений для решения краевых задач (см. *Бесселев потенциал*, *Нелинейный потенциал*, *Рисса потенциал*, а также [3], [11]).

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.— Л., 1946; [3] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [4] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [5] Kellogg O. D., Foundations of potential theory, B., 1929; [6] Келдыш М. В., «Успехи матем. наук», 1941, в. 8, с. 171—231; [7] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [8] его же, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [9] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [10] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [11] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [12] Михлин С. Г., Линейные уравнения в частных производных, М., 1977; [13] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977.
А. И. Прилепко, Е. Д. Соломенцев.

ПОТЕНЦИАЛА ТЕОРИЯ АБСТРАКТНАЯ — теория потенциала на абстрактных топологич. пространствах. П. т. а. возникла в сер. 20 в. из стремления охватить единым аксиоматич. методом широкое многообразие свойств различных потенциалов, применяемых при решении разнообразных задач теории дифференциальных уравнений с частными производными. Первое достаточно полное изложение аксиоматики «гармонических» функций (т. е. решений допустимого класса уравнений с частными производными) и соответствующих потенциалов было дано М. Брело (1957—58, см. [1]), но оно охватывало только уравнения эллиптич. типа. Расширение теории, пригодное и для широкого класса уравнений параболич. типа, получено Х. Бауэром (1960—63, см. [3]). Весьма плодотворным оказался вероятностный подход к П. т. а., начало к-рому было положено еще в работах П. Леви (P. Lévy), Дж. Дуба (J. Doob), Г. Ханта (G. Hunt) и др.

Для изложения П. т. а. удобно понятие *гармонического пространства*. Пусть X — локально компактное топологич. пространство. **Пучком функций** на X наз. отображение $\mathfrak{F}$, определенное на семействе всех открытых множеств X и такое, что

1) $\mathfrak{F}(U)$ для любого открытого множества $U \subset X$ есть семейство функций $u: U \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$;

2) если открытые множества U, V таковы, что $U \subset V \subset X$, то сужение любой функции из $\mathfrak{F}(V)$ на U принадлежит $\mathfrak{F}(U)$;

3) если для любого семейства $\{U_i\}$, $i \in I$, открытых множеств $U_i \subset X$ сужения нек-рой определенной на $\bigcup_{i \in I} U_i$ функции u на U_i для всех $i \in I$ принадлежат $\mathfrak{F}(U_i)$, то $u \in \mathfrak{F}(\bigcup_{i \in I} U_i)$.

Пучок функций $\mathfrak{W}$ на X наз. **гармоническим пучком**, если для любого открытого множества $U \subset X$ семейство $\mathfrak{W}(U)$ есть действительное векторное пространство непрерывных функций на U. Функция u, определенная на нек-ром множестве $S \subset X$, содержащем открытое множество U, наз. **$\mathfrak{W}$-функцией**, если сужение $u|U$ принадлежит $\mathfrak{W}(U)$. Гармонич. пучок $\mathfrak{W}$ **невырожден** в точке $x \in X$, если в окрестности x существует $\mathfrak{W}$-функция u такая, что $u(x) \neq 0$.

Реальные различия в аксиоматиках Бауэра, Брело, Дуба характеризуются свойствами сходимости $\mathfrak{W}$-функций.

а) **Свойство сходимости Бауэра** состоит в том, что если возрастающая последовательность $\mathfrak{W}$-функций локально ограничена на нек-ром открытом множестве $U \subset X$, то предельная функция v есть $\mathfrak{W}$-функция.

б) **Свойство сходимости Дуба** состоит в том, что если предельная функция v конечна на плотном множестве в X, то v есть $\mathfrak{W}$-функция.

в) **Свойство сходимости Брело** состоит в том, что если предельная функция v возрастающей последовательности $\mathfrak{W}$-функций на нек-рой области $U \subset X$ конечна в точке $x \in U$, то v есть $\mathfrak{W}$-функция.

Если пространство X локально связно, то имеют место импликации в) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ а).

Пучок функций $\mathfrak{U}$ на X наз. **гипергармоническим пучком**, если для любого открытого множества $U \subset X$ семейство $\mathfrak{U}(U)$ есть выпуклый конус полунепрерывных снизу функций $u: U \to (-\infty, \infty]$; **$\mathfrak{U}$-функция** определяется аналогично $\mathfrak{W}$-функции. Отображение $U \to \mathfrak{U}(U) \cap (-\mathfrak{U}(U))$ есть гармонич. пучок $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_{\mathfrak{U}}$, порожденный пучком $\mathfrak{U}$; только этот гармонич. пучок будет использоваться в дальнейшем.

Пусть на границе ∂U открытого множества $U \subset X$ дана непрерывная функция $\varphi: \partial U \to (-\infty, \infty)$ с компактным носителем. Гипергармонич. пучок $\mathfrak{U}$ позволяет построить *Перрона методом* обобщенное решение задачи Дирихле для нек-рых открытых множеств в классе соответствующих $\mathfrak{W}$-функций. Пусть $\overline{\mathfrak{U}}_{\varphi}$ — семейство полунепрерывных снизу $\mathfrak{U}$-функций u, ограниченных снизу на U, положительных вне нек-рого компакта и таких, что

$$\liminf_{x \to y} u(x) \geq \varphi(y), \quad y \in \partial U;$$

можно положить $\underline{\mathfrak{U}}_{\varphi} = -\overline{\mathfrak{U}}_{\varphi}$. Пусть теперь

$$\overline{H}_{\varphi}(x) = \inf\{u(x): u \in \overline{\mathfrak{U}}_{\varphi}\}, \quad x \in U,$$

и $\overline{H}_{\varphi} = \infty$, если $\overline{\mathfrak{U}}_{\varphi} = \varnothing$. Аналогично,

$$\underline{H}_{\varphi}(x) = \sup\{u(x): u \in \underline{\mathfrak{U}}_{\varphi}\}, \quad x \in U,$$

или $\underline{H}_{\varphi} = -\infty$. Функция наз. **разрешимой**, если для нее $\overline{H}_{\varphi}$ и $\underline{H}_{\varphi}$ совпадают, $\overline{H}_{\varphi} = \underline{H}_{\varphi} = H_{\varphi}$, и H_{φ} является $\mathfrak{W}$-функцией; эта функция H_{φ} и есть обобщенное решение задачи Дирихле в классе $\mathfrak{W}$-функций. Открытое множество $U \subset X$ **разрешимо** относительно $\mathfrak{U}$, если разрешима любая конечная непрерывная функция с компактным носителем на ∂U. Для разрешимого множества U отображение $H_{\varphi}: C_k(\partial U) \to \mathbb{R}$ есть положительный линейный функционал, к-рый, следовательно, определяет положительную меру μ_x, $x \in U$, наз. **гар-**

монической мерой на ∂U в точке x (относительно $\mathfrak{U}$).

Локально компактное пространство X с гипергармонич. пучком $\mathfrak{U}$ превращается в гармоническое пространство, если для него выполняются соответствующие четыре аксиомы (см. *Гармоническое пространство*), причем в аксиоме сходимости имеется в виду свойство Бауэра.

Часто (в классич. примерах именно так и обстоит дело) за основу берется гармонич. пучок $\mathfrak{W}$, а аксиома мажоранты служит тогда определением гипергармонич. пучка. Напр., евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с пучком классич. решений уравнения Лапласа или уравнения теплопроводности в качестве $\mathfrak{W}$ является гармонич. пространством. Гармонич. пространство локально связно, не содержит изолированных точек и имеет базис из связных разрешимых множеств (разрешимых областей).

Открытое множество U гармонич. пространства X с сужением $\mathfrak{U}|U$ в качестве гипергармонич. пучка есть гармоническое пространство X. Гипергармонич. функция u на $U \subset X$ наз. супергармонической функцией, если для любого относительно компактного разрешимого множества V, $\bar{V} \subset U$, наибольшая миноранта $\mu^V u$ является гармонической, $\mu^V u \in \mathfrak{W}(V)$. Многие свойства классических супергармонич. функций (см. *Субгармоническая функция*) выполняются и здесь. Потенциалом наз. такая положительная супергармонич. функция u, для к-рой наибольшая гармонич. миноранта $\mu^V u$ на X тождественно равна нулю. Гармонич. пространство X наз. $\mathfrak{S}$-гармоническим (или $\mathfrak{P}$-гармоническим) пространством, если для любой точки $x \in X$ существует положительная супергармонич. функция u (соответственно потенциал u) на X такая, что $u(x) > 0$. Любое открытое множество $\mathfrak{P}$-гармонического пространства разрешимо.

Принимая за основу гармонич. пучок $\mathfrak{W}$ и определяя соответствующий гипергармонич. пучок $\mathfrak{W}^*$ с помощью аксиомы мажоранты, получают пространство Бауэра, совпадающее с гармонич. пространством для $\mathfrak{W}^*$. Если гармонич. пучок $\mathfrak{W}$ для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ состоит из решений h уравнения теплопроводности $\Delta h - \partial h / \partial t = 0$, то $\mathfrak{W}$ обладает свойством сходимости Дуба и $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ с этим пучком $\mathfrak{W}$ есть $\mathfrak{P}$-пространство (Бауэра). При этом v — гипергармонич. функция класса C^2 тогда и только тогда, если $\Delta v - \partial v / \partial t \leqslant 0$.

Пространство Брело характеризуется следующими условиями: X не имеет изолированных точек и локально связно; регулярные множества относительно $\mathfrak{W}$ образуют базу X (регулярность — это разрешимость классич. задачи Дирихле в классе $\mathfrak{W}$); $\mathfrak{W}$ обладает свойством сходимости Брело. Пространства Брело составляют собственный подкласс т. н. эллиптических гармонич. пространств (см. [4]), т. е. эллиптич. пространств Бауэра. Если гармонич. пучок $\mathfrak{W}$ для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, состоит из решений u уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, то $\mathbb{R}^2$ с этим пучком есть $\mathfrak{S}$-пространство Брело, а $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$ есть $\mathfrak{P}$-пространство Брело. При этом v — гипергармонич. функция класса C^2 тогда и только тогда, если $\Delta v \leqslant 0$.

Точка y границы ∂U разрешимого множества U гармонич. пространства наз. регулярной граничной точкой, если для любой конечной непрерывной функции φ на ∂U имеет место предел

$$\lim_{x \to y} H_\varphi(x) = \varphi(y), \quad x \in U,$$

а в противном случае y наз. иррегулярной граничной точкой. Пусть F — фильтр на U, сходящийся к y. Барьером фильтра F наз. строго положительная гипергармонич. функция v, определенная на пересечении U с нек-рой окрестностью y и сходящаяся к 0 вдоль F. Если для относительно компактного разрешимого множества U $\mathfrak{G}$-гармонического пространства все фильтры, сходящиеся к точкам $y \in \partial U$, имеют барьер, то U — регулярное множество, т. е. все его граничные точки регулярные. Если U — относительно компактное открытое множество $\mathfrak{P}$-гармонического пространства, на к-ром существует строго положительная гипергармонич. функция, сходящаяся к 0 в каждой точке $y \in \partial U$, то U — регулярное множество.

Кроме изучения разрешимости и регулярности в задаче Дирихле, к основной проблематике П. т. а. относятся: теория *емкости* точечных множеств на гармонич. пространствах X; теория выметания (см. *Выметания метод*) функций и мер на X; теория интегральных представлений положительных супергармонич. функций на X, обобщающая представления Мартина (см. *Мартина граница*).

Уже в нач. 20 в. была замечена тесная связь теории потенциала с нек-рыми вопросами теории вероятностей, такими, как *броуновского движения процесс*, *винеровский процесс*, *марковский процесс*. Напр., вероятность того, что траектория броуновского движения в плоской области $G \subset \mathbb{R}^2$, исходящая из точки $x_0 \in G$, встретит в первый раз границу ∂G на (борелевском) множестве $E \subset \partial G$, есть не что иное, как *гармоническая мера* множества E в точке x_0; *полярные множества* границы ∂G суть при этом те множества, к-рые траектории не встречают почти наверное. В дальнейшем вероятностные методы способствовали более глубокому пониманию нек-рых идей теории потенциала и привели к ряду новых результатов; с другой стороны, теоретико-потенциальный подход уменьшает отчужденность теории вероятностей и также приводит в ней к новым результатам.

Пусть X — локально компактное пространство со счетной базой, C_k и C_0 — классы конечных непрерывных функций на X соответственно с компактным носителем и стремящихся к 0 на бесконечности. Ядро-мера $N(x, E) \geqslant 0$ есть (борелевская) функция от $x \in X$ для каждого относительно компактного (борелевского) множества $E \subset X$. С помощью N каждой функции $f \geqslant 0$, $f \in C_k$, ставится в соответствие потенциал-функция

$$Nf(x) = \int f(y)\, N(x, dy), \quad x \in X,$$

а мере $\theta \geqslant 0$ соответствует потенциал-мера

$$\theta N(E) = \int N(x, E)\, d\theta(x).$$

Единичное ядро $I(x, E)$ равно 0 при $x \notin E$ и равно 1 при $x \in E$, оно не изменяет $f(x)$ и $\theta(E)$. Напр., в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ ядро

$$N(x, E) = \int_E \frac{dy}{|x-y|}$$

определяет ньютонов потенциал Nf с плотностью f, а θN есть мера с плотностью, равной ньютонову потенциалу меры θ (см. *Потенциала теория*).

Ядро-произведение имеет вид

$$MN(x, E) = \int N(y, E)\, M(x, dy).$$

Семейство ядер $\{N_t\}$, $t \geqslant 0$, с законом композиции $N_{t+s} = N_t N_s$ является однопараметрич. полугруппой. Ядро N удовлетворяет полному принципу максимума, если для любых f, $g \geqslant 0$ из C_k и $a > 0$ выполнение неравенства $Nf \leqslant Ng + a$ на множестве, где $f > 0$, влечет за собой выполнение этого неравенства всюду на X. Основная в этой теории теорема Ханта в простейшей форме состоит в том, что если образ C_k при отображении N плотен в C_0 и N удовлетворяет полному принципу максимума, то существует полугруппа $\{P_t\}$, $t \geqslant 0$, такая, что

$$Nf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\,dt, \quad f \geqslant 0$$

(феллеровская полугруппа); при этом P_t отображает C_k в C_0, P_0 — единичное ядро, $\lim\limits_{t\to 0} P_t f = f$, $f \in C_0$, локально равномерно и $P_t(1) \leqslant 1$. Функция $f \geqslant 0$ наз. эксцессивной функцией относительно полугруппы $\{P_t\}$, если всегда $P_t f \leqslant f$ и $\lim\limits_{t\to 0} P_t f = f$; если $P_t f = f$, то f наз. инвариантной функцией. Соответствующие построения имеют место и для потенциала-меры θN.

Очерченная теория Г. Ханта (1957—58) имеет непосредственный вероятностный смысл. Пусть на X задана нек-рая σ-алгебра борелевских множеств $\mathfrak{A}$ и вероятностная мера P. Случайная величина $S = S(x)$ — это $\mathfrak{A}$-измеримое отображение X в пространство состояний $\overline{R} = [-\infty, \infty]$. Семейство случайных величин $\{S_t\}$, $t \geqslant 0$,— это случайный марковский процесс, для к-рого $S_t(x)$ — траектория точки $x \in X$, если для каждого y, $-\infty \leqslant y < \infty$, существует вероятностная мера P^y на $\mathfrak{A}$ такая, что

$$1)\ \mathsf{P}^y(\{S_0 = y\}) = 1; \quad 2)\ \mathsf{P}^y(A), \quad A \in \mathfrak{A},$$

— борелевская функция от y; 3) вид траектории, проходящей через y в момент r, при $t \geqslant r$ не зависит от положения предыдущих ее точек. Применительно к таким марковским процессам полугруппы $\{\mathsf{P}_t\}$ интерпретируются как полугруппы мер

$$\mathsf{P}_t(y, B) = \mathsf{P}^y(\{S_t \in B\}).$$

Важное значение имеет изучение эксцессивных и инвариантных функций относительно полугрупп $\{\mathsf{P}_t\}$.

С другой стороны, если X есть $\mathfrak{P}$-гармоническое пространство со счетной базой, то на нем всегда можно выбрать ядро потенциалов так, чтобы удовлетворялись условия теоремы Ханта, и эксцессивные функции соответствующей полугруппы будут тогда в точности неотрицательными гипергармонич. функциями. Теорема Ханта обобщается и для нек-рых типов пространств Бауэра (см. [4], [7]).

И другие понятия П. т. а., такие, напр., как выметание, полярные и тонкие множества, также получают вероятностную интерпретацию в рамках общей теории случайных процессов, облегчающую их исследование. С другой стороны, для теории вероятностей оказалась важной теоретико-потенциальная трактовка ряда понятий, таких, напр., как мартингалы, выходящих за рамки марковских процессов.

Лит.: [1] Brelot M., Lectures on potential theory, 2 ed., Bombay, 1967; [2] его же, «L'enseign. math.», 1972, t. 18, № 1, p. 1—36; [3] Bauer H., Harmonische Raüme und ihre Potentialtheorie, B., 1966; [4] Constantinescu C., Cornea A., Potential theory on harmonic spaces, B., 1972; [5] Мейер П.-А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., М., 1973; [6] Хант Дж.-А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [7] Blumenthal R., Getoor R., Markov processes and potential theory, N.Y.—L., 1968.

Е. Д. Соломенцев.

ПОТЕНЦИАЛОВ МЕТОД — метод исследования краевых задач для уравнений математич. физики путем сведения их к интегральным уравнениям, основанный на представлении решений этих задач в виде (обобщенных) потенциалов.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, задано дифференциальное уравнение с частными производными 2-го порядка эллиптич. типа

$$Lu \equiv \sum_{i,\ j=1}^n \left(a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x) \tag{1}$$

с достаточно гладкими коэффициентами $a_{ij} = a_{ji} =$

$=a_{ij}(x)$, $e_i=e_i(x)$, $c(x)\leqslant 0$ и правой частью $f(x)$, причем $c(x)<-k^2<0$ вне нек-рой ограниченной области, содержащей внутри область D класса C^1. Тогда любое решение $u(x)$ уравнения (1) класса $C^2(D\cup S)$ можно представить в виде суммы трех (обобщенных) потенциалов: потенциала объемных масс

$$\int_D E(x, y)\rho(y)\,dy, \tag{2}$$

потенциала простого слоя

$$\int_S E(x, y)\sigma(y)\,ds_y \tag{3}$$

и потенциала двойного слоя

$$\int_S Q_y[E(x, y)]\mu(y)\,ds_y, \tag{4}$$

где $S=\partial D$ — граница области D, $E(x, y)$ — *главное фундаментальное решение* оператора L, символ Q_y обозначает оператор

$$Q_y v = a\frac{\partial v}{\partial N} - bv,$$

действующий в точке $y\in S$, N — единичный вектор конормали в точке $y\in S$,

$$a^2=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\cos(\nu, y_j)\right)^2,$$

$$b=\sum_{i=1}^n e_i\cos(\nu, y_i),$$

ν — единичный вектор внешней нормали к S в точке $y\in S$. Плотности потенциалов $\rho(y)$, $\sigma(y)$ и $\mu(y)$ — достаточно гладкие функции на D или S.

Для потенциалов (2)—(4) остаются в силе, с соответствующими изменениями, все дифференциальные и граничные свойства гармонич. потенциалов, описанные в ст. *Потенциала теория* для случая, когда L — оператор Лапласа. На основании этих свойств удается свести краевые задачи для эллиптич. уравнений типа (1) к интегральным уравнениям, аналогично тому, как это было описано для задач Дирихле и Неймана для гармонич. функций в ст. *Потенциала теория*.

Лит.: [1] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [2] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [4] Купрадзе В. Д., Методы потенциала в теории упругости, М., 1963; [5] Милн-Томсон Л. М., Теоретическая гидродинамика, пер. с англ., М., 1964. *Е. Д. Соломенцев.*

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ СЕТЬ, сеть Егорова,— ортогональная сеть на двумерной поверхности евклидова пространства, к-рую переводит в себя потенциальное движение жидкости по этой поверхности. В параметрах П. с. линейный элемент поверхности имеет вид

$$ds^2=\frac{\partial\Phi}{\partial u}du^2+\frac{\partial\Phi}{\partial v}dv^2,$$

где $\Phi=\Phi(u, v)$ — потенциал поля скорости жидкости. Каждая ортогональная полугеодезич. сеть потенциальна. Частным случаем П. с. является *Лиувилля сеть*. П. с. впервые рассматривал Д. Ф. Егоров (1901).

Лит.: [1] Егоров Д. Ф., Работы по дифференциальной геометрии, М., 1970; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963. *В. Т. Базылев.*

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ, градиентное поле,— векторное поле, образованное градиентами гладкой скалярной функции $f(t)$ нескольких переменных $t=(t^1, \ldots, t^n)$, принадлежащих нек-рой области T n-мерного пространства. Функция $f(t)$ наз. скалярным потенциалом (потенциальной функцией) этого поля. П. п. вполне интегрируемо в T: *Пфаффа уравнение* $(\operatorname{grad} f(t), dt)=0$ имеет в качестве $(n-1)$-мерных интегральных многообразий линии ($n=2$) или поверхности ($n\geqslant 3$) уровня потенциала $f(t)$. Любое регулярное вполне интегрируемое в T ковариантное поле $v=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ получается умножением П. п. на скаляр:

$$v_\alpha(t)=c(t)\frac{\partial f}{\partial t^\alpha}, \quad 1\leqslant\alpha\leqslant n.$$

Скаляр $1/c(t)$ наз. интегрирующим множителем уравнения Пфаффа $(v(t), dt)=0$. Признаком потенциальности поля $v_\alpha(t)$ ($c(t)=1$) служат равенства

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t^\beta}=\frac{\partial v_\beta}{\partial t^\alpha}, \quad 1\leqslant\alpha, \quad \beta\leqslant n,$$

означающие, что поле $v(t)$ является безвихревым (см. *Вихрь*).

Понятие П. п. широко используется в механике и физике. Большинство силовых и электрич. полей можно рассматривать как П. п. Напр., если $f(t)$ выражает давление в точке t идеальной жидкости, заполняющей область T, то вектор $F=-\operatorname{grad} f\cdot d\omega$ равен равнодействующей сил давления, приложенной к элементу объема $d\omega$. Если $f(t)$ — температура нагретого тела T в точке t, то вектор $F=-k\cdot\operatorname{grad} f$, где k — коэффициент теплопроводности, равен плотности теплового потока, идущего в сторону менее нагретых участков тела (в направлении, ортогональном изотермич. поверхностям $f=\mathrm{const}$). *Л. П. Купцов.*

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — отображение A банахова пространства X в сопряженное пространство X^*, являющееся градиентом нек-рого функционала $f\in X^*$, т. е. такое, что

$$\langle Ax, h\rangle=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}.$$

Напр., всякий ограниченный самосопряженный оператор A, определенный на гильбертовом пространстве H, является потенциальным:

$$A=\operatorname{grad}\left\{\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle\right\} x\in H.$$

Лит.: [1] Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972; [2] Гаевский Х., Грегор К., Захариас К., Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, пер. с нем., М., 1978. *В. И. Соболев.*

ПОТЕРЬ ФУНКЦИЯ — неотрицательная функция, показывающая потери (ущерб) экспериментатора в задаче принятия статистич. решения при каждом возможном исходе эксперимента. Пусть X — случайная величина, принимающая значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta$, и пусть $D=\{d\}$ — пространство всех возможных решений, к-рые можно принять относительно параметра θ по реализации случайного вектора X. В теории статистических решающих функций любую неотрицательную функцию $L(\cdot, \cdot)$, определенную на $\mathfrak{X}\times D$, наз. функцией потерь. Значение $L(\theta, d)$ П. ф. $L(\cdot, \cdot)$ в произвольной точке $(\theta, d)\in\mathfrak{X}\times D$ интерпретируют как ущерб, к к-рому приводит принятие решения d, $d\in D$, если истинное значение параметра есть θ, $\theta\in\Theta$.

Лит.: [1] Вальд А., Статистические решающие функции, пер. с англ., в кн.: Позиционные игры, М., 1967; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

ПОТОК векторного поля — одно из понятий теории векторного поля. П. векторного поля $\boldsymbol{a}$ через поверхность ∂V выражается с точностью до знака поверхностным интегралом

$$\iint_{\partial V}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\,ds=\iint_{\partial V}(a_x\,dy\,dz+a_y\,dz\,dx+a_z\,dx\,dy),$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности ∂V (предполагается, что изменение вектора $\boldsymbol{n}$ по поверхности ∂V непрерывно). Для поля скоростей частиц жидкости П. векторного поля равен объему жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность ∂V.

БСЭ-3.

ПОТОК, динамическая система с непрерывным временем,— динамическая система, определяемая действием аддитивной группы действительных чисел $\mathbb{R}$ (или аддитивной полугруппы неотрицательных действительных чисел) на нек-ром фазовом пространстве W. Другими словами, каждому $t \in \mathbb{R}$ (каждому $t \geqslant 0$) сопоставлено нек-рое преобразование $S_t : W \to W$, причем

$$S_0(w) = w \text{ и } S_{t+s}(w) = S_t(S_s(w)).$$

При этом t обычно наз. «временем» и о зависимости $S_t w$ от t (при фиксированном w) говорят как о «движении» точки $S_t w$; множество всех $S_t w$ для данного w наз. траекторией w (нередко этот термин употребляется применительно к функции $t \mapsto S_t w$). Как и для любых динамич. систем, обычно фазовое пространство наделено нек-рой структурой, и П. в каком-то смысле согласован с ней: преобразования S_t сохраняют эту структуру, накладываются определенные условия на характер зависимости $S_t w$ от t.

В приложениях чаще всего встречаются П., описываемые *автономными системами* обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{w}_i = f_i(w_1, \ldots, w_m), \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (*)$$

или, в векторных обозначениях, $\dot{w} = f(w)$, $w \in \mathbb{R}^n$. Непосредственное обобщение — поток на дифференцируемом многообразии W^m, определяемый («порождаемый») заданным на W^m гладким векторным полем $f(w)$ класса C^k, $k \geqslant 1$ (гладкий поток класса C^k). В этом случае движение точки $S_t w$, пока она находится в пределах одной карты (локальной системы координат), описывается системой вида (*), в правой части к-рой стоят компоненты вектора $f(w)$ в соответствующих координатах. При переходе к другой карте описание движения меняется, поскольку при этом меняются как координаты точки $S_t w$, так и выражения для компонент вектора $f(w)$ как функций локальных координат. См. также *Измеримый поток*, *Непрерывный поток*, *Топологическая динамическая система*.

П. образуют наиболее важный класс динамич. систем, к-рый к тому же первым начал изучаться. Термин «динамическая система» часто употребляют в узком смысле, понимая под ним именно П. (или П. и *каскады*).

Д. В. Аносов.

ПОТОК — понятие интуиционистской математики (см. *Интуиционизм*); совокупность, *вид*, состоящий из конечных *кортежей* натуральных чисел, называемых узлами П. (или допустимыми кортежами П.). Точнее, вид П кортежей натуральных чисел наз. потоком, если выполняются следующие условия: 1) существует эффективное правило a (т. н. закон потока), согласно к-рому для всякого кортежа $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ можно выяснить, является ли он узлом П; 2) пустой кортеж $\langle\ \rangle$ является узлом всякого П.; 3) если кортеж $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ есть узел П, то всякий его начальный кортеж вида $\langle n_1, \ldots, n_i \rangle$ при $i \leqslant m$ также является узлом П; 4) если кортеж $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ есть узел П, то найдется натуральное k такое, что $\langle n_1, \ldots, n_m, k \rangle$ есть узел П.

Если кортежи натуральных чисел упорядочить, считая, что $\tau < \pi$ тогда и только тогда, когда τ есть собственное начало π, то с точки зрения этого порядка поток П представляет собой бесконечное дерево с началом $\langle\ \rangle$, заданное эффективным образом (заданное законом). Свободно становящаяся последовательность α (или, более общо, произвольная эффективная функция, перерабатывающая натуральные числа в натуральные) наз. **элементом потока** П, символически $\alpha \in П$, если для всякого n кортеж $\langle \alpha(0), \ldots, \alpha(n-1) \rangle$ является узлом П. В приложениях встречается также понятие оснащенного П. **Оснащенный поток** Г состоит из потока П и эффективного правила $Г_П$ (т. н. **дополнительного закона** П.), приписывающего каждому узлу π потока П нек-рый объект $Г_П(\pi)$. Каждому элементу потока П при этом естественным образом соответствует последовательность объектов, задаваемых законом $Г_П$.

В языке формального интуиционистского математич. анализа П. задается функцией — своим законом П. С этой целью рассматривается стандартное примитивно рекурсивное взаимно однозначное соответствие между кортежами натуральных чисел и натуральными числами. Пусть при этом кортежу $\langle\ \rangle$ соответствует 0, операция соединения двух кортежей в один задается на их номерах примитивно рекурсивной функцией $x*y$, $\hat{x}$ означает номер кортежа с единственным членом x. Утверждение, что кортеж с номером x является узлом П., задаваемого a, записывается в виде $a(x)=0$. Тогда формула $\mathrm{Spr}(a)$, выражающая понятие «функция a задает П.», записывается в виде

$$a(0)=0 \,\&\, \forall xy\,(a(x*y)=0 \supset a(x)=0) \,\&$$

$$\forall x\,(a(x)=0 \supset \exists y\,(a(x*\hat{y})=0)).$$

Наконец, если через $\bar{\alpha}(n)$ обозначить номер кортежа $\langle \alpha(0), \ldots, \alpha(n-1) \rangle$, где n — длина кортежа, то формула $\alpha \in a$ («α есть элемент П., заданного a») записывается в виде $\forall x a(\bar{\alpha}(x))=0$.

В основаниях математики употребляются также обобщения понятия П., в к-рых используются кортежи не натуральных чисел, а более сложных объектов, напр. кортежи, составленные из свободно становящихся последовательностей.

Лит.: [1] Гейтинг А., Интуиционизм. Введение, пер. с англ., М., 1965. *А. Г. Драгалин.*

ПОТОК В СЕТИ — функция, сопоставляющая дугам данной *сети* (ориентированного графа) нек-рые числа. Каждое число интерпретируется как интенсивность потока нек-рого груза по данной дуге. П. в с. являются удобной моделью при исследовании ряда проблем в транспорте, связи и др. областях, связанных с движением грузов, информации и т. д. Многие задачи о потоках являются задачами линейного программирования и могут решаться общими методами этой теории. Однако в большинстве случаев задачи о потоках допускают эффективное решение методами теории графов.

Пусть каждой дуге (x, y) сети N приписано неотрицательное действительное число $c(x, y)$ — пропускная способность дуги (x, y). Говорят, что поток $f(x, y)$ является стационарным потоком величины v из вершины r в вершину s, удовлетворяющим ограничениям пропускных способностей дуг, если

$$f^-(r)-f^+(r)=v,$$

$$f^-(x)-f^+(x)=0 \text{ при } x \neq r, s,$$

$$f^-(s)-f^+(s)=-v,$$

$$0 \leqslant f(x, y) \leqslant c(x, y) \text{ для любой дуги } (x, y),$$

здесь $f^-(x)=\sum_y f(x, y)$ —поток, выходящий из вершины x, а $f^+(x)=\sum_y f(y, x)$ — поток, входящий в вершину x. В **задаче о максимальном потоке** между двумя вершинами требуется построить стационарный поток из вершины r в вершину s, имеющий максимально возможную величину v. Для решения этой задачи существуют достаточно эффективные алгоритмы. Пусть X — подмножество вершин сети N такое, что

$r \in X$, $s \notin X$. Тогда множество дуг (x, y) таких, что $x \in X$, $y \notin X$, наз. разрезом. Пропускной способностью разреза наз. величина $\sum_{x \in X,\, y \notin X} c(x, y)$. Справедлива следующая теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе: максимальная величина потока равна минимальной пропускной способности разрезов. В приложениях часто используется теорема о целочисленности: если пропускная способность дуг целочисленна, то существует целочисленный максимальный (стационарный) поток.

К задаче о максимальном потоке между двумя вершинами сводится ряд задач: задача о максимальном П. в с. с несколькими источниками и стоками; задача о максимальном П. в с., имеющей неотрицательные ограничения на потоки по дугам как сверху, так и снизу; задача о максимальном потоке в неориентированных и смешанных сетях; задача о максимальном потоке в сети с пропускными способностями дуг и вершин и др.

Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе выявила общую основу ряда результатов, полученных ранее в теории графов и комбинаторике. Оказалось, что как следствия этой теоремы могут быть получены: теорема о максимальном паросочетании в *графе двудольном*, теорема о различных представителях, теоремы о k-связности графов (см. *Графа связность*), теорема о покрытии частично упорядоченного множества наименьшим числом цепей и др. Сведéние различных задач к задаче о максимальном потоке является важным методом теории графов и комбинаторики.

В ряде задач о П. в с. каждой дуге (x, y) сопоставляется число $a(x, y)$ — стоимость перевозки единицы груза по дуге (x, y) и требуется найти поток, удовлетворяющий определенным ограничениям и минимизирующий общую стоимость потока. Задача о потоке минимальной стоимости состоит в нахождении стационарного потока из вершины r в вершину s, удовлетворяющего ограничениям пропускных способностей дуг, причем такого, что величина его равна заданному числу v, а стоимость минимальна.

В транспортной задаче сеть является двудольным графом. Вершины одной доли $S_1, \ldots, S_m$ интерпретируются как пункты отправления нек-рого груза, вершины другой $T_1, \ldots, T_n$ — как пункты назначения. Каждый пункт отправления S_i имеет определенное предложение b_i, и каждый пункт назначения T_j имеет определенный спрос c_j. Известна стоимость a_{ij} перевозки единицы груза из S_i в T_j. Задача состоит в отыскании потока минимальной стоимости, удовлетворяющего спрос во всех пунктах назначения.

Рассматриваются также многопродуктовые потоки и потоки, изменяющиеся во времени.

Лит.: [1] Форд Л.-Р., Фалкерсон Д.-Р., Потоки в сетях, пер. с англ., М., 1966. *В. Б. Алексеев.*

ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ — один из видов сходимости последовательности функций (отображений). Пусть $f_n : X \to Y$, $n=1, 2, \ldots$, где X — нек-рое множество, а Y — топологич. пространство, тогда П. с. означает, что для любого элемента $x \in X$ последовательность точек $y_n = f_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, сходится в пространстве Y. Важным подклассом класса поточечно сходящихся последовательностей являются равномерно сходящиеся последовательности. *Л. Д. Кудрявцев.*

ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ ТОПОЛОГИЯ — одна из топологий пространства $F(X, Y)$ отображений множества X в топологич. пространство Y. Направление $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subset F(X, Y)$ поточечно сходится к $f \in F(X, Y)$, если $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ сходится при любом $x \in X$ к $f(x)$ в топологии пространства Y. Базу окрестностей точки $f_0 \in F(X, Y)$ образуют множества вида $\{f | f(x_i) \subset v_{f_0(x_i)},\ i=1, \ldots, n\}$, где $x_1, \ldots, x_n$ — конечный набор точек из X и

$v_{f_0(x_i)} \in V_{f_0(x_i)}$ — база окрестностей точки $f_0(x_i)$ пространства Y.

Если Y отделимо, то $F(X, Y)$ также отделимо и $A \subset F(X, Y)$ компактно тогда и только тогда, когда при каждом $x \in X$ компактно множество $A_x = \{f(x) | f \in A\}$.

Лит.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981. *В. И. Соболев.*

ПОХГАММЕРА УРАВНЕНИЕ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка вида

$$Q(z) w^{(n)} - \mu Q'(z) w^{(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)}{n!} Q^{(n)}(z) w -$$
$$- \Big[R(z) w^{(n-1)} - (\mu+1) R'(z) w^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)}{(n-1)!} R^{(n-1)}(z) w \Big] = 0,$$

где μ — комплексная постоянная, $Q(z)$, $R(z)$ — многочлены степени $\leqslant n$ и $\leqslant n-1$ соответственно. П. у. было исследовано Л. Похгаммером [1] и К. Жорданом [2].

П. у. проинтегрировано с помощью *Эйлера преобразования*, и его частные решения имеют вид

$$w(z) = \int_\gamma (t-z)^{\mu+n-1} u(t)\, dt, \qquad (*)$$
$$u(t) = \frac{1}{Q(t)} \exp\left[\int^t \frac{R(\tau)}{Q(\tau)} d\tau\right],$$

где γ — нек-рый контур в комплексной плоскости t. Пусть все корни $a_1, \ldots, a_m$ многочлена $Q(z)$ простые и вычеты функции $R(z)/Q(z)$ в этих точках — нецелые числа. Пусть a — фиксированная точка такая, что $Q(a) \neq 0$, и пусть γ_j — простая замкнутая кривая с началом и концом в точке a, положительно ориентированная, к-рая содержит внутри себя только корень a_j, $j = 1, \ldots, m$. Формула (*) дает решение П. у., если

$$\gamma = \gamma_j \gamma_k \gamma_j^{-1} \gamma_k^{-1}, \; j \neq k; \; j, k = 1, \ldots, m;$$

из этих решений ровно m линейно независимы. Для построения остальных решений используются другие контуры, в том числе незамкнутые (см. [3], [4]). Вычислена группа монодромии П. у. (см. [3]).

Частными случаями П. у. являются уравнение Тиссо (см. [4]), то есть П. у., в к-ром

$$Q(z) = \prod_{i=1}^{n-1} (z - a_j), \; R(z) = Q(z)\left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{z - a_j}\right),$$

и *Паппериуа уравнение.*

Лит.: [1] Pochhammer L., «Math. Ann.», 1889, Bd 35, S. 470—94; [2] Jordan C., Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique, 3 éd., t. 3, P., 1915; [3] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Хар., 1939; [4] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

М. В. Федорюк.

ПОЧТИ ВСЮДУ, для почти всех x (относительно меры μ),— выражение, означающее, что речь идет о всех x из измеримого пространства X, за исключением, быть может, нек-рого множества $A \subseteq X$ меры нуль: $\mu(A) = 0$. *В. И. Битюцков.*

ПОЧТИ КОМПЛЕКСНАЯ СТРУКТУРА — поле I линейных преобразований касательных пространств на многообразии M, удовлетворяющее условию

$$I^2 = -id,$$

т. е. поле *комплексных структур* в касательных пространствах T_pM, $p \in M$. П. к.с. I определяет разложение $T^{\mathbb{C}}M = V_+ + V_-$ комплексификации $T^{\mathbb{C}}M$ касательного расслоения в прямую сумму комплексно сопряженных друг другу подрасслоений V_+ и V_-, состоящих из собственных векторов аффинора I (продолженного по линейности на $T^{\mathbb{C}}M$) с собственными значениями i и $-i$

соответственно. Обратно, разложение $T^{\mathbb{C}}M$ в прямую сумму двух взаимно сопряженных векторных подрасслоений S, $\overline{S}$ определяет П. к. с. на M, для которой $V_+ = S$.

П. к. с. I наз. интегрируемой, если она индуцируется комплексной структурой на M, т. е. если существует атлас допустимых карт многообразия M, в к-рых поле I имеет постоянные координаты I^j_k. Необходимое и достаточное условие интегрируемости П. к. с. состоит в инволютивности подрасслоения V_+, т. е. замкнутости пространства его сечений относительно коммутирования (комплексных) векторных полей. Условие инволютивности подрасслоения V_+ равносильно обращению в нуль ассоциированной с I векторнозначной 2-формы $N(I, I)$, задаваемой формулой

$$N(I, I)(X, Y) = [IX, IY] - I[X, IY] - I[I, XY] - - [X, Y],$$

где X, Y — векторные поля. Эта форма наз. тензором кручения, или тензором Нейенхейса, П. к. с. Тензор Нейенхейса $N(I, I)$ можно рассматривать как дифференцирование степени 1 алгебры дифференциальных форм на M, имеющее вид

$$N(I, I) = [I, [I, d]] + d,$$

где d — внешний дифференциал, а I рассматривается как дифференцирование степени 0.

С точки зрения теории G-структур П. к. с. представляет из себя $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$-структуру, где $m = {}^1/_2 \dim M$, а тензор кручения $N(I, I)$ — тензор, определяемый первой структурной функцией этой структуры. $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$-структура является структурой эллиптич. типа, и поэтому алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов П. к. с. удовлетворяет эллиптич. системе дифференциальных уравнений 2-го порядка [1]. В частности, алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов П. к. с. на компактном многообразии конечномерна, а группа G всех автоморфизмов компактного многообразия с П. к. с. является группой Ли. Для некомпактных многообразий это, вообще говоря, не так.

Если группа автоморфизмов G транзитивна на многообразии M, то П. к. с. I однозначно определяется своим значением I_p в фиксированной точке $p \in M$, к-рое представляет из себя инвариантную относительно представления изотропии комплексную структуру в касательном пространстве T_pM (см. *Инвариантный объект* на однородном пространстве). Методы теории групп Ли позволяют построить широкий класс однородных пространств, обладающих инвариантной П. к. с. (как интегрируемой, так и неинтегрируемой) и при тех или иных предположениях классифицировать инвариантные П. к. с. (см. [2]). Напр., любое факторпространство G/H группы Ли G по подгруппе H, состоящей из неподвижных точек автоморфизма нечетного порядка группы Ли G, обладает инвариантной П. к. с. Примером является 6-мерная сфера S^6, рассматриваемая как однородное пространство $G_2/\mathrm{SU}(3)$; ни одна из инвариантных П. к. с. на S^6 не является интегрируемой.

Наличие на многообразии П. к. с. накладывает нек-рые ограничения на его топологию — оно должно быть четномерным, ориентируемым, а в компактном случае все его нечетномерные классы Штифеля — Уитни должны быть равны нулю. Среди сфер П. к. с. допускают только сферы размерностей 2 и 6.

Лит.: [1] Kobayashi S., Transformation groups in differential geometry, B.—[u.a.], 1972; [2] Комраков Б. П., Структуры на многообразиях и однородные пространства, Минск, 1978; [3] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [4] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [5] Хермандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968. *Д. В. Алексеевский.*

ПОЧТИ ПЕРИОД — понятие теории *почти периодических функций*, являющееся обобщением понятия периода. Для равномерной почти периодич. функции $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, число $\tau=\tau_f(\varepsilon)$ наз. ε-п о ч т и п е р и о д о м функции $f(x)$, если для всех x выполняется неравенство

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon.$$

Для обобщенных почти периодич. функций понятие П. п. определяется сложнее. Напр., в пространстве S_l^p функций Степанова ε-почти период τ определяется неравенством

$$D_{S_l^p}[f(x+\tau)-f(x)]<\varepsilon,$$

где $D_{S_l^p}[f, \varphi]$ — расстояние между функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$ в метрике пространства S_l^p.

Множество П. п. функции $f(x)$ наз. о т н о с и т е л ь н о п л о т н ы м, если существует число $L=L(\varepsilon, f)>0$ такое, что в каждом интервале $(\alpha, \alpha+L)$ действительной оси найдется хотя бы одно число этого множества. Определение равномерных почти периодич. функций и почти периодич. функций по Степанову может быть основано на требовании существования относительно плотных множеств ε-почти периодов у этих функций.

Лит.: [1] Л е в и т а н Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953.

Е. А. Бредихина.

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция, к-рая может быть представлена обобщенным рядом Фурье. Существуют различные способы определения классов П. п. ф., основанные на понятиях замыкания, почти периода, сдвига. Каждый из классов П. п. ф. получается в результате замыкания в том или ином смысле одной и той же совокупности конечных тригонометрич. сумм.

Пусть $D_G[f(x), \varphi(x)]$ — расстояние между функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$ в метрич. пространстве G. Далее в качестве G рассматривается одно из пространств U, S_l^p, W^p, B^p, где U — совокупность непрерывных ограниченных на действительной оси функций с метрикой

$$D_U[f(x), \varphi(x)]=\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)-\varphi(x)|;$$

S_l^p, W^p, B^p — совокупности функций, измеримых и суммируемых со степенью p, $p\geqslant 1$, в каждом конечном интервале действительной оси с метриками:

$$D_{S_l^p}[f(x), \varphi(x)]=$$

$$=\sup_{-\infty<x<\infty}\left[\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f(x)-\varphi(x)|^p\,dx\right]^{1/p},$$

$$D_{W^p}[f(x), \varphi(x)]=\lim_{l\to\infty}D_{S_l^p}[f(x), \varphi(x)],$$

$$D_{B^p}[f(x), \varphi(x)]=\left[\overline{\lim_{\tau\to\infty}}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}|f(x)-\varphi(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Пусть T — множество тригонометрич. полиномов вида

$$\sum_{k=1}^{N}a_k e^{i\lambda_k x},$$

где λ_k — любые действительные числа, a_k — комплексные коэффициенты. Через $H_G(T)$ обозначается замыкание в пространстве G множества T. Классы $H_U(T)=$ $=U$-п. п., $H_{S_l^p}(T)=S_l^p$-п. п., $H_{W^p}(T)=W^p$-п. п., $H_{B^p}=B^p$-п. п. наз. соответственно классами равномерных П. п. ф., или *Бора почти периодических функций*, *Степанова почти периодических функций*, *Вейля почти периодических функций*, *Безиковича почти периодических функций*. Все определенные выше классы П. п. ф. инварианты относительно сложения. Вместе с $f(x)$ в каждый класс входит $\overline{f}(x)$, $|f(x)|$ и произведение

$f(x)e^{i\lambda x}$, где λ — действительное число. Расстояния $D_{S_l^p}[f(x), \varphi(x)]$ при различных значениях l топологически эквивалентны, и потому можно считать $l=1$. Пусть S_1^p-п. п.$=S^p$-п. п., S^1-п. п.$=S$-п. п., B^1-п. п.$=B$-п. п., тогда имеют место включения

$$U\text{-п.п}\subset S^p\text{-п.п}\subset W^p\text{-п.п}\subset B^p\text{-п.п.},\ p\geqslant 1;$$

и, если $p_1<p_2$, $p_1\geqslant 1$,

$$S^{p_2}\text{-п.п}\subset S^{p_1}\text{-п.п.},\quad W^{p_2}\text{-п.п.}\subset W^{p_1}\text{-п.п},$$
$$B^{p_2}\text{-п.п.}\subset B^{p_1}\text{-п.п.}$$

Для каждой $f(x)\in B$-п. п. существует среднее значение

$$M\{f(x)\}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(x)\,dx;$$

функция $a(\lambda, f)=M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$, где λ — действительное число, может отличаться от нуля не более чем на счетном множестве значений λ; в результате нумерации в произвольном порядке получается последовательность $\{\lambda_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, показателей Фурье функции $f(x)$.

Числа $A_{\lambda_k}=a(\lambda_k, f)$ наз. коэффициентами Фурье функции $f(x)$. П. п. ф. $f(x)$ любого определенного выше класса соответствует ряд Фурье вида

$$f(x)\sim\sum_k A_{\lambda_k}e^{i\lambda_k x}.$$

Для $f(x)\in B^2$-п. п. имеет место равенство Парсеваля

$$M\{|f(x)|^2\}=\sum_k |A_{\lambda_k}|^2.$$

В классе B^p-п. п. обобщается теорема Рисса — Фишера: пусть $\{\lambda_k\}$, $k=1, 2, \ldots$,— произвольные действительные числа, $\{A_k\}$, $k=1, 2, \ldots$,— комплексные числа, для к-рых $\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|^2<\infty$, тогда существует $f(x)\in B^2$-п. п., для к-рой тригонометрич. ряд $\sum_k A_k e^{i\lambda_k x}$ является ее рядом Фурье.

Теорема единственности понимается в следующем смысле: если две функции $f(x)\in H_G(T)$ и $\varphi(x)\in H_G(T)$ имеют один и тот же ряд Фурье, то выполняется равенство

$$D_G[f(x), \varphi(x)]=0.$$

В частности, для равномерных П. п. ф. теорема единственности означает, что $f(x)=\varphi(x)$ (для П. п. ф. Степанова — почти всюду). Теорема единственности, понимаемая в том же смысле, что и для рядов Фурье — Лебега 2π-периодических функций, не имеет места для П. п. ф. Вейля — Безиковича.

Классы равномерных П. п. ф. и П. п. ф. Степанова являются соответственно нетривиальными расширениями класса непрерывных на всей числовой оси и суммируемых на $[0,2\pi]$ 2π-периодических функций. Для этих классов П. п. ф. сохраняется теорема единственности.

Другие, менее формальные определения П. п. ф. рассматриваемых классов опираются на понятие *почти периода* и на обобщения этого понятия.

Следствием определения классов П. п. ф. через понятие замыкания является теорема аппроксимации: для каждой П. п. ф. $f(x)$ из U (или S^p, W^p) и каждого $\varepsilon>0$ можно указать конечный тригонометрич. полином $P(x)$ из множества T, удовлетворяющий неравенству

$$D_U[f(x), P(x)]<\varepsilon$$

$$(D_{S^p}[f(x), P(x)]<\varepsilon,\ D_{W^p}[f(x), P(x)]<\varepsilon).$$

Теорема аппроксимации может служить отправным пунктом определения различных классов П. п. ф. При этом аппроксимирующие полиномы $P(x)$ могут содержать «посторонние», т. е. отличные от показателей Фурье функции $f(x)$, показатели. Однако для нек-рых приложений теоремы аппроксимации важен тот факт, что можно совершенно избежать введения в $P(x)$ показателей, отличных от показателей Фурье функции $f(x)$.

В связи с представимостью П. п. ф. обобщенными рядами Фурье возникает вопрос о признаках сходимости для этих рядов и приобретают значение разнообразные методы суммирования обобщенных рядов Фурье (метод Бохнера — Фейера и др.). Так, получены признак абсолютной сходимости обобщенных рядов Фурье с линейно независимыми показателями Фурье, признак равномерной сходимости рядов Фурье, когда $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$, и аналогичный признак в случае, когда $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Значение признаков равномерной сходимости в теории П. п. ф. подчеркивается следующей теоремой: если тригонометрич. ряд $\sum_k a_k e^{i\lambda_k x}$ сходится равномерно на всей действительной оси, то он является рядом Фурье своей суммы $S(x) \subset U$-п. п. Следствие: существуют равномерные П. п. ф. с произвольным счетным множеством показателей Фурье. В частности, показатели Фурье равномерной П. п. ф. могут иметь предельные точки на конечном расстоянии или даже располагаться всюду плотно.

Кроме понятия замыкания или почти периода, для определения П. п. ф. можно использовать понятие сдвига. Так, функция $f(x)$ будет равномерной П. п. ф. тогда и только тогда, когда из каждой бесконечной последовательности функций $f(x+h_1)$, $f(x+h_2)$, ..., где сдвиги h_1, h_2, ...— произвольные действительные числа, можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Это определение служит отправной точкой при рассмотрении П. п. ф. на группах.

Основные факты теории П. п. ф. остаются справедливыми и в том случае, если рассматривать понятие обобщенного сдвига. Возможны и полезны другие обобщения: П. п. ф. со значениями в евклидовом n-мерном пространстве, в банаховом или метрич. пространстве, аналитические и гармонические П. п. ф.

Лит.: [1] Бор Г., Почти периодические функции, пер. с нем., М.— Л., 1934; [2] Besicovitch A. S., Almost periodic functions, Camb., 1932; [3] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953; [4] Купцов Н. П., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 4, с. 117—78; [5] Rudin W., Fourier analysis on groups, N.Y.—L., 1962; [6] Левитан Б. М., Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения, М., 1962; [7] Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С., Нелинейные почти периодические колебания, М., 1970.

Е. А. Бредихина.

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ — аналитическая функция $f(s)$, $s=\sigma+i\tau$, регулярная в полосе $-\infty \leqslant \alpha < \sigma < \beta \leqslant +\infty$ и разложимая в ряд вида

$$\sum a_n e^{i\lambda_n s},$$

где a_n — комплексные, λ_n — действительные числа. Действительное число τ наз. ε-почти периодом функции $f(s)$, если во всех точках полосы (α, β) выполняется неравенство

$$|f(s+i\tau)-f(s)| < \varepsilon.$$

П. п. ф. а.— аналитическая функция, регулярная в полосе (α, β) и обладающая для каждого $\varepsilon>0$ относительно плотным множеством ε-почти периодов. Аналогично определяется П. п. ф. а. в замкнутой полосе $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$. П. п. ф. а. в полосе $[\alpha, \beta]$ на каждой прямой полосы является равномерной почти периодич. функцией от действительного переменного τ, она ограничена в $[\alpha, \beta]$, т. е. в любой внутренней полосе. Если функция

$f(s)$, регулярная в полосе (α, β), является равномерной почти периодич. функцией хотя бы на одной единственной прямой $\sigma=\sigma_0$ этой полосы, то ограниченность $f(s)$ в $[\alpha, \beta]$ влечет за собой ее почти периодичность во всей полосе $[\alpha, \beta]$. В результате теория П. п. ф. а. оказывается в основе своей аналогичной теории *почти периодических функций* от действительного переменного. Поэтому на П. п. ф. а. легко переносятся многие важные факты последней теории: теорема единственности, равенство Парсеваля, правила действий над рядами Дирихле, аппроксимационная теорема и ряд др. теорем.

Лит.: [1] Бор Г., Почти периодические функции, пер. с нем., М.— Л., 1934; [2] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953. *Е. А. Бредихина.*

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ НА ГРУППЕ — обобщение почти периодич. функций, заданных на $\mathbb{R}^1$.

Пусть G — (абстрактная) группа. Комплекснозначная функция $f(x)$, $x \in G$, наз. правой почти периодической функцией (п. п. ф.), если семейство $f(xa)$, где a пробегает всю группу G, компактно в смысле равномерной сходимости на G, т. е. из каждой последовательности $f(xa_1)$, $f(xa_2)$, ... можно выделить равномерно на G сходящуюся подпоследовательность. Аналогично определяются левая почти периодическая функция на группе G. Оказывается, что всякая правая (левая) п. п. ф. является одновременно левой (правой) п. п. ф., и имеет место компактность семейства $f(axb)$, где a, b независимо пробегают группу G. Последнее свойство часто принимается в качестве определения п. п. ф. на G. Совокупность всех п. п. ф. на G есть банахово пространство с нормой $\|f\|=\sup\limits_{x \in G}|f(x)|$.

Теория п. п. ф. на группе существенно опирается на теорему о среднем значении (см. [5], [8]). Линейный функционал $M_x\{f(x)\}$, заданный на пространстве всех п. п. ф., наз. средним значением, если

1) $M_x\{1\}=1$, $M_x\{f(x)\}\geqslant 0$ для $f(x)\geqslant 0$ и $M_x\{f(x)\}>0$ для $f\not\equiv 0$;

2) $M_x\{f(xa)\}=M_x\{f(ax)\}=M_x\{f(x^{-1})\}$.

Унитарная матрица $g(x)=\{g_{ij}(x)\}_{i,\,j=1}^r$, заданная на G, наз. унитарным представлением группы G, если $g(e)=I_r$ (e — единица группы G, I_r — единичная матрица порядка r) и для любых элементов x, $y \in G$ имеет место равенство $g(xy)=g(x)g(y)$. Число r наз. размерностью представления g. Матричные элементы $g_{ij}(x)$ суть п. п. ф. на G. В теории п. п. ф. на группе они играют ту же роль, что и функции $\exp(i\lambda x)$ в теории п. п. ф. на прямой $\mathbb{R}^1$.

Два представления $g(x)$ и $g'(x)$ наз. эквивалентными, если существует такая постоянная матрица A, что $g'(x)=A^{-1}g(x)A$. Представление g наз. неприводимым, если семейство матриц $g(x)$, $x \in G$, не имеет общего нетривиального инвариантного подпространства в $\mathbb{R}^r$. Множество всех неприводимых унитарных представлений разбивается на классы эквивалентных между собой представлений. Пусть из каждого класса эквивалентных представлений выбрано по одному представлению и полученное множество обозначено S. Тогда множество п. п. ф. на G

$$H=\{\varphi_\lambda(x)\}=\{\varphi,\ \varphi=g_{ij},\ g \in S\}$$

оказывается ортогональной (хотя, вообще говоря, несчетной) системой.

Теорема 1 (равенство Парсеваля). Если для п. п. ф. $f(x)$ положить

$$f \sim \sum \varphi_\lambda \frac{M_x\{f(x)\overline{\varphi_\lambda}(x)\}}{M_x^{1/2}\{|\varphi_\lambda(x)|^2\}},$$

то

$$M_x\{|f(x)|^2\}=\sum\frac{|M_x\{f(x)\overline{\varphi_\lambda(x)}\}|^2}{M_x\{|\varphi_\lambda(x)|^2\}}.$$

Говорят, что представление $g\in S$ входит в ряд Фурье п. п. ф. $f(x)$, если $M_x\{f(x)\overline{g}_{ij}(x)\}\neq 0$ для нек-рых i, j, $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant r$.

Теорема 2 (теорема аппроксимации). Множество H плотно в пространстве п. п. ф., наделенном нормой

$$\|f\|=\sup_{x\in G}|f(x)|,$$

причем каждую п. п. ф. можно сколь угодно близко аппроксимировать конечной линейной комбинацией матричных элементов представлений, входящих в ее ряд Фурье.

Если G — топологич. группа, то к определению п. п. ф. нужно добавить требование ее непрерывности. В этом случае и представления, входящие в ее ряд Фурье, также будут непрерывными.

В случае, когда группа G абелева, непрерывные унитарные представления одномерны — они наз. характерами группы G. Характеры группы G обозначаются через χ, и равенство Парсеваля таково:

$$M_x\{|f(x)|^2\}=\sum_n|a_n|^2,\ a_n=M_x\{f(x)\overline{\chi_n}(x)\}.$$

В случае $G=\mathbb{R}^n$ непрерывными характерами являются функции $\chi(x)=\exp(i\lambda\cdot x)$, где $\lambda\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\cdot x=\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n$. Из теорем 1, 2 следуют основные результаты теории п. п. ф. одного и многих переменных.

Доказательство основных положений теории п. п. ф. опирается на рассмотрение интегральных уравнений на группе (см. [2]). Доказано [3] существование достаточной системы линейных представлений компактных групп Ли. В этом случае инвариантное интегрирование (а значит, и среднее) устанавливается непосредственно. Построено [4] инвариантное интегрирование на абстрактной компактной группе, обусловливающее распространение на этот случай теории Петера — Вейля.

Теорию п. п. ф. на группе можно вывести (см. [3]) из теории Петера — Вейля следующим образом. Пусть $f(x)$ — п. п. ф. на группе G и пусть

$$\rho(x, y)=\sup_{a,\, b\in G}|f(axb)-f(ayb)|,$$

тогда множество $E=\{t\in G, \rho(t, e)=0\}$ есть нормальный делитель группы G, а ρ — инвариантная метрика на факторгруппе G/E и f равномерно непрерывна на G/E.

Из почти периодичности функции $f(x)$ следует, что пополнение факторгруппы G/E по метрике ρ есть компактная группа, и теоремы 1, 2 следуют из теории Петера — Вейля.

Лит.: [1] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953; [2] Weyl H., «Math. Ann.», 1926, Bd 97, S. 338—56; [3] Peter F., Weyl H., там же, 1927, Bd 97, S. 737—55; [4] Neumann J. von, «Comp. math.», 1934, v. 1, № 1, p. 106—14; [5] его же, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1934, v. 36, p. 445—92; [6] Weil A., «C. r. Acad. sci.», 1935, v. 200, p. 38—40; [7] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [8] Maak W., Fast periodische Funktionen, B., 1950.

В. В. Жиков, Б. М. Левитан.

ПОЧТИ ПРИВОДИМАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА обыкновенных дифференциальных уравнений — система

$$\dot{x}=A(t)x,\ x\in\mathbb{R}^n,$$
$$A(\cdot):\mathbb{R}\longrightarrow\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \qquad (*)$$

обладающая свойством: найдется система с постоянными коэффициентами $\dot{y}=By$, $y\in\mathbb{R}^n$, и для каждого $\varepsilon>0$ найдется *Ляпунова преобразование* $L_\varepsilon(t)$ такие, что в результате замены $x=L_\varepsilon(t)y$ система (*) переходит в систему

$$\dot{y}=(B+C_\varepsilon(t))\,y,$$

где

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|C_\varepsilon(t)\|<\varepsilon.$$

Всякая *приводимая линейная система* почти приводима.

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146. *В. М. Миллионщиков.*

ПОЧТИ ПРОСТОЕ ЧИСЛО — натуральное число n, имеющее вид

$$n=p_1p_2\,\ldots\,p_k,$$

где p_i — простые числа, а $k\geqslant 1$ — константа. Простые числа являются частным случаем П. п. ч. при $k=1$. Для П. п. ч. имеют место теоремы, обобщающие теорему о распределении простых чисел в натуральном ряду. Ряд *аддитивных проблем*, к-рые еще не решены в простых числах, решаются в П. п. ч. *Б. М. Бредихин.*

ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА — невырожденная дифференциальная 2-форма на многообразии. П. с. с. Ω может существовать только на четномерном многообразии M ($\dim M=2m$) и определяет $Sp(m,\mathbb{R})$-структуру $B_{Sp(m,\mathbb{R})}$, а именно главное расслоение реперов на M со структурной группой $Sp(m,\mathbb{R})$, состоящее из всех реперов $r=\{e_i, f_i, i=1, \ldots, m\}$, для к-рых

$$\Omega(e_i, e_j)=\Omega(f_i, f_j)=0,\ \Omega(e_i\ f_j)=\delta_{ij}.$$

Необходимое и достаточное условие существования на многообразии M П. с. с. (так же, как и почти комплексной структуры) состоит в возможности редукции структурной группы касательного расслоения к унитарной группе $U(m)$. Для этого, в частности, необходимо обращение в нуль всех нечетномерных классов Штифеля — Уитни многообразия M (см. [1]).

Почти комплексная структура J и риманова метрика g на многообразии M определяют П. с. с. Ω по формуле

$$\Omega(X, Y)=g(JX, Y)-g(X, JY),$$

где X, Y — векторы, и любая П. с. с. может быть получена таким образом. П. с. с. Ω наз. интегрируемой или, иначе, симплектической структурой, если в окрестности любой точки в нек-рых локальных координатах x^i, y^i, $i=1, \ldots, m$, она приводится к виду $\Omega=\Sigma dx^i\wedge dy^i$. Согласно теореме Дарбу для этого необходимо и достаточно, чтобы форма Ω была замкнута. Пример интегрируемой П. с. с. — каноническая симплектич. структура $\Omega=\Sigma dp_i\wedge dq^i$ на кокасательном расслоении T^*M произвольного многообразия M (здесь q^i — локальные координаты многообразия M, p_i — соответствующие координаты в слое). Примером неинтегрируемой П. с. с. является левоинвариантная 2-форма на полупростой группе Ли G, получающаяся разнесением левыми сдвигами произвольной невырожденной внешней 2-формы на соответствующей группе G алгебре Ли. Так же, как и риманова метрика, П. с. с. определяет изоморфизм касательных и кокасательных пространств (а тем самым и пространств контравариантных и ковариантных тензоров), а также каноническую $2m$-форму объема $\eta=1/m!\Omega^m$ и ряд операторов в пространстве $\Lambda(M)$ дифференциальных форм: оператор ε_Ω внешнего умножения на Ω; оператор i_Ω внутреннего умножения на Ω; оператор звездочки Ходжа $*:\Lambda^p(M)\to\Lambda^{2m-p}(M)$, $\omega\to i_\omega\eta$, где оператор i_ω внутреннего умножения определяется как свертка данной формы с p-вектором, соответствующим p-форме ω; оператор кодифференцирования $\delta=*d*$. В отличие от риманова случая оператор $\Delta=d\delta+\delta d$ оказывается кососимметрич. относительно глобального скалярного произведения $\langle\alpha, \beta\rangle = \int_M \alpha\wedge *\beta$ в пространстве p-форм на компактном многообразии M. Для произвольной p-формы имеет место разложение Ходжа — Лепажа $\omega=\omega_0+\varepsilon_\Omega\omega_1+\varepsilon_\Omega^2\omega_2+\ldots$, где $\omega_i\in\Lambda^{p-2i}(M)$ — однозначно определенные эффективные (т. е. аннулируемые оператором i_Ω) формы [3].

П. с. с. наз. конформно плоской, если существует такая функция $\lambda>0$, что $d(\lambda\Omega)=0$. Это эквивалентно представимости формы Ω в виде:

$$\Omega=y^1\sum_{i=1}^m dx^i\wedge dy^i.$$

При $m=2$ необходимым и достаточным условием того, чтобы П. с. с. Ω была конформно плоской, является замкнутость 1-формы $\delta\Omega=i_\Omega d\Omega$, а при $m>2$ — выполнение равенства $d\Omega=(1/m-1)\,\delta\Omega\wedge\Omega$ (см. [1]).

Тензор T типа (1, 2), соответствующий 3-форме $d\Omega$ и определяемый равенством $\Omega(T_XY, Z)=d\Omega(X, Y, Z)$, где X, Y, Z — векторы, наз. тензором кручения П. с. с. Ω. С ним ассоциируется, вообще говоря, вырожденная метрика $g(X, Y)=\mathrm{tr}\, T_XT_Y$. С произвольной П. с. с. связывается класс линейных связностей ∇, аннулирующих форму Ω и имеющих тензор T своим тензором кручения. Две такие связности отличаются на тензорное поле вида $\Omega^{ij}S_{jkl}$, где S_{jkl} — произвольное симметрическое тензорное поле. Рассматриваемые связности взаимно однозначно соответствуют сечениям первого продолжения $B^1\to B$ для $Sp(m, \mathbb{R})$-структуры $B=B_{Sp(m,\ \mathbb{R})}$, являющегося главным расслоением реперов на B со структурной группой $S^3(\mathbb{R}^{2m})$ (векторной группой однородных полиномов третьей степени от $2m$ переменных). $Sp(m, \mathbb{R})$-структура является G-структурой бесконечного типа. Поэтому группа автоморфизмов П. с. с. может быть бесконечномерной. В частности, группа автоморфизмов симплектич. структуры всегда бесконечномерна и является k-транзитивной группой для любого $k>0$.

Лит.: [1] Libermann P., «Bull. Soc. Math. France», 1955, t. 83, p. 195—224; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974, с. 153—207; [3] Лычагин В. В., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, № 1, с. 137—165; [4] Kobayashi Sh., Transformation groups in differential geometry, B.—[a.o.], 1972. *Д. В. Алексеевский.*

ПОЧТИКОЛЬЦО — одно из обобщений понятия ассоциативного кольца. П.— это *кольцоид* над группой, т. е. универсальная алгебра, в к-рой имеется ассоциативная операция умножения и операция сложения; относительно сложения П. должно быть группой (не обязательно коммутативной), причем должен также выполняться правый закон дистрибутивности:

$$x(y+z)=xy+xz.$$

П. являются также частным случаем *мультиоператорных групп.*

Примерами П. являются множества $M_S(\Gamma)$ всех отображений группы Γ в себя, перестановочных с действием фиксированной полугруппы эндоморфизмов S группы Γ. Групповые операции в $M_S(\Gamma)$ вводятся поточечно, умножением в $M_S(\Gamma)$ является композиция отображений. Почтикольцо $M_S(\Gamma)$ является аналогом кольца матриц. Обычным образом вводятся понятия подпочтикольца, идеала, правого модуля над П.

Пусть N_0 (соответственно N_c) — многообразие П., задаваемое тождеством $0x=0$ (соответственно $0x=x$). Любое почтикольцо A разлагается в сумму подпочтиколец $A=A_0+A_c$, где $A_0\in N_0$, $A_c\in N_c$, причем $A_0\cap A_c=0$. Циклический правый A-модуль M наз. примитивным типа 0, если M прост, примитивным типа 1, если либо $xA=0$, либо $xA=M$ для любого $x\in M$, и примитивным типа 2, если M является простым A_0-модулем. Почтикольцо A наз.

примитивным типа ν ($\nu=0, 1, 2$), если существует точный простой A-модуль Γ типа ν. При этом возникает плотное вложение почтикольца A в $M_S(\Gamma)$ для нек-рой полугруппы эндоморфизмов S группы Γ. Для 2-примитивных почтиколец A с единицей и условием минимальности для правых идеалов в A_0 имеет место равенство $A=M_S(\Gamma)$ (аналог теоремы Веддерберна — Артина). Для каждого $\nu=0, 1, 2$ вводится понятие **радикала Джекобсона типа** ν, обозначаемого $J_\nu(A)$, он определяется как пересечение аннуляторов ν-примитивных A-модулей. Радикал $J_{1/2}(A)$ определяется как пересечение максимальных правых модулярных идеалов. Все четыре радикала различны, причем

$$J_0(A) \subseteq J_{1/2}(A) \subseteq J_1(A) \subseteq J_2(A).$$

Оказывается, что эти радикалы обладают многими свойствами радикала Джекобсона ассоциативных колец (см. [4]).

Для П. справедлив аналог теоремы Оре о почтикольцах частных [4].

Дистрибутивно порожденным почтикольцом наз. П., аддитивная группа к-рого порождается такими элементами x, что

$$(y+z)\,x=yx+zx$$

для всех y, z из П. Все дистрибутивно порожденные П. порождают многообразие N_0. Для конечных дистрибутивно порожденных П. понятия 1- и 2-примитивности совпадают; 1-примитивные дистрибутивно порожденные П. имеют вид $M_0(\Gamma)$ для нек-рой группы Γ. В дистрибутивно порожденном П., с тождеством

$$(xy-yx)^{n\,(x,\,y)}=xy-yx,\ n\,(x,\ y)>1,$$

умножение коммутативно (см. [3], [4]).

Каждое П. из N_0, не содержащее нильпотентных элементов, является подпрямым произведением П. без делителей нуля [4]. Почтиалгебра A разлагается в прямую сумму простых П. тогда и только тогда, когда а) она удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов, б) в A нет идеалов с нулевым умножением, в) аннулятор любого минимального идеала максимален [1].

Для П. получены результаты, аналогичные результатам о строении регулярных колец [2], о почтикольцах частных [5]. П. имеют приложения к изучению групп подстановок, блок-схем, проективной геометрии [4].

Лит.: [1] Bell H. E., «Canad. Math. Bull.», 1977, v. 20, № 1, p. 25—28; [2] Heatherly H. E., «J. Indian Math. Soc.», 1974, v. 38, p. 345—54; [3] Ligh S., «J. London Math. Soc.», 1975, v. 12, pt. 1, p. 27—31; [4] Pilz G., Near-rings, Amst., 1977; [5] Oswald A., «Proc. Edinburgh Math. Soc.», 1979, v. 22, № 2, p. 77—86; [6] Полин С. В., в кн.: Кольца, Новосиб., 1973, с. 41—45. *В. А. Артамонов.*

ПОЯС, линк, симплекса σ триангуляции T — совокупность $\ln(\sigma,\ T)$ тех симплексов из замкнутой звезды $\mathrm{St}(\sigma,\ T)$ (объединения симплексов T, содержащих σ), к-рые не пересекают σ. *М. И. Войцеховский.*

ПРАВАЯ ГРУППА — полугруппа, простая справа (см. *Простая полугруппа*) и удовлетворяющая левостороннему закону сокращения. Всякая П. г. является *вполне простой полугруппой.* Свойство полугруппы S быть П. г. эквивалентно любому из следующих условий: а) S проста справа и содержит идемпотент, б) S регулярна и удовлетворяет левостороннему закону сокращения, в) S обладает разбиением на левые идеалы, являющиеся (необходимо изоморфными) группами, г) S есть прямое произведение группы и полугруппы правых нулей (см. *Идемпотентов полугруппа*). Симметричным к понятию П. г. является понятие **левой группы.** Группы и только они суть одновременно П. г. и левые группы. Всякая вполне простая полугруппа обладает разбиением на правые (левые) идеалы, являющиеся (необходимо изоморфными) правыми (левыми) группами.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972.

Л. Н. Шеврин.

ПРАВДОПОДОБИЯ УРАВНЕНИЕ — уравнение, к-рое составляют при нахождении статистич. оценок неизвестных параметров по *максимального правдоподобия методу*. Пусть X — случайный вектор, плотность вероятности к-рого $p(x|\theta)$ содержит неизвестный параметр $\theta \in \Theta$. Тогда уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(X \mid \theta) = 0$$

наз. уравнением правдоподобия, а его решение $\hat{\theta}$ — оценкой максимального (наибольшего) правдоподобия для параметра θ. В нек-рых случаях П. у. решается элементарно, но в основном П. у. представляет собой алгебраическое или трансцендентное уравнение, для решения к-рого пользуются методом последовательных приближений.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

М. С. Никулин.

ПРАВИЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — интерпретация формальной системы, при к-рой все аксиомы истинны или принимают значение «истина» при всех значениях ее параметров, а правила вывода сохраняют свойство принимать значение «истина». Данное определение относится к двузначным логич. исчислениям. Если истинностных значений больше и нек-рые из них отмечены, то в определении П. и. вместо слов «принимать значение „истина“» надо использовать слова «принимать отмеченные значения». Если приведенное свойство интерпретации не выполняется, то она наз. неправильной. П. и. для формальных систем, получающихся добавлением к узкому исчислению предикатов какого-то множества аксиом T, наз. также моделями системы аксиом T или моделями для T. Произвольные интерпретации для таких формальных систем наз. алгебраич. системами или просто моделями.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960.

В. Н. Гришин.

ПРАВИЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА обыкновенных дифференциальных уравнений — система вида

$$\dot{x} = A(t)\,x,\ x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

(где $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $\mathbb{R}^+ \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$), обладающая свойством:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau$$

существует и равен $\sum_{i=1}^n \lambda_i(A)$, где $\lambda_1(A) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(A)$ — *Ляпунова характеристические показатели* системы (1).

Для того чтобы треугольная система

$$\dot{u}^i = \sum_{j=i}^n p_{ij}(t)\, u^j,\ i = 1, \ldots, n,$$

была правильной, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_{ii}(\tau)\, d\tau,\ i = 1, \ldots, n$$

(критерий Ляпунова). Всякая *приводимая линейная система* и всякая *почти приводимая линейная система* являются правильными.

Роль понятия П. л. с. проясняется на следующей теореме Ляпунова. Пусть система (1) правильная и k ее характеристич. показателей Ляпунова отрицательны:

$$0 > \lambda_{n-k+1}(A) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(A).$$

Тогда для всякой системы

$$\dot{x} = A(t)\,x + g(t, x), \tag{2}$$

где $g(t, x)$ удовлетворяет следующим условиям: g, g_x' непрерывны, $g(0, t) \equiv 0$, $\|g_x'(x, t)\| = O(|x|^\varepsilon)$, где $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$, найдется k-мерное многообразие $V^k \subset \mathbb{R}^n$, содержащее точку $x = 0$, такое, что всякое решение $x(t)$ системы (2), начинающееся на V^k (то есть $x(0) \in V^k$), экспоненциально убывает при $t \to +\infty$, точнее — удовлетворяет неравенству

$$|x(t)| \leqslant C_\delta e^{[\lambda_{n-k+1}(A)+\delta]\,t}\, |x(0)|$$

(для всякого $\delta > 0$ при нек-ром C_δ).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Хар., 1892 (то же, в кн.: Собр. соч., т. 2, М.—Л., 1956); [2] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [3] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146.

В. М. Миллионщиков.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ, тела Платона,— выпуклые многогранники, все грани к-рых

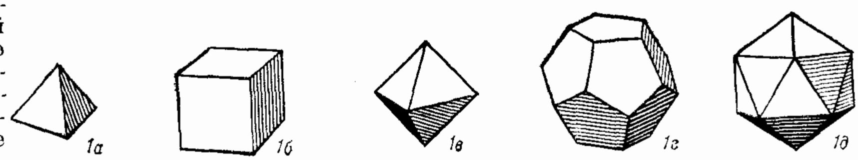


Рис. 1.

суть одинаковые правильные многоугольники и все многогранные углы при вершинах правильные и равные (рис. 1а—1д).

В евклидовом пространстве E^3 существуют пять П. м., данные о к-рых приведены в табл. 1, где символ Шлефли $\{p, q\}$ (см. *Многогранника группа*) обозначает П. м. с p-угольными гранями и q-гранными углами.

Табл. 1.—Правильные (выпуклые) многогранники в E^3

	Рис.	Символ Шлефли	Число вершин	Число ребер	Число граней
Тетраэдр	1а	{3, 3}	4	6	4
Куб (гексаэдр)	1б	{4, 3}	8	12	6
Октаэдр	1в	{3, 4}	6	12	8
Додекаэдр	1г	{5, 3}	20	30	12
Икосаэдр	1д	{3, 5}	12	30	20

Двойственными многогранниками $\{p, q\}$ и $\{q, p\}$ наз. такие, к-рые переходят друг в друга при полярном преобразовании относительно вписанной

Табл. 2.—Правильные многогранники в E^4

	Символ Шлефли	Число вершин	Число ребер	Число двумерных граней	Число трехмерных граней
Симплекс . .	{3, 3, 3}	5	10	10	5
Гиперкуб . .	{4, 3, 3}	16	32	24	8
16-гранник	{3, 3, 4}	8	24	32	16
24-гранник	{3, 4, 3}	24	96	96	24
120-гранник	{5, 3, 3}	600	1200	720	120
600-гранник	{3, 3, 5}	120	720	1200	600

щиеся (необходимо изоморфными) правыми (левыми) группами.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972.

Л. Н. Шеврин.

ПРАВДОПОДОБИЯ УРАВНЕНИЕ — уравнение, к-рое составляют при нахождении статистич. оценок неизвестных параметров по *максимального правдоподобия методу*. Пусть X — случайный вектор, плотность вероятности к-рого $p(x|\theta)$ содержит неизвестный параметр $\theta\in\Theta$. Тогда уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X\mid\theta)=0$$

наз. уравнением правдоподобия, а его решение $\hat{\theta}$ — оценкой максимального (наибольшего) правдоподобия для параметра θ. В нек-рых случаях П. у. решается элементарно, но в основном П. у. представляет собой алгебраическое или трансцендентное уравнение, для решения к-рого пользуются методом последовательных приближений.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

М. С. Никулин.

ПРАВИЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — интерпретация формальной системы, при к-рой все аксиомы истинны или принимают значение «истина» при всех значениях ее параметров, а правила вывода сохраняют свойство принимать значение «истина». Данное определение относится к двузначным логич. исчислениям. Если истинностных значений больше и нек-рые из них отмечены, то в определении П. и. вместо слов «принимать значение „истина“» надо использовать слова «принимать отмеченные значения». Если приведенное свойство интерпретации не выполняется, то она наз. неправильной. П. и. для формальных систем, получающихся добавлением к узкому исчислению предикатов какого-то множества аксиом T, наз. также моделями системы аксиом T или моделями для T. Произвольные интерпретации для таких формальных систем наз. алгебраич. системами или просто моделями.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960.

В. Н. Гришин.

ПРАВИЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА обыкновенных дифференциальных уравнений — система вида

$$\dot{x}=A(t)\,x,\ x\in\mathbb{R}^n \tag{1}$$

(где $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $\mathbb{R}^+\to\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$), обладающая свойством:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)\,d\tau$$

существует и равен $\sum_{i=1}^n \lambda_i(A)$, где $\lambda_1(A)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(A)$ — *Ляпунова характеристические показатели* системы (1).

Для того чтобы треугольная система

$$\dot{u}^i=\sum_{j=i}^n p_{ij}(t)\,u^j,\ i=1,\ \ldots,\ n,$$

была правильной, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t p_{ii}(\tau)\,d\tau,\ i=1,\ \ldots,\ n$$

(критерий Ляпунова). Всякая *приводимая линейная система* и всякая *почти приводимая линейная система* являются правильными.

Роль понятия П. л. с. проясняется на следующей теореме Ляпунова. Пусть система (1) правильная и k ее характеристич. показателей Ляпунова отрицательны:

$$0>\lambda_{n-k+1}(A)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(A).$$

Тогда для всякой системы

$$\dot{x}=A(t)\,x+g(t,\ x), \tag{2}$$

где $g(t,\ x)$ удовлетворяет следующим условиям: $g,\ g_x'$ непрерывны, $g(0,\ t)\equiv 0$, $\|g_x'(x,\ t)\|=O(|x|^{\varepsilon})$, где $\varepsilon=\mathrm{const}>0$, найдется k-мерное многообразие $V^k\subset\mathbb{R}^n$, содержащее точку $x=0$, такое, что всякое решение $x(t)$ системы (2), начинающееся на V^k (то есть $x(0)\in V^k$), экспоненциально убывает при $t\to+\infty$, точнее — удовлетворяет неравенству

$$|x(t)|\leqslant C_\delta e^{[\lambda_{n-k+1}(A)+\delta]\,t}\,|x(0)|$$

(для всякого $\delta>0$ при нек-ром C_δ).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Хар., 1892 (то же, в кн.: Собр. соч., т. 2, М.—Л., 1956); [2] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [3] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146.

В. М. Миллионщиков.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ, тела Платона, — выпуклые многогранники, все грани к-рых

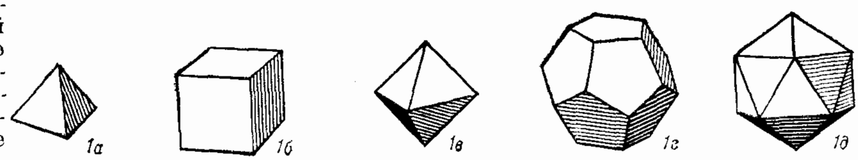


Рис. 1.

суть одинаковые правильные многоугольники и все многогранные углы при вершинах правильные и равные (рис. 1а—1д).

В евклидовом пространстве E^3 существуют пять П. м., данные о к-рых приведены в табл. 1, где символ Шлефли $\{p,\ q\}$ (см. *Многогранника группа*) обозначает П. м. с p-угольными гранями и q-гранными углами.

Табл. 1.—Правильные (выпуклые) многогранники в E^3

	Рис.	Символ Шлефли	Число вершин	Число ребер	Число граней
Тетраэдр	1а	{3, 3}	4	6	4
Куб (гексаэдр)	1б	{4, 3}	8	12	6
Октаэдр	1в	{3, 4}	6	12	8
Додекаэдр	1г	{5, 3}	20	30	12
Икосаэдр	1д	{3, 5}	12	30	20

Двойственными многогранниками $\{p,\ q\}$ и $\{q,\ p\}$ наз. такие, к-рые переходят друг в друга при полярном преобразовании относительно вписанной

Табл. 2.—Правильные многогранники в E^4

	Символ Шлефли	Число вершин	Число ребер	Число двумерных граней	Число трехмерных граней
Симплекс . .	{3, 3, 3}	5	10	10	5
Гиперкуб . .	{4, 3, 3}	16	32	24	8
16-гранник	{3, 3, 4}	8	24	32	16
24-гранник	{3, 4, 3}	24	96	96	24
120-гранник	{5, 3, 3}	600	1200	720	120
600-гранник	{3, 3, 5}	120	720	1200	600

или описанной сферы. Тетраэдр двойствен сам себе, гексаэдр — октаэдру и додекаэдр — икосаэдру.

В пространстве E^4 существуют шесть П. м., данные о к-рых приведены в табл. 2.

В пространстве E^n, $n>4$, существует три П. м.— аналоги тетраэдра, октаэдра и куба; их символы Шлефли — $\{3, \ldots, 3\}$, $\{4, 3, \ldots, 3\}$, $\{3, \ldots, 3, 4\}$.

Если под многоугольником понимать плоские замкнутые ломаные (хотя бы и самопересекающиеся), то можно указать еще 4 невыпуклых (звездчатых) П. м. (тела Пуансо). В этих многогранниках либо грани пересекают друг друга, либо грани — самопересекающиеся многоугольники (рис. 2а—2г). Данные о них приведены в табл. 3.

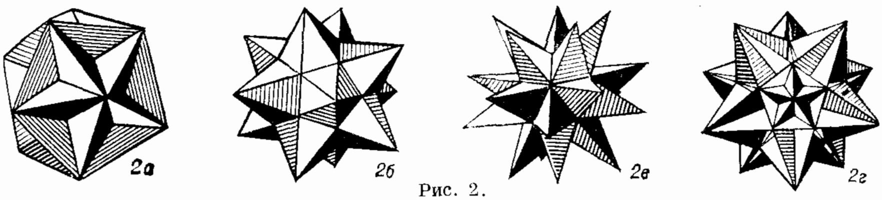


Рис. 2.

Табл. 3.—Правильные (невыпуклые) многогранники в E^3

	Рис.	Число вершин	Число ребер	Число граней
Малый звездчатый додекаэдр	2а	12	30	12
Большой звездчатый додекаэдр	2б	20	30	12
Большой додекаэдр	2в	12	30	12
Икосаэдр	2г	12	30	20

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4— Геометрия, М., 1963; [2] Люстерник Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956; [3] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, М., 1954; [4] Coxeter H. S. M., Regular polytopes, 3 ed., N.Y., 1973.

А. Б. Иванов.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ — многоугольники, у к-рых равны все его углы и равны все его стороны. Подробнее см. *Многоугольник.*

ПРАВОУПОРЯДОЧЕННАЯ ГРУППА — группа G, на множестве элементов которой задано отношение линейного порядка $\leqslant$ такое, что для всех x, y, z из G неравенство $x \leqslant y$ влечет за собой $xz \leqslant yz$. Множество $P=\{x \in G | x>e\}$ положительных элементов группы G является чистой (то есть $P \cap P^{-1}=\varnothing$) линейной (то есть $P \cup P^{-1} \cup \{e\}=G$) полугруппой. Всякая чистая линейная подполугруппа P произвольной группы определяет в ней правый порядок, а именно порядок $x<y \Longleftrightarrow yx^{-1} \in P$.

Группа $A(X)$ автоморфизмов линейно упорядоченного множества X естественным образом может быть правоупорядочена. Всякая П. г. порядково изоморфна нек-рой подгруппе $A(X)$ для подходящего линейно упорядоченного множества (см. [1]). Архимедова П. г., то есть П. г., для к-рой верна аксиома Архимеда (см. *Архимедова группа*), порядково изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел. В отличие от (двусторонне) линейно упорядоченных групп существуют некоммутативные П. г. без собственных выпуклых подгрупп. Класс П. г. замкнут относительно лексикографич. расширений. Система всех выпуклых подгрупп П. г. G линейно упорядочена по включению и полна. Эта система разрешима тогда и только тогда, когда для всяких положительных элементов $a, b \in G$ существует натуральное число n такое, что $a^n b > a$. Если группа обладает разрешимой системой подгрупп $S(G)$, факторы к-рой не имеют кручения, то G можно так правоупорядочить, что все подгруппы из $S(G)$ окажутся выпуклыми. В локально нильпотентной П. г. система выпуклых подгрупп разрешима.

Группа G тогда и только тогда может быть правоупорядочена, когда для любого конечного набора

$$\{x_i \neq e,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

элементов из G найдутся числа $\varepsilon_i = \pm 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, такие, что полугруппа, порожденная множеством $\{x_1^{\varepsilon_1}, \ldots, x_n^{\varepsilon_n}\}$, не содержит единицы группы G.

Всякий структурный (решеточный) порядок группы есть пересечение нек-рых ее правых порядков (см. *Структурно упорядоченная группа*).

Лит.: [1] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [2] Mura R. B., Rhemtulla A., Orderable groups, N.Y.—Basel, 1977.

В. М. Копытов.

ПРАНДТЛЯ УРАВНЕНИЕ — основное интегро-дифференциальное уравнение крыла самолета конечного размаха. При выводе П. у. делаются предположения, которые позволяют считать каждый элемент крыла находящимся в условиях обтекания его плоскопараллельным потоком. Это дает возможность связать геометрич. характеристики крыла с его аэродинамич. свойствами. Так, полученное П. у. имеет вид

$$\frac{F(t_0)}{B(t_0)}+\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{F'(t)}{t-t_0}\,dt=f(t_0),\quad -a<t_0<a, \qquad (1)$$

где F — искомая функция, $F'(t)=dF(t)/dt$, B и f — заданные функции $B(t)=cb(t)$, $f(t)=v\omega(t)$, а несобственный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Значения входящих в эти равенства величин следующие: $2a$ — размах крыла, к-рое предполагается симметричным относительно плоскости Oyz, причем направление оси Oz совпадает с направлением потока воздуха на бесконечности; $b(x)$ обозначает хорду профиля, к-рый соответствует абсциссе x; $F(x)$ — циркуляцию воздушного потока вокруг этого профиля; c — нек-рую постоянную; v — скорость воздушного потока на бесконечности; а ω — функцию, зависящую от изогнутости профиля и перекручивания крыла (см. [1]). Исходя из экспериментальных данных, полагают, что $F(-a)=F(a)$.

П. у. решается в замкнутом виде лишь при весьма жестких предположениях. В общем случае удается П. у. свести к интегральному уравнению Фредгольма (см. [3]).

П. у. наз. по имени Л. Прандтля (L. Prandtl).

Лит.: [1] Голубев В. В., Лекции по теории крыла, М.—Л., 1949; [2] Карман Т., Бюргерс И., Теоретическая аэродинамика идеальных жидкостей, пер. с англ., М.—Л., 1939; [3] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968. *Б. В. Хведелидзе.*

ПРАНДТЛЯ ЧИСЛО — один из критериев подобия тепловых процессов в жидкостях и газах. П. ч. зависит только от термодинамич. состояния среды. П. ч.

$$\mathrm{Pr}=\nu/a=\mu c_p/\lambda,$$

где $\nu=\mu/\rho$ — кинематич. коэффициент вязкости, μ — динамич. коэффициент теплопроводности, ρ — плотность, λ — коэффициент теплопроводности, $a=\lambda/\rho c_p$ — коэффициент температуропроводности, c_p — удельная теплоемкость среды при постоянном давлении.

П. ч. связано с др. критериями подобия — *Пекле числом* и *Рейнольдса числом* соотношением $\mathrm{Pr}=\mathrm{Pe}/\mathrm{Re}$.

П. ч. наз. по имени Л. Прандтля (L. Prandtl).

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

ПРЕВОСХОДНОЕ КОЛЬЦО — коммутативное нётерово кольцо, удовлетворяющее трем приводимым ниже аксиомам. Известно, что *геометрические кольца* обладают рядом качественных свойств, не присущих или описанной сферы. Тетраэдр двойствен сам себе, гексаэдр — октаэдру и додекаэдр — икосаэдру.

В пространстве E^4 существуют шесть П. м., данные о к-рых приведены в табл. 2.

В пространстве E^n, $n>4$, существует три П. м.— аналоги тетраэдра, октаэдра и куба; их символы Шлефли — $\{3, \ldots, 3\}$, $\{4, 3, \ldots, 3\}$, $\{3, \ldots, 3, 4\}$.

Если под многоугольником понимать плоские замкнутые ломаные (хотя бы и самопересекающиеся), то можно указать еще 4 невыпуклых (звездчатых) П. м. (тела Пуансо). В этих многогранниках либо грани пересекают друг друга, либо грани — самопересекающиеся многоугольники (рис. 2*а*—2*г*). Данные о них приведены в табл. 3.

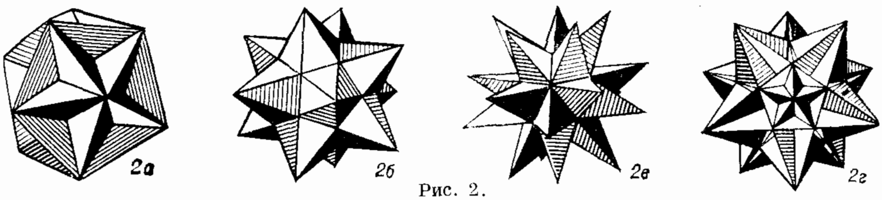


Рис. 2.

Табл. 3.—Правильные (невыпуклые) многогранники в E^3

	Рис.	Число вершин	Число ребер	Число граней
Малый звездчатый додекаэдр	2*а*	12	30	12
Большой звездчатый додекаэдр	2*б*	20	30	12
Большой додекаэдр	2*в*	12	30	12
Икосаэдр	2*г*	12	30	20

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4— Геометрия, М., 1963; [2] Люстерник Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956; [3] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, М., 1954; [4] Coxeter H. S. M., Regular polytopes, 3 ed., N.Y., 1973.

А. Б. Иванов.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ — многоугольники, у к-рых равны все его углы и равны все его стороны. Подробнее см. *Многоугольник*.

ПРАВОУПОРЯДОЧЕННАЯ ГРУППА — группа G, на множестве элементов которой задано отношение линейного порядка $\leqslant$ такое, что для всех x, y, z из G неравенство $x \leqslant y$ влечет за собой $xz \leqslant yz$. Множество $P=\{x \in G \mid x>e\}$ положительных элементов группы G является чистой (то есть $P \cap P^{-1}=\varnothing$) линейной (то есть $P \cup P^{-1} \cup \{e\}=G$) полугруппой. Всякая чистая линейная подполугруппа P произвольной группы определяет в ней правый порядок, а именно порядок $x<y \iff yx^{-1} \in P$.

Группа $A(X)$ автоморфизмов линейно упорядоченного множества X естественным образом может быть правоупорядочена. Всякая П. г. порядково изоморфна нек-рой подгруппе $A(X)$ для подходящего линейно упорядоченного множества (см. [1]). Архимедова П. г., то есть П. г., для к-рой верна аксиома Архимеда (см. *Архимедова группа*), порядково изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел. В отличие от (двусторонне) линейно упорядоченных групп существуют некоммутативные П. г. без собственных выпуклых подгрупп. Класс П. г. замкнут относительно лексикографич. расширений. Система всех выпуклых подгрупп П. г. G линейно упорядочена по включению и полна. Эта система разрешима тогда и только тогда, когда для всяких положительных элементов $a, b \in G$ существует натуральное число n такое, что $a^n b>a$. Если группа обладает разрешимой системой подгрупп $S(G)$, факторы к-рой не имеют кручения, то G можно так правоупорядочить, что все подгруппы из $S(G)$ окажутся выпуклыми. В локально нильпотентной П. г. система выпуклых подгрупп разрешима.

Группа G тогда и только тогда может быть правоупорядочена, когда для любого конечного набора

$$\{x_i \neq e,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

элементов из G найдутся числа $\varepsilon_i=\pm 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, такие, что полугруппа, порожденная множеством $\{x_1^{\varepsilon_1}, \ldots, x_n^{\varepsilon_n}\}$, не содержит единицы группы G.

Всякий структурный (решеточный) порядок группы есть пересечение нек-рых ее правых порядков (см. *Структурно упорядоченная группа*).

Лит.: [1] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [2] Mura R. B., Rhemtulla A., Orderable groups, N.Y.—Basel, 1977.

В. М. Копытов.

ПРАНДТЛЯ УРАВНЕНИЕ — основное интегро-дифференциальное уравнение крыла самолета конечного размаха. При выводе П. у. делаются предположения, которые позволяют считать каждый элемент крыла находящимся в условиях обтекания его плоскопараллельным потоком. Это дает возможность связать геометрич. характеристики крыла с его аэродинамич. свойствами. Так, полученное П. у. имеет вид

$$\frac{F(t_0)}{B(t_0)}+\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{F'(t)}{t-t_0}\,dt=f(t_0),\quad -a<t_0<a, \qquad (1)$$

где F — искомая функция, $F'(t)=dF(t)/dt$, B и f — заданные функции $B(t)=cb(t)$, $f(t)=v\omega(t)$, а несобственный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Значения входящих в эти равенства величин следующие: $2a$ — размах крыла, к-рое предполагается симметричным относительно плоскости Oyz, причем направление оси Oz совпадает с направлением потока воздуха на бесконечности; $b(x)$ обозначает хорду профиля, к-рый соответствует абсциссе x; $F(x)$ — циркуляцию воздушного потока вокруг этого профиля; c — нек-рую постоянную; v — скорость воздушного потока на бесконечности; а ω — функцию, зависящую от изогнутости профиля и перекручивания крыла (см. [1]). Исходя из экспериментальных данных, полагают, что $F(-a)=F(a)$.

П. у. решается в замкнутом виде лишь при весьма жестких предположениях. В общем случае удается П. у. свести к интегральному уравнению Фредгольма (см. [3]).

П. у. наз. по имени Л. Прандтля (L. Prandtl).

Лит.: [1] Голубев В. В., Лекции по теории крыла, М.—Л., 1949; [2] Карман Т., Бюргерс И., Теоретическая аэродинамика идеальных жидкостей, пер. с англ., М.—Л., 1939; [3] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968.

Б. В. Хведелидзе.

ПРАНДТЛЯ ЧИСЛО — один из критериев подобия тепловых процессов в жидкостях и газах. П. ч. зависит только от термодинамич. состояния среды. П. ч.

$$\mathrm{Pr}=\nu/a=\mu c_p/\lambda,$$

где $\nu=\mu/\rho$ — кинематич. коэффициент вязкости, μ — динамич. коэффициент теплопроводности, ρ — плотность, λ — коэффициент теплопроводности, $a=\lambda/\rho c_p$ — коэффициент температуропроводности, c_p — удельная теплоемкость среды при постоянном давлении.

П. ч. связано с др. критериями подобия — *Пекле числом* и *Рейнольдса числом* соотношением $\mathrm{Pr}=\mathrm{Pe}/\mathrm{Re}$.

П. ч. наз. по имени Л. Прандтля (L. Prandtl).

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

ПРЕВОСХОДНОЕ КОЛЬЦО — коммутативное нётерово кольцо, удовлетворяющее трем приводимым ниже аксиомам. Известно, что *геометрические кольца* обладают рядом качественных свойств, не присущих произвольным нётеровым кольцам. Понятие П. к. позволяет в аксиоматич. форме учесть важнейшие из этих свойств.

Аксиомы П. к. A.

А1. Кольцо A универсально цепное. (Кольцо A наз. цепным, если для любых двух его простых идеалов $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ длины любых неуплотняемых цепочек простых идеалов $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}'$ совпадают. Кольцо A наз. универсально цепным, если цепным является любое кольцо многочленов $A[T_1, \ldots, T_k]$.)

А2. Формальные слои кольца A являются геометрически регулярными, т. е. для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ и гомоморфизма из A в поле K кольцо $\hat{A}_{\mathfrak{p}} \otimes_A K$ регулярно. Здесь $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ — пополнение локального кольца $A_{\mathfrak{p}}$.

А3. Для любой целостной конечной A-алгебры B найдется ненулевой элемент $b \in B$ такой, что кольцо частных $B[b^{-1}]$ регулярно.

П. к. обладают следующими свойствами.

1) Для П. к. A множество регулярных (соответственно нормальных) точек схемы Spec A открыто.

2) Если превосходное локальное кольцо A приведенное (соответственно нормальное, равноразмерное), то таким же будет пополнение $\hat{A}$.

3) Целое замыкание П. к. A в конечном расширении поля частных кольца A является конечной A-алгеброй.

4) Если кольцо A превосходное, то любая A-алгебра конечного типа — также П. к.

Два важнейших примера П. к.— полные локальные кольца (или аналитич. кольца) и дедекиндовы кольца с полем частных нулевой характеристики. Таким образом, класс П. к. достаточно широк и, в частности, содержит все алгебры конечного типа над полем или над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

Превосходность кольца A тесно связана с возможностью разрешения особенностей схемы Spec A (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Grothendieck A. [Dieudonné J.], Éléments de géométrie algébrique, pt. 2, P., 1965; [2] Хиронака Х., «Математика», 1965, т. 9, № 6, с. 3—70.

В. И. Данилов.

ПРЕДБАЗА — семейство γ открытых подмножеств топологич. пространства X такое, что совокупность всех множеств, являющихся пересечением конечного числа элементов γ, образует *базу* X.

М. И. Войцеховский.

ПРЕДВАРЕННАЯ ФОРМУЛА — формула узкого исчисления предикатов (УИП), имеющая вид

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \Psi,$$

где Q_i обозначает квантор всеобщности $\forall$ или квантор существования $\exists$, переменные x_i, x_j различны при $i \neq j$ и Ψ — формула, не содержащая кванторов. П. ф. наз. также предваренными нормальными формами или пренексными формами.

Для всякой формулы φ языка УИП можно найти П. ф., логически эквивалентную в классич. исчислении предикатов формуле φ. Процесс нахождения П. ф. основан на следующих эквивалентностях, выводимых в классич. УИП:

$$(\forall x \varphi(x) \supset \Psi) \equiv \exists x' (\varphi(x') \supset \Psi),$$

$$\exists x \varphi(x) \supset \Psi \equiv \forall x' (\varphi(x') \supset \Psi),$$

$$\Psi \supset \forall x \varphi(x) \equiv \forall x' (\Psi \supset \varphi(x')),$$

$$\Psi \supset \exists x \varphi(x) \equiv \exists x' (\Psi \supset \varphi(x')),$$

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi, \quad \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi,$$

$$Q y \forall x \varphi \equiv \forall x \varphi, \quad Q y \exists x \varphi \equiv \exists x \varphi,$$

где x' — любая переменная, не входящая свободно в формулы $\varphi(x)$, Ψ, и $\varphi(x')$ получается из $\varphi(x)$ заменой всех свободных вхождений x на x'; переменная y не входит свободно в $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$. Чтобы применять приведенные эквивалентности, надо предварительно выразить логич. связки через $\supset$ и $\neg$; затем, применяя эти эквивалентности, постепенно передвигать все кванторы влево. Получающаяся в результате П. ф. наз. **предваренной формой** данной формулы.

Лит.: [1] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1971. *В. Н. Гришин.*

ПРЕДГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО — векторное пространство E над полем комплексных или действительных чисел, снабженное скалярным произведением $E\times E \to \mathbb{C}$, $x\times y \to (x, y)$, удовлетворяющим следующим условиям:

1) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$, $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$, $(y, x)=\overline{(x, y)}$, $x, y, z\in E$, $\lambda\in\mathbb{C}\,(\mathbb{R})$;

2) $(x, x)\geqslant 0$ для $x\in E$.

На П. п. E определена полунорма $\|x\|=(x, x)^{\frac{1}{2}}$. Пополнение E по этой полунорме является *гильбертовым пространством.* *В. И. Ломоносов.*

ПРЕДЕЛ — одно из основных понятий математики, означающее, что какая-то переменная, зависящая от другой переменной, при определенном изменении последней, неограниченно приближается к нек-рому постоянному значению. Основным при определении П. является понятие близости рассматриваемых объектов: только после его введения П. приобретает точный смысл. С П. связаны основные понятия математич. анализа: непрерывность, производная, дифференциал, интеграл. Одним из простейших случаев П. является П. последовательности.

Предел последовательности. Пусть X — топологич. пространство. Последовательность его точек x_n, $n=1, 2, \ldots$, наз. сходящейся к точке $x_0\in X$ или, что то же самое, точка x_0 наз. **пределом данной последовательности**, если для любой окрестности U точки x_0 существует такое натуральное N, что для всех $n>N$ выполняется включение $x_n\in U$; при этом пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0.$$

В случае, когда X — хаусдорфово пространство, П. последовательности $x_n\in X$, $n=1, 2, \ldots$, если он существует, единствен. Для метрич. пространства X точка x_0 является П. последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное N, что для всех номеров $n>N$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_0)<\varepsilon$, где $\rho(x_n, x_0)$ — расстояние между точками x_n и x_0. Если последовательность точек метрич. пространства сходится, то она ограничена. Последовательность точек полного метрич. пространства является сходящейся в том и только в том случае, когда она фундаментальная. В частности, это верно для числовых последовательностей, для к-рых исторически впервые возникло понятие П. последовательности. Для числовых последовательностей справедливы формулы

$$\lim_{n\to\infty} c=c, \quad \lim_{n\to\infty} cx_n=c\lim_{n\to\infty} x_n,$$

c — произвольное фиксированное число,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+\lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n=\lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n,$$

а если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n\neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Эти свойства числовых последовательностей переносятся на П. последовательностей более общих структур, напр. свойство П. суммы — на последовательности точек линейных топологич. пространств, свойства П. произведения — на последовательности точек топологич. групп и т. д.

Если действительные числовые последовательности $x_n \in \mathbb{R}$ и $y_n \in \mathbb{R}$ сходятся и $x_n \leqslant y_n$, $n=1, 2, \ldots$, то

$$\lim_{n \to \infty} x_n \leqslant \lim_{n \to \infty} y_n,$$

т. е. при предельных переходах нестрогие неравенства сохраняются. Если

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = a$$

и $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, то последовательность z_n, $n=1, 2, \ldots$, сходится к тому же П.: $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$. Эти свойства обобщаются на П. последовательностей точек упорядоченных множеств.

Всякая возрастающая (убывающая) последовательность действительных чисел x_n, т. е. такая, что $x_n \leqslant x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geqslant x_{n+1}$), $n=1, 2, \ldots$, ограниченная сверху (снизу), сходится, и ее П. является верхняя (нижняя) грань множества ее значений. Напр., если $a>0$, k — натуральное число, a_n — приближенное значение корня $\sqrt[k]{a}$ с n десятичными знаками после запятой, вычисленное с недостатком, то a_n, $n=1, 2, \ldots$, образуют возрастающую последовательность и $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sqrt[k]{a}$. Другим примером возрастающей ограниченной сверху последовательности является последовательность периметров правильных многоугольников с n сторонами, $n=3, 4, \ldots$, вписанных в нек-рую окружность, к длине к-рой и сходится эта последовательность.

Особую роль в теории числовых последовательностей играют **бесконечно малые последовательности**, т. е. последовательности, сходящиеся к нулю. Общее понятие П. числовой последовательности сводится к понятию бесконечно малой в том смысле, что числовая последовательность сходится к нек-рому числу в том и только в том случае, когда разность между членами последовательности и этим числом является бесконечно малой последовательностью.

Полезным является и понятие **бесконечно больших числовых последовательностей**, т. е. последовательностей, имеющих своим П. либо одну из бесконечностей со знаком $+\infty$ или $-\infty$, либо бесконечность без знака ∞. Для определения бесконечных П. вводятся понятия ε-окрестностей, $\varepsilon>0$, бесконечностей $+\infty$, $-\infty$ и ∞ в множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ по формулам

$$U(+\infty, \varepsilon) = \left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{\varepsilon}\right\},$$

$$U(-\infty, \varepsilon) = \left\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{1}{\varepsilon}\right\},$$

$$U(\infty, \varepsilon) = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

и понятие ε-окрестности ∞ в множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$:

$$U(\infty, \varepsilon) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

Пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$ (соответственно $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ или $-\infty$), $x_n \in \mathbb{R}$, $n=1, 2, \ldots$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех номеров $n>N$ выполняется включение $x_n \in U(\infty, \varepsilon)$ (соответственно включение $x_n \in U(+\infty, \varepsilon)$ или $x_n \in U(-\infty, \varepsilon)$). Аналогично определяется бесконечный П. для последовательностей комплексных чисел.

Из всякой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (см. *Больцано — Вейерштрасса теорема*), а из всякой неограниченной — бесконечно большую.

П. (конечный или бесконечный) какой-либо подпоследовательности данной последовательности наз. **частичным пределом** последней. В множестве всех частичных П. всякой последовательности действительных чисел всегда имеются как наибольший, так и наименьший (конечные или бесконечные). Наибольший (соответственно наименьший) частичный П. последовательности наз. ее **верхним** (соответственно **нижним**) пределом. Последовательность имеет конечный или бесконечный П. тогда и только тогда, когда ее верхний П. совпадает с нижним, причем их общее значение и является П.

С помощью П. последовательности могут быть определены другие понятия П., напр. П. функции и П. интегральных сумм. Определение П. последовательностей обобщается на случай направленных (частично упорядоченных) множеств.

Предел функции (отображения). Пусть X и Y — топологич. пространства, $E \subset X$, x_0 — точка прикосновения множества E, $f: E \to Y$ — отображение E в Y. Точку $a \in Y$ наз. **пределом отображения** f в точке x_0 (или, как говорят, при x, стремящемся к x_0) и пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \text{ или } f(x) \longrightarrow a \text{ при } x \longrightarrow x_0,$$

если, какова бы ни была окрестность $V = V(a)$ точки a в Y, существует такая окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0 в X, что для любой точки $x \in E \cap U(x_0)$ ее образ $f(x)$ принадлежит V : $f(x) \in V$. Иначе говоря, если $f(E \cap U) \subset V$. Если Y — хаусдорфово пространство, то отображение $f: E \to Y$ может иметь только один П. в точке $x_0 \in X$.

В случае, когда $E^* \subset E$ и x_0 — точка прикосновения множества E^*, то П. сужения f_{E^*} отображения f на множестве E^* наз. П. отображения (функции) f по множеству E^*, при этом пишут

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in E^*} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_{E^*}(x).$$

Если $f: E \to Y$, $E^* \subset E \subset X$, x_0 — точка прикосновения множества E^* и существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то в точке x_0 существует и предел f по множеству E^*, причем

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in E^*} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Если $E_1 \subset X$, $E_2 \subset X$, $f: E_1 \cup E_2 \to Y$ и существуют

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in E_1} f(x) = \lim_{x \to x_0,\ x \in E_2} f(x) = a,$$

то существует и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

При рассмотрении П. отображения (функции) $f: E \to Y$, $E \subset X$, при $x \to x_0 \in X$ может случиться, что $x_0 \in E$ или, наоборот, $x_0 \notin E$. Случай $x_0 \in E$ представляет специальный интерес, т. к. он приводит к понятию непрерывной функции: если $f: E \to Y$ и $x_0 \in E$, то для того, чтобы отображение f имело П. в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

В случае выполнения этого условия отображение f и наз. **непрерывным** в точке x_0. Если точка x_0 является изолированной точкой множества E, то в ней всегда существует предел

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

для любого отображения $f: E \to Y$, т. е. любое отображение f непрерывно во всех изолированных точках множества своего определения. Поэтому понятие П. отображения, в частности его непрерывности, содержательно лишь для предельных точек отображаемого множества. В классич. случае П. функций $f: E \to Y$ обычно предполагается, что $x_0 \notin E$, т. е. что точка x_0 не принадлежит тому множеству, по к-рому берется П.

Если в точке $x_0 \in X$ для пространства X выполняется первая аксиома счетности, а пространство Y — хаусдорфово, то для того, чтобы существовал предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ отображения $f: E \to Y$, $E \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \in E$, $n=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, существовал предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$. При выполнении этого условия предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ не зависит от выбора указанной последовательности $\{x_n\}$ и их общее значение является П. отображения f в точке x_0.

Предел последовательности точек $\{y_n\}$ топологич. пространства Y является частным случаем П. отображения (функции): в этом случае $E=\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, рассматриваемых с дискретной топологией, $x_0=+\infty$, $X=\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, окрестностью $+\infty$ в X является любое подмножество $U \subset \mathbb{N}$ вида $U=\{n: n \geqslant n_0\} \cup \{+\infty\}$, где n_0 — нек-рое натуральное число.

Понятие предела кратной последовательности, т. е. последовательности, члены к-рой снабжены целочисленными мультииндексами, также является частным случаем П. отображения.

Внутренний критерий существования П. отображения $f: E \to Y$ в данной точке x_0 (он наз. критерием Коши) в случае, когда в точке x_0 топологич. пространства $X \supset E$ выполняется первая аксиома счетности, а множество Y является полным метрич. пространством, состоит в том, что предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U=U(x_0)$ точки x_0 в X, что для всех точек x' и x'', удовлетворяющих условию $x' \in E \cap U$, $x'' \in E \cap U$, выполняется неравенство $\rho(f(x''), f(x')) < \varepsilon$. В частности, этот критерий справедлив, когда Y является множеством действительных или комплексных чисел.

Некоторые свойства пределов. Если Y — метрич. пространство, $f: E \to Y$, $E \subset X$, и существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in Y$, то найдется такая окрестность $U=U(x_0)$ точки x_0, что при отображении f образ пересечения $E \cap U$ отображаемого множества E с этой окрестностью будет ограниченным подмножеством пространства Y.

Если функция $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subset X$, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, имеет в точке $x_0 \in X$ не равный нулю конечный П., то существуют такие окрестность $U=U(x_0)$ точки x_0 и число $c > 0$, что для всех точек $x \in E \cap U$ выполняются неравенства

$$f(x) > c, \text{ если } \lim_{x \to x_0} f(x) > 0,$$

$$f(x) < -c, \text{ если } \lim_{x \to x_0} f(x) < 0.$$

Если Y — топологич. группа (в частности, коммутативная с аддитивной записью групповой операции), $f: E \to Y$, $E \subset X$, $x_0 \in X$, то предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x)=f(x)a^{-1}$ имеет в точке x_0 предел, равный единице группы Y (соответственно функция $\alpha(x)=f(x)-a$ имеет П. в x_0, равный нулю,— такие функции наз. бесконечно малыми функциями).

Если Y — линейное топологич. пространство над полем P, $f_1 : E \to Y$, $f_2 : E \to Y$, $E \subset X$, то П. в точке x_0 линейной комбинации отображений f_1 и f_2 равен такой же линейной комбинации их П. в той же точке:

$$\lim_{x \to x_0} [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)] = \lambda_1 \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lambda_2 \lim_{x \to x_0} f_2(x),$$
$$\lambda_1 \in P, \ \lambda_2 \in P.$$

Если Y — множество действительных или комплексных чисел, $f_1 : E \to Y$, $f_2 : E \to Y$ (такие функции наз. числовыми), $E \subset X$, то

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) f_2(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \lim_{x \to x_0} f_2(x),$$

а если $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)},$$

причем в этом случае под $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ понимается П. сужения функции $\frac{f_1}{f_2}$ на пересечение отображаемого множества E с нек-рой окрестностью точки x_0 такой, что на указанном пересечении имеет смысл частное $\frac{f_1}{f_2}$. Если $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, $x \in E$, и существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$, то

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} f_2(x).$$

Если X и Y получены из множества действительных чисел $\mathbb{R}$ пополнением его либо бесконечностью без знака: ∞, либо двумя бесконечностями со знаком: $+\infty$, $-\infty$, $E \subset \mathbb{R}$, $f(E) \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \notin E$, то сформулированное определение П. функции является классич. определением конечного и бесконечного П. действительной функции одного переменного. Аналогично, если пространства X и Y получаются пополнением бесконечностью ∞ множества комплексных чисел $\mathbb{C}$, то получают определение П. (конечного и бесконечного) для функций комплексного переменного. Если же пространство X получается пополнением бесконечностью ∞ пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$), $n > 1$, то получают определение конечного и бесконечного П. функции многих переменных при стремлении аргумента к конечной или бесконечно удаленной точке.

Для функций, определенных на подмножествах числовой прямой (или, более общо, на упорядоченных множествах), существует понятие **одностороннего предела**. Примером функций, имеющих по крайней мере один односторонний П. во всех предельных точках области определения, являются действительные монотонные функции: если функция f монотонна на множестве E числовой оси и точка x_0 является предельной точкой множества E, то она является и предельной точкой хотя бы одного из множеств $E_1 = E \cap \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, $E_2 = E \cap \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$. Если точка x_0 предельная для множества E_1, то у функции f в точке x_0 существует П. слева, а если она предельная для E_2, то справа. При этом если, напр., функция f возрастает и ограничена сверху, $E_1 \neq \varnothing$, x_0 — предельная точка для множества E_1, то предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ конечен.

Основным общим методом отыскания П. функций является метод выделения главных частей функций в окрестности данной точки, что обычно делается с помощью *Тейлора формулы*. Для вычисления П. часто бывает полезно *Лопиталя правило*.

Несмотря на большую общность понятия П. отображения, оно не охватывает все существующие понятия П., имеющиеся в современной математике. Напр., понятие П. интегральных сумм не содержится в понятии

П. отображения (функции). Достаточно общим понятием П., в определенном смысле охватывающим все основные случаи, является П. отображения по фильтру.

Предел фильтра. Пусть X — топологич. пространство, $X \neq \varnothing$, $\mathfrak{U} = \{U\}$ — его база топологии, $\mathfrak{F}$ — фильтр на X (т. е. такое непустое семейство $\mathfrak{F}$ непустых подмножеств пространства X, что для любых $A' \in \mathfrak{F}$, $A'' \in \mathfrak{F}$ существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset A' \cap A''$). Точка x_0 наз. пределом фильтра $\mathfrak{F}$ или его предельной точкой, если фильтр $\mathfrak{F}$ сильнее фильтра $\mathfrak{B}(x_0)$, являющегося локальной базой топологии в точке x_0, т. е. для любого $U \in \mathfrak{B}(x_0)$ существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset U$.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел с дискретной топологией. Фильтр на множестве $\mathbb{N}$, состоящий из всевозможных дополнений к конечным подмножествам множества $\mathbb{N}$, наз. натуральным фильтром и обозначается $\mathfrak{F}_{\mathbb{N}}$. Он не имеет П. в $\mathbb{N}$. Тот же фильтр на множестве $X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, в к-ром локальная база $\mathfrak{B}(+\infty)$ состоит из всевозможных множеств $A_n = \{m : m \in \mathbb{N}, m > n \in \mathbb{N}\}$, а $\mathfrak{B}(n)$ при $n \in \mathbb{N}$ — из одной точки n, имеет своим П. бесконечность $+\infty$. Единственность П. фильтра топологич. пространства связана с отделимостью точек пространства: для того чтобы любой фильтр топологич. пространства имел не более одного П., необходимо и достаточно, чтобы пространство было хаусдорфово.

Пусть X — нек-рое множество, Y — топологич. пространство, φ — отображение X в Y, $\mathfrak{F}$ — фильтр на X. Точку $b \in Y$ наз. пределом отображения φ по фильтру $\mathfrak{F}$ и пишут

$$\lim_{\mathfrak{F}} \varphi(x) = b,$$

если фильтр $\varphi(\mathfrak{F})$, состоящий из всевозможных множеств $\varphi(A)$, $A \in \mathfrak{F}$, имеет своим П. в пространстве Y точку b.

Если $X = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, φ — отображение $\mathbb{N}$ в топологич. пространство Y, $\varphi(n) = y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}_{\mathbb{N}}$ — натуральный фильтр, то П. отображения φ по фильтру $\mathfrak{F}_{\mathbb{N}}$ в пространстве Y совпадает с обычным П. последовательности $\{y_n\}$ в Y.

Если в $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ — фильтр на X, являющийся произведением двух натуральных фильтров $\mathfrak{F}_{\mathbb{N}}$, т. е. состоящий из всевозможных множеств вида $A \times B$, где $A \in \mathfrak{F}_{\mathbb{N}}$, $B \in \mathfrak{F}_{\mathbb{N}}$, φ — отображение $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в топологич. пространство $Y : \varphi(n, m) = y_{nm} \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, то П. отображения φ по фильтру $\mathfrak{F}$ в пространстве Y совпадает с обычным П. двойной последовательности $\{y_{nm}\}$ в Y.

Пусть элементами множества X являются, в свою очередь, множества x, состоящие из какого-либо разбиения $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ нек-рого отрезка $[a, b]$; $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ и каких-то точек $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots$, то есть

$$x = \{\tau;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}.$$

Пусть A_η (для любого $\eta > 0$) — подмножество множества X, состоящее из всех элементов $x \in X$, у к-рых мелкости входящих в них разбиений $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ меньше η, то есть

$$\max_{i=1,\ 2,\ \ldots,\ n} (t_i - t_{i-1}) < \eta.$$

Система $\mathfrak{F} = \{A_\eta\}$ является фильтром. Всякая действительная функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, порождает отображение φ_f множества X в числовую ось $\mathbb{R}$ по формуле

$$\varphi_f(x) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),\ x = (\tau;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n),$$

$$\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}.$$

Таким образом, $\varphi_f(x)$ является значением интегральной суммы Римана функции f, соответствующим элементу $x \in X$.

П. отображения φ_f *в* $\mathbb{R}$ *по фильтру* $\mathfrak{F}$ совпадает с обычным П. интегральных сумм Римана функции f при условии, что мелкости рассматриваемых разбиений стремятся к нулю. Это совпадение имеет место в том смысле, что оба П. одновременно существуют или нет, а если существуют, то равны и являются значениями интеграла Римана от функции f по отрезку $[a, b]$.

Предел отображения топологических пространств по фильтру. Пусть X и Y — топологич. пространства, $E \subset X$, $\mathfrak{F}$ — фильтр на E, φ — отображение E в Y. Точку $b \in Y$ наз. пределом отображения φ в точке $a \in X$ по фильтру $\mathfrak{F}$, если a является П. фильтра $\mathfrak{F}$, а b является П. фильтра $\varphi(\mathfrak{F})$. В этом случае пишут

$$b = \lim_{\mathfrak{F}} \varphi(x).$$

Если $\mathfrak{B}(a)$ — база окрестностей в точке a, $E = X \setminus \{a\}$, а фильтр $\mathfrak{F}$ состоит из всевозможных «проколотых окрестностей» $U(a) \setminus \{a\}$ точки a, $U(a) \in \mathfrak{B}(a)$, то предел $\lim_{\mathfrak{F}} \varphi(x)$ совпадает с обычным пределом $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$ отображения φ в точке a, то есть обобщает классическое определение П. отображения, сформулированное в терминах окрестностей. Непосредственным обобщением понятия П. последовательности является *П. направленного множества в топологическом* пространстве, т. е. такого частично упорядоченного множества, у к-рого за каждыми двумя элементами имеется следующий. В терминах П. по направленным множествам можно также сформулировать понятие П. отображения одного топологич. пространства в другое (см. *Направленность*, *Сходимость*).

Предел последовательности множеств. Топологический предел. Пусть A_n, $n=1, 2, \ldots,$— множества топологич. пространства X. *Верхним топологическим пределом* $\overline{\mathrm{lt}}\, A_n$ *последовательности* $\{A_n\}$ *наз. множество* точек $x \in X$, каждая окрестность к-рых пересекается с бесконечным числом множеств A_n, а нижним топологическим пределом $\underline{\mathrm{lt}}\, A_n$ — множество точек, каждая окрестность к-рых содержит точки почти всех A_n. Очевидно, $\underline{\mathrm{lt}}\, A_n \subset \overline{\mathrm{lt}}\, A_n$. Если $A = \underline{\mathrm{lt}}\, A_n = \overline{\mathrm{lt}}\, A_n$, то последовательность $\{A_n\}$ наз. сходящейся, а множество A ее топологическим П. и пишут $A = \mathrm{lt}\, A_n$. Верхний и нижний топологические П. последовательности являются замкнутыми множествами.

Теоретико-множественный *предел*. Имеется понятие П. последовательности множеств, не связанное с топологией. Последовательность множеств A_n, $n=1, 2, \ldots,$ наз. сходящейся, если существует такое множество A, называемое ее пределом и обозначаемое

$$A = \lim A_n,$$

что каждая его точка принадлежит всем множествам A_n, начиная с нек-рого номера, и каждая точка из объединения всех множеств A_n, не принадлежащая A, содержится лишь в конечном числе множеств A_n. Множество A является П. последовательности $\{A_n\}$ тогда и только тогда, когда оно является одновременно ее *верхним и нижним пределом*.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; [2] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., Математический анализ, М., 1979; [3] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; [4] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975; [5] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер.

с франц., 2 изд., М., 1958; [6] Заманский М., Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., М., 1974; [7] Келли Дж. Д., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [8] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937. *Л. Д. Кудрявцев.*

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТОЧКА множества — точка, в любой окрестности к-рой содержится по крайней мере одна точка данного множества, отличная от нее самой. Рассматриваемые множества и точка предполагаются принадлежащими нек-рому топологич. пространству. Множество, содержащее все свои П. т., наз. замкнутым. Совокупность всех П. т. множества M наз. производным множеством и обозначается M'. Если рассматриваемое топологич. пространство X удовлетворяет первой аксиоме отделимости (для любых двух его точек x и y существует окрестность $U(x)$, не содержащая точку y), то каждая окрестность П. т. нек-рого множества $M \subset X$ содержит бесконечно много точек этого множества и производное множество M' — замкнуто. Всякая *прикосновения точка* множества M является либо его П. т., либо изолированной.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937. *Л. Д. Кудрявцев.*

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТОЧКА траектории $\{f^t x\}$ динамической системы f^t — точка

$$x_\alpha = \lim_{k \to \infty} f^{t_k} x \qquad (1)$$

(α-предельная точка) или

$$x_\omega = \lim_{k \to \infty} f^{t_k} x \qquad (2)$$

(ω-предельная точка), где $\{t_k\}$, $k \in \mathbb{N}$,— последовательность такая, что $t_k \longrightarrow -\infty$ при $k \longrightarrow \infty$ в (1) или $t_k \longrightarrow +\infty$ при $k \longrightarrow \infty$ в (2) и пределы (1) или (2) существуют.

Для траектории $\{f^t x\}$ динамич. системы f^t (или, иначе, $f(t, x)$, см. [1]) α-П. т. (ω-П. т.) — то же, что ω-П. т. (α-П. т.) траектории $\{f^{-t} x\}$ динамич. системы f^{-t} (системы с обращением времени). Множество Ω_x (A_x) всех ω-П. т. (α-П. т.) траектории $\{f^t x\}$ наз. ω-предельным (α-предельным) множеством этой траектории.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М., 1949. *В. М. Миллионщиков.*

ПРЕДЕЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ПРИНЦИП — способ однозначного выделения решений уравнений, аналогичных *Гельмгольца уравнению*, с помощью введения бесконечно малого поглощения. Математич. смысл П. п. п. состоит в следующем. Пусть Ω — неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, P — самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$, задаваемый дифференциальным выражением $P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $x \in \Omega$, и однородными граничными условиями на $\partial\Omega$, λ — точка непрерывного спектра оператора P. Тогда при $\varepsilon \neq 0$ уравнение

$$Pu_\varepsilon = (\lambda + i\varepsilon) u_\varepsilon + f$$

однозначно разрешимо в $L_2(\Omega)$ и в нек-рых случаях можно выделить решения $u = u_\pm$ уравнения

$$Pu = \lambda u + f$$

с помощью предельного перехода

$$u_\pm = \lim_{\varepsilon \to \pm 0} u_\varepsilon .$$

При этом предполагается, что f имеет компактный носитель, а сходимость $u_\varepsilon \to u_\pm$ при $\varepsilon \to \pm 0$ понимается в смысле $L_2(\Omega')$, где Ω' — произвольная ограниченная область в Ω. Так как λ — точка спектра оператора P, то указанный предел в $L_2(\Omega)$, вообще говоря, не существует.

Впервые П. п. п. был сформулирован для уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^2$ (см. [1]):

$$(\Delta+k^2)\,u=-f,\ \Omega=\mathbb{R}^2,$$
$$P=-\Delta,\ \lambda=-k^2<0.$$

Выделяемые с помощью этого принципа решения $u_{\pm}$ соответствуют расходящимся или сходящимся волнам и удовлетворяют *излучения условию* на бесконечности. Эти результаты были перенесены (см. [2], [3]) на эллиптические краевые задачи во внешности ограниченной области в $\mathbb{R}^n$ для оператора

$$P\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=-\sum\nolimits_{k,\ j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kj}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+q(x),\quad (*)$$

где коэффициенты $a_{kj}(x)$ достаточно быстро стремятся к константам при $|x|\to\infty$. Для справедливости П. п. п. в этом случае необходимо требовать, чтобы λ не было собственным значением оператора P или f была ортогональна собственным функциям. Теорема Като (см. [3]) дает достаточные условия отсутствия собственных значений на непрерывном спектре оператора $P=-\Delta+q(x)$. Такая теорема получена для оператора (*) (см. [3]). П. п. п. обоснован для нек-рых областей с некомпактной границей (см. [3], [4]).

П. п. п. и соответствующие условия излучения найдены для уравнений любого порядка и систем уравнений (см. [5], [6]); они состоят в следующем. Пусть $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — эллиптический (или гипоэллиптический) оператор, удовлетворяющий условиям: 1) многочлен $P(\sigma)$ имеет действительные коэффициенты, 2) поверхность $P(\sigma)=0$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, распадается на $\varkappa$-связных гладких поверхностей S_j с отличной от нуля кривизной, 3) $\operatorname{grad}P(\sigma)\neq0$ на S_j. Пусть на S_j заданы ориентации, т. е. независимо для каждой поверхности выбраны направления нормали ν. Пусть $\omega=\frac{x}{|x|}$, $\sigma_j=\sigma_j(\omega)$ — точка на S_j, в к-рой ν и ω имеют одинаковые направления, и $\mu_j(\omega)=(\sigma_j(\omega),\omega)$. Тогда функция $u(x)$ удовлетворяет условиям излучения, если она представима в виде

$$u=\sum\nolimits_{j=1}^{\varkappa}u_j(x),\ u_j=O\left(r^{(1-n)/2}\right),$$
$$\frac{\partial u_j}{\partial r}-i\mu_j(\omega)\,u_j=o\left(r^{(1-n)/2}\right),\ r\longrightarrow\infty.$$

Эти условия выделяют единственное решение уравнения

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f,\ x\in\mathbb{R}^n,$$

для любой функции f с компактным носителем. П. п. п. для этого уравнения заключается в том, что это же решение получается в пределе при $\varepsilon\to+0$ из однозначного определяемого решения $u_\varepsilon(x)\in L_2(\mathbb{R}^n)$ эллиптич. уравнения

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_\varepsilon+i\varepsilon Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_\varepsilon=f,$$

где $Q(\sigma)$ имеет действительные коэффициенты и $Q(\sigma)\neq\neq0$ на S_j. В зависимости от набора $\operatorname{sign}_{\sigma\in S_j}Q(\sigma)$, $1\leqslant j\leqslant\varkappa$, в пределе получаются решения с условиями излучения, соответствующими той или иной ориентации поверхностей S_j. Этот принцип обоснован для уравнений и систем любого порядка с переменными коэффициентами во внешности ограниченной области (см. [5], [6]), а также в случае невыпуклых S_j; для этих уравнений имеется и теорема единственности типа Като.

Лит.: [1] Игнатовский В. С., «Ann. Phys.», 1905, Bd 18, № 13, S. 495—522; [2] Повзнер А. Я., «Матем. сб.», 1953, т. 32, № 1, с. 109—56; [3] Эйдус Д. М., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 3, с. 91—156; [4] Свешников А. Г., «Докл. АН СССР», 1951, т. 80, № 3, с. 345—47; [5] Вайнберг Б. Р., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 3, с. 115—94; его же, «Матем. сб.», 1968, т. 75, № 3, с. 454—80.

Б. Р. Вайнберг.

ПРЕДЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО $C(f, z_0; S)$ функции $f(z)$: $G \to \Omega$, определенной в области $G \subset \mathbb{C}$ со значениями на сфере Римана Ω, в точке $z_0 \in \overline{G}$ по множеству $S \subset G$, $z_0 \in \overline{S}$, — множество значений $a \in \Omega$, для к-рых существуют такие последовательности точек $\{z_n\}, z_n \in S$, $n=1, 2, \ldots$; $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$, что

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = a.$$

Каждое значение $a \in C(f, z_0; S)$ наз. **предельным значением** функции f в точке z_0 по множеству S. Теория П. м.— это раздел теории функций, в котором граничные свойства функций изучаются в терминах топологических и метрических свойств различных П. м.

Если в качестве множества S взята вся область G, то получается **полное предельное множество** $C(f, z_0; G) = C(f, z_0)$; в случаях строгого включения $S \subset G$ соответствующие П. м. $C(f, z_0; S)$ иногда наз. **частными**. Полное П. м. $C(f, z_0)$ всегда замкнуто; если функция f непрерывна на множестве S, локально связном в точке $z_0 \in \overline{S}$, то П. м. $C(f, z_0; S)$ либо вырожденное, т. е. состоит из одной точки, либо является невырожденным континуумом. Если П. м. $C(f, z_0; S)$ совпадает с Ω, то оно наз. **тотальным** П. м. Значение $a \in \Omega$ принадлежит **множеству повторяющихся значений** $R(f, z_0; S)$ функции f в точке z_0 по множеству S, если существует такая последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in S$, $n=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$, что $a = f(z_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Всегда $R(f, z_0; S) \subset C(f, z_0; S)$. Если для нек-рого $a \in \Omega$ в области G существует путь $L: z = z(t)$, $0 \leqslant t < 1$, оканчивающийся в точке z_0, $z_0 \in \overline{G}$, $\lim\limits_{t \to 1} z(t) = z_0$, и такой, что $\lim\limits_{t \to 1} f(z(t)) = a$, то a наз. *асимптотическим значением* функции f в точке z_0 (вдоль пути L). **Асимптотическое множество** $A(f, z_0; G)$ — это совокупность всех асимптотич. значений f в точке z_0.

Понятие П. м. было впервые явно сформулировано П. Пенлеве в 1895 (под названием «область неопределенности», см. [1]) в связи с изучением поведения аналитич. функции вблизи ее особой точки и классификацией особенностей таких функций. С тех пор в теории П. м. изучаются в основном три геометрически простейших случая: а) z_0 — изолированная точка границы $\mathrm{Fr}\, G$ или внутренняя точка G; б) $G = D = \{|z| < 1\}$ — единичный круг или, вообще, нек-рая жорданова область, а z_0 — точка границы $\Gamma = \mathrm{Fr}\, D$; в) граница $E = \mathrm{Fr}\, G$ есть всюду разрывный компакт на плоскости (т. е. вполне несвязный компакт, не содержащий никакого невырожденного континуума) и $z_0 \in E$. Ряд классич. результатов теории аналитич. функций допускает формулировку в терминах П. м. Напр., *Сохоцкого теорема* в несколько усиленной форме: если z_0 — изолированная точка всюду разрывного компакта $E \subset G$ и $f(z)$ — мероморфная функция на $G \setminus E$, то П. м. $C(f, z_0; G \setminus E)$ либо вырожденное, либо тотальное. Дополнительно к этому *Пикара теорема* утверждает, что в случае, когда $C(f, z_0; G \setminus E)$ тотально, т. е. когда z_0 — *существенно особая точка*, множество $CR(f, z_0; G \setminus E) = \Omega \setminus R(f, z_0; G \setminus E)$ содержит не более двух различных значений. В этом же случае

$$CR(f,\ z_0;\ G\setminus E)\subset A(f,\ z_0;\ G\setminus E)$$

(*Иверсена теорема*).

Основной из результатов, касающийся теории поведения мероморфных функций вблизи «тощей» границы (теории Пенлеве), состоит в следующем (см. [1], [2]): если множество $E\subset G$ имеет линейную хаусдорфову меру нуль, $\mu(E)=\mu_1(E)=0$, и функция f мероморфна в $G\setminus E$, то в каждой точке $z_0\in E$ П. м. $C(f,\ z_0;\ G\setminus E)$ либо вырожденное, либо тотальное; более того, в первом случае f мероморфна и в точке z_0. Таким образом, точка $z_0\in E$, в к-рой П. м. $C(f,\ z_0;\ G\setminus E)$ вырожденное, является устранимой особой точкой функции f; изучение устранимых множеств различных классов функций можно рассматривать как раздел теории П. м.

Важным усилением теоремы Пикара является теорема Голубева: если $E\subset G$, $\mu(E)=0$ и f мероморфна в $G\setminus E$, то в любой существенно особой точке $z_0\in E$ множество $CR(f,\ z_0;\ G\setminus E)$ имеет *аналитическую емкость* нуль (и, следовательно, плоскую меру $\mu_2(CR)=0$).

Началом теории П. м. в случае непрерывной границы можно считать работу П. Фату (P. Fatou, 1906) о граничных значениях функций $f(z)$, голоморфных в единичном круге $D=\{|z|<1\}$. Если такая функция f ограничена в D, то почти всюду (в смысле меры Лебега) на окружности $\Gamma=\{|z|=1\}$ она имеет радиальные и угловые граничные значения (теорема Фату). Для произвольной точки $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ пусть $h(\zeta,\ \varphi)$ обозначает хорду круга D, оканчивающуюся в ζ и образующую с радиусом, проведенным в эту точку, угол раствора φ, $-\pi/2<\varphi<\pi/2$. И пусть $\Delta(\zeta,\ \varphi_1,\ \varphi_2)$ — угловая область с вершиной $\zeta\in\Gamma$, состоящая из всех точек круга D, заключенных между двумя хордами

$$h(\zeta,\ \varphi_1)\ \text{и}\ h(\zeta,\ \varphi_2),\ -\pi/2<\varphi_1<\varphi_2<\pi/2.$$

Точку $\zeta\in\Gamma$ наз. точкой Фату и относят к множеству $F(f)$, если объединение

$$\bigcup C(f,\ \zeta;\ \Delta(\zeta,\ \varphi_1,\ \varphi_2))$$

по всем угловым областям $\Delta(\zeta,\ \varphi_1,\ \varphi_2)$ состоит из единственного значения $f(e^{i\theta})$, наз. угловым граничным значением функции f в точке ζ. Иная формулировка теоремы Фату состоит в том, что для ограниченной голоморфной в круге D функции f справедливо разложение $\Gamma=F(f)\cup E$, $\text{mes}\ E=0$. Результат дополняется теоремой единственности Ф. и М. Риссов (1916): если f голоморфна и ограничена в круге D и на нек-ром множестве $M\subset F(f)$, $\text{mes}\ M>0$, имеет угловое граничное значение $f(\zeta)=a$, $\zeta\in M$, то $f(z)\equiv a$. Это утверждение было независимо доказано Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым (1919), к-рые существенно распространили его также на случай произвольных мероморфных функций. В том же году Н. Н. Лузин и И. И. Привалов опубликовали граничную теорему единственности для случая радиальных граничных значений: если голоморфная в D функция f на множестве M второй категории и метрически плотном на нек-рой дуге $\gamma\subset\Gamma$ имеет одно и то же радиальное граничное значение $a\in\Omega$, то есть $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta})=a$, $e^{i\theta}\in M$, то $f(z)\equiv a$. В 1936 И. И. Привалов отметил, что утверждение $f(z)=\text{const}$ остается в силе и в том случае, когда значения $a_\zeta=\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ не обязательно одинаковы в точках $\zeta=e^{i\theta}\in M$, но принадлежат нек-рому множеству (логарифмической) емкости нуль. Основная идея и элементы доказательства теорем Лузина — Привалова применимы и в общем случае непрерывных отображений f круга D, что и было позднее использовано во многих работах.

Точку $\zeta \in \Gamma = \{|z| = 1\}$ наз. **точкой Плеснера** и относят к множеству $I(f)$, если пересечение

$$\bigcap C(f, \zeta; \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2))$$

по всем угловым областям $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ с вершиной ζ совпадает с Ω. В 1927 А. И. Плеснер доказал, что для любой мероморфной в круге D функции f почти все точки окружности Γ принадлежат либо $F(f)$, либо $I(f)$, то есть $\Gamma = F(f) \cup I(f) \cup E$, mes $E = 0$. Точку $\zeta \in \Gamma$ наз. **точкой Мейера** и относят к множеству $M(f)$, если $C(f, \zeta; D) \neq \Omega$ и пересечение хордальных П. м. $\bigcap C(f, \zeta; h(\zeta, \varphi))$ по всем хордам, проведенным в точку ζ, совпадает с $C(f, \zeta; D)$. К. Мейер (K. Meier, 1961) установил следующий аналог теоремы Плеснера в терминах категории по Бэру: если f мероморфна в D, то все точки окружности Γ, за возможным исключением множества E первой категории, принадлежат объединению $M(f) \cup I(f)$. Получено уточнение теоремы Мейера, согласно к-рому E есть множество первой категории и типа F_σ (см. [12] — [14], где получены усиления теорем Плеснера и Мейера, а также даны обращение теоремы Мейера и характеризация множества $M(f)$).

Работа П. Фату послужила первоначальным толчком к развитию фундаментальных исследований граничных свойств аналитич. функций. Исследования Ф. и М. Риссов, Н. Н. Лузина, И. И. Привалова, Р. Неванлинны (R. Nevanlinna), А. И. Плеснера, В. И. Смирнова и др. проводились независимо от идей П. Пенлеве, и для них характерно использование методов, связанных с теорией меры и теорией интегрирования, с понятием категории по Бэру (см. [4] — [9]).

Основным объектом исследований Ф. Иверсена (F. Iversen) и В. Гросса (W. Gross) были также мероморфные функции f в области D с жордановой границей $\Gamma = \operatorname{Fr} D$. В произвольной точке $\zeta_0 \in \Gamma$ **граничное предельное множество** $C(f, \zeta_0; \Gamma)$ определяется следующим образом: если M_r обозначает замыкание объединения $\bigcup C(f, \zeta; D)$ по всем точкам

$$\zeta \in (\Gamma \setminus \{\zeta_0\}) \cup \{|z - \zeta_0| < r\},$$

то $C(f, \zeta_0; \Gamma) = \bigcap_{r>0} M_r$. Одна из основных теорем, полученных независимо Ф. Иверсеном и В. Гроссом, утверждает, что при указанных условиях в каждой точке $\zeta_0 \in \Gamma$ множество

$$C_i(f, \zeta_0; D) = C(f, \zeta_0; D) \setminus C(f, \zeta_0; \Gamma)$$

открыто и все значения $a \in C_i(f, \zeta_0; D)$, за возможными двумя исключениями, принадлежат множеству повторяющихся значений $R(f, \zeta_0; D)$; кроме того, каждое *исключительное значение* (если таковые существуют) является асимптотич. значением функции f в точке ζ_0.

Исследования Ф. Иверсена и В. Гросса получили свое дальнейшее развитие в работах А. Бёрлинга (A. Beurling), В. Зайделя (W. Seidel, он и ввел термин «П. м.» в 1932) и др. (см. [5] — [9]). Рассматривались в основном случаи, когда ζ_0 принадлежит нек-рому «малому» множеству E точек границы Γ нулевой линейной меры или нулевой емкости, и изучалось П. м. $C(f, \zeta_0; \Gamma \setminus E)$, определяемое аналогично множеству $C(f, \zeta; \Gamma)$. В этих исследованиях использовались и методы теории потенциала.

Новейшие результаты в этом направлении сформулированы ниже для случая круга $D = \{|z| < 1\}$. Пусть фиксировано множество E на дуге γ границы $\Gamma = \{|z| = 1\}$, mes $E = 0$, $\zeta_0 \in E$. Каждой точке $\zeta \in \gamma \setminus E$ отнесем жорданову дугу $\Lambda_\zeta \subset D$, оканчивающуюся в ζ.

Пусть M_r^* — замыкание объединения $\bigcup C(f, \zeta; \Lambda_\zeta)$ по всем точкам

$$\zeta \in (\gamma \setminus E) \cap \{|z-\zeta_0| < r\}$$

и пусть $C^*(f, \zeta_0; \Gamma \setminus E) = \bigcap_{r>0} M_r^*$.

Тогда множество

$$S(\zeta_0) = C(f, \zeta_0; D) \setminus C^*(f, \zeta_0; \Gamma \setminus E)$$

открыто, множество $S(\zeta_0) \setminus R(f, \zeta_0; D)$ имеет емкость нуль, а каждое значение $a \in S(\zeta_0) \setminus R(f, \zeta_0; D)$ является асимптотическим значением функции f либо в точке ζ_0, либо в каждой точке нек-рой последовательности $\{\zeta_n\}$, $\zeta_n \in \Gamma$, $n=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta_0$. Если емкость E равна нулю, то для каждой связной компоненты $S_k(\zeta_0)$, $k=1, 2, \ldots$, множества $S(\zeta_0)$ множество $S_k(\zeta_0) \setminus R(f, \zeta_0; D)$ состоит самое большее из двух различных значений.

С помощью *нормальных семейств* была доказана теорема Линделёфа: если голоморфная функция f ограничена в круге D и имеет асимптотич. значение a в точке $\zeta_0 \in \Gamma$, то она имеет в этой же точке значение a и в качестве углового граничного значения. Нормальность семейства $F = \{f(z)\}$ мероморфных функций $f(z)$ в области G можно характеризовать в терминах т. н. сферической производной

$$\rho(f(z)) = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}.$$

Именно, семейство F нормально тогда и только тогда, когда сферич. производные $\rho(f(z))$, $f \in F$, равномерно ограничены внутри G, т. е. для любого компакта $K \subset G$ можно указать такую постоянную $C = C(K)$, что

$$\rho(f(z)) \leqslant C(K), \quad z \in K, \quad f \in F.$$

Однако наиболее важный вклад нормальных семейств в теорию П. м. формулируется при помощи понятия нормальной функции. Мероморфная в односвязной области G функция $f(z)$ наз. нормальной функцией в G, если нормально семейство $\{f(S(z))\}$, где S пробегает семейство всех конформных автоморфизмов области G; $f(z)$ нормальна в многосвязной области G, если она нормальна на универсальной накрывающей поверхности G. Мероморфная функция $f(z)$ в круге $D = \{|z| < 1\}$ нормальна тогда и только тогда, когда существует константа $C = C(f)$, $0 < C < \infty$, такая, что

$$\rho(f(z))\,|dz| \leqslant C \frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

Здесь левая часть есть элемент длины в т. н. хордальной метрике на сфере Римана Ω для отображения $w = f(z)$, а стоящее в правой части выражение $d\sigma(z) = |dz|/(1-|z|^2)$ есть элемент длины в гиперболич. метрике круга D. Ограниченные голоморфные функции и мероморфные функции, не принимающие трех различных значений, являются нормальными функциями, и нек-рые свойства функций названных классов переносятся на произвольные нормальные функции. Напр., для произвольной нормальной функции справедливо утверждение теоремы Линделёфа. Класс всех нормальных мероморфных функций в круге D имеет нек-рое сходство с классом *ограниченного вида функций*. Однако имеются и существенные различия. Напр., существуют нормальные мероморфные функции без асимптотич. значений, а следовательно и без радиальных граничных значений, чего не может быть для функций ограниченного вида. Важные исследования асимптотич. значений были проведены Дж. Мак-Лейном (G. R. MacLane, см. [7], [9]). Теория Мак-Лейна позволила получить новые доказательства известных ранее свойств нормальных функций; так, напр., множество точек $\zeta \in \Gamma$, в к-рых нормальная голоморфная функция $f(z)$ имеет асимптотич. значение, а следовательно и угловое граничное значение, плотно на Γ.

С понятием нормальности тесно связано распределение значений мероморфных функций. Последовательность $\{z_n\}$ точек z_n единичного круга D, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n|=1$, наз. *P-последовательностью* для мероморфной функции $f(z)$ в D, если для любой ее бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_k}\}$ и для любого $\varepsilon>0$ множество

$$\Omega\setminus R\left(f,\ z;\ \bigcup_{k=1}^{\infty}\{z\in D:\sigma\left(z,\ z_{n_k}\right)<\varepsilon\}\right)$$

состоит самое большее из двух значений. Показано, что f обладает хотя бы одной P-последовательностью в том и только в том случае, если

$$\lim_{|z|\to 1}\sup q_f(z)=+\infty,\ q_f(z)=(1-|z|^2)\,\rho\,(f(z)).$$

Таким образом, распределение значений мероморфной функции $f(z)$ связано со строением П. м. непрерывной функции $q_f(z)$.

Существенные продвижения имеются в теории П. м. общих отображений $f: D\to\Omega$, $D=\{|z|<1\}$. Так, еще в 1955 была доказана *теорема о точках неопределенности*: для произвольного отображения $f: D\to\Omega$ точки $\zeta\in\Gamma$, в к-рые можно провести две непрерывные кривые L_ζ^1 и L_ζ^2 такие, что

$$C\ (f,\ \zeta;\ L_\zeta^1)\neq C\ (f,\ \zeta;\ L_\zeta^2),$$

образуют самое большее счетное множество. *Теорема максимальности Коллингвуда*: пусть L_0 — произвольный континуум в круге D такой, что $L_0\cap\Gamma=\{z=1\}$, и пусть континуум L_θ получается из L_0 поворотом на угол θ вокруг начала координат; тогда для произвольного отображения $f: D\to\to\Omega$ точки $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$, в к-рых

$$C\ (f,\ \zeta;\ L_\theta)\neq C\ (f,\ \zeta;\ D),$$

образуют множество первой категории на Γ. Точку $\zeta\in\Gamma$ относят к множеству $C(f)$, если П. м. $C(f,\ \zeta;\ D)$ совпадает с пересечением

$$\bigcap\ C\ (f,\ \zeta;\ \Delta\,(\zeta,\ \varphi_1,\ \varphi_2))$$

по всем угловым областям с вершиной ζ. Доказано [10], что

$$\Gamma=C\ (f)\cup E$$

для произвольного отображения $f: D\to\Omega$, где E — множество типа F_σ и первой категории. Обратно, для произвольного множества $E\subset\Gamma$ типа F_σ и первой категории существует голоморфная и ограниченная в D функция $f(z)$, для к-рой $E=\Gamma\setminus C(f)$. Множество $C(f)$ является подмножеством множества $K(f)$, состоящего из таких точек $\zeta\in\Gamma$, в к-рых

$$C\ (f,\ \zeta;\ \Delta\,(\zeta,\ \varphi_1,\ \varphi_2))=C\ (f,\ \zeta;\ \Delta\,(\zeta,\ \varphi_1',\ \varphi_2'))$$

для любых двух угловых областей $\Delta(\zeta,\ \varphi_1,\ \varphi_2)$ и $\Delta(\zeta,\ \varphi_1',\ \varphi_2')$. Пусть $E\subset\Gamma$ и $\zeta\in\Gamma$. Для данного $\varepsilon>0$ пусть $r(\zeta,\ \varepsilon,\ E)$ обозначает длину наибольшей открытой дуги на Γ, лежащей в дуговой ε-окрестности $\{e^{i\theta}:|\theta-\arg\zeta|<<\varepsilon\}$ точки ζ и не имеющей общих точек с E; если такой дуги нет, то полагают $r(\zeta,\ \varepsilon,\ E)=0$. Множество E наз. *пористым* на Γ, если для любой точки $\zeta\in E$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup r\ (\zeta,\ \varepsilon,\ E)>0;$$

σ-пористое множество есть объединение не более чем счетного числа пористых множеств. Всякое σ-пористое множество есть множество первой категории и линейной меры нуль. Для произвольного отображения $f: D \to \Omega$ справедливо равенство $\Gamma = K(f) \cup E$, где E есть σ-пористое множество типа $G_{\delta\sigma}$. Обратно, для произвольного σ-пористого множества E существует голоморфная и ограниченная в D функция $f(z)$, для к-рой $\Gamma \setminus K(f) \supset E$.

О теории П. м. для функций многих комплексных переменных см., напр., [15] — [17].

Лит.: [1] Painlevé P., Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles..., P., 1897; [2] Zoretti L., Leçons sur le prolongement analytique..., P., 1911; [3] Голубев В. В., Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, М., 1961; [4] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [5] Носиро Киоси, Предельные множества, пер. с англ., М., 1963; [6] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [7] Мак-Лейн Г., Асимптотические значения голоморфных функций, пер. с англ., М., 1966; [8] Маркушевич А. И., Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я., в кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, М., 1961, с. 100—10; [9] Ловатер А., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259; [10] Долженко Е. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 1, с. 3—14; [11] его же, «Ann. Math.», 1976, v. 2, p. 191—201; [12] Гаврилов В. И., «Докл. АН СССР», 1974, т. 216, № 1, с. 21—23; [13] Гаврилов В. И., Канатников А. Н., там же, 1977, т. 233, № 1, с. 15—17; [14] Канатников А. Н., там же, 1978, т. 238, № 5, с. 1043—1046; [15] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974; [16] Хенкин Г. М., Чирка Е. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 13—142; [17] Rudin W., Function theory in the unit ball of C^n, N.Y.—[e.a.], 1980.

В. И. Гаврилов, Е. Д. Соломенцев.

ПРЕДЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО траектории $\{f^t x\}$ динамической системы f^t — множество A_x всех α-предельных точек (α-предельное множество) или множество Ω_x всех ω-предельных точек (ω-предельное множество) этой траектории (см. *Предельная точка* траектории). Для траектории $\{f^t x\}$ системы (или, иначе, $f(t, x)$, см. [1]) α-П. м. (соответственно ω-П. м.) — то же, что ω-П. м. (соответственно α-П. м.) траектории $\{f^{-t} x\}$ динамич. системы f^{-t} (системы с обращением времени). Поэтому свойства α-П. м. аналогичны свойствам ω-П. м.

Множество Ω_x — замкнутое инвариантное множество. Если $\Omega_x = \varnothing$, то траектория $\{f^t x\}$ наз. уходящей в положительном направлении; если $A_x = \varnothing$, то траектория $\{f^t x\}$ наз. уходящей в отрицательном направлении; если $\Omega_x = A_x = \varnothing$, то траектория наз. уходящей. Если $x \in \Omega_x$, то точка x наз. положительно устойчивой по Пуассону; если $x \in A_x$, то точка x наз. отрицательно устойчивой по Пуассону; если $x \in \Omega_x \cap A_x$, то точка x наз. устойчивой по Пуассону. Если $x \notin \Omega_x$ и $\Omega_x \neq \varnothing$, то точка x наз. положительно асимптотической; если $x \notin A_x$ и $A_x \neq \varnothing$, то точка x наз. отрицательно асимптотической.

Если точка x положительно устойчива по Лагранжу (см. *Устойчивость по Лагранжу*), то Ω_x — непустое связное множество,

$$\lim_{t \to +\infty} d(f^t x, \Omega_x) = 0$$

(где $d(z, Y)$ — расстояние от точки z до множества Y) и в Ω_x найдется *рекуррентная точка* (траектория). Если x — неподвижная точка, то $\Omega_x = \{x\}$. Если x — периодич. точка, то

$$\Omega_x = \{f^t x\}_{t \in \mathbb{R}} = \{f^t x\}_{t \in [0, T)},$$

где T — период. Если точка x положительно устойчива по Пуассону, но не неподвижная и не периодическая, а метрич. пространство, на к-ром задана рассматриваемая динамич. система, полно, то в Ω_x всюду плотны точки, не принадлежащие траектории $\{f^t x\}$.

Если динамич. система задана на плоскости автономной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^2,\ f \in C^1$$

(гладким векторным полем $f(x)$), точка x положительно устойчива по Лагранжу, но не периодическая и $f(x)$ не обращается в нуль на множестве Ω_x (т. е. множество Ω_x не содержит неподвижных точек), то Ω_x — цикл, т. е. замкнутая кривая (траектория периодич. точки), а траектория $\{f^t x\}$ при $t \to +\infty$ спиралевидно наматывается на этот цикл. У динамич. систем, заданных на $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, или на нек-рых двумерных поверхностях, напр. на торе, ω-П. м. могут быть устроены иначе. Напр., у иррациональной обмотки тора (система $\dot{\varphi} = 1$, $\dot{\psi} = \mu$, где (φ, ψ) (mod 1) — циклич. координаты на торе T^2, μ — иррациональное число) множество Ω_x для всякой точки $x = (\varphi, \psi)$ совпадает со всем тором.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [2] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974.

В. М. Миллионщиков.

ПРЕДЕЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ ПРИНЦИП — способ однозначного выделения решений стационарных уравнений, описывающих установившиеся колебания, через предел при $t \to \infty$ амплитуды решений соответствующих нестационарных уравнений с нулевыми начальными данными и периодической по t правой частью вида $f(x)e^{\pm i\omega t}$. Справедливость П. а. п. означает, что решение $v(x, t)$ указанной нестационарной задачи при $t \to \infty$ имеет вид

$$v(x, t) = u_{\pm}(x)\, e^{\pm i\omega t} + o(1), \qquad (*)$$

где $u_{\pm}$ — решения стационарного уравнения.

Впервые этот принцип был предложен (см. [1]) для уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^n$

$$(\Delta + k^2)\, u = f,$$

он выделяет те же решения этого уравнения, что и *излучения условия* и *предельного поглощения принцип*. Справедливость П. а. п. исследована: для уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами во внешности ограниченной области (см. [2], [3]), уравнения Гельмгольца в нек-рых областях с некомпактной границей (см. [3], [4]), задачи Коши — Пуассона в полосе (см. [5]), нек-рых уравнений высокого порядка (см. [3], [6]), смешанных задач во внешности ограниченной области для уравнений и систем любого порядка с переменными коэффициентами (см. [7]). В последнем случае условия излучения и принцип предельного поглощения выделяют $2^{\varkappa}$, $1 < \varkappa < \infty$, решений стационарного уравнения, а П. а. п. дает два из них. Указаны (см. [8]) такие постановки П. а. п., к-рые позволяют получить все эти $2^{\varkappa}$ решений.

Для справедливости П. а. п. необходимо, чтобы $f(x)$ была ортогональна всем собственным функциям стационарной задачи. Поэтому П. а. п. не справедлив в ограниченной области. Пусть P_λ — оператор, к-рый соответствует зависящей полиномиально от спектрального параметра λ стационарной задаче, полученной из смешанной задачи для нестационарного уравнения заменой в уравнении и граничных условиях оператора дифференцирования $i\partial/\partial t$ на параметр λ. Справедливость для оператора P_λ, $\lambda = \text{const}$, П. а. п. связана с возможностью аналитич. продолжения ядра резольвенты $R_\lambda \equiv P_\lambda^{-1}$ на непрерывный спектр и гладкостью по λ этого продолжения (см. [3], [7]). Если ядро R_λ допускает аналитич. продолжение через непрерывный спектр и имеет подходящие оценки при $\lambda \to \infty$, то можно написать асимптотику при $t \to \infty$ остатка 0 (1) в (*), а также получить асимптотику при $t \to \infty$ решений других нестационарных задач (см. [2], [7]). Указанные свойства R_λ получены в [7] для смешанных задач во внешности ограниченной области для уравнений и систем любого порядка.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., «Ж. эксперимент. и теоретич. физики», 1948, т. 18, № 2, с. 243—248; [2] Ладыженская О. А., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 3, с. 161—64; [3] Эйдус Д. М., там же, 1969, т. 24, в. 3, с. 91—156; [4] Свешников А. Г., «Докл. АН СССР», 1950, т. 73, № 5, с. 917—20; [5] Исакова Е. К., «Дифференциальные уравнения», 1970, т. 6, № 1, с. 56—71; [6] Михайлов В. П., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1967, т. 91, с. 100—12; [7] Вайнберг Б. Р., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 2, с. 3—55; [8] его же, «Изв. ВУЗов. Математика», 1974, № 2, с. 12—23.
Б. Р. Вайнберг.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ теории вероятностей — общее название ряда теорем теории вероятностей, указывающих условия возникновения тех или иных закономерностей в результате действия большого числа случайных факторов. Первые П. т., установленные Я. Бернулли (J. Bernoulli, 1713) и П. Лапласом (P. Laplace, 1812), относятся к распределению отклонений частоты μ_n/n появления нек-рого события E при n независимых испытаниях от его вероятности p, $0<p<1$ (точные формулировки см. в статьях *Бернулли теорема*, *Лапласа теорема*). С. Пуассон (S. Poisson, 1837) распространил эти теоремы на случай, когда вероятность p_k наступления события E в k-м испытании может зависеть от k, описав предельное поведение при $n \to \infty$ распределения отклонений частоты μ_n/n от среднего арифметического $\overline{p}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k$ вероятностей p_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ (см. *Пуассона теорема*). Если обозначить через X_k случайную величину, принимающую значение, равное единице при появлении события E в k-м испытании, и значение, равное нулю при появлении противоположного события, μ_n можно представить в виде суммы

$$\mu_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

что позволяет рассматривать перечисленные теоремы как частные случаи двух более общих утверждений, относящихся к суммам независимых случайных величин — *больших чисел закона* и *центральной предельной теоремы* (к-рые приводятся ниже в их классич. формулировке).

Закон больших чисел. Пусть

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots \tag{1}$$

— последовательность независимых случайных величин, s_n — сумма первых n из них:

$$s_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \tag{2}$$

A_n и B_n^2 — соответственно математич. ожидание

$$A_n = \mathsf{E}s_n = \mathsf{E}X_1 + \mathsf{E}X_2 + \ldots + \mathsf{E}X_n$$

и дисперсия

$$B_n^2 = \mathsf{D}s_n = \mathsf{D}X_1 + \mathsf{D}X_2 + \ldots + \mathsf{D}X_n$$

суммы s_n. Говорят, что последовательность (1) подчиняется закону больших чисел, если при любом $\varepsilon > 0$ вероятность неравенства

$$\left| \frac{s_n}{n} - \frac{A_n}{n} \right| > 0$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

Широкие условия приложимости закона больших чисел найдены впервые П. Л. Чебышевым (1867) и затем обобщены А. А. Марковым (1906). Вопрос о необходимых и достаточных условиях приложимости закона больших чисел был окончательно решен А. Н. Колмогоровым (1928). В случае, когда случайные величины X_n имеют одну и ту же функцию распределения, эти условия, как показал А. Я. Хинчин (1929), сводятся к одному: величины X_n должны иметь конечные математич. ожидания.

Центральная предельная теорема. Говорят, что к последовательности (1) применима центральная предельная теорема, если при любых z_1 и z_2 вероятность неравенства

$$z_1 B_n < s_n - A_n < z_2 B_n$$

имеет пределом при $n \to \infty$ величину

$$\Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\, dx$$

(см. *Нормальное распределение*). Довольно общие достаточные условия применимости центральной П. т. были указаны П. Л. Чебышевым (1887), но в его доказательстве обнаружились пробелы, восполненные лишь позже А. А. Марковым (1898). Решение вопроса, близкое к окончательному, было получено А. М. Ляпуновым (1901). Точная формулировка теоремы Ляпунова такова: пусть

$$c_k = \mathsf{E}\,|X_k - \mathsf{E}X_k|^{2+\delta},\ \delta > 0,$$

$$C_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n.$$

Если отношение $L_n = C_n / B_n^{2+\delta}$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то к последовательности (1) применима центральная П. т. Окончательное решение вопроса об условиях применимости центральной П. т. получено в основных чертах С. Н. Бернштейном (1926) и дополнено В. Феллером (W. Feller, 1935). В условиях центральной П. т. относительная точность аппроксимации вероятности неравенства типа $s_n - A_n > z_n B_n$, где z_n неограниченно растет вместе с n, величиной $1 - \Phi(z_n)$ может быть весьма невысокой. Необходимые для повышения точности поправочные множители указываются в П. т. для вероятностей больших отклонений (см. *Больших отклонений вероятности*, *Крамера теорема*). Вслед за Г. Крамером (H. Cramèr) и В. Феллером вопрос исследовался Ю. В. Линником и др. Типичные результаты, относящиеся к этой области, легче всего пояснить на примере сумм (2) независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ с $\mathsf{E}X_j = 0$ и $\mathsf{D}X_j = 1$; в этом случае $A_n = 0$, $B_n = \sqrt{n}$.

Пусть, напр., рассматривается вероятность неравенства

$$s_n \geqslant z_n \sqrt{n}.$$

Эта вероятность равна $1 - F_n(z_n)$, где $F_n(z)$ — функция распределения величины $s_n / \sqrt{n}$ и при фиксированных $z_n = z$ и $n \to \infty$

$$1 - F_n(z) \longrightarrow 1 - \Phi(z). \qquad (3)$$

Если z_n зависит от n, причем так, что $z_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$1 - F_n(z_n) \longrightarrow 0 \text{ и } 1 - \Phi(z_n) \longrightarrow 0$$

и формула (3) становится бесполезной. Необходимы оценки для относительной точности аппроксимации, т. е. для отношения $1 - F_n(z_n)$ к $1 - \Phi(z_n)$. В частности, естественно возникает вопрос об условиях, при к-рых

$$\frac{1 - F_n(z_n)}{1 - \Phi_n(z_n)} \longrightarrow 1 \qquad (4)$$

для $z_n \to \infty$.

Соотношение (4) может выполняться при любом росте z_n только при условии, что сами слагаемые имеют нормальный закон (этот вывод верен уже при z_n по порядку, больших $\sqrt{n}$). Если же слагаемые не являются нормальными, то это соотношение может выполняться лишь в определенных з о н а х, к-рые по порядку не превосходят $\sqrt{n}$. Наиболее «узкие» (логарифмического порядка) зоны получаются при условии конечности определенного числа моментов. При этом в определенных условиях «регулярности» плотности слагаемых можно проследить переход «нормальной» асимптотики в степенную. Напр., если плотность слагаемых X_j равна

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{(1+z^2)^2},$$

то равномерно по z при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{s_n}{\sqrt{n}} \geqslant z\right\} \sim 1-\Phi(z)+\frac{2}{3\pi}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{z^3};$$

учитывая, что при $z \to \infty$

$$1-\Phi(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, z}\, e^{-z^2/2},$$

легко понять, при каких z имеет место (4). Расширение зоны до степенной (вида n^{α}, $\alpha<{}^1/_2$), требует условия

$$\mathsf{E}e^{|X_j|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}}<\infty \tag{5}$$

и совпадения определенного (зависящего от α) числа моментов X_j с соответственными моментами нормального распределения. Если же условие совпадения моментов не выполнено, то отношение в левой части (4) описывается в терминах ряда Крамера (при так наз. условии Крамера, см. *Крамера теорема*) или его начальных отрезков (при выполнении условий типа (5)).

Оценки вероятностей больших отклонений используются в математич. статистике, статистич. физике и т. д.

Из других направлений работ в области П. т. можно отметить следующие.

1) Начатые А. А. Марковым и продолженные С. Н. Бернштейном и др. исследования условий приложимости закона больших чисел и центральной П. т. к суммам зависимых случайных величин.

2) Даже в случае последовательности одинаково распределенных случайных величин можно указать простые примеры, когда «нормированные» (т. е. подвергнутые какому-либо линейному преобразованию) суммы $(s_n-a_n)/b_n$, где a_n, $b_n>0$ — постоянные, имеют в пределе распределение, отличное от нормального (речь идет о невырожденных распределениях, т. е. распределениях, не сосредоточенных целиком в одной точке) (см. *Устойчивое распределение*). В работах А. Я. Хинчина, Б. В. Гнеденко, П. Леви (P. Lévy), В. Дёблина (W. Doeblin) и др. полностью изучены как класс возможных распределений для сумм независимых случайных величин, так и условия сходимости распределений сумм к тому или иному предельному распределению (в схеме серий случайных величин при условии *асимптотической пренебрегаемости* слагаемых) (см. *Безгранично делимое распределение*, *Случайный процесс с независимыми приращениями*).

3) Значительное внимание уделяется т. н. *локальным предельным теоремам*. Пусть, напр., случайные величины X_n принимают лишь целые значения. Тогда суммы s_n принимают также только целые значения и естественно поставить вопрос о предельном поведении вероятностей $P_n(m)$ того, что $s_n=m$, где m — целое. Простейшим примером локальной П. т. может служить локальная теорема Лапласа. Другой тип ло-

кальных П. т. описывает предельное распределение плотностей распределения сумм.

4) П. т. в их классич. постановке описывают поведение отдельной суммы s_n с возрастанием номера n. Достаточно общие П. т. для вероятностей событий, зависящих сразу от нескольких сумм, получены впервые А. Н. Колмогоровым (1931). Так, напр., из его результатов следует, что при весьма широких условиях вероятность неравенства

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |s_k| < zB_n$$

имеет пределом величину

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)^2 z^2/8\pi^2}, \quad z > 0.$$

Наиболее общий способ доказательства подобных П. т.— предельный переход от дискретных процессов к непрерывным.

5) Перечисленные выше П. т. относятся к суммам случайных величин. Примером П. т. иного рода могут служить П. т. для членов вариационного ряда. Эти П. т. подробно изучены Б. В. Гнеденко, Н. В. Смирновым и др.

6) Наконец, к П. т. относят также и теоремы, устанавливающие свойства последовательностей случайных величин, имеющие место с вероятностью, равной единице (см., напр., *Больших чисел усиленный закон*, *Повторного логарифма закон*).

О методах доказательства П. т. см. в статьях *Характеристическая функция*, *Распределений сходимость*.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [2] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [4] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973.

Ю. В. Прохоров.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ КОНУС выпуклой поверхности S — поверхность $P(S)$ конуса, образованного полупрямыми, исходящими из нек-рой точки $O \in S$ и принадлежащими выпуклому телу, ограниченному S. П. к. определен однозначно с точностью до параллельного переноса, зависящего от выбора точки O. Понятие П. к. определяется и для нек-рых классов невыпуклых поверхностей, напр. для т. н. сферически однолистных седловых поверхностей.

Лит.: [1] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.

М. И. Войцеховский.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ — замкнутая траектория в фазовом пространстве автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к-рая является α- или ω-предельным множеством (см. *Предельное множество* траектории) хотя бы для одной другой траектории этой системы. П. ц. наз. орбитально устойчивым, или устойчивым, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что все траектории, начинающиеся в δ-окрестности П. ц. при $t=0$, не выходят из его ε-окрестности при $t > 0$. П. ц. соответствует периодич. решение системы, отличное от постоянного. Если оно устойчиво по Ляпунову, то П. ц. устойчив. Для того чтобы периодич. решению соответствовал устойчивый П. ц., достаточно, чтобы модули всех его *мультипликаторов*, кроме одного, были меньше единицы (см. *Орбитальная устойчивость*, *Андронова — Витта теорема*). С физич. точки зрения П. ц. соответствует периодич. режиму, или *автоколебанию*, системы (см. [2]).

Пусть автономная система

$$\dot{x} = f(x), \qquad (*)$$

определенная в области $U \subset V^n$, где V^n — дифференцируемое многообразие, напр. $V^n=\mathbb{R}^n$, имеет замкнутую траекторию Г. Проведем гиперповерхность π, пересекающую Г трансверсально в точке p. Тогда любая траектория системы, начинающаяся при $t=0$ в точке $c\in V\subset\pi$, где V — достаточно малая окрестность точки p, при увеличении t снова пересечет π в точке $T(c)$. Диффеоморфизм $T:V\to T(V)$ имеет неподвижную точку p и наз. *последования отображением*. Его свойства определяют поведение траекторий системы в окрестности Г. П. ц. в отличие от произвольной замкнутой траектории всегда определяет отличное от тождественного отображение последования. Если p — седловая точка диффеоморфизма T, то П. ц. наз. П. ц. седлового типа. Система, имеющая П. ц. седлового типа, может иметь гомоклинич. кривую, т. е. траекторию, для к-рой П. ц. является одновременно как α-, так и ω-предельным множеством.

В случае двумерной системы (*) ($V^n=\mathbb{R}^2$) в качестве π берут прямую и рассматривают функцию $\rho:\rho(c)=T(c)-c$, к-рая наз. функцией последования. Кратность нуля $c=p$ функции ρ наз. кратностью П. ц. Предельный цикл четной кратности наз. полуустойчивым. П. ц. вместе с точками покоя и *сепаратрисами* определяют качественную картину поведения остальных траекторий (см. *Пуанкаре — Бендиксона теория*, а также [3], [4]). П. ц. в случае аналитич. функций $f(x)$ принадлежит к одному из типов: 1) устойчивый, 2) неустойчивый, т. е. устойчивый П. ц., если изменить направление t на противоположное, 3) полуустойчивый. Напр., система

$$\dot{x}_1=-\omega x_2+\mu x_1(x_1^2+x_1^2-1)^k,$$
$$\dot{x}_2=\omega x_1+\mu x_2(x_1^2+x_2^2-1)^k,$$

где $\omega\neq 0$, $\mu=\mathrm{const}$, $k\in\mathbb{N}$, имеет при $\mu<0$ ($\mu>0$) и k нечетном устойчивый (неустойчивый), а при k четном — полуустойчивый П. ц. кратности k; во всех этих случаях П. ц. является окружность $x_1^2+x_2^2=1$, т. е. траектория решения

$$x_1=\cos(\omega t+\varphi_0),\ x_2=\sin(\omega t+\varphi_0).$$

Если система (*) задана на односвязной области $U\subset\mathbb{R}^2$, то П. ц. окружает по крайней мере одну точку покоя этой системы.

Для разыскания П. ц. в системе 2-го порядка применяется метод, основанный на следующем утверждении: если векторное поле $f(x)$ направлено вовнутрь (вовне) кольцеобразной области G и в G нет точек покоя, то в G имеется хотя бы один устойчивый (неустойчивый) П. ц. Выбор области G производится из физич. соображений или результатов аналитических или численных расчетов.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974; [2] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [3] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [4] их же, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, М., 1967; [5] Плисс В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М.— Л., 1964; [6] Моисеев Н. Н., Асимптотические методы нелинейной механики, 2 изд., М., 1981. *Л. А. Черкас.*

ПРЕДИКАТ — функция, значениями к-рой являются высказывания об n-ках объектов, представляющих значения аргументов; при $n=1$ П. наз. «свойством», при $n>1$ — «отношением», единичные высказывания могут рассматриваться как нульместные П.

Чтобы задать n-местный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$, следует указать множества $D_1, \ldots, D_n$ — области изменения предметных переменных $x_1, \ldots, x_n$, причем чаще всего рассматривают случай $D_1=D_2=\ldots=D_n$. С теоретико-множественной точки зрения П. определяется заданием подмножества M

в декартовом произведении $D_1 \times \ldots \times D_n$. При этом $P(a_1, \ldots, a_n)$ понимают как высказывание «упорядоченный набор $(a_1, \ldots, a_n)$ принадлежит M». Синтаксич. задание n-местного П. осуществляется указанием формулы логико-математич. языка, содержащей n свободных переменных. Понятие П. восходит к Аристотелю; аппарат оперирования с высказываниями, содержащими в своем составе П., разработан в математич. логике (см. *Логические исчисления*, *Предикатов исчисление*).

С. Ю. Маслов.

ПРЕДИКАТИВНОСТЬ — особый способ образования понятий, характеризующийся отсутствием «порочного круга» в определениях: определяемый объект не должен участвовать в своем собственном определении. Если язык, на к-ром даются определения, формализован, то П. означает, как правило, что определяющая формула не должна содержать связанной переменной, в область изменения к-рой входит определяемый объект.

Непредикативные определения, наоборот, отличаются наличием в них такого «порочного круга». Явление непредикативности встречается также в нек-рых рассуждениях, когда в процессе обоснования нек-рая часть проводимого рассуждения сама рассматривается как объект рассуждения. Именно использование такого типа рассуждений является причиной появления семантич. *антиномий*. Типичный пример — установление противоречия в т. н. парадоксе лжеца: если некто утверждает — «я лгу», то это утверждение не может быть истинным и не может быть ложным.

В. Н. Гришин, А. Г. Драгалин.

ПРЕДИКАТНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ — переменная, значениями к-рой могут быть *предикаты*. При формальном построении аксиоматич. систем П. п. отличаются от *индивидных переменных* тем, что вместо них можно подставлять формулы. Так, в исчислении предикатов 2-й ступени, если в аксиоме

$$\forall x \varphi(x) \longrightarrow \varphi(t)$$

x — предикатная переменная для n-местных предикатов, то в качестве t можно взять любую формулу с n отмеченными переменными. При этом результатом подстановки формулы t с отмеченными переменными $z_1, \ldots, z_n$ вместо П. п. x в атомарную формулу $x(y_1, \ldots, y_n)$, где $y_1, \ldots, y_n$ — индивидные переменные, является формула $t(y_1/z_1, \ldots, y_n/z_n)$, получающаяся из t одновременной заменой свободных вхождений $z_1, \ldots, z_n$ на $y_1, \ldots, y_n$ соответственно.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960; [2] Такеути Г., Теория доказательств, пер. с англ., М., 1978.

В. Н. Гришин.

ПРЕДИКАТНЫЙ СИМВОЛ, предикатная буква,— обозначение какого-либо конкретного предиката. Напр., символом $\leqslant$ часто обозначают отношение порядка на действительных числах, являющееся двуместным предикатом. При формальном построении языка символы, отнесенные к категории предикатных, должны определенным образом использоваться для построения выражений языка. Именно, если P есть n-местный П. с., то среди синтаксич. правил образования выражений формализованного языка должно быть правило: «если $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ — формула». Таким образом, П. с. синтаксически используются для образования формул, а семантически обозначают предикаты.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А., Математическая логика, М., 1979. *В. Н. Гришин.*

ПРЕДИКАТОВ ИСЧИСЛЕНИЕ — формальная аксиоматич. теория; исчисление, предназначенное для описания *логических законов*, справедливых для любой непустой области объектов с произвольными заданными на этих объектах **предикатами** (т. е. свойствами и отношениями).

Для формулировки П. и. следует вначале формулировать точный логико-математический язык Ω. В наиболее распространенном случае односортных языков 1-го порядка такой язык содержит предметные переменные $x, y, z, \ldots$, функциональные символы $f, g, h, \ldots$ с различным количеством аргументных мест и предикатные символы (предикатные буквы) $P, Q, R, \ldots$ также с различным количеством аргументных мест. Из переменных и функциональных символов конструируются термы языка, содержательно интерпретируемые как имена объектов исследования теории. Далее, если P есть n-местный предикатный символ языка Ω, $n \geqslant 0$, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ есть, по определению, атомарная (элементарная) формула языка Ω. Содержательно $P(t_1, \ldots, t_n)$ означает, что истинно высказывание, гласящее, что объекты $t_1, \ldots, t_n$ связаны отношением P.

Из атомарных формул с помощью *пропозициональных связок* и *кванторов* конструируются формулы языка. Обычный набор связок и кванторов в классическом и интуиционистском П. и. таков: & или $\wedge$ (конъюнкция, «и»), $\vee$ (дизъюнкция, неразделительное «или»), $\rightarrow$ или $\supset$ (импликация, «влечет», «если..., то»), $\urcorner$ (отрицание, «не»), $\forall$ (квантор «для всех»), $\exists$ (квантор «существует»). Соответственно неэлементарные формулы этих исчислений имеют вид $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \supset \psi)$, $\urcorner\varphi$, $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$. Вхождение переменной x в формулу φ наз. связанным, если x входит в часть φ вида $\exists x\varphi$ или $\forall x\psi$. Остальные вхождения x в φ наз. свободными. Переменная x наз. параметром φ, если найдется хотя бы одно свободное вхождение x в φ. Интуитивно говоря, формула с параметрами выражает нек-рое условие, к-рое превращается в конкретное высказывание, если задать модель исчисления, т. е. выбрать нек-рую непустую область объектов исследования и приписать предикатным символам предикаты (т. е. отношения на области объектов), а параметрам приписать в качестве значений определенные объекты.

П. и. задается с помощью аксиом и правил вывода. Напр., одна из обычных формулировок классического исчисления предикатов содержит следующие аксиомы:

1. $(\varphi \supset (\psi \supset \varphi))$,
2. $((\varphi \supset (\psi \supset \eta)) \supset ((\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \supset \eta)))$,
3. $((\varphi \wedge \psi) \supset \varphi)$,
4. $((\varphi \wedge \psi) \supset \psi)$,
5. $(\varphi \supset (\psi \supset (\varphi \wedge \psi)))$,
6. $((\varphi \supset \eta) \supset ((\psi \supset \eta) \supset ((\varphi \vee \psi) \supset \eta)))$,
7. $(\varphi \supset (\varphi \vee \psi))$,
8. $(\psi \supset (\varphi \vee \psi))$,
9. $(\urcorner\varphi \supset (\varphi \supset \psi))$,
10. $((\varphi \supset \psi) \supset ((\varphi \supset \urcorner\psi) \supset \urcorner\varphi))$,
11. $(\varphi \vee \urcorner\varphi)$,
12. $(\forall x\varphi \supset \varphi(x \mid t))$,
13. $(\varphi(x \mid t) \supset \exists x\varphi)$,
14. $(\forall x(\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \supset \forall x\psi))$,
15. $(\forall x(\psi \supset \varphi) \supset (\exists x\psi \supset \varphi))$.

Здесь φ, ψ, η обозначают произвольные формулы языка Ω, так что каждая из строчек 1—15 представляет собой аксиомную схему, порождающую конкретную аксиому исчисления при конкретном выборе формул φ, ψ, η. Далее, в схемах 14 и 15 предполагается, что x — не параметр формулы φ; в схемах 12 и 13 через $\varphi(x|t)$ обозначен результат одновременного замещения всех свободных вхождений переменной x в φ на терм t

(причем если t оказался на месте x в части формулы φ, имеющей вид $\exists y\psi$ или $\forall yx$, где y входит в t, то следует дополнительно заменить все связанные вхождения y в эту часть на переменную, не входящую в φ; это делается для того, чтобы не допустить искажения смысла φ при замене x на t; такое искажение смысла наз. коллизией переменных).

Далее, П. и. содержит два правила вывода: 1) если выведены формулы вида φ и $(\varphi\supset\psi)$, то разрешается вывести формулу ψ (правило *модус поненс*) и 2) если выведена формула φ и x — переменная, то разрешается вывести формулу $\forall x\varphi$ (правило обобщения).

Истолкование логич. связок в П. и. такое же, как и в *высказываний исчислении*. Что касается истолкования кванторов, то они в классическом П. и. трактуются с использованием актуальной бесконечности. Если задать интерпретацию языка, то каждая формула без параметров получает значение «истина» или «ложь». Формула наз. классически общезначимой, если она в любой интерпретации и при любом приписывании значений параметрам принимает значение «истина». В силу *Гёделя теоремы о полноте* в классическом П. и. выводимы все классически общезначимые формулы и только они. Эта теорема представляет собой точное выражение идеи формализации классич. логики: в классическом П. и. выводятся все логич. законы, общие для всех моделей.

Интуиционистское исчисление предикатов отличается от классического тем, что из числа аксиомных схем исключается схема 11. Различие двух исчислений отражает различное понимание логич. связок и кванторов. В последнем исчислении это понимание трактуется в рамках *интуиционизма*. Вопрос о полноте интуиционистского П. и. оказывается значительно сложнее и допускает различные решения в зависимости от деталей интуиционистской семантики, но и здесь может быть развита весьма содержательная теория моделей, аналогичная классич. *моделей теории* (см. *Крипке модели*, *Реализуемость*).

Употребляются и другие формулировки П. и., среди к-рых с точки зрения *доказательств теории* наиболее важны исчисления натурального вывода (см. *Естественный логический вывод*) и *секвенций исчисление*.

П. и. является обычным базисом для построения логич. исчислений, предназначенных для описания фрагментов тех или иных конкретных математич. теорий. Напр., если мы стремимся описать нек-рый класс истинных суждений теории множеств, то можно построить логич. исчисление в языке теории множеств, в к-ром, кроме аксиом и правил вывода классического П. и. (логич. постулатов), будут фигурировать дополнительные нелогические аксиомы, описывающие свойства множеств. Примером типичной нелогич. аксиомы в теории множеств является *выбора аксиома*.

П. и. иногда наз. узким исчислением предикатов, исчислением предикатов 1-го порядка, функциональным исчислением 1-го порядка, в отличие от исчислений, содержащих кванторы по предикатам и соответствующие аксиомы свертывания, утверждающие существование соответствующих предикатов. Такого рода исчисления, уже не носящие чисто логич. характера, часто наз. П. и. высшего порядка. Примером такого исчисления может служить *типов теория*. Помимо классического и интуиционистского П. и., имеются и другие логич. системы, описывающие логич. законы, к-рые могут быть выражены иными логич. средствами или с иных методологич. позиций. Сюда относятся П. и. модальной, индуктивной логики и др.

Лит.: [1] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., 2 изд., М., 1982; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Новиков П. С.,

Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [4] Такеути Г., Теория доказательств, пер. с англ., М., 1978.

А. Г. Драгалин.

ПРЕДКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО, вполне ограниченное пространство,— *равномерное пространство* X, для всякого окружения U к-рого существует конечное покрытие X множествами порядка U. Другими словами, для каждого окружения $U \subset X$ должно найтись такое конечное множество $F \subset X$, что $X \subset U(F)$. Равномерное пространство компактно тогда и только тогда, когда каждая сеть в X обладает подсетью Коши. Поэтому для того чтобы X было П. и., достаточно, чтобы нек-рое пополнение пространства X было компактным, и необходимо, чтобы каждое пополнение его было компактным.

М. И. Войцеховский.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ — простейшее выражение языка, представляющее собой такое соединение слов, к-рое имеет самостоятельный смысл, т. е. выражает законченную мысль. В формализованных языках П. наз. формулы, не содержащие свободных переменных, т. е. параметров. П. в формализованных языках наз. также замкнутыми формулами. Напр., в языке 1-го порядка (языке узкого исчисления предикатов) формулы

$$\forall x\, \forall y\, \exists z\, (x \leqslant z \,\&\, z \leqslant y), \quad \exists z\, (1 \leqslant z \,\&\, z \leqslant 4), \quad 1 \leqslant 2$$

являются замкнутыми (первая ложная, а вторая и третья — истинные в области натуральных чисел). Формулы

$$\exists z\, (x \leqslant z \,\&\, z \leqslant y), \quad z \leqslant 1$$

не являются замкнутыми, т. к. содержат параметры (x и y — в первой и z — во второй).

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960.

В. Н. Гришин.

ПРЕДМЕРА — конечно аддитивная мера с действительными или комплексными значениями на нек-ром пространстве Ω, обладающая свойством: она определена на алгебре $\mathfrak{A}$ подмножеств Ω, к-рая имеет вид $\mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{B}_\alpha$, где $\mathfrak{B}_\alpha$ — семейство σ-алгебр пространства Ω, помеченных элементами нек-рого частичного упорядоченного множества A так, что $\mathfrak{B}_{\alpha_1} \subset \mathfrak{B}_{\alpha_2}$ при $\alpha_1 < \alpha_2$, и сужение этой меры на любую σ-алгебру $\mathfrak{B}_\alpha$ счетно аддитивно. Напр., если Ω — хаусдорфово топологич. пространство, A — совокупность всех компактов, упорядоченных по вложению, $\mathfrak{B}_\alpha$, $\alpha \in A$, есть σ-алгебра борелевских подмножеств компакта α и $C_0(\Omega)$ — пространство всех непрерывных функций на Ω с компактными носителями, то всякий линейный функционал на $C_0(\Omega)$, непрерывный относительно топологии равномерной сходимости в $C_0(\Omega)$, порождает П. на алгебре $\mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{B}_\alpha$.

Пусть Ω — линейное локально выпуклое пространство, A — совокупность конечномерных подпространств сопряженного пространства Ω', упорядоченных по вложению, $\mathfrak{B}_\alpha, \alpha \in A$,— наименьшая σ-алгебра, относительно которой измерим любой линейный функционал $\varphi \in \alpha$. Множества из алгебры $\mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{B}_\alpha$ наз. цилиндрическими множествами, а любая П. на $\mathfrak{A}$ — цилиндрической мерой (или квазимерой). Любой положительно определенный функционал на пространстве Ω', непрерывный на любом конечномерном подпространстве $\alpha \subset \Omega$, является характеристич. функционалом (преобразованием Фурье) нек-рой конечной неотрицательной П. на Ω.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, пер. с франц., М., 1977.

Р. А. Минлос.

ПРЕДМЕТНАЯ ОБЛАСТЬ, универсум,— термин теории моделей, обозначающий область изменения (пробегания) предметных переменных данного формального языка. В качестве формальных языков берутся языки узкого исчисления предикатов. Каждый такой язык полностью описывается множеством

$$L=\{P_0, \ldots, P_n, \ldots, F_0, \ldots, F_m, \ldots\},$$

где $P_0, \ldots, P_n, \ldots$ — предикатные символы, а $F_0, \ldots, F_m, \ldots$ — функциональные символы, для каждого из к-рых указано число его аргументных мест. Модель $\mathfrak{M}$ (или алгебраич. система) для L задается непустым множеством M и интерпретирующей функцией I, определенной на L и сопоставляющей n-местному предикатному символу n-местный предикат, т. е. подмножество декартовой степени M^n множества M, а n-местному функциональному символу — n-местную функцию $M^n \to M$. Множество M наз. П. о. (или универсумом) модели $\mathfrak{M}$.

Лит.: [1] Клини С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973; [2] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч., Теория моделей, пер. с англ., М., 1977; [3] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А., Математическая логика, М., 1979.

В. Н. Гришин.

ПРЕДМЕТНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ — то же, что *индивидная переменная*. См. также *Предикатов исчисление*.

ПРЕДМЕТНЫЙ ЯЗЫК — язык, являющийся предметом изучения. При формализации какой-либо содержательной теории различают два языка. Один — это язык формализуемой теории, или П. я., задаваемый правилами построения выражений П. я. и семантическими правилами, определяющими, что обозначают его выражения или какие они выражают суждения. Другой — это язык, на к-ром формулируются упомянутые выше синтаксические и семантич. правила. Этот язык наз. *метаязыком*. Обычно метаязык не формализуется. Однако и его можно формализовать, и тогда он станет П. я., для изучения к-рого требуется новый метаязык.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *В. Н. Гришин.*

ПРЕДНОРМА — то же, что *полунорма*.

ПРЕДПОРЯДОК, квазипорядок, предупорядоченность, квазиупорядоченность, — рефлексивное и транзитивное *бинарное отношение* на множестве. Если $\preceq$ есть П. на множестве M, то отношение $a \sim b \leftrightarrow a \preceq b$ и $b \preceq a$, $a, b \in M$, является отношением эквивалентности на M. При этом П. $\preceq$ индуцирует *порядок* на фактормножестве $M/\sim$.

Т. С. Фофанова.

ПРЕДПУЧОК на топологическом пространстве X со значениями в нек-рой категории $\mathscr{K}$ (напр., категории множеств, групп, модулей, колец, ...) — контравариантный *функтор* F из категории открытых множеств пространства X и их естественных отображений включения в категорию $\mathscr{K}$. В зависимости от $\mathscr{K}$ предпучок F наз. предпучком множеств, групп, модулей, колец,... . Отвечающие включениям $V \subset U$ морфизмы $F(U) \to F(V)$ наз. гомоморфизмами ограничения.

Всякий П. определяет на X *пучок* (см. *Пучков теория*).

Е. Г. Скляренко.

ПРЕДСКАЗУЕМАЯ σ-АЛГЕБРА — наименьшая σ-алгебра $\mathscr{P}=\mathscr{P}(\mathbb{F})$ множеств из

$$\Omega \times R_+ = \{(\omega, t): \omega \in \Omega,\ t \geq 0\},$$

порожденная всеми отображениями $(\omega, t) \to f(\omega, t)$ множества $\Omega \times R_+$ в R, к-рые (для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$) являются (по t) непрерывными слева и $\mathbb{F}$-согласованными с неубывающим семейством $\mathbb{F}=(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ под-σ-алгебр $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$, $t \geq 0$, где $(\Omega, \mathscr{F})$ — измеримое пространство. П. σ-а. порождается также любой из совокупностей множеств:

1) $A \times \{0\}$, где $A \in \mathscr{F}_0$, и $[\![0, \tau]\!]$, где τ — марковские моменты, а $[\![0, \tau]\!]$ — стохастич. интервалы;

2) $A \times \{0\}$, где $A \in \mathscr{F}_0$, и $A \times (s, t]$, где $s < t$ и $A \in \mathscr{F}_s$.

Между опциональными алгебрами и П. σ-а. имеет место соотношение $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{F})$.

Лит.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975. *А. Н. Ширяев.*

ПРЕДСКАЗУЕМЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС — стохастический процесс $X=(X_t(\omega), \mathcal{F}_t)$, являющийся измеримым (как отображение $(\omega, t) \to X(\omega, t) = X_t(\omega)$) относительно *предсказуемой σ-алгебры* $\mathcal{P}=\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

А. Н. Ширяев.

ПРЕДСТАВИМОСТИ МАТРИЦ ПРОБЛЕМА — проблема, заключающаяся в том, чтобы выяснить, можно ли указать такой единый общий метод (*алгоритм*), к-рый по произвольной системе $U, U_1, \ldots, U_q$ целочисленных матриц позволял бы за конечное число шагов ответить на вопрос, представима ли матрица U через остальные матрицы $U_1, \ldots, U_q$ с помощью операции умножения. Наибольший интерес представляет случай, когда матрицы $U, U_1, \ldots, U_q$ являются квадратными и имеют один и тот же порядок. Так сформулированная П. м. п. наз. общей. Фиксируя матрицы $U_1, \ldots, U_q$ и оставляя матрицу U переменной, получают т. н. частные П. м. п. Алгоритм, решающий общую П. м. п., решал бы и все частные проблемы, так что для установления неразрешимости общей П. м. п. достаточно указать хотя бы одну неразрешимую частную П. м. п.

П. м. п.— одна из первых *алгоритмических проблем* алгебраич. характера, неразрешимость к-рых была установлена. Первоначально А. А. Марковым было показано (см. [1], [2]), что для любого $n \geqslant 6$ может быть построена система, состоящая из 91 матрицы порядка n, такая, что соответствующая ей частная П. м. п. будет неразрешимой, т. е. будет невозможен алгоритм (понимаемый в точном смысле этого слова), распознающий по произвольной матрице порядка n, представима ли она через матрицы данной системы. В дальнейшем (см. [3]) число матриц в системе было уменьшено до 23 и было показано, что за счет надлежащего усложнения конструкции системы (включая увеличение числа членов) условие $n \geqslant 6$ может быть ослаблено до $n \geqslant 4$. Для любого $n \geqslant 6$ строится конкретная система, состоящая из 12 матриц порядка n, с неразрешимой частной П. м. п. (см. [4]). Путем подходящей фиксации U и варьирования $U_1, \ldots, U_q$ доказана неразрешимость общей П. м. п. для $n=3$ (см. [5]).

Лит.: [1] Марков А. А., «Докл. АН СССР», 1951, т. 78, № 6, с. 1089—92; [2] его же, Теория алгорифмов, М.— Л., 1954 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 42); [3] его же, «Z. math. Logik und Grundl. Math.», 1958, Bd 4, S. 157—68; [4] Нагорный Н. М., «VI Всесоюзн. конференция по матем. логике», Тб., 1982, с. 124; [5] Paterson M. S., «Studies in appl. math.», 1970, v. 49, № 1, p. 105—07. *Н. М. Нагорный.*

ПРЕДСТАВИМЫЙ ФУНКТОР — ковариантный (или контравариантный) функтор F из нек-рой категории $\mathfrak{K}$ в категорию множеств $\mathfrak{S}$, изоморфный одному из основных теоретико-множественных функторов:

$$H_A(X) = H(A, X) \colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{S}.$$

Функтор $F \colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{S}$ представим тогда и только тогда, когда найдутся такие объект $A \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ и элемент $a \in F(A)$, что для каждого элемента $x \in F(X)$, $X \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$, существует единственный морфизм $\alpha \colon A \to X$, для к-рого $x = aF(\alpha)$. Объект A называется представляющим функтор F; он определен однозначно с точностью до изоморфизма.

В категории множеств тождественный функтор представим: представляющим объектом служит одноточечное множество. Функтор взятия нек-рой декартовой степени также представим: представляющим объектом служит множество, мощность к-рого равна этой степени. В произвольной категории произведение П. ф. F_i с представляющими объектами A_i, $i \in I$, представимо тогда и только тогда, когда в этой категории существует копроизведение объектов A_i. Всякий ковариантный П. ф. перестановочен с пределами, т. е. непрерывен.

П. ф.— аналог понятия «свободная универсальная алгебра с одним образующим». Для любого функтора $G:\mathfrak{K}\to\mathfrak{S}$ и П. ф. F множество естественных преобразований $\mathrm{Nat}(F, G)$ изоморфно множеству $G(A)$, где A — представляющий объект. Это показывает, что П. ф. являются свободными объектами категории функторов.

Для аддитивных категорий вместо функторов со значениями в $\mathfrak{S}$ рассматриваются аддитивные функторы со значениями в категории абелевых групп; поэтому под П. ф. понимается аддитивный функтор, изоморфный основному аддитивному функтору.

Понятие П. ф. первоначально возникло в алгебраич. геометрии (см. [2]). Наиболее важными примерами П. ф. здесь являются функторы Пикара $\mathrm{Pic}\ X/S$ и Гильберта $\mathrm{Hilb}\ X/S$, представимые в категории *алгебраических пространств* (см. [1]). Пусть K — поле частных регулярного дискретного нормированного кольца O с совершенным полем вычетов. Если X_0— гладкая геометрически неприводимая собственная кривая рода $g>0$ над K, то ее *минимальная модель* представляет функтор $Y\mapsto \mathrm{Isom}_K(Y\otimes_O K,\ X_0)$ из категории регулярных O-схем. Если A — абелево многообразие над K, то его минимальная *Нерона модель* является гладкой групповой схемой $X\to \mathrm{Spec}\, O$, представляющей функтор $Y\mapsto \mathrm{Hom}_K(Y\otimes_O K,\ A)$ из категории гладких O-схем.

Лит.: [1] Артин М., «Математика», 1970, т. 14, № 4, с. 3—39; [2] Гротендик А., Дьёдонне Ж., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 2, с. 135—48.

С. Г. Танкеев, М. Ш. Цаленко.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ в векторном пространстве V — гомоморфизм ρ алгебры Ли L над полем k в алгебру Ли $\mathfrak{gl}(V)$ всех линейных преобразований пространства V над k. Два представления $\rho_1: L\to\mathfrak{gl}(V_1)$ и $\rho_2: L\to\mathfrak{gl}(V_2)$ наз. эквивалентными (или изоморфными), если существует изоморфизм $\alpha: V_1\to V_2$, для к-рого

$$\alpha(\rho_1(l)\,v_1)=\rho_2(l)\,\alpha(v_1)$$

при любых $l\in L$, $v_1\in V_1$. Представление ρ в V наз. конечномерным, если $\dim V<\infty$, и неприводимым, если в V не существует отличных от нуля и всего пространства подпространств, инвариантных относительно всех операторов $\rho(l)$, $l\in L$.

При заданных представлениях $\rho_1: L\to\mathfrak{gl}(V_1)$ и $\rho_2: L\to\mathfrak{gl}(V_2)$ можно построить представления $\rho_1\oplus\rho_2$ (прямая сумма) и $\rho_1\otimes\rho_2$ (тензорное произведение) алгебры L в пространствах $V_1\oplus V_2$ и $V_1\otimes V_2$, полагая

$$(\rho_1\oplus\rho_2)(l)(v_1,\ v_2)=(\rho_1(l)\,v_1,\ \rho_2(l)\,v_2),$$

$$(\rho_1\otimes\rho_2)(l)\,v_1\otimes v_2=\rho_1(l)\,v_1\otimes v_2+v_1\otimes\rho_2(l)\,v_2$$

для $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$, $l\in L$. Если ρ — представление алгебры Ли L в пространстве V, то формула

$$<\rho^*(l)\,u,\ v> = -<u,\ \rho(l)\,v>$$

определяет представление ρ^* алгебры L на сопряженном к V пространстве, наз. контраградиентным по отношению к ρ.

Каждое П. а. Ли L однозначно продолжается до представления универсальной обертывающей алгебры $U(L)$; тем самым устанавливается изоморфизм категории П. а. Ли L и категории модулей над $U(L)$. В частности, представлению ρ алгебры L соответствует идеал $\ker\tilde{\rho}$ в $U(L)$ — ядро его продолжения $\tilde{\rho}$. Если представление ρ неприводимо, то идеал $\ker\tilde{\rho}$ примитивен. Обратно, всякий примитивный идеал в $U(L)$ строится таким способом по нек-рому (вообще говоря, не единственному) неприводимому представлению ρ алгебры L. Изучение пространства примитивных идеалов $\mathrm{Prim}\,U(L)$, снабженного топологией Джекобсона, является существенной частью теории П. а. Ли. Оно проведено полностью в случае, когда L — конечномерная разрешимая алгебра Ли, а k — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль (см. [2]).

Наиболее полно изучены конечномерные представления конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. В случае полей $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ эти представления находятся во взаимно однозначном соответствии с аналитическими конечномерными представлениями соответствующих односвязных (комплексных или вещественных) групп Ли. В этой ситуации любое представление разрешимой алгебры Ли содержит одномерное инвариантное подпространство (см. *Ли теорема*). Любое представление полупростой алгебры Ли вполне приводимо, т. е. изоморфно прямой сумме неприводимых представлений. Неприводимые представления полупростой алгебры Ли L полностью классифицированы: классы изоморфных представлений взаимно однозначно соответствуют доминантным весам, т. е. весам с неотрицательными числовыми отметками, из сопряженного пространства H^* к подалгебре Картана H алгебры L (см. *Картана теорема* о старшем векторе). Об описании строения неприводимого представления по соответствующему ему доминантному весу (его старшему весу) см. в статьях *Кратность веса*, *Характеров формула*.

Произвольный (не являющийся, вообще говоря, доминантным весом) элемент $\lambda \in H^*$ также определяет нек-рое неприводимое линейное представление полупростой алгебры Ли L со старшим весом λ, являющееся, однако, бесконечномерным (см. *Представление со старшим вектором*). Соответствующие $U(L)$-модули наз. модулями Верма (см. [2]). Полной классификации неприводимых бесконечномерных представлений полупростых алгебр Ли пока (1983) не получено.

Если k — алгебраически замкнутое поле характеристики $p>0$, то неприводимые представления конечномерной алгебры Ли L всегда конечномерны и их размерность ограничена константой, зависящей от $n = \dim L$. Если алгебра L имеет p-структуру, то эта константа есть $p^{(n-r)/2}$, где r — минимальная возможная размерность аннулятора линейной формы на L в коприсоединенном представлении [4]. Для описания множества неприводимых представлений в этом случае применяется следующая конструкция. Пусть $Z(L)$ — центр алгебры $U(L)$ и M_L — аффинное алгебраич. многообразие (размерность $\dim M_L = n$), алгебра регулярных функций на к-ром совпадает с $Z(L)$ (многообразие Цассенхауза). Отображение $\rho \mapsto \ker(\tilde{\rho}/Z(L))$ позволяет сопоставить каждому неприводимому представлению точку многообразия Цассенхауза. Получаемое отображение сюръективно, прообраз любой точки из M_L конечен, а для точек открытого всюду плотного подмножества этот прообраз состоит из одного элемента [7]. Полное описание всех неприводимых представлений имеется для нильпотентных алгебр Ли (см. [8]) и нек-рых отдельных примеров (см. [9], [10]). Получены также разнообразные результаты относительно специальных типов представлений.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1976—78; [2] Диксмье Ж., Универсальные обертывающие алгебры, пер. с франц., М., 1978; [3] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [4] Мильнер А. А., «Функциональный анализ и его приложения», 1980, т. 14, № 2, с. 67—68; [5] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [6] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, пер. с франц., М., 1962; [7] Zassenhaus H., «Proc. Glasgow Math. Assoc.», 1954, v. 2, p. 1—36; [8] Вейсфейлер Б. Ю., Кац В. Г., «Функциональный анализ и его приложения», 1971, т. 5, № 2, с. 28—36; [9] Jantzen J. C., «Math. Z.», 1974, Bd 140, H. 1, S. 127—49; [10] Рудаков А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1970, т. 34, № 4, с. 735—43.

А. Н. Рудаков.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АССОЦИАТИВНОЙ АЛГЕБРЫ размерности n — гомоморфизм алгебры A над полем F в алгебру матриц $M_n(F)$, т. е. сопоставление каждому $a \in A$ квадратной матрицы $T(a)$ порядка n, при к-ром

$$T(\lambda a + \mu b) = \lambda T(a) + \mu T(b) \text{ и } T(ab) = T(a) T(b),$$

где $a, b \in A$, $\lambda, \mu \in F$. Обычно требуется также, чтобы единице алгебры A соответствовала единичная матрица; иногда требуется, чтобы и сама алгебра A была конечномерной.

Всякое неразложимое представление полупростой алгебры эквивалентно прямому слагаемому *регулярного представления*. Таким образом, всякая полупростая алгебра является алгеброй конечного (представленческого) типа, т. е. имеет конечное число неизоморфных неразложимых представлений. Неполупростые алгебры могут быть как конечного, так и бесконечного представленческого типа (такова, напр., $A = \{1, r, s \mid r^2 = s^2 = rs = sr = 0\}$). Алгебры бесконечного типа принято делить еще на алгебры дикого типа, задача классификации к-рых содержит в себе классич. нерешенную задачу о паре матриц (т. е. задачу об одновременном приведении к канонич. форме двух линейных операторов в конечномерном пространстве), и алгебры ручного типа.

Основными вопросами, изучаемыми в теории П. а. а., являются получение необходимых и достаточных условий, при к-рых алгебра принадлежит одному из перечисленных типов, и классификация неразложимых представлений в конечном и ручном случаях. В общем случае эти задачи не решены. Описание алгебр конечного и ручного типа и их представлений получено для алгебр, у к-рых квадрат радикала равен нулю (см. [2], [4], [8]—[10]). Решены проблемы Брауэра — Трэлла, т. е. доказано, что над любым полем алгебра бесконечного типа имеет неразложимые представления сколь угодно большой размерности, а над совершенным полем имеется бесконечно много размерностей, в каждой из к-рых имеется бесконечно много неразложимых представлений (см. [5], [7]). Любая алгебра конечного типа над алгебраически замкнутым полем имеет мультипликативный базис, т. е. базис, у к-рого произведение любых двух его элементов либо равно нулю, либо принадлежит этому базису [6]. Полностью решен вопрос о разделении групповых алгебр на ручные и дикие [1].

С П. а. а. тесно связаны представления нек-рых других объектов: колчанов, частично упорядоченных множеств, решеток, боксов.

Лит.: [1] Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А., «Записки научных семинаров ЛОМИ», 1977, т. 71, с. 24—41; [2] Кругляк С. А., там же, 1972, т. 28, с. 60—69; [3] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [4] Назарова Л. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, № 4, с. 752—91; [5] Назарова Л. А., Ройтер А. В., Категорные матричные задачи и проблема Брауэра — Трэлла, К., 1973; [6] Ройтер А. В., Обобщение теоремы Бонгартца, К., 1981; [7] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, с. 1275—1282; [8] Dlab V., Ringel C., Indecomposable representations of graphs and algebras, Prowidence, 1976; [9] Donovan P., Freislich M. R., The representation theory of finite graphs and associated algebras, [s. l., 1974]; [10] Gabriel P., «Manus. Math.», 1972, v. 6, № 1, p. 71—103.

А. В. Ройтер.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ГРУППЫ — гомоморфизм бесконечной группы в группу взаимно однозначных отображений на себя (вообще говоря, бесконечных) множеств. Чаще всего рассматриваются П. б. г. автоморфизмами алгебраич. структур; в этом случае теория П. б. г. связана с теорией представлений связанных с этими группами групповых алгебр.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Плоткин Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966. *А. И. Штерн.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БИКОМПАКТНОЙ ГРУППЫ — непрерывное представление бикомпактной топологич.

группы в топологическое векторное пространство. См. *Компактная группа.* *А. И. Штерн.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ — гомоморфизм группы в группу всех обратимых преобразований нек-рого множества V. Представление ρ группы G наз. линейным, если V является векторным пространством над нек-рым полем k, а преобразования $\rho(g)$, $g \in G$,— линейными преобразованиями. Часто линейные представления называют для краткости просто представлениями (см. *Представлений теория*). В теории представлений абстрактных групп наиболее разработанным разделом является теория конечномерных представлений конечных групп (см. *Конечной группы представление*, *Представление симметрической группы*).

Если G — топологич. группа, то рассматриваются непрерывные линейные представления группы G в топологическом векторном пространстве V (см. *Непрерывное представление*, *Представление топологической группы*). Если G — группа Ли, а V — конечномерное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то непрерывное линейное представление автоматически является вещественно аналитическим. Аналитические и дифференцируемые представления группы Ли можно определить и в бесконечномерном случае (см. *Аналитическое представление*, *Бесконечномерное представление*). Всякому дифференцируемому представлению ρ группы Ли G соответствует нек-рое линейное представление ее алгебры Ли — дифференциал представления ρ. Если G — связная группа Ли, то ее конечномерные представления полностью определяются своими дифференциалами. Наиболее разработанные разделы теории представлений топологич. групп — это теория конечномерных линейных представлений полупростых групп Ли, к-рая часто формулируется на языке алгебр Ли (см. *Конечномерное представление*, *Представления классических групп*, *Картана теорема* о старшем векторе), теория *представлений компактных групп*, теория *унитарных представлений*.

Для алгебраич. групп имеется теория *рациональных представлений*, во многом аналогичная теории конечномерных представлений групп Ли.

Лит.: [1] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [3] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [4] Желобенко Д. П., Штерн А. И., Представления групп Ли, М., 1981. *А. Л. Онищик.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОМПАКТНОЙ ГРУППЫ — гомоморфизм компактной группы в группу непрерывных линейных автоморфизмов (комплексного) банахова пространства, непрерывный в сильной операторной топологии.

Пусть G — компактная группа, V — банахово пространство и $\varphi: G \to GL(V)$ — представление. Если $V = H$ — гильбертово пространство, а $\varphi(g)$ — унитарный оператор для любого $g \in G$, то φ наз. *унитарным представлением*. В H всегда существует эквивалентная норма, относительно к-рой данное представление φ унитарно.

Всякое неприводимое унитарное представление группы G конечномерно. Пусть $\{\rho^\alpha, \alpha \in I\}$ — семейство всевозможных попарно неэквивалентных унитарных неприводимых представлений группы G. Всякое унитарное представление φ группы G является ортогональной прямой суммой таких однозначно определенных представлений φ^α, $\alpha \in I$, что каждое φ^α является ортогональной прямой суммой нек-рого семейства представлений, эквивалентных ρ^α.

Если G конечна, то семейство $\{\rho^\alpha\}$ тоже конечно и содержит столько элементов, сколько имеется в G различных классов сопряженных элементов (при этом $\sum_{\alpha \in I} (\dim \rho^\alpha)^2 = |G|$). Задача исследования этих представлений (вычисления их характеров, нахождения явной реализации и т. п.) составляет предмет обширной теории (см. *Конечной группы представление*).

Если G — связная односвязная компактная группа Ли, а $G_{\mathbb{C}}$ — ее комплексификация (см. *Комплексификация группы Ли*), то описание семейства $\{\rho^{\alpha}, \alpha \in I\}$ для G сводится (посредством сужения представлений на G) к описанию семейства всех неприводимых попарно неэквивалентных конечномерных *рациональных представлений* редуктивной алгебраич. группы $G_{\mathbb{C}}$. Последнее же семейство, в свою очередь, допускает полное описание с помощью рассмотрения старших весов (см. *Представление со старшим вектором*).

В современной теории чисел и алгебраич. геометрии рассматриваются l-адические представления компактных вполне несвязных групп (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [3] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [4] Ленг С., $SL_2(R)$, пер. с англ., М., 1977; [5] Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И., Теория представлений и автоморфные функции, М., 1966; [6] Серр Ж.-П., Абелевы l-адические представления и эллиптические кривые, пер. с англ., М., 1973; [7] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948. *В. Л. Попов.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛУГРУППЫ S в классе полугрупп Ξ — гомоморфизм полугруппы S в нек-рую полугруппу из класса Ξ (в случае изоморфизма говорят о точном представлении). Обычно имеются в виду классы каких-либо конкретных полугрупп. Наиболее изучены представления в классе полугрупп преобразований (короче — представления преобразованиями), в классах полугрупп частичных преобразований и бинарных отношений, в классе полугрупп матриц (т. н. матричные, или линейные, П. п.). В теории автоматов с каждым автоматом связано представление свободной полугруппы преобразованиями множества его внутренних состояний. Специальный характер носят П. п. преобразованиями, связанными тем или иным образом со свойствами элементов преобразуемого множества, наделенного какой-либо структурой (эндоморфизмами, непрерывными преобразованиями и т. п.). Всякая полугруппа с единицей изоморфно представима как полугруппа всех эндоморфизмов ориентированного или неориентированного графа, как полугруппа всех эндоморфизмов нек-рой алгебры с унарными операциями и т. п. Известно (1983) несколько конструкций, позволяющих получить все П. п. частичными преобразованиями. Они строятся из нек-рых простейших П. п. при помощи их объединения, кратного повторения, ограничения на подмножестве и операции погружения полугрупп.

Присоединив к полугруппе S единицу: $S^1 = S \cup \{1\}$ и продолжив регулярное П. п. S левыми сдвигами на декартову степень S^x полугруппы S^1, получают представление φ_I — I-кратное повторение регулярного П. п. S. Всякое представление ψ полугруппы S преобразованиями множества Ω может быть получено (см. [2]) из φ_I с помощью нек-рого отображения $\theta : S^I \to \Omega$ так, что

$$\psi a\,(\theta\alpha) = \theta\,(\varphi_I a\,(\alpha)),\ a \in S,\ \alpha \in S^I.$$

Особую роль играют транзитивные П. п., т. е. такие ее представления φ преобразованиями множества Ω, что для любых α, $\beta \in \Omega$ найдется a, для которого $(\varphi a)\alpha = \beta$.

П. п. взаимно однозначными частичными преобразованиями связаны с понятием и свойствами *инверсных полугрупп*.

При исследовании матричных П. п. привлекаются к рассмотрению *полугрупповые алгебры*. Изучается вопрос о приводимости матричных П. п. Найдены неприводимые представления для ряда полугрупп (в том числе и для конечных). Матричные представления вполне простых и вполне 0-простых полугрупп могут быть построены как продолжение представлений их подгрупп. Матричные представления произвольных полугрупп могут быть описаны при помощи представлений их факторов, являющихся простыми и 0-простыми полугруппами.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] Вагнер В. В., «Матем. сб.», 1956, т. 38, № 2, с. 203—40; [3] Ляпин Е. С., там же, 1960, т. 52, № 1, с. 589—96; [4] Шайн Б. М., там же, 1963, т. 60, № 3, с. 293—303; [5] McAlister D. B., «Semigroup Forum», 1971, v. 2, № 3, p. 189—263; № 4, p. 288—320; [6] Jónsson B., Topics in universal algebra, B.—N. Y., 1972. *Л. М. Глускин, Е. С. Ляпин.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ — линейное представление группы S_m над каким-либо полем K. Если char $K=0$, то все конечномерные П. с. г. вполне приводимы и определены над $\mathbb{Q}$ (иначе говоря, все неприводимые конечномерные представления над $\mathbb{Q}$ абсолютно неприводимы).

Неприводимые конечномерные представления группы S_m над $\mathbb{Q}$ классифицируются следующим образом. Пусть d — какая-либо *Юнга диаграмма*, отвечающая разбиению $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ числа m, R_d (соответственно C_d) — подгруппа группы S_m, состоящая из всех подстановок, переводящих каждое из чисел $1, 2, \ldots, m$ в число, находящееся в той же строке (соответственно столбце) диаграммы d. Тогда

$$R_d \simeq S_{\lambda_1}\times\ldots\times S_{\lambda_r}$$

и

$$C_d \simeq S_{\lambda_1'}\times\ldots\times S_{\lambda_s'},$$

где $\lambda'=(\lambda_1', \ldots, \lambda_s')$ — разбиение числа m, сопряженное к разбиению λ. Существует единственное неприводимое представление $T_\lambda : S_m \to GL(U_\lambda)$ группы S_m (зависящее только от λ) со следующими свойствами: 1) в пространстве U_λ имеется такой ненулевой вектор u_d, что $T_\lambda(g)u_d=u_d$ для любого $g\in R_d$; 2) в пространстве U_λ имеется такой ненулевой вектор u_d', что $T_\lambda(g)u_d'=\varepsilon(g)u_d'$ для любого $g\in C_d$, где $\varepsilon(g)=\pm 1$ — четность подстановки g. Представления, отвечающие различным разбиениям, не эквивалентны, и ими исчерпываются все неприводимые представления группы S_m над $\mathbb{Q}$.

Векторы u_d и u_d' определены однозначно с точностью до умножения на число. Для всех диаграмм, отвечающих разбиению λ, эти векторы нормируются таким образом, что $gu_d=u_{gd}$ и $gu_d'=u_{gd}'$ для любого $g\in S_m$, где gd обозначает диаграмму, получаемую из d применением ко всем числам подстановки g. Векторы u_d (соответственно u_d'), соответствующие стандартным диаграммам d, образуют базис пространства U_λ; в этом базисе операторы представления T_λ записываются целочисленными матрицами. Размерность представления T_λ равна

$$\dim T_\lambda=\frac{m!\prod_{i<j}(l_i-l_j)}{\prod_i l_i!}=\frac{m!}{\prod_{(i,j)}\lambda_{ij}},$$

где $l_i=\lambda_i+r-i$ $(i=1, \ldots, r)$, а произведение в знаменателе второго выражения берется по всем клеткам c_{ij} таблицы Юнга t_λ, причем λ_{ij} обозначает длину соответствующего крюка.

Разбиению (m) отвечает тривиальное одномерное представление группы S_m, а разбиению $(1, \ldots, 1)$ — нетривиальное одномерное представление ε (четность). Разбиению λ', сопряженному к λ, отвечает представление εT_λ. Пространство $U_{\lambda'}$ канонич. образом (с точностью до гомотетии) отождествляется с пространством U_λ так, что $T_{\lambda'}(g)=\varepsilon(g)T_\lambda(g)$ для любого $g\in S_m$; при этом можно считать, что $u_d'=u_{d'}$, где d' — диаграмма, получаемая из d транспонированием.

Построение полной системы неприводимых П. с. г. производится с помощью *Юнга симметризаторов*, позволяющих получить разложение регулярного представления. Если d — диаграмма Юнга, отвечающая разбиению λ, то представление T_λ эквивалентно П. с. г. S_m в левом идеале групповой алгебры $\mathbb{Q}S_m$, порожденном симметризатором Юнга e_d. Апостериорное описание элемента e_d состоит в следующем: $T_\mu(e_d)=0$ при $\mu\neq\lambda$, а $T_\lambda(e_d)$ — оператор ранга 1, действующий по формуле $T_\lambda(e_d)u=(u_d, u)u_d'$ для любого $u\in U_\lambda$, где $(\ ,\ )$ — подходящим образом нормированное инвариантное скалярное умножение в пространстве U_λ. При этом

$$(u_d,\ u_d')=\frac{m!}{\dim U_\lambda}.$$

Производящая функция для характеров представлений T_λ дается *Фробениуса формулой*. Однако для вычисления отдельных значений характеров удобнее пользоваться рекуррентными соотношениями. Наиболее эффективным из них является правило Мурнагана — Накаямы: пусть $a_{\lambda\mu}=a_{\lambda\mu}^{(m)}$ — значение характера представления T_λ на классе $[\mu]$ сопряженных элементов группы S_m, определенном разбиением μ числа m, и пусть разбиение μ содержит число p. Через $\overline{\mu}$ обозначается разбиение числа $m-p$, получаемое из μ выбрасыванием числа p. Тогда

$$a_{\lambda\mu}^{(m)}=\Sigma_{\overline{\lambda}}(-1)^{i(\overline{\lambda})}a_{\overline{\lambda}\overline{\mu}}^{(m-p)},$$

где сумма берется по всем разбиениям $\overline{\lambda}$ числа $m-p$, получаемым удалением косого крюка длины p из таблицы Юнга t_λ, а $i(\overline{\lambda})$ обозначает высоту удаленного косого крюка.

Имеется также метод (см. [5]), позволяющий найти целиком таблицу характеров группы S_m, т. е. матрицу $A=\|a_{\lambda\mu}\|$. Пусть M_λ есть П. с. г. S_m, индуцированное тривиальным одномерным представлением подгруппы $R_\lambda=R_d$, где d — диаграмма Юнга, отвечающая разбиению λ. И пусть $M_\lambda=\Sigma_\mu m_{\lambda\mu}T_\mu$, а $M=\|m_{\lambda\mu}\|$. Если считать, что строки и столбцы матрицы M расположены в порядке лексикографич. убывания индексов (разбиений), то это будет нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали. Значение характера представления M_λ на классе $[\mu]$ равно

$$b_{\lambda\mu}=\frac{c_\mu\,|R_\lambda\cap[\mu]|}{|R_\lambda|},$$

где c_μ — порядок централизатора подстановки из класса $[\mu]$. Матрица $B=\|b_{\lambda\mu}\|$ является верхней треугольной, и имеет место соотношение $MM^T=BC^{-1}B^T$, где $C=\operatorname{diag}(c_\mu)$, из к-рого однозначно определяется матрица M. После этого матрица A находится по формуле

$$A=M^{-1}B.$$

Ограничение представления T_λ группы S_m на подгруппу S_{m-1} находится по правилу ветвления:

$$T_\lambda\,|\,S_{m-1}=\Sigma_i T_{(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_i-1,\ \ldots,\ \lambda_r)},$$

где суммирование распространяется на те i, для к-рых $\lambda_i>\lambda_{i+1}$ (включая r). Ограничение представления T_λ на подгруппу A_m при $\lambda\neq\lambda'$ абсолютно неприводимо, а при $\lambda=\lambda'$ распадается над квадратичным расширением поля $\mathbb{Q}$ в сумму двух неэквивалентных абсолютно неприводимых представлений одинаковой размерности. Получаемые таким образом представления группы A_m исчерпывают все ее неприводимые представления над $\mathbb{C}$.

О П. с. г. в тензорах см. в ст. *Представления классических групп*.

Разработана также теория модулярных П. с. г. (см., напр., [5]).

Лит.: [1] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [2] Мурнаган Ф. Д., Теория представлений групп, пер. с англ., М., 1950; [3] Хамермеш М., Теория групп и ее применение к физическим проблемам, пер. с англ., М., 1966; [4] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [5] Джеймс Г., Теория представлений симметрических групп, пер. с англ., М., 1982. *Э. Б. Винберг.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СО СТАРШИМ ВЕКТОРОМ — линейное представление ρ конечномерной полупростой расщепляемой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем k характеристики нуль с расщепляющей *Картана подалгеброй* $\mathfrak{t}$, удовлетворяющее следующим условиям.

1) В пространстве V представления ρ существует циклический вектор v (т. е. V — наименьшее $\mathfrak{g}$-инвариантное подпространство, содержащее v).

2) $\rho(h)(v)=\lambda(h)v$ для всех $h\in\mathfrak{t}$, где λ — некоторая фиксированная линейная форма на $\mathfrak{t}$ со значениями в k.

3) Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — система простых корней, определенная нек-рым лексикографич. упорядочением множества Δ всех корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{t}$ (см. *Корневая система*), а e_{α_i}, $\mathfrak{t}_{\alpha_i}$, h_{α_i} — соответствующие корню α_i векторы из базиса Шевалле алгебры $\mathfrak{g}$, $i=1, \ldots, r$, то $\rho(e_{\alpha_i})(v)=0$ для всех $i=1, \ldots, r$.

Таким образом, λ является весом относительно сужения ρ на $\mathfrak{t}$ (см. *Вес* представления); он наз. старшим весом. Пространство V наз. циклическим $\mathfrak{g}$-модулем со старшим весом λ и образующей v, а v наз. старшим вектором.

Для всякой линейной формы λ на $\mathfrak{t}$ существует единственное с точностью до эквивалентности неприводимое представление ρ_λ алгебры $\mathfrak{g}$ со старшим весом λ. $\mathfrak{g}$-модуль $V(\lambda)$, определяемый ρ_λ, является прямой суммой весовых подпространств относительно сужения ρ_λ на $\mathfrak{t}$. Их веса имеют вид

$$\lambda-\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i,$$

где n_i — целые неотрицательные числа. Весовое подпространство $V_\mu(\lambda)$ веса μ конечномерно, натягивается над k на векторы вида

$$\left(\rho_\lambda\left(f_{\alpha_{i_1}}\right)\rho_\lambda\left(f_{\alpha_{i_2}}\right)\cdots\rho_\lambda\left(f_{\alpha_{i_s}}\right)\right)(v),$$

и для любого $h\in\mathfrak{t}$ ограничение $\rho_\lambda(h)$ на $V_\mu(\lambda)$ является скалярным оператором умножения на $\mu(h)$. Пространство $V_\lambda(\lambda)$ одномерно; вес λ является единственным старшим весом представления ρ_λ и может быть охарактеризован как единственный вес $\mathfrak{t}$-модуля $V(\lambda)$ такой, что любой другой вес имеет вид

$$\lambda-\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i,$$

где n_i — целые неотрицательные числа.

Представление ρ_λ конечномерно тогда и только тогда, когда λ — доминантная линейная форма на $\mathfrak{t}$, то есть $\lambda(h_{\alpha_i})$ — целое неотрицательное число для всех $i=1, \ldots, r$. Всякое неприводимое конечномерное линейное представление алгебры $\mathfrak{g}$ имеет вид ρ_λ для нек-рой доминантной линейной формы λ на $\mathfrak{t}$ (так что все такие представления классифицируются с точностью до эквивалентности доминантными линейными формами на $\mathfrak{t}$). Множество всех весов конечномерного представления ρ_λ относительно $\mathfrak{t}$ инвариантно относительно *Вейля группы* алгебры $\mathfrak{g}$ (рассматриваемой как группа линейных преобразований пространства $\mathfrak{t}$), и если веса μ и γ лежат в одной орбите группы Вейля, то размерности пространств $V_\mu(\lambda)$ и $V_\gamma(\lambda)$ совпадают. Для всякого веса μ и всякого корня

$\alpha \in \Delta$ число $\mu(h_\alpha)$ — целое; если при этом $\mu+\alpha$ — тоже вес, то

$$\rho(e_\alpha)(V_\mu(\lambda)) \neq 0$$

(здесь h_α — элемент из $\mathfrak{t}$, соответствующий α, а e_α — корневой вектор корня α).

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962; [3] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [4] Cartan E., «Bull. sci. math.», 1925, t. 49, p. 130—52; [5] Harish-Chandra, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1951, v. 70, p. 28—96. *В. Л. Попов.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЫ — непрерывное отображение группы G в топологич. группу гомеоморфизмов нек-рого топологич. пространства. Чаще всего под П. т. г. G понимается *линейное представление*, более того — такое линейное представление π топологич. группы G в топологич. векторном пространстве (т. в. п.) E, что вектор-функция $g \to \pi(g)x$, $g \in G$, определяет при любом $x \in E$ непрерывное отображение группы G в пространство E. В частности, всякое *непрерывное представление* группы G является П. т.г. G.

Теория П. т. г. тесно связана с теорией представлений различных топологических *групповых алгебр*. Среди них важнейшей является банахова симметричная алгебра мер $M(G)$ группы G (алгебра всех регулярных борелевских мер на G с конечной полной вариацией, в к-рой умножение определяется как свертка). Часто используется также топологическая алгебра $C'(G)$ всех регулярных борелевских мер на G с конечной полной вариацией и с компактным носителем. Умножение в $C'(G)$ определяется как свертка, а инволюция $\mu \to \mu^*$, $\mu \in C'(G)$, определяется формулой

$$\int_G f(g)\,d\mu^*(g) = \int_G \overline{f(g^{-1})}\,d\mu(g), \quad f \in C(G).$$

Топология алгебры $C'(G)$ согласуется с двойственностью между этой алгеброй и алгеброй $C(G)$ (всех непрерывных функций на G), рассматриваемой в компактно открытой топологии. Важную роль играют также различные подалгебры алгебр $M(G)$ и $C'(G)$. В частности, если E — квазиполное бочечное или полное локально выпуклое пространство (л. в. п.), а π — непрерывное П. т. г. G в E, то формула

$$\pi(\mu) = \int_G \pi(g)\,d\mu(g), \quad \mu \in C'(G),$$

определяет слабо непрерывный линейный оператор $\pi(\mu)$ в E и соответствие $\mu \to \pi(\mu)$ есть представление алгебры $C'(G)$ в пространстве E, однозначно определяющее представление π топологич. группы. При этом П. т. г. — (топологически) *неприводимое представление*, *операторно неприводимое представление*, вполне неприводимое представление, эквивалентно другому П. т. г. (и т. д.) тогда и только тогда, когда соответствующее представление алгебры $C'(G)$ обладает соответствующим свойством.

Пусть π есть П. т. г. G в л. в. п. E; пусть E' — сопряженное к E пространство. Функции на G вида $g \to \varphi(\pi(g)\xi)$, $\xi \in E$, наз. матричными элементами представления π. Если E — гильбертово пространство и $\xi \in E$, $\|\xi\|=1$, то функции вида $g \to \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$, $g \in G$, наз. сферическими функциями, связанными с представлением π.

Пусть E, E^* суть л. в. п. в двойственности, π есть П. т. г. G в л. в. п. E. Формула $\pi^*(g) = \pi(g^{-1})^*$ определяет П. т. г. π^* в E^*, наз. сопряженным, или контрградиентным, к π. Пусть π_1, π_2 суть П. т. г. G в т. в. п. E_1, E_2 соответственно, $E = E_1 + E_2$ — прямая сумма и $\pi(g)$, $g \in G$, — непрерывный линейный оператор в E, определенный формулой

$$\pi(g)(x_1 + x_2) = \pi_1(g)\,x_1 + \pi_2(g)\,x_2, \quad x_1 \in E_1, \; x_2 \in E_2.$$

Отображение $g \to \pi(g)$ есть П. т. г. G в т. в. п. E, наз.

прямой суммой П. т. г. π_1 и π_2. В нек-рых случаях (в частности, для унитарных представлений) может быть определено тензорное произведение П. т. г. и прямая сумма бесконечного семейства П. т. г. С помощью ограничения или расширения поля скаляров вводятся операции овеществления и комплексификации для П. т. г.

Представление топологич. группы наз. вполне приводимым, если любое замкнутое инвариантное подпространство имеет дополнительное замкнутое инвариантное подпространство. Представление π топологич. группы G в т. в. п. E наз. разложимым, если существуют такие замкнутые инвариантные подпространства E_1, E_2 в E, что π эквивалентно прямой сумме подпредставлений π_1, π_2 представления π, отвечающих подпространствам E_1, E_2 соответственно; в противном случае π наз. неразложимым. Неразложимое приводимое представление π определяется не только подпредставлением и факторпредставлением, соответствующими данному инвариантному подпространству, но и нек-рым классом одномерных когомологий группы G с коэффициентами в G-модуле ограниченных линейных операторов из пространства факторпредставления в пространство представления.

Важнейшими общими задачами теории П. т. г. являются описание всех неразложимых представлений данной топологич. группы и изучение возможности описания (разложения) произвольных П. т. г. с помощью неразложимых. В общем случае обе задачи далеки (1983) от полного решения, но полученные в этих направлениях результаты делают теорию П. т. г. основой *гармонического анализа абстрактного*, обобщающего теорию рядов и интегралов Фурье, спектральную теорию унитарных операторов, теорию жордановых нормальных форм и систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а также основой нек-рых разделов эргодической теории, квантовой механики, статистической физики и теории поля.

Наиболее важным разделом общей теории П. т. г. является теория *унитарных представлений*, имеющих многочисленные приложения и обладающих рядом свойств, упрощающих их изучение. В частности, ортогональное дополнение к инвариантному подпространству унитарного представления инвариантно, поэтому всякое унитарное П. т. г. вполне приводимо; для унитарных представлений условия полной неприводимости, (топологической) неприводимости и операторной неприводимости равносильны (но, вообще говоря, слабее условия алгебраич. неприводимости).

Другой класс П. т. г., имеющий многочисленные приложения, образуют *конечномерные представления*. Изучение представлений этого класса во многом облегчается относительным упрощением аналитич. сложности задачи по сравнению с общим случаем; в частности, неприводимое конечномерное П. т. г. вполне неприводимо. Однако теория конечномерных П. т. г. построена (1983) достаточно полно лишь для нек-рых классов топологич. групп (в частности, для полупростых групп Ли и для групп $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$). Для несколько более широкого класса групп, содержащего класс групп Ли, существует полное описание неприводимых конечномерных П. т. г.

Теория П. т. г. более разработана для локально компактных групп. Важнейшим свойством класса локально компактных групп является его совпадение с классом полных топологич. групп, на к-рых существует ненулевая правоинвариантная регулярная борелевская мера m (см. *Хаара мера*). Этот факт позволяет включить в число групповых алгебр локально компактной группы G банахову симметричную алгебру $L_1(G) = L_1(G, m)$ (относительно свертки), к-рая играет решающую роль в теории ограниченных (т. е. имеющих ограниченный образ) П. т. г. G в банаховых пространствах. Формула

$$\pi(f)=\int_G f(g)\,\pi(g)\,dm(g),\quad f\in L_1(G),$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между ограниченными представлениями π локально компактной группы G и (непрерывными) представлениями $\tilde{\pi}$ алгебры $L_1(G)$, обладающими тем свойством, что $\tilde{\pi}(L_1(G))H_\pi$ плотно в пространстве $H_{\tilde{\pi}}$ представлений $\tilde{\pi}$; при этом унитарные П. т. г. соответствуют симметричным представлениям алгебры $L_1(G)$. Другое свойство локально компактных групп состоит в том, что их представления в бочечных л. в. п. суть непрерывные представления.

Наиболее развитая часть теории П. т. г.— теория унитарных представлений локально компактных групп. В связи с существованием меры Хаара на локально компактных группах оказывается возможным изучение *регулярного представления* группы G в пространстве $L_2(G)$, приводящее, в частности, к аналогу *Планшереля формулы* для таких групп, а также к выделению основной, дополнительной и дискретной серий унитарных П. т. г. рассматриваемого класса (см. *Дополнительная серия*, *Дискретная серия*). Важнейшими общими задачами теории унитарных П. т. г. являются задачи построения неприводимых представлений и факторпредставлений, разложения представлений в прямой интеграл, изучения дуальных объектов и связанные с ними вопросы теории сферич. функций, теории характеров и гармонич. анализа, в том числе — изучения различных групповых алгебр.

Исключительно богатым приложениями подклассом класса локально компактных групп является класс групп Ли. Теория *бесконечномерных представлений* групп Ли, включающая теорию представлений классич. групп, является одним из наиболее быстро развивающихся разделов общей теории П. т. г. Мощным методом изучения П. т. г. Ли является *орбит метод*.

Другой важный подкласс класса локально компактных групп образуют компактные группы. Представления компактных групп — один из наиболее завершенных разделов общей теории П. т. г., являющийся инструментом изучения П. т. г., содержащих компактные подгруппы. Актуальным разделом теории представлений компактных групп является группа задач, связанных с вопросами разложения ограничения на подгруппу и тензорного произведения конкретных представлений компактных групп Ли. Разделом теории представлений компактных групп, имеющим многочисленные приложения в алгебре и анализе, является теория конечных групп представлений.

Не только упомянутая выше задача изучения неразложимых П. т. г., но и более простая задача описания зацеплений вполне неприводимых представлений, связанная с соответствующей теорией когомологий, решена (1983) лишь для нек-рых групп, несмотря на ее важность в построении гармонич. анализа на группах. Действительно, в терминах неразложимых П. т. г. (а именно, входящих в аналитич. продолжение соответствующей основной серии) для нек-рых групп Ли (соответственно групп Шевалле) получен аналог теоремы Пэли — Винера, дающий описание образа групповой алгебры финитных бесконечно дифференцируемых (соответственно финитных локально постоянных) функций на группе при преобразовании Фурье (т. е. при отображении $f\to\int_G f(g)\pi(g)d\mu(g)$, $f\in K(G)$, сопоставляющем функции на группе операторнозначную функцию на множестве представителей пространства классов эквивалентности представлений этой группы). Менее общая задача описания всех вполне неприводимых представлений данной группы решена (1983) лишь для локально компактных групп, факторгруппа к-рых по центру компактна (вполне неприводимые представления таких групп конечномерны, и набора этих представлений достаточно для получения аналога теоремы Пэли — Винера) и для нек-рых линейных групп Ли (в том числе для комплексных полупростых). Как в теории унитарных, так и в теории неунитарных П. т. г. накоплен богатый фактич. материал, относящийся к конкретным представлениям конкретных групп и к приложениям этих результатов к отдельным задачам гармонич. анализа на таких группах.

Ряд вопросов теории П. т. г. связан с изучением П. т. г. в *пространствах с индефинитной метрикой*. Для нек-рых полупростых групп Ли получено полное описание вполне неприводимых представлений в таких пространствах (к их числу относятся, в частности, неприводимые конечномерные представления таких групп) и найдено разложение тензорных произведений нек-рых неприводимых представлений этого типа на неприводимые унитарные представления. Теория операторно неприводимых представлений полупростых групп Ли в пространствах с индефинитной метрикой и определение структуры их инвариантных подпространств тесно связаны с аналитич. продолжением основной серии представлений этих групп.

Успехи теории П. т. г. связаны с развитием теории *проективных представлений*, с распространением ряда методов теории представлений групп Ли (в частности, метода орбит) на локально компактные группы общего вида, а также с развитием теории П. т. г., не являющихся локально компактными (групп гладких функций на многообразии со значениями в группе Ли, групп диффеоморфизмов гладких многообразий, бесконечномерных аналогов классич. групп и нек-рых других). Изучение представлений таких групп оказалось связанным с теорией вероятностей (в частности, теорией марковских процессов) и задачами статистич. физики. С другой стороны, установлены глубокие связи теории представлений групп матриц 2-го порядка над локально компактными полями (и нек-рых связанных с ними групп) с задачами теории чисел.

Лит.: [1] Барут А., Рончка Р., Теория представлений групп и ее приложения, пер. с англ., т. 1—2, М., 1980; [2] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965; [3] Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И., Теория представлений и автоморфные функции, М., 1966; [4] Жаке Э., Ленглендс Р., Автоморфные формы на GL_2, пер. с англ., М., 1973; [5] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [6] его же, Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли, М., 1974; [7] Желобенко Д. П., Штерн А. И., Представления групп Ли, М., 1983; [8] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [9] Климык А. У., Матричные элементы и коэффициенты Клебша — Гордана представлений групп, К., 1979; [10] Ленг С., $SL_2(R)$, пер. с англ., М., 1977; [11] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [12] его же, Теория представлений групп, М., 1976; [13] Gaal S. A., Linear analysis and representation theory, B.—[a.o.], 1973; [14] Lie groups and their representations, Bdpst, 1975; [15] Mackey G. W., Unitary group representations in physics, probability and number theory, Reading, 1978; [16] Non-commutative harmonic analysis, B.—[a.o.], 1979.

А. И. Штерн.

ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОЛЬЦО — коммутативное кольцо, определяемое следующим образом. Аддитивная группа П. к. порождена классами эквивалентности представлений группы G в векторных пространствах, а определяющие соотношения имеют вид $\pi=\pi_1+\pi_2$, где π — класс эквивалентности нек-рого представления, π_1 — класс эквивалентности его подпредставления, а π_2 — класс эквивалентности соответствующего факторпредставления π; операция умножения в П. к. сопоставляет классам эквивалентности представлений π_1 и π_2 класс эквивалентности их тензорного произведения. П. к. иногда наз. кольцом Гротендика группы G. Для локально компактных групп П. к. группы G принято называть коммутативное кольцо, определенное операциями прямой суммы и тензорного произведения в множестве классов эквивалентности непрерывных унитарных представлений группы G. Изучение структуры П. к. плодотворно для компактных групп, где оно приводит к теории двойственности в терминах блок-алгебр, а также в более общем случае для групп типа I, где изучение структуры П. к. может быть сведено к изучению структуры тензорных произведений неприводимых унитарных представлений. *А. И. Штерн.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ТЕОРИЯ — теория, изучающая гомоморфизмы полугрупп (в частности, групп), алгебр или других алгебраич. систем в соответствующие системы эндоморфизмов нек-рой подходящей структуры. Особенно часто рассматриваются линейные представления, т. е. гомоморфизмы полугрупп, групп, ассоциативных алгебр или алгебр Ли в полугруппу, группу, алгебру линейных преобразований нек-рого векторного пространства V. Такое представление наз. также линейным представлением в пространстве V, а V наз. пространством представления. Часто под П. т. понимают именно теорию линейных представлений. Если пространство V конечномерно, то его размерность наз. размерностью представления, а само представление — конечномерным. Таким образом, различаются конечномерные и бесконечномерные представления. Представление наз. точным, если оно инъективно.

Изучение линейных представлений полугрупп, групп и алгебр Ли сводится к изучению линейных *представлений ассоциативных алгебр*. А именно, линейные *представления полугрупп* (линейные *представления групп*) в пространстве V над полем k находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с представлениями соответствующей полугрупповой (групповой) алгебры над k в пространстве V. Представления алгебры Ли L над k взаимно однозначно соответствуют линейным представлениям ее универсальной обертывающей алгебры.

Задание линейного представления φ ассоциативной алгебры A в пространстве V равносильно заданию на V структуры A-модуля, называемого модулем представления φ. При рассмотрении представлений группы G или алгебры Ли L говорят также о G-модулях или L-модулях (см. *Модуль*). Гомоморфизмы модулей представлений наз. *сплетающими операторами*. Изоморфным модулям соответствуют эквивалентные представления. Подмодуль модуля V представления φ — это подпространство $W \subset V$, инвариантное относительно φ; индуцируемое в W представление наз. подпредставлением, а представление, индуцируемое в фактормодуле V/W,— факторпредставлением представления φ. Прямые суммы модулей соответствуют прямым суммам представлений, неразложимые модули — неразложимым представлениям, простые модули — неприводимым представлениям, а полупростые модули — вполне приводимым представлениям. Определяются также тензорное произведение линейных представлений, внешняя и симметрич. степени представления (см. *Тензорное произведение* представлений).

Наряду с абстрактной (или алгебраической) П. т. существует теория представлений топологич. объектов, напр. топологич. групп или банаховых алгебр (см. *Непрерывное представление*, *Представление топологической группы*). *О. А. Иванова.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП в тензорах — линейные представления групп $GL(V)$, $SL(V)$, $O(V, f)$, $SO(V, f)$, $Sp(V, f)$ (где V

есть n-мерное векторное пространство над полем k, f — невырожденная симметрическая или знакопеременная билинейная форма на V) в инвариантных подпространствах тензорных степеней $T^m(V)$ пространства V. Если k — поле нулевой характеристики, то все неприводимые полиномиальные линейные представления указанных групп реализуются в тензорах.

В случае $k=\mathbb{C}$ перечисленные выше группы являются комплексными группами Ли. Для всех них, кроме $GL(V)$, все (дифференцируемые) линейные представления полиномиальны; всякое линейное представление группы $GL(V)$ имеет вид $g \mapsto (\det g)^k R(g)$, где $k \in \mathbb{Z}$, а R — полиномиальное линейное представление. Классические компактные группы Ли U_n, SU_n, O_n, SO_n, Sp_n имеют те же комплексные линейные представления и те же инвариантные подпространства в пространствах тензоров, что и их комплексные оболочки $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{C})$, $Sp_{2n}(\mathbb{C})$. Поэтому результаты теории линейных представлений, полученные для классических комплексных групп Ли, переносятся на соответствующие компактные группы и наоборот («унитарный трюк» Вейля). В частности, с помощью интегрирования по компактной группе доказывается полная приводимость линейных представлений классических комплексных групп Ли.

Естественное линейное представление группы $GL(V)$ в пространстве $T^m(V)$ определяется по формуле

$$g(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = gv_1 \otimes \ldots \otimes gv_m,\quad g \in GL(V),\quad v_i \in V.$$

В том же пространстве определено линейное представление симметрич. группы S_m:

$$\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)},\ \sigma \in S_m,\ v_i \in V.$$

Операторы этих двух представлений перестановочны; тем самым в $T^m(V)$ определено линейное представление группы $GL(V) \times S_m$. Если $\operatorname{char} k=0$, то пространство $T^m(V)$ может быть разложено в прямую сумму минимальных $(GL(V) \times S_m)$-инвариантных подпространств:

$$T^m(V) = \Sigma_\lambda V_\lambda \otimes U_\lambda.$$

Здесь суммирование происходит по всем разбиениям λ числа m, содержащим не более n слагаемых, U_λ — пространство абсолютно неприводимого представления T_λ группы S_m, отвечающего разбиению λ (см. *Представление симметрической группы*), а V_λ — пространство нек-рого абсолютно неприводимого представления R_λ группы $GL(V)$. Разбиения λ удобно представлять в виде наборов $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ целых неотрицательных чисел, удовлетворяющих условиям $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, $\Sigma_i \lambda_i = m$.

Подпространство $V_\lambda \otimes U_\lambda \subset T^m(V)$ разлагается в сумму минимальных $GL(V)$-инвариантных подпространств, в каждом из к-рых реализуется представление R_λ. Эти подпространства могут быть явно получены применением к $T^m(V)$ *Юнга симметризаторов*, связанных с разбиением λ. Напр., для разбиения $\lambda=(m, 0, \ldots, 0)$ (соответственно $\lambda=(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ при $m \leqslant n$) $\dim U_\lambda = 1$ и $V_\lambda \otimes U_\lambda$ есть минимальное $GL(V)$-инвариантное подпространство, состоящее из всех симметрич. (соответственно кососимметрич.) тензоров.

Представление R_λ характеризуется следующими свойствами. Пусть $B \subset GL(V)$ — подгруппа, состоящая из линейных операторов, к-рые в нек-ром базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V записываются верхними треугольными матрицами. Тогда операторы $R_\lambda(b)$, $b \in B$, имеют единственный (с точностью до числового множителя) общий собственный вектор v_λ, называемый с т а р ш и м в е к т о р о м представления R_λ. Соответствующее собственное значение (с т а р ш и й в е с представления R_λ) равно $b_{11}^{\lambda_1} \ldots b_{nn}^{\lambda_n}$, где b_{ii} есть i-й диагональный элемент матрицы оператора b в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$.

Представления R_λ, отвечающие различным разбиениям λ, не эквивалентны. Характер представления R_λ находится по формуле Вейля:

$$\operatorname{tr} R_\lambda(g) = \frac{W_\lambda(z_1, \ldots, z_n)}{W_0(z_1, \ldots, z_n)},$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — корни характеристич. многочлена оператора g, W_λ — обобщенный определитель Вандермонда, отвечающий разбиению λ (см. *Фробениуса формула*), W_0 — обычный определитель Вандермонда. Размерность представления R_λ равна

$$\dim R_\lambda = \prod_{i<j} \frac{l_i - l_j}{j-i},$$

где $l_i = \lambda_i + n - i$.

Ограничение представления R_λ на унимодулярную группу $SL(V)$ неприводимо. Ограничения на $SL(V)$ представлений R_λ и R_μ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mu_i = \lambda_i + s$ (s не зависит от i). Ограничение представления R_λ группы $GL_n(k)$ на подгруппу $GL_{n-1}(k)$ находится по правилу:

$$R_\lambda|_{GL_{n-1}(k)} = \sum\nolimits_\mu R_\mu,$$

где μ пробегает все наборы $(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$, удовлетворяющие условию

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_{n-1} \geqslant \lambda_n.$$

Для всякой диаграммы Юнга d, отвечающей разбиению λ, тензор $v_\lambda \otimes u'_d \in T^m(V)$ (обозначения см. в ст. *Представление симметрической группы*) является результатом альтернирования по столбцам диаграммы d тензора $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}$, где i_k — номер строки диаграммы d, в к-рой находится число k. Тензоры, построенные таким образом по всем стандартным диаграммам d, образуют базис минимального S_m-инвариантного подпространства $v_\lambda \otimes U_\lambda$, в к-ром реализуется представление T_λ группы S_m.

Линейное представление ортогональной группы $O(V, f)$ в пространстве $T^m(V)$ устроено следующим образом. Имеется разложение в прямую сумму двух $(O(V, f) \times S_m)$-инвариантных подпространств:

$$T^m(V) = T_0^m(V) \oplus T_1^m(V),$$

где $T_0^m(V)$ состоит из бесследных тензоров, т. е. тензоров, свертка к-рых с формой f по любым двум индексам равна нулю, а

$$T_1^m(V) = \sum\nolimits_{\sigma \in S_m} \sigma(T^{m-2}(V) \otimes f^{-1}).$$

Пространство $T_0^m(V)$ в свою очередь разлагается в прямую сумму минимальных $(O(V, f) \times S_m)$-инвариантных подпространств:

$$T_0^m(V) = \sum\nolimits_\lambda V_\lambda^0 \otimes U_\lambda,$$

где $V_\lambda^0 \subset V_\lambda$. При этом $V_\lambda^0 \neq 0$ тогда и только тогда, когда сумма $\lambda'_1 + \lambda'_2$ высот первых двух столбцов таблицы Юнга, отвечающей разбиению λ, не превосходит n, и в этом случае V_λ^0 есть пространство абсолютно неприводимого представления R_λ^0 группы $O(V, f)$. Представления R_λ^0, отвечающие различным разбиениям λ, не эквивалентны. Если разбиение λ удовлетворяет условию $\lambda'_1 + \lambda'_2 \leqslant n$, то после замены первого столбца его таблицы Юнга столбцом высоты $n - \lambda'_1$ получается таблица Юнга нек-рого разбиения $\bar{\lambda}$, также удовлетворяющего этому условию. Соответствующие представления группы $O(V, f)$ связаны соотношением $R_{\bar{\lambda}}^0(g) = (\det g)\, R_\lambda^0(g)$ (в частности, они имеют одинаковую размерность).

Ограничение представления R_λ^0 на подгруппу $SO(V, f)$ абсолютно неприводимо, за исключением случая, когда n четно и $\lambda=\bar{\lambda}$ (т. е. число слагаемых разбиения λ равно $n/2$). В этом последнем случае оно распадается над полем k или его квадратичным расширением в сумму двух неэквивалентных абсолютно неприводимых представлений одинаковой размерности.

При вычислении размерности представления R_λ^0 можно считать, что $\lambda_1' \leqslant n/2$ (в противном случае следует заменить λ на $\bar{\lambda}$). Пусть $l_i=\lambda_i+n/2-i$. Тогда при нечетном n

$$\dim R_\lambda^0 = \prod_{i=1}^{[n/2]} \frac{l_i}{n/2-i} \prod_{i,\, j=1,\, i<j}^{[n/2]} \frac{(l_i-l_j)(l_i+l_j)}{(j-i)(n-i-j)},$$

а при четном n и $\lambda \neq \bar{\lambda}$

$$\dim R_\lambda^0 = \prod_{i,\, j=1,\, i<j}^{n/2} \frac{(l_i-l_j)(l_i+l_j)}{(j-i)(n-i-j)}.$$

При $\lambda=\bar{\lambda}$ последняя формула дает половину размерности представления R_λ^0, т. е. размерность каждого из соответствующих ему абсолютно неприводимых представлений группы $SO(V, f)$.

Разложение пространства $T^m(V)$ относительно симплектич. группы $Sp(V, f)$ аналогично разложению относительно ортогональной группы, с той разницей, что $V_\lambda^0 \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1' \leqslant n/2$. Размерность представления R_λ^0 находится в этом случае по формуле

$$\dim R_\lambda^0 = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{l_i}{n/2-i+1} \prod_{i,\, j=1,\, i<j}^{n/2} \frac{(l_i-l_j)(l_i+l_j)}{(j-i)(n-j-i+2)},$$

где $l_i=\lambda_i+n/2-i+1$.

Лит.: [1] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [3] Хамермеш М., Теория групп и ее применение к физическим проблемам, пер. с англ., М., 1966.

Э. Б. Винберг.

ПРЕДСТАВЛЯЮЩАЯ ФУНКЦИЯ — непрерывная функция f на топологич. пространстве X, снабженном непрерывным действием нек-рой группы G, орбита к-рой $\{g^*f \mid g \in G\}$ в пространстве всех непрерывных функций на X порождает конечномерное подпространство. П. ф. иногда называют также сферическими, или почти инвариантными, функциями. П. ф. со значениями в поле $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ образуют G-инвариантную k-подалгебру $F(X, k)_G$ в алгебре всех k-значных непрерывных функций $F(X, k)$ на X. В случае, когда $X=G$ — топологич. группа, действующая на себе при помощи левых сдвигов, $F(X, k)_G = F(G, k)_G$ совпадает с подпространством в $F(G, k)$, порожденным матричными элементами конечномерных непрерывных линейных представлений группы G. Если при этом G компактна, то можно ограничиться матричными элементами неприводимых представлений. Напр., если $G=T$ — группа вращений плоскости, то П. ф. на G — это тригонометрич. полиномы. Другим примером являются классические сферич. функции на сфере, к-рые суть П. ф. для стандартного действия группы вращений сферы.

Если G — компактная топологич. группа, непрерывно действующая на пространстве X, являющемся объединением счетного числа компактов, то $F(X, k)_G$ плотно в $F(X, k)$ относительно компактно открытой топологии (см. *Петера — Вейля теорема*). Аналогичные утверждения справедливы для П. ф. различных степеней гладкости на дифференцируемом многообразии с гладким действием компактной группы Ли. С другой стороны, если G не допускает нетривиальных непрерывных гомоморфизмов в компактную группу (например, G — связная полупростая группа Ли без компактных простых факторов), то всякая П. ф. на компактном пространстве X с непрерывным действием группы G является G-инвариантной [4].

Если гладкое действие компактной группы Ли G на дифференцируемом многообразии X имеет лишь конечное число типов орбит, то алгебра $F^{\infty}(X, k)_G$ всех П. ф. класса C^{∞} конечно порождена над подалгеброй всех G-инвариантных функций класса C^{∞} (см. [5]). В частности, для однородного пространства X алгебра $F(X, \mathbb{C})_G = F^{\infty}(X, \mathbb{C})_G$ конечно порождена и отождествляется с алгеброй регулярных функций на аффинном однородном алгебраич. многообразии над $\mathbb{C}$, множество вещественных точек к-рого совпадает с X. Важной для приложений является задача о разложении G-модуля $F(X, \mathbb{C})_G$ в прямую сумму простых G-модулей. В случае, когда X — симметрическое однородное пространство компактной группы G, она была решена Э. Картаном [1].

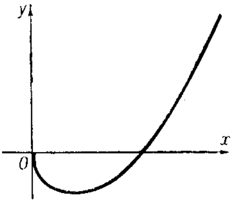
Обобщением П. ф. являются представляющие сечения нек-рого векторного G-расслоения E над G-пространством X, т. е. непрерывные сечения, G-орбиты к-рых порождают конечномерные подпространства в пространстве $\Gamma(E)$ всех непрерывных сечений, напр. представляющие тензорные поля на гладких многообразиях с гладким действием группы Ли G; они образуют G-подмодуль $\Gamma(E)_G \subset \Gamma(E)$ (см. [5]). Если группа G компактна, то подмодуль $\Gamma(E)_G$ плотен в $\Gamma(E)$. В случае, когда X — симметрическое однородное пространство группы G, изучено (см. [3]) разложение G-модуля $\Gamma(E)_G$ на простые компоненты. Если же X — компактное однородное пространство полупростой группы Ли G без компактных факторов со связной стационарной подгруппой, то

$$\dim \Gamma(E)_G < \infty$$

(см. [2]).

Лит.: [1] Cartan E., «Rend. Circ. Mat. Palermo», 1929, v. 53, p. 217—52; [2] Дао Ван Ча, «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 5, с. 203—04; [3] Дзядык Ю. В., «Докл. АН СССР», 1975, т. 220, № 5, с. 1019—22; [4] Лукацкий А. М., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 5, с. 212—13; [5] Оницик А. Л., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1976, т. 35, с. 235—64. *А. Л. Онищик.*

ПРЕКРАЩЕНИЯ ТОЧКА — особая точка плоской кривой, в к-рой кривая обрывается. Окружность достаточно малого радиуса с центром в П. т. пересекает кривую только в одной точке. Например, у кривой $y = x \ln x$ П. т.— начало координат (см. рис.).



БСЭ-3.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — отображение u нек-рого множества M (вообще говоря, наделенного нек-рой структурой) в себя. Образ элемента $\alpha \in M$ при преобразовании u обозначается $u(\alpha)$, или $u\alpha$, или αu, или α^u. Совокупность всех П. множества M в себя образует относительно операции умножения (суперпозиции) *преобразований полугруппу*, называемую симметрической полугруппой на множестве M. Обратимые элементы этой полугруппы наз. *подстановками*. Все подстановки на множестве M образуют подгруппу симметрич. полугруппы — *симметрическую группу*.

См. также *Подстановок группа*, *Преобразований группа*. *О. А. Иванова.*

ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРУППА — *подстановок группа* (G, M), действующая на множестве M. При этом если на множестве M определена какая-либо структура и элементы из G эту структуру сохраняют, то принято говорить, что G есть группа преобразований этой структуры. Наименование П. г. обычно отражает в нек-рой мере наименование структуры, определенной на M. Так, напр., если M — векторное пространство над телом, то группы, сохраняющие эту структуру, наз. *линейными группами*. Более общо, линейными группами наз. часто группы автоморфизмов модулей над различными кольцами. В частности, если M — свободный конечномерный модуль над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел, то говорят о *кристаллографических группах*. Если M — топологич. пространство, а G состоит из автогомеоморфизмов пространства M, то говорят о группах непрерывных преобразований. Если $M=K$ есть поле, а G — конечная группа автоморфизмов поля K, то G является группой Галуа расширения K/L, где L — подполе, состоящее из элементов, неподвижных при действии элементов из G. Рассматривается также ситуация, когда группа G и множество M снабжены структурами одного и того же типа, причем действие группы G на M является морфизмом в соответствующей категории. Напр., если G — топологич. группа, непрерывно действующая на топологич. пространстве M, то говорят о *топологической группе* преобразований; аналогично определяются *Ли группа преобразований*, *алгебраическая группа преобразований*.

Лит.: [1] Математика, ее содержание, методы и значение, т. 3, М., 1956, гл. 20. *Л. А. Калужнин.*

ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОЛУГРУППА — всякая подполугруппа симметрич. полугруппы T_Ω, где T_Ω— совокупность всех преобразований множества Ω. Частным случаем П. п. являются *преобразований группы*.

П. п. $P_1 \in T_{\Omega_1}$, $P_2 \subset T_{\Omega_2}$ наз. подобными, если существуют биекции $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ и $\psi : P_1 \to P_2$ такие, что при $u\alpha = \beta(\alpha, \beta \in \Omega_1; u \in P_1)$ имеет место $(\psi u)(\varphi\alpha) = \varphi\beta$. Подобные П. п. изоморфны, но обратное, вообще говоря, неверно. Однако в пределах нек-рых классов П. п. из изоморфизма вытекает подобие. Таков, напр., класс П. п., включающих все такие преобразования u, что $u\Omega$ состоит из одного элемента. Задание полугруппы как П. п. несет бо́льшую информацию, чем ее задание с точностью до изоморфизма.

Принципиально важно выделение свойств П. п., инвариантных относительно изоморфизмов. Для нек-рого класса П. п. Г условие, при к-ром полугруппа S изоморфна нек-рой полугруппе из Г, наз. абстрактной характеристикой класса Г. Найдены абстрактные характеристики для нек-рых важных П. п. Всякая полугруппа изоморфна нек-рой П. п. Полугруппа S тогда и только тогда изоморфна нек-рой симметрич. полугруппе T_Ω, когда она является максимальным плотным идеальным расширением (см. *Расширение* полугруппы) какой-либо полугруппы A с тождеством $xy=x$.

Из общей теории П. п. выделяется направление, при к-ром преобразуемое множество Ω наделено нек-рой структурой (топологией, действием, отношением в Ω и т. п.), и рассматриваются П. п., связанные с этой структурой (эндоморфизмы, непрерывные или линейные преобразования, *сдвиги полугрупп* и т. д.). Изучение соотношений между свойствами структуры в Ω и свойствами полугруппы соответствующих преобразований является обобщением теории Галуа. В частности, известны случаи, когда указанная П. п. вполне определяет структуру (см., напр., *Эндоморфизмов полугруппа*). Свойства левых и правых сдвигов полугрупп используются в общей теории полугрупп.

Обобщением понятия преобразования является частичное преобразование, отображающее какое-либо подмножество $\Omega' \subset \Omega$ в Ω. Бинарное отношение на множестве Ω иногда трактуют как многозначное (вообще говоря, частичное) преобразование этого множества. Рассматриваемые относительно операции суперпозиции (определяемой как умножение бинарных отношений) однозначные и многозначные частичные преобразования также образуют полугруппы. Целесообразно рассматривать их как полугруппы, наделенные дополнительными структурами (напр., отношением включения бинарных отношений, включения или равенства областей определения, включения или равенства образов и т. д.).

Лит.: [1] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [2] Клиффорд А. Х., Престон Г. Б., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [3] Глускин Л. М., «Матем. сб.», 1961, т. 55, № 4, с. 421—48; [4] Schein В. М., «Semigroup Forum», 1970, v. 1, № 1, p. 1—62.

Л. М. Глускин, Е. С. Ляпин.

ПРЕПЯТСТВИЕ — понятие гомотопич. топологии; инвариант, равный нулю, если соответствующая задача разрешима, и отличный от нуля — в противном случае.

Пусть (X, A) — пара клеточных пространств и Y — односвязное (более общо — гомотопически простое) топологич. пространство. Можно ли данное непрерывное отображение $g: A \to Y$ продолжить до непрерывного отображения $f: X \to Y$? Продолжение можно осуществлять по остовам X^n пространства X. Пусть построено такое отображение $f: X^n \cup A \to Y$, что $f|_A = g$. Для любой ориентированной $(n+1)$-мерной клетки $S^n \to Y$ отображение $f\big|_{\partial e^{n+1}}$ задает отображение $S^n \to Y$ (где S^n есть n-мерная сфера) и элемент $\alpha_e \in \pi_n(Y)$ (именно здесь и используется гомотопич. простота пространства Y, позволяющая игнорировать выбор отмеченной точки). Таким образом, возникает коцепь

$$c_f^{n+1} \in C^{n+1}(X;\ \pi_n(Y)),\ c_f^{n+1}(e^{n+1}) = \alpha_e.$$

Так как для $e^{n+1} \subset A$, очевидно, $c_f^{n+1}(e^{n+1}) = 0$, то на самом деле

$$c_f^{n+1} \in C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y)).$$

Очевидно, $c_f^{n+1} = 0$ тогда и только тогда, когда f продолжается на X^{n+1}, т. е. коцепь c_f^{n+1} является **препятствием** к продолжению f на X^{n+1}.

Коцепь $c_f^{n+1} \in C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ является коциклом. Из того, что $c_f^{n+1} \neq 0$, вообще говоря, не следует, что g не продолжается на X: f может не продолжаться на X^{n+1} в силу неудачного выбора продолжения g на X^n. Может оказаться, напр., что отображение $f\big|_{X^{n-1} \cup A}$ продолжается на X^{n+1}, т. е. что продолжение возможно после отступления на один шаг. Оказывается, что П. к этому является класс когомологий

$$[c_f^{n+1}] \in H^{n+1}(X,\ A;\ \pi_n(Y)),$$

то есть $[c_f^{n+1}] = 0$ тогда и только тогда, когда существует такое отображение $\tilde{f}: X^{n+1} \cup A \to Y$, что $\tilde{f}\big|_{X^{n-1} \cup A} = f\big|_{X^{n-1} \cup A}$ (в частности, $\tilde{f}\big|_A = g$). Для доказательства этого утверждения используется конструкция *различающей.*

Так как задачу гомотопич. классификации отображений $X \to Y$ можно интерпретировать как задачу продолжения, то теория П. применима и к описанию множества $[X, Y]$ гомотопич. классов отображений из X в Y. Пусть $I = [0, 1]$ и пусть $A = X \times \{0, 1\}$ — подпространство в $X \times I$. Тогда пара отображений $f_0, f_1: X \to Y$ интерпретируется как отображение $G: A \to Y$, $G(x, i) = f_i(x)$, $i = 0, 1$, и наличие гомотопии между f_0 и f_1 означает наличие отображения $F: X \times I \to Y$, продолжающего отображение G. При этом если гомотопия F построена на n-мерном остове пространства X, то П. к ее продолжению на X есть различающая

$$d^n(f_0,\ f_1) \in C^n(X;\ \pi_n(Y)).$$

В качестве приложения можно указать описание множества $[X,\ Y] = [X,\ K(\pi,\ n)]$, $n > 1$, где $K(\pi, n)$ — *Эйленберга — Маклейна пространство*: $\pi_i\ (K(\pi, n)) = 0$ при $i \neq n$, $\pi_n(K(\pi,\ n)) = \pi$. Пусть $f_0: X \to K(\pi, n)$ — постоянное отображение, а $f: X \to K(\pi, n)$ — произвольное непрерывное отображение. Так как $H^i(X; \pi_i(Y))=0$ при $i<n$, то f_0 и f_1 гомотопны на X^{n-1} и можно, выбрав какую-нибудь такую гомотопию, определить различающую

$$d^n(f, f_0) \in C^n(X; \pi_n(Y)) = C^n(X; \pi).$$

Класс когомологий $[d^n(f, f_0)] \in H^n(X; \pi)$ определен корректно, т. е. не зависит от выбора гомотопии между f_0 и f (в силу того, что $\pi_i(Y)=0$ при $i<n$). Далее, если отображения $f, g: X \to Y$ таковы, что $[d^n(f, f_0)] = [d^n(g, f_0)]$, то $[d^n(f, g)]=0$ и, значит, f и g гомотопны на X^n. П. к продолжению этой гомотопии на все X лежат в группах $H^i(X; \pi_i(Y))=0$ (так как $i>n$), и, значит, отображения f и g гомотопны. Таким образом, гомотопич. класс отображения f полностью определяется элементом $[d^n(f, f_0)] \in H^n(X, \pi)$. Наконец, для любого элемента $x \in H^n(X, \pi)$ найдется отображение f с $[d^n(f, f_0)]=x$ и потому $[X, K(\pi, n)]=H^n(X; \pi)$. Аналогично: если $\pi_i(Y)=i$ при $i<n$ и $\dim X \leqslant n$, то $[X, Y] = H^n(X; \pi_n(Y))$.

При исследовании задачи продолжения рассматривалась возможность продолжения после «отступления на один шаг». Полное решение задачи требует анализа возможности продолжения после отступления на произвольное число шагов. Для этой цели используются *когомологические операции* или *Постникова системы*. Так, для описания множества $[X, Y]$, где $\pi_i(Y)=0$ при $i<n$, $\pi_n(Y)\neq 0$, $\dim X=n+r$, требуется, вообще говоря, исследовать возможность отступления на $r+1$ шаг, для чего надо исследовать первые $n+r$ этажей системы Постникова пространства Y, т. е. использовать когомологич. операции порядков $\leqslant r$ (в ст. *Когомологические операции* эта задача разобрана для $r=1$).

Теория П. используется также в более общей ситуации продолжения *сечений*. Пусть $p: E \to B$ — нек-рое расслоение со слоем F (причем $\pi_1(F)=0$ и $\pi_1(B)$ действует на $\pi_1(F)$ тривиально), пусть $A \subset B$ и $s: A \to E$ — нек-рое сечение (т. е. такое непрерывное отображение, что $ps(a)=a$). Можно ли продолжить s на все B? Соответствующие П. лежат в группах $H^{n+1}(B; \pi_n(F))$. Задача продолжения получается из этой задачи, если положить $B=X$, $E=X\times Y$, $p(x, y)=x$, $s(a)=(a, g(a))$. Аналогичным образом с помощью теории П. исследуется и задача классификации сечений.

Наконец, в задаче продолжения можно снять ограничение гомотопич. простоты пространства Y (и аналогично в задаче о сечениях); для этого надо использовать когомологии с локальными коэффициентами.

Ю. Б. Рудяк.

ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ИГРА — антагонистическая дифференциальная игра преследователя (догоняющего) P и преследуемого (убегающего) E, движения к-рых описываются системами дифференциальных уравнений:

$$P: \dot{x}=f(x, u), \quad E: \dot{y}=g(y, v),$$

где x, y — фазовые векторы, определяющие состояния игроков P и E соответственно; u, v — управляющие параметры, выбираемые игроками в каждый момент времени из заданных компактных множеств U, V евклидовых пространств. Целью P может быть, напр., сближение с E на заданное расстояние, что формально означает попадание x в l-окрестность y ($l \geqslant 0$). При этом различаются случаи сближения за минимальное время (П. и. на быстродействие), к заданному моменту времени (П. и. с предписанной продолжительностью) и до момента достижения игроком E нек-рого множества (игра с «линией жизни»). Сравнительно хорошо изучены игры с полной информацией, когда оба игрока знают фазовые состояния друг друга в каждый текущий момент времени. Под решением П. и. понимается нахождение ситуации равновесия.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 219—74; [2] Красовский Н. Н., Субботин А. И., Позиционные дифференциальные игры, М., 1974; [3] Айзекс Р., Дифференциальные игры, пер. с англ., М., 1967; [4] Петросян Л. А., Дифференциальные игры преследования, Л., 1977. *Л. А. Петросян.*

ПРИБЛИЖЕНИЕ — то же, что *аппроксимация*. Термин «П.» иногда употребляется в смысле приближающего объекта (напр., начальное П.).

ПРИБЛИЖЕНИЕ В СРЕДНЕМ — приближение заданной и интегрируемой на промежутке $[a, b]$ функции $f(t)$ функцией $\varphi(t)$, когда за меру погрешности принята величина

$$\mu(f, \varphi)=\int_a^b |f(t)-\varphi(t)|\,dt.$$

В более общем случае, когда

$$\mu(f, \varphi)=\int_a^b |f(t)-\varphi(t)|^q\,d\sigma(t) \quad (q>0),$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая на $[a, b]$ отличная от постоянной функция, говорят о среднестепенном (с показателем q) приближении относительно распределения $d\sigma(t)$. Если $\sigma(t)$ абсолютно непрерывна и $\rho(t)=\sigma'(t)$, получают среднестепенное приближение с весом $\rho(t)$, если же $\sigma(t)$ — ступенчатая функция со скачками c_k в точках t_k из $[a, b]$, то приходят к взвешенному среднестепенному приближению в системе точек $\{t_k\}$ с мерой погрешности

$$\mu(f, \varphi)=\sum\nolimits_k c_k\,|f(t_k)-\varphi(t_k)|^q.$$

Естественным образом эти понятия обобщаются на случай функций многих переменных.

Лит.: [1] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [2] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ — замена по определенному правилу функции $f(t)$ близкой к ней в том или ином смысле функцией $\varphi(t)$ из заранее фиксированного множества $\mathfrak{N}$ (приближающего множества). Предполагается, что функция f определена на том множестве Q m-мерного евклидова пространства (в частности, действительной оси), на к-ром осуществляется приближение, она может быть задана явно через элементарные функции или быть решением нек-рого уравнения. Если о функции $f(t)$ располагают неполной информацией, то тогда речь идет, по существу, о приближении задаваемого этой информацией целого класса функций.

Практич. необходимость в П. ф. возникает в самых различных ситуациях, когда нужно функцию $f(t)$ заменить более гладкой или более простой и удобной для вычислений, восстановить функциональную зависимость по экспериментальным данным и т. п.

В общей задаче П. ф. обычно можно выделить следующие более частные задачи: выбор приближающего множества $\mathfrak{N}$; выбор меры погрешности приближения; выбор метода приближения, т. е. правила, по к-рому функции $f(t)$ сопоставляется функция $\varphi(t)$ из $\mathfrak{N}$; исследование и оценка погрешности приближения.

При выборе приближающего множества $\mathfrak{N}$, помимо безусловного требования обеспечить нужную точность приближения, руководствуются стремлением иметь дело с простыми по структуре и удобными для вычисления функциями $\varphi(t)$, на к-рые могут накладываться априорные условия, связанные, напр., с гладкостью.

Классич. аппаратами приближения являются алгебраические (если Q — ограниченное замкнутое множество) и тригонометрические (в периодич. случае) полиномы одного и многих переменных. Широкое применение их в качестве приближающего множества обусловлено, в частности, принципиальной возможностью приблизить непрерывную функцию алгебраическими или тригонометрич. полиномами с любой наперед заданной погрешностью. Точность приближения может быть повышена за счет увеличения степени полинома, что, однако, усложняет приближающий аппарат и увеличивает вычислительные трудности при его использовании. На практике в качестве приближающего множества берут подпространства алгебраических или тригонометрич. полиномов фиксированного порядка и стремятся получить нужную точность с помощью полиномов возможно меньшей степени. Более общий и в то же время более гибкий аппарат приближения получают, рассматривая обобщенные полиномы

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_N\varphi_N(t),$$

где $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ — нек-рая система линейно независимых функций, к-рую можно выбирать в зависимости от условий конкретной задачи и априорных требований на $\varphi(t)$.

Во многих задачах более естественным и удобным с вычислительной точки зрения, чем классич. полиномы, аппаратом приближения оказались *сплайны.* Если

$$\Delta_N = \{a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = b\},\ N \geqslant 2, \qquad (1$$

фиксированное разбиение отрезка $[a, b]$, то (п о л и н о м и а л ь н ы м) с п л а й н о м порядка r дефекта k ($k=1, 2, \ldots, r$) по разбиению Δ_N наз. функцию $s(t)$, «склеенную» в точках $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{N-1}$ из алгебраич. многочленов степени r так, что на всем отрезке $[a, b]$ она непрерывна вместе со своими производными до $(r-k)$-го порядка включительно. Таким образом, $s(t) \in C^{r-k}[a, b]$ и $s(t)$ есть алгебраич. многочлен степени r на каждом промежутке (τ_{i-1}, τ_i), $i=1, 2, \ldots, N$. Напр., ломаная с узлами в точках τ_i есть с п л а й н п е р в о г о п о р я д к а д е ф е к т а 1; непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция $s(t)$, совпадающая на $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i=1, \ldots, N$, с кубич. многочленом, есть к у б и ч е с к и й с п л а й н д е ф е к т а 2 и т. д. Аналогично определяются сплайны двух и большего числа переменных. Имея конечную гладкость, сплайны обладают большей, чем полиномы, локальной гибкостью: изменение значений сплайна на нек-ром промежутке (α, β) мало сказывается (или совсем не сказывается) на поведении его вне (α, β). Преимущества сплайнов, помимо простоты машинной реализации, сказываются, в частности, там, где информация о приближаемой функции имеет дискретный характер, напр. значения в нек-рых точках самой функции f и, быть может, нек-рых ее производных.

Если $f(t)$ имеет особенности или приближение осуществляется в неограниченной области, то удобным аппаратом приближения являются рациональные дроби $p(t)/q(t)$, где $p(t)$ и $q(t)$ — алгебраич. многочлены. Заданные на всей действительной оси непериодич. функции приближают также целыми функциями экспоненциального типа.

М е р а п о г р е ш н о с т и $\mu(f, \varphi)$ выбирается обычно с учетом условий конкретной задачи и имеющейся информации о приближаемой функции $f(t)$. Чаще всего дело сводится к выбору содержащего f функционального пространства, в метрике к-рого целесообразно оценивать погрешность приближения. Если

$$\mu(f, \varphi) = \sup_{t \in Q} |f(t) - \varphi(t)|,$$

то речь идет о р а в н о м е р н о м, или ч е б ы ш е в с к о м, п р и б л и ж е н и и, если же

$$\mu(f, \varphi) = \int_Q |f(t) - \varphi(t)|^p\, dt,\ p > 0,$$

то говорят о среднестепенном приближении, к-рое при $p=1$ наз. приближением в среднем. Особое значение имеет случай $p=2$ — среднеквадратическое приближение, когда погрешность наилучшего приближения функции f конечномерным подпространством может быть точно выражена через нек-рые определители. В нек-рых задачах требования близости функций f и φ в различных точках различны; для учета этой неоднородности вводят *весовую функцию* $\rho(t)\geqslant 0$ и рассматривают взвешенное приближение с мерой погрешности

$$\mu(f, \varphi)=\sup_{t \in Q}|f(t)-\varphi(t)|\rho(t)$$

или

$$\mu(f, \varphi)=\int_Q |f(t)-\varphi(t)|^p \rho(t)\,dt,\ p>0.$$

Весовая функция позволяет также обеспечить конечность погрешности, если, напр., $f(t)$ неограничена. Если погрешность должна учитывать близость f и φ только в отдельных точках t_k $(k=1, \ldots, N)$ из Q, то в качестве $\mu(f, \varphi)$ можно выбрать одну из величин

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}|f(t_k)-\varphi(t_k)|$$

или

$$\sum_{k=1}^{N}|f(t_k)-\varphi(t_k)|^p,\ p>0,$$

в к-рые также могут вводиться весовые коэффициенты.

При решении вопроса о том, по какому правилу выбирать из множества $\mathfrak{N}$ приближающую функцию $\varphi(t)=\varphi(f, t)$ (при выборе метода приближения), естественно стремление обеспечить по возможности более высокую точность приближения и одновременно простоту построения $\varphi(f, t)$ по имеющейся информации о приближаемой функции $f(t)$. Первое требование ориентирует на «ближайшую» к $f(t)$ функцию $\varphi_f(t)$ из $\mathfrak{N}$, т. е. такую, что

$$\mu(f, \varphi_f)=\inf_{\varphi\in\mathfrak{N}}\mu(f, \varphi).$$

Здесь сразу же возникают вопросы о существовании и единственности такой функции (функции наилучшего приближения), а также о ее характеристич. свойствах (см. [5]). Существование гарантируется, если $\mathfrak{N}$ — замкнутое локально компактное множество, в частности конечномерное подпространство. Единственность зависит как от свойств приближающего множества $\mathfrak{N}$ (см. *Хаара условие*, *Чебышева система* функций), так и от метрики, определяющей меру погрешности $\mu(f, \varphi)$. Известен ряд необходимых и достаточных условий, к-рым должна удовлетворять функция наилучшего приближения $\varphi_f(t)$ в той или иной ситуации (см. *Наилучшего приближения многочлен*, *Чебышева теорема*, *Маркова критерий*). Однако эти критерии, как правило, не дают способов эффективного построения функции $\varphi_f(t)$. Поэтому большое значение имеют методы, к-рые позволяют по информации о приближаемой функции $f(t)$ эффективно построить нек-рую функцию $\varphi(f, t)$ из $\mathfrak{N}$, обеспечивающую приемлемое приближение. Здесь, в первую очередь, надо говорить о линейных методах (когда $\varphi(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,\ t)=\alpha_1\varphi(f_1,\ t)+\alpha_2\varphi(f_2,\ t)$), к к-рым, в частности, относится метод интерполяции. Зафиксировав точки $t_1, \ldots, t_N$ из Q, можно выбирать $\varphi(f, t)$ среди тех функций $\varphi(t)$ из $\mathfrak{N}$, к-рые удовлетворяют условию интерполяции

$$\varphi(t_k)=f(t_k),\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{2}$$

Если $\mathfrak{N}$ — линейное многообразие и в нем существует система функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ такая, что $\varphi_i(t_i)=1$, $\varphi_i(t_k)=0$ $(k\neq i)$, то функция

$$\varphi(f, t) = \sum_{k=1}^{N} f(t_k)\varphi_k(t)$$

принадлежит $\mathfrak{N}$ и удовлетворяет условиям (2); она задает **интерполяционный метод приближения**, являющийся, очевидно, линейным. Функцию $\varphi(f, t)$ можно выбирать, требуя совпадения в точках t_k не только $f(t)$ и $\varphi(f, t)$, но и нек-рых их производных; в этом случае говорят об **интерполировании с кратными узлами**. Если $Q=[a, b]$, $a\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_N\leqslant b$, то существует единственный алгебраич. многочлен степени $N-1$, а в непериодич. случае $(b-a=2\pi,\ t_N=t_{2n-1}<b)$ — единственный тригонометрич. полином порядка $n-1$, совпадающий с $f(t)$ в точках t_k. Кратное интерполирование осуществляют интерполяционные полиномы Эрмита, частным случаем к-рых является многочлен Тейлора, когда в одной точке алгебраич. многочленом степени n интерполируются значения функции и ее первых n производных.

Интерполирование сплайнами имеет свои особенности, связанные с выбором точек интерполяции и краевых условий, обеспечивающих существование и единственность интерполяционного сплайна. Напр., сплайн $s(t)$ порядка $r\geqslant 2$ дефекта 1 по разбиению (1), принимающий заданные значения в N различных точках t_i интервала (a, b) таких, что $\tau_{i-1}\leqslant t_i\leqslant\tau_i$, $i=1, 2, \ldots, N$, существует и единствен, если задать определенным образом краевые условия в виде m_a чисел $s^{(\nu)}(a)$ $(0\leqslant\nu\leqslant r-1)$ и m_b чисел $s^{(\mu)}(b)$ $(0\leqslant\mu\leqslant r-1)$, причем $m_a+m_b=r$. Функции $f\in C^{k-1}[a, b]$ можно однозначно сопоставить сплайн $s(f, t)$ порядка $2r-1$ дефекта k $(1\leqslant k\leqslant r)$ по разбиению (1), потребовав выполнения равенств $s^{(\nu)}(f, \tau_i)=f^{(\nu)}(\tau_i)$, $\nu=0, 1, \ldots, k-1$; $i=0, 1, \ldots, N$, а при $k<r$ также нек-рых краевых условий. При $k=r$ этот сплайн наз. **эрмитовым**, а также **локальным**, т. к. его поведение на интервале (τ_{i-1}, τ_i) определяется только значениями функции $f(t)$ и ее производных $f^{(\nu)}(t)$ $(\nu=1, \ldots, k-1)$ в точках τ_{i-1} и τ_i.

В П. ф. важную роль играют также линейные методы, построенные на базе разложения приближаемой функции в ряд Фурье по нек-рой ортогональной системе. В частности, в периодич. случае широко распространенным аппаратом приближения являются суммы Фурье по тригонометрич. системе и их различные усреднения (см. *Приближение функций; линейные методы приближения*).

Исследование и оценка погрешности приближения — важный с практич. точки зрения и в то же время наиболее содержательный в идейном отношении этап П. ф. Именно разработка методов оценки погрешности, изучение зависимости ее от гладкостных характеристик приближаемой функции, исследование и сравнение аппроксимативных свойств различных аппаратов приближения привели к формированию теории приближения функций — одного из наиболее интенсивно развивающихся разделов математич. анализа.

Фундамент теории П. ф. был заложен работами П. Л. Чебышева в 1854—59 (см. [1]) о наилучшем равномерном приближении непрерывных функций многочленами и рациональными дробями, а также работами К. Вейерштрасса [2], доказавшего в 1885, что для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ или непрерывной на всей оси с периодом 2π функции $f(t)$ существует последовательность алгебраических (соответственно тригонометрических) полиномов $P_n(f, t)$ порядка $n=1, 2, \ldots$ такая, что при $n \to \infty$

$$\mu(f, P_n(f)) = \max_{t \in Q} |f(t) - P_n(f, t)| \longrightarrow 0,$$

где Q есть $[a, b]$ или, соответственно, вся числовая ось. Аналогичные факты имеют место и в случае, когда мера погрешности определяется интегральной метрикой, а также для функций многих переменных. Особую важность приобретает исследование скорости убывания числовой последовательности $\mu(f, P_n(f))$ в зависимости от свойств приближаемой функции и от выбора приближающих полиномов $P_n(f, t)$. Наибольший интерес представляет изучение наилучшего приближения, а также приближения, доставляемого линейными методами, позволяющими по функции $f(t)$ эффективно построить полином $P_n(f, t)$. Важный этап в развитии теории П. ф., связанный с именами Ш. Ж. Валле Пуссена (Ch. J. La Vallée Poussin), Д. Джексона (D. Jackson), С. Н. Бернштейна, составили исследования связи между скоростью убывания погрешности приближения функции $f(t)$ выбранными тем или иным способом многочленами $P_n(f, t)$ степени n (при $n \to \infty$) и дифференциально-разностными свойствами $f(t)$. Оказалось, что эти свойства, т. е. наличие у $f(t)$ производных, их гладкость и т. д., можно в ряде случаев охарактеризовать через последовательность приближающих полиномов и поведение доставляемой ими погрешности (см. *Приближение функций*; прямые и обратные теоремы). Этим давалась новая, конструктивная характеристика непрерывных и дифференцируемых функций. В первой трети 20 в. такая проблематика была доминирующей в теории приближения, что дало повод говорить о ней как о *конструктивной теории функций*.

В 30—40-х гг. появились работы А. Н. Колмогорова, Ж. Фавара (J. Favard) и С. М. Никольского, к-рые положили начало новому направлению исследований, связанному с приближением классов функций конечномерными подпространствами и получением точных оценок погрешности через задающие класс дифференциально-разностные характеристики. Речь идет об отыскании величин

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}} \mu(f, P_N(f)),$$

где $\mu(g, \varphi)$ — выбранная мера погрешности приближения, $\mathfrak{M}$ — нек-рый класс функций, а $P_N(f, t)$ — приближающий (вообще говоря, обобщенный) полином, коэффициенты к-рого определяются выбором метода приближения. Результаты такого рода позволяют сравнивать методы приближения с точки зрения их аппроксимативных возможностей и ставить важную для приложений задачу отыскания для данного класса функций оптимального (наилучшего) приближающего аппарата (фиксированной размерности N). Исследования в этом направлении, базирующиеся как на изучении свойств конкретных методов приближения, так и на самых общих положениях функционального анализа, оказались весьма плодотворными и в идейном отношении, т. к. привели к установлению принципиально новых фактов о связи между различными по характеру экстремальными задачами, позволили выявить глубокие и тонкие зависимости в теории функций. Благодаря этому оказалось возможным до конца решить ряд экстремальных задач по наилучшему приближению важнейших классов функций (см. [5], [7], а также *Приближение функций*; экстремальные задачи на классах функций).

О некоторых других аспектах П. ф. На приближающую функцию $\varphi(t) = \varphi(f, t)$ из $\mathfrak{N}$ могут накладываться дополнительные ограничения. Если они не связаны с функцией f (напр., ограничения или связи на коэффициенты приближающего полинома), то дело фактически сводится к уточнению приближающего множества $\mathfrak{N}$. Новая ситуация возникает, если ограничения на $\varphi(f, t)$ связаны с приближаемой функцией f; один из интересных случаев — **одностороннее приближение**, когда $\varphi(f, t)$ из $\mathfrak{N}$ должна удовлетворять неравенству $\varphi(f, t) \leqslant f(t)$ (или $\geqslant$) и погрешность оценивается в интегральной метрике (см. [19]).

В прикладных задачах наряду с явно задаваемыми функциями возникает необходимость приближать кривые и поверхности, допускающие только параметрич. задание; в качестве аппарата приближения могут служить, напр., параметрич. сплайны. Меру погрешности здесь естественнее всего определить через хаусдорфово расстояние, к-рое хорошо учитывает геометрич. близость таких объектов, и, напр., для кривых l_1 и l_2 определяется равенством

$$r(l_1, l_2) = \max \left\{ \max_{P \in l_1} \min_{Q \in l_2} \rho(P, Q),\ \max_{P \in l_2} \min_{Q \in l_1} \rho(P, Q) \right\},$$

где $\rho(P, Q)$ — евклидово (или какое-нибудь другое) расстояние между точками P и Q. Хаусдорфово расстояние является более предпочтительным при выборе меры погрешности и в нек-рых ситуациях П. ф., напр. когда разрывную функцию нужно аппроксимировать функцией гладкой (см. [16]).

Решение ряда задач теории П. ф. тесно связано с исследованием экстремальных свойств полиномов по тем или иным конкретным системам функций (неравенства для производных многочленов, полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля, и др.). В частности, доказательство обратных теорем П. ф. существенно базируется на неравенствах, дающих оценку нормы (или значения в фиксированной точке) нек-рой производной алгебраического или тригонометрич. полинома через те или иные характеристики самого полинома. В этом направлении известен ряд точных результатов, имеются обобщения на целые функции (см. [6] — [10]).

Задача об алгебраич. многочлене (с фиксированным старшим коэффициентом), наименее уклоняющемся от нуля в метрике C или L_p на отрезке $[a, b]$, эквивалентная задаче о наилучшем приближении функции t^n многочленами степени $n-1$, исследовалась П. Л. Чебышевым (метрика C) и его учениками (метрика L_1). Решение дают многочлены Чебышева первого (C) и второго (L_1) рода и многочлены Лежандра (L_2), имеющие широкое применение как в теоретических, так и в прикладных исследованиях. Известен ряд результатов для более общего случая, когда на коэффициенты многочлена накладывается несколько связей (см. [6]). Задача о моносплайне минимальной нормы, эквивалентная отысканию наилучшего приближения функции t^n сплайнами порядка $n-1$ со свободными узлами, приобрела особое значение в связи с тем, что к ней в ряде случаев сводится задача о наилучшей квадратурной формуле (см. [17]).

О П. ф. в комплексной плоскости см. *Приближение функций комплексного переменного.*

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций (1859), Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947, с. 151—235; [2] Weierstrass K., «Sitzungsber. Akad. Berlin», 1885, S. 633—639, 789—805; [3] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [4] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949; [5] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [6] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [7] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [8] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [9] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [10] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [11] Коровкин П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959; [12] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, пер. с англ., М., 1972; [13] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976; [14] Лоран П.-Ж., Аппроксимация и оптимизация, пер. с франц., М., 1975; [15] Коллатц Л., Крабс В., Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения, пер. с нем., М., 1978; [16] Сендов Б., Хаусдорфовые приближения, София, 1979; [17] Никольский С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979; [18] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л., Методы сплайн-функций, М., 1980; [19] Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г., Аппроксимация с ограничениями, К., 1982. *Н. П. Корнейчук.*

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ; линейные методы приближения — методы приближения, определяемые линейными операторами. Если в линейном нормированном пространстве функций X в качестве приближающего множества выбрано линейное многообразие $\mathfrak{N}$, то любой линейный оператор U, сопоставляющий функции $f \in X$ функцию $U(f, t)=(Uf)(t)$ из $\mathfrak{N}$ так, что

$$U(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2, t)=\alpha_1 U(f_1, t)+\alpha_2 U(f_2, t)$$

(α_1 и α_2 — любые числа), определяет линейный метод приближения (л. м. п.) функций пространства X функциями множества $\mathfrak{N}$. Л. м. п. наз. проекционным, если $U(f, t)=f(t)$ для всех f из $\mathfrak{N}$, он наз. положительным, если $U(f, t)\geqslant 0$ для неотрицательных функций $f(t)$.

Наибольший интерес представляет конечномерный случай, когда $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_N$ есть N-мерное подпространство, и тогда

$$U(f, t)=U_N(f, t)=\sum_{k=1}^{N} c_k(f)\varphi_k(t), \qquad (1)$$

где $\{\varphi_k(t)\}_1^N$ — базис $\mathfrak{N}_N$, а c_k — нек-рые определенные на X линейные функционалы. Выбор линейно независимой системы $\{\varphi_k(t)\}_1^N$ и набора функционалов $\{c_k\}_1^N$ может определяться той информацией о приближаемой функции $f(t)$, к-рую предполагается использовать при построении линейного метода. Если $c_k(f)=f(t_k)$, где $\{t_k\}_1^N$ — фиксированная система точек в области определения функции $f(t)$ и $\varphi_k(t_i)=0$ при $i\neq k$, $\varphi_k(t_k)=1$, то $U_N(f, t_k)=f(t_k)$, $k=1, \ldots, N$, и имеют интерполяционный метод (напр., интерполяционный многочлен Лагранжа, *интерполяционный сплайн*). Если $X=H$ — гильбертово пространство функций и $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f по ортонормированной системе $\{\varphi_k(t)\}$, то суммы (1) дают линейный метод ортогонального проектирования X на $\mathfrak{N}_N$, причем в этом случае

$$\| f-U_N(f)\|_H=\inf_{\alpha_k}\left\| f-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\varphi_k\right\|_H,$$

т. е. этот метод реализует наилучшее приближение функции f линейными комбинациями функции $\varphi_k(t)$.

В теории л. м. п. функций особое внимание уделяется проблеме сходимости. Пусть X — банахово пространство, $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots\}$ — линейно независимая система функций из X, $\mathfrak{N}_N$ $(N=1, 2, \ldots)$ — подпространства, порожденные первыми N функциями этой системы, U_N $(N=1, 2, \ldots)$ — линейные ограниченные операторы из X в $\mathfrak{N}_N$. Сходимость $U_N(f, t)\to f(t)$ (в смысле $\|U_N f-f\|_X\to 0$ при $N\to\infty$) для любой функции $f(t)$ из X имеет место тогда и только тогда, когда 1) последовательность норм $\|U_N\|$ операторов U_N ограничена (см. *Банаха — Штейнхауза теорема*) и 2) $U_N(f, t)\to f(t)$ для всех функций $f(t)$ из множества A, всюду плотного в X. Эти условия выполняются, в частности, в пространстве 2π-периодических функций $\tilde{L}_p = \tilde{L}_p[0, 2\pi]$ при $1 < p < \infty$ для операторов S_n, определяемых суммами Фурье

$$S_n(f, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (2)$$
$$n = 1, 2, \ldots,$$

функции f по тригонометрич. системе, причем в качестве множества A, на к-ром проверяется условие 2), можно взять множество всех тригонометрич. полиномов. Если же X есть пространство $\tilde{C} = \tilde{C}[0, 2\pi]$ (непрерывных на всей оси с периодом 2π функций) или $\tilde{L}_1$, то $\|S_n\| \sim \ln n$ при $n \to \infty$ (см. *Лебега константы*) и, следовательно, существуют в $\tilde{C}$ и в $\tilde{L}_1$ функции $f(t)$, к к-рым последовательность $\{S_n(f, t)\}$ не сходится в соответствующей метрике. Так как в банаховом пространстве функций X с нормой, инвариантной относительно сдвига, для оператора $U_n^{\perp}$ линейного проектирования X на подпространство T_n тригонометрич. полиномов порядка n справедливо неравенство $\|U_n^{\perp}\| \geqslant \|S_n\|$ (см. [3]), то расходимость на $\tilde{C}$ и $\tilde{L}_1$ имеет место и для последовательности $\{U_n^{\perp}\}$. В частности, это имеет место на $\tilde{C}$ для последовательности интерполяционных операторов Лагранжа по любой треугольной матрице узлов интерполирования. Аналогичные факты отрицательного характера наблюдаются и в непериодич. случае для операторов линейного проектирования пространств $C[a, b]$ и $L_1[a, b]$ на подпространства A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ алгебраич. многочленов степени n.

Факт расходимости последовательности (2) для нек-рых функций из $\tilde{C}$ побудил ввести в рассмотрение различные усреднения сумм Фурье, не обладающие таким недостатком. Таковы, напр., *Фейера сумма*, *Бернштейна — Рогозинского метод суммирования*, к-рые являются частным случаем (при определенном выборе числовых множителей $\lambda_k^{(n)}$) полиномов вида

$$U_n^{\lambda}(f, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (3)$$
$$n = 1, 2, \ldots.$$

Так как

$$U_n^{\lambda}(f, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos k(t-u)\right] f(u)\, du, \quad (4)$$

то средние (3) входят в весьма широкий класс л. м. п., представимых в виде свертки функции f с нек-рым (сингулярным) ядром, свойствами к-рого (в данном случае свойствами треугольной матрицы чисел $\{\lambda_k^{(n)}\}$) и определяется решение вопроса о сходимости. Если

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_k^{(n)} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то суммы (3) равномерно сходятся, когда $f(t)$ — тригонометрич. полином, и значит. выполнено условие 2). Для ограниченности норм U_n^{λ}, как операторов из $\tilde{C}$ в $\tilde{C}$, необходимо, чтобы

$$\frac{\lambda_1^{(n)}}{n} + \frac{\lambda_2^{(n)}}{n-1} + \ldots + \frac{\lambda_n^{(n)}}{1} = O(1)$$

и $\lambda_k^{(n)} = O(1)$ равномерно по n и $k = 1, 2, \ldots, n$. Эти условия становятся и достаточными для ограниченности последовательности $\{\|U_n^{\lambda}\|\}$, если наложить на матрицу $\{\lambda_k^{(n)}\}$ нек-рые дополнительные требования (напр., выпуклость или вогнутость по строкам). По аналогии с (3) с помощью матрицы множителей $\{\lambda_k^{(n)}\}$ строятся также средние на базе сумм Фурье — Чебышева (для $f \in C[-1, 1]$), а также на базе интерполяционных полиномов Лагранжа по узлам $2k\pi/(2n+1)$ (в периодич. случае) или по узлам $\cos[(2k-1)\pi/(2n+2)]$ на отрезке $[-1, 1]$ (см., напр., [6]).

Вопрос о сходимости линейных положительных операторов U_n^+, действующих из $C[a, b]$ в A_n или из $\tilde{C}$ в T_n (в частности, операторов вида (4) с положительным ядром), решается на трех пробных функциях (см. [1]): для равномерной сходимости последовательности $U_n^+(f, t)$ к $f(t) \in C[a, b]$ или к $f(t) \in \tilde{C}$ необходимо и достаточно, чтобы это имело место для функций 1, t, t^2 или соответственно для функций 1, $\sin t$, $\cos t$.

Исследование погрешности приближения, доставляемой л. м. п., сводится, чаще всего, к изучению скорости сходимости $U_N(f, t)$ к $f(t)$, оценке погрешности через дифференциально-разностные характеристики приближаемой функции, выяснению вопроса о том, как реагирует л. м. п. на улучшение ее гладкостных свойств.

При оценке аппроксимативных свойств л. м. п. (1) естественным ориентиром служит наилучшее приближение $E(f, \mathfrak{N}_N)_X$ функции f подпространством $\mathfrak{N}_N$. *Лебега неравенство*

$$\|f-S_n(f)\|_{\tilde{C}} \leqslant E(f, T_n)_{\tilde{C}}(\ln n+3) \tag{5}$$

показывает в сопоставлении с *Джексона неравенством*

$$E(f, T_n)_{\tilde{C}} \leqslant Mn^{-r}\omega(f^{(r)}, 1/n)$$

($\omega(g, \delta)$ — модуль непрерывности функции $g \in \tilde{C}$), что, хотя порядок приближения суммами Фурье несколько хуже наилучшего ($\ln n$ в (5) нельзя заменить константой), эти суммы реагируют на любое повышение порядка дифференцируемости приближаемой функции. Для нек-рых же л. м. п. порядок приближения не может быть выше определенной величины, сколько бы производных ни имела функция $f(t)$ (э ф ф е к т н а с ы щ е н и я). Так, порядок приближения линейными положительными полиномиальными операторами U_n^+ не может быть выше $O(n^{-2})$; для сумм Фейера порядок насыщения $O(n^{-1})$, для сумм Бернштейна — Рогозинского $O(n^{-2})$. Интерполяционные сплайны при определенном выборе узлов склейки обеспечивают наилучший порядок погрешности приближения не только самой функции, но и нек-рых ее первых производных — в зависимости от степени многочленов, из к-рых склеен сплайн (см. [7], [8]).

В отдельных случаях для конкретных л. м. п. найдены точные или асимптотически точные оценки погрешности на классах функций. Видимо, первый нетривиальный результат такого рода был получен А. Н. Колмогоровым, к-рый в 1935 установил, что

$$\sup_{f \in W^rK}\|f-S_n(f)\|_{\tilde{C}} = \frac{4K}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}+O(n^{-r}),$$

где W^rK ($r=1, 2, \ldots$) — класс функций $f \in \tilde{C}$, у к-рых $f^{(r-1)}(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ и почти всюду $|f^{(r)}(t)| \leqslant K$. В дальнейшем аналогичного характера результаты были получены для сумм Фурье (и для нек-рых их средних) на других важных классах функций, задаваемых, напр., мажорантой модуля непрерывности r-й производной (см. [2], [6], [9]). Особый интерес представляют л. м. п. (1), в точности реализующие на том или ином классе функций верхнюю грань наилучших приближений подпространством $\mathfrak{N}_N$. Таким свойством для классов W^rK ($r=1, 2, \ldots$) обладают при определенном выборе $\lambda_k^{(n)}$ суммы вида (3), напр., при $r=1$ надо положить

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{k\pi}{2n+2}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n+2},$$

а также интерполяционные сплайны порядка $r-1$ дефекта 1 с узлами склейки $k\pi/n$ ($k=0, 1, 2, \ldots$) (см. [4], а также *Приближение функций*; экстремальные задачи на классах функций, *Наилучший линейный метод*).

Лит.: [1] Коровкин П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959; [2] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [3] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [4] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [5] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [6] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [7] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, пер. с англ., М., 1972; [8] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976; [9] Степанец А. И., Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Линейные методы, К., 1981.

Н. П. Корнейчук.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ; прямые и обратные теоремы — теоремы и неравенства, устанавливающие связь между дифференциально-разностными свойствами приближаемой функции и величиной (а также поведением) погрешности приближения ее тем или иным методом. Прямые теоремы (п. т.) дают оценку погрешности приближения функции $f(t)$ через ее гладкостные характеристики (наличие производных определенного порядка, модуль непрерывности или модуль гладкости самой функции f или нек-рой ее производной и т. п.). В случае наилучшего приближения полиномами п. т. известны еще как теоремы Джексона [1] и их различные обобщения и уточнения (см. *Джексона неравенство*, *Джексона теорема*). Обратные теоремы (о. т.) характеризуют дифференциально-разностные свойства функций в зависимости от скорости убывания к нулю ее наилучших (или каких-либо других) приближений. Задача получения о. т. приближения функций впервые была поставлена, а в нек-рых случаях и решена С. Н. Бернштейном [2]. Сопоставление п. т. и о. т. позволяет иногда полностью охарактеризовать класс функций, имеющих те или иные гладкостные свойства, с помощью последовательности, напр., наилучших приближений.

Наиболее проста связь между п. т. и о. т. в периодич. случае. Пусть $\tilde{C}$ — пространство непрерывных на всей оси 2π-периодических функций с нормой

$$\|f\|_{\tilde{C}}=\max_t|f(t)|,\qquad E(f,\ T_n)=\inf_{\varphi\in T_n}\|f-\varphi\|_{\tilde{C}}$$

— наилучшее приближение функции f из $\tilde{C}$ подпространством T_n тригонометрич. полиномов порядка n, $\omega(f,\ \delta)$ — модуль непрерывности функции $f\in\tilde{C}$; $\tilde{C}^r$ ($r=1,\ 2,\ \ldots$) — множество r раз непрерывно дифференцируемых на всей оси функций из $\tilde{C}$, $\tilde{C}^0=\tilde{C}$. Прямая теорема: если $f\in\tilde{C}^r$, то

$$E(f,\ T_{n-1})\leqslant\frac{M}{n^r}\,\omega\left(f^{(r)},\ \frac{1}{n}\right),\tag{1}$$
$$n=1,\ 2,\ \ldots,\ r=0,\ 1,\ \ldots,$$

где константа M не зависит от n. Более сильное утверждение состоит в том, что можно указать последовательность линейных методов U_n ($n=0,\ 1,\ \ldots$), сопоставляющих функции $f(t)$ из $\tilde{C}$ полином $U_n(f,\ t)\in T_n$ и таких, что для $f\in\tilde{C}^r$ погрешность $\|f-U_n(f)\|_{\tilde{C}}$ оценивается правой частью (1). Обратная теорема утверждает, что для $f\in\tilde{C}$

$$\omega(f,\ \delta)\leqslant M\delta\sum\nolimits_{n=1}^{[1/\delta]}E(f,\ T_{n-1}),\ \delta>0,\tag{2}$$

где M — абсолютная константа, $[1/\delta]$ — целая часть числа $1/\delta$, а из сходимости при нек-ром натуральном r ряда

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}n^{r-1}E(f,\ T_{n-1})$$

следует, что $f \in \tilde{C}^r$, причем аналогично (2) можно оценить $\omega(f^{(r)}, 1/n)$ через $E(f, T_{n-1})$ ($n=1, 2, \ldots$) (см. [4], [8], [12]). Из этих оценок, в частности, следует, что если

$$E(f, T_{n-1}) = O(n^{-r-\alpha}), \quad r=0, 1, \ldots, 0 < \alpha \leqslant 1,$$

то $f \in \tilde{C}^r$ и $f^{(r)}(t)$ удовлетворяет при $0<\alpha<1$ условию Гёльдера

$$|f^{(r)}(t') - f^{(r)}(t'')| \leqslant K |t' - t''|^\alpha, \qquad (3)$$

а при $\alpha=1$ — условию Зигмунда

$$\left| f^{(r)}(t') - 2f^{(r)}\left(\frac{t'+t''}{2}\right) + f^{(r)}(t'') \right| \leqslant K |t' - t''|. \quad (4)$$

Обозначив этот класс функций через $K\tilde{H}^{r+\alpha}$, получают его конструктивную характеристику: $f \in K\tilde{H}^{r+\alpha}$ тогда и только тогда, когда

$$E(f, T_{n-1}) = O(n^{-r-\alpha}).$$

2π-периодическая функция бесконечно дифференцируема на всей оси в том и только в том случае, если

$$\lim_{n \to \infty} n^r E(f, T_{n-1}) = 0$$

для любого $r=1, 2, \ldots$.

Аналогичные факты имеют место для приближения периодич. функций в метрике $L_p[0, 2\pi](1 \leqslant p < \infty)$, а также для заданных на всей оси (не обязательно периодич.) функций в случае приближения их целыми функциями конечной степени (см. [7], [8]). Известны п. т. и о. т. для $f \in \tilde{C}^r$, использующие в качестве дифференциально-разностной характеристики модуль гладкости $\omega_k(f, \delta)$ порядка $k=1, 2, \ldots$ приближаемой функции (или нек-рой ее производной) (см. [4], [8]).

Иначе обстоит дело в случае приближения на конечном отрезке. Пусть $C=C[a, b]$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|f\|_C = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|,$$

$C^r = C^r[a, b]$ — множество r раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, $C^0=C$, $KH^{r+\alpha}[a, b]$ — класс функций, определяемый неравенствами (3) и (4) при $t', t'' \in [a, b]$. Для наилучшего приближения

$$E(f, A_{n-1}; a, b) = \inf_{p \in A_{n-1}} \|f - p\|_C, \quad n=1, 2, \ldots,$$

функции $f \in C^r$ подпространством A_{n-1} алгебраич. многочленов степени $n-1$ справедлива оценка вида (1) через модуль непрерывности функции $f^{(r)}$ на $[a, b]$, однако обращение, аналогичное периодич. случаю (с неравенством вида (2)), здесь возможно лишь на отрезке, лежащем внутри интервала (a, b). Напр., если

$$E(f, A_{n-1}; a, b) \leqslant Mn^{-r-\alpha}, \qquad (5)$$
$$r=0, 1, \ldots, \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

то можно лишь утверждать, что f принадлежит классу $KH^{r+\alpha}[a_1, b_1]$, определяемому неравенствами (3) (при $0<\alpha<1$) и (4) (при $\alpha=1$) лишь на отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, причем константа K зависит от a, a_1, b_1 и b и может неограниченно увеличиваться, если $a_1 \to a$, $b_1 \to b$. Существуют функции, не принадлежащие классу $KH^{r+\alpha}[a, b]$, для к-рых, однако,

$$E(f, A_{n-1}; a, b) = O(n^{-r-\alpha}).$$

Напр.,

$$E\left(\sqrt{1-t^2}, A_{n-1}; -1, 1\right) < 2/\pi n, \quad n=1, 2, \ldots,$$

хотя $\sqrt{1-t^2} \notin KH^\alpha$ на $[-1, 1]$ ни при каком $\alpha > 1/2$. Оказалось, что алгебраич. многочлены могут, обеспечивая на всем отрезке $[a, b]$ наилучший порядок приближения функции $f \in C$, у концов отрезка осуществлять приближение существенно лучшее (впервые этот феномен был обнаружен С. М. Никольским, см. [3]). Если, в частности, $f \in KH^{r+\alpha}[a, b]$, то при каждом $n > r$ существует многочлен $p_n(t) \in A_{n-1}$ такой, что

$$|f(t) - p_n(t)| \leqslant M \left[\frac{1}{n}\sqrt{(t-a)(b-t)} + \frac{1}{n^2}\right]^{r+\alpha}, \quad (6)$$
$$a \leqslant t \leqslant b,$$

где константа M не зависит ни от n, ни от t. Это утверждение, в отличие от (5), уже можно обратить: если для $f \in C$ существует последовательность многочленов $p_n(t) \in A_{n-1}$ таких, что при нек-рых $r=0, 1, \ldots$ и $0 < \alpha \leqslant 1$ выполнено (6), то $f \in KH^{r+\alpha}[a, b]$. Известны п. т. и о. т. для $f \in C^r[a, b]$, использующие модуль непрерывности и модуль гладкости (см. [4], [8]).

П. т., в к-рых даются порядковые оценки погрешности через дифференциально-разностные характеристики приближаемой функции, доказаны для многих конкретных методов приближения (см. [6], [8], [9]), в частности для *сплайнов* (наилучших и интерполяционных [10]).

Известны п. т. и о. т. для приближения в хаусдорфовой метрике (см. [13]). Здесь возникают свои особенности; в частности, характеризация классов функций через их наилучшие хаусдорфовы приближения связана не только с порядком этого приближения, но и с величиной константы в соответствующем неравенстве. О п. т. и о. т. в многомерном случае см. *Приближение функций; случай многих действительных переменных.*

Лит.: [1] Jackson D., Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung, Gött., 1911; [2] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (1912), Собр. соч., т. 1, М., 1952, с. 11—104; [3] Никольский С. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1946, т. 10, № 4, с. 295—317; [4] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [5] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [6] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [7] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [8] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [9] Коровкин П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959; [10] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976; [11] Даугавет И. К., Введение в теорию приближения функций, Л., 1977; [12] Стечкин С. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1951, т. 15, № 3, с. 219—42; [13] Сендов Бл., Хаусдорфовые приближения, София, 1979.

Н. П. Корнейчук.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ; случай многих действительных переменных — случай, когда приближаемая функция f зависит от двух и большего числа переменных:

$$f(\boldsymbol{t}) = f(t_1, t_2, \ldots, t_m), \quad m \geqslant 2$$

(см. *Приближение функций*). По сравнению с одномерным случаем исследование вопросов приближения функций m ($m \geqslant 2$) переменных значительно усложняется ввиду появления принципиально новых обстоятельств, связанных с многомерностью. Прежде всего это касается области, на к-рой осуществляется приближение. Просто связный компакт (в одномерном случае — отрезок) в $\mathbb{R}^m$ (даже на плоскости) может иметь самую разнообразную конфигурацию, и возникает необходимость классифицировать области в зависимости, напр., от гладкостных свойств их границ. Сложности появляются и при описании дифференциально-разностных свойств функций m переменных. Эти свойства могут быть, вообще говоря, различными по разным направлениям, их характеризация должна учитывать как геометрию области определения, так и поведение функции при подходе к границе, так что большое значение приобретает изучение граничных свойств функций. Если пытаться упростить решение аппроксимационной задачи переходом к области более простой структуры, то возникает проблема возможности продолжения функции f из области $Q \subset \mathbb{R}^m$ в нек-рую содержащую Q канонич. область Q_1 (напр., в параллелепипед или на все пространство $\mathbb{R}^m$) с сохранением тех или иных гладкостных свойств (см. *Продолжения теоремы*). Этот круг вопросов тесно связан с *вложения теоремами*, а также с проблемами, возникающими при решении краевых задач математич. физики.

Увеличение числа независимых переменных, естественно, усложняет и аппарат приближения, ибо увеличивается его размерность при том же, напр., порядке полиномов. Алгебраич. многочлен степени $n_1, \ldots, n_m$ соответственно по переменным $t_1, \ldots, t_m$ имеет вид

$$P_{n_1, \ldots, n_m}(t_1, \ldots, t_m) = \sum a_{k_1, \ldots, k_m} t^{k_1} \ldots t^{k_m} \quad (1)$$

($a_{k_1, \ldots, k_m}$ — действительные коэффициенты, суммирование ведется по k_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, от 0 до n_ν), так что, напр., подпространство многочленов степени 3 по каждому из m переменных имеет размерность 4^m. Иногда фиксируется суммарная степень многочлена n, тогда суммирование в (1) распространено на индексы, удовлетворяющие неравенству $0 \leqslant k_1 + \ldots + k_\nu \leqslant n$. Тригонометрический действительный полином порядка $n_1, \ldots, n_m$ по переменным $t_1, \ldots, t_m$ может быть записан в виде

$$T_{n_1, \ldots, n_m}(t_1, \ldots, t_m) = \\ = \sum a_{k_1, \ldots, k_\nu} \exp\left(i \sum_{\nu=1}^{m} k_\nu t_\nu\right),$$

где комплексные коэффициенты $a_{k_1, \ldots, k_m}$ с индексами противоположного знака комплексно сопряжены, а суммирование ведется по k_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, от $-n_\nu$ до n_ν. Этот полином можно также представить в виде линейной комбинации всевозможных произведений вида $\varphi_{k_1}(t)\,\varphi_{k_2}(t_2) \ldots \varphi_{k_m}(t_m)$, где $\varphi_{k_\nu}(t_\nu)$ есть либо $\sin k_\nu t_\nu\, (0 \leqslant k_\nu \leqslant n_\nu)$, либо $\cos k_\nu t_\nu \quad (0 \leqslant k_\nu \leqslant n_\nu)$. Широкое применение находят многомерные сплайны, «склеенные» до определенной гладкости из «кусков» алгебраич. многочленов m переменных. В случае $m=2$ наиболее простой вид имеют сплайны, склеенные из многочленов по прямым, параллельным осям координат. В качестве аппарата приближения применяются также функции $g(t_1, \ldots, t_m)$, являющиеся полиномами или сплайнами лишь по нек-рым из переменных. Для приближения непериодич. функций, заданных на всем пространстве $\mathbb{R}^m$ (или на неограниченном множестве из $\mathbb{R}^m$), могут применяться целые функции экспоненциального типа, представимые в виде суммы абсолютно сходящегося степенного ряда

$$G_{n_1, \ldots, n_m}(t_1, \ldots, t_m) = \\ = \sum_{k_\nu \geqslant 0,\ \nu=1, \ldots, m} a_{k_1, \ldots, k_m} t_1^{k_1} \ldots t_m^{k_m} \quad (2)$$

при условии, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех комплексных $t_1, t_2, \ldots, t_m$

$$|G_{n_1, \ldots, n_m}(t_1, \ldots, t_m)| \leqslant M_\varepsilon \exp \sum_{\nu=1}^{m} (n_\nu + \varepsilon)\,|t_\nu|,$$

где константа M_ε зависит только от ε (см. [1]). Следует заметить, что в отличие от полиномов функция (2) определяется бесконечным числом параметров.

В многомерном случае справедлива теорема Вейерштрасса о возможности приблизить непрерывную на ограниченном замкнутом множестве $Q \subset \mathbb{R}^m$ функцию $f\,(f \in C(Q))$ или непрерывную на всем пространстве $\mathbb{R}^m$ с периодом 2π по каждому переменному функцию $f\,(f\in\tilde{C}(\mathbb{R}^m))$ алгебраическими (соответственно тригонометрическими) полиномами с любой наперед заданной степенью точности. Аналогичный факт имеет место и в пространствах $L_p(Q)$ и (в периодич. случае) $\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)$ $(1\leqslant p<\infty)$. На линейные нормированные пространства функций m переменных распространяются общие факты и теоремы о свойствах наилучшего приближения, о существовании, единственности и характеристич. свойствах функции наилучшего приближения, а также общие соотношения двойственности для приближения выпуклым множеством и, в частности, подпространством (см. [3], [4]). Однако получение конкретных реализаций этих теорем с учетом конкретной метрики и специфики приближающего подпространства в многомерном случае сопряжено с большими трудностями.

Более полно исследованы вопросы связи порядка убывания наилучших приближений функций многих переменных алгебраическими и тригонометрич. полиномами, а также целыми функциями с гладкостными свойствами приближаемой функции.

Пусть Q — произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^m$ (в частности, $Q=\mathbb{R}^m$), e — единичный вектор из $\mathbb{R}^m$, $h>0$ и Q_{he} — множество точек $t\in Q$ таких, что отрезок $[t,\ t+he]\subset Q$. Если $f\in L_p(Q)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, то величина

$$\omega_e(f;\ \delta)_{L_p(Q)}=\sup_{h\leqslant\delta}\|f(t+he)-f(t)\|_{L_p(Q_{he})}$$

наз. **модулем непрерывности функции** $f(t_1,\ \ldots,\ t_m)$ **в метрике** $L_p(Q)$ **по направлению** e. Величину

$$\omega(f;\ \delta)_{L_p(Q)}=\sup_e\omega_e(f;\ \delta)_{L_p(Q)}$$

наз. **модулем непрерывности функции** f в $L_p(Q)$.

В периодич. случае для наилучших приближений $E_{n_1,\ldots,n_m}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)}$ тригонометрич. полиномами $\tilde{T}_{n_1,\ldots,n_m}$ функции $f\in\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)$, имеющей частные (вообще говоря, обобщенные по Соболеву) производные

$$D_\nu^{r_\nu}f=\frac{\partial^{r_\nu}}{\partial t_\nu^{r_\nu}}f\in\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)$$

($r_\nu\geqslant 0$ — целые, $D_\nu^0 f=f$, $\nu=1,\ \ldots,\ m$), справедливы оценки

$$\tilde{E}_{n_1,\ldots,n_m}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)}\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{\nu=1}^m n_\nu^{-r_\nu}\omega_{e_\nu}\left(D_\nu^{r_\nu}f;\ n_\nu^{-1}\right)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)},\qquad(3)$$

где e_ν — единичный вектор, направленный вдоль t_ν, а константа M не зависит от f и n_ν. Для функции f из $\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)$, имеющей обобщенные смешанные и несмешанные производные

$$D^r f=\frac{\partial^r}{\partial t_1^{r_1}\ldots\partial t_m^{r_m}}f\in\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)$$

($\boldsymbol{r}=(r_1,\ \ldots,\ r_m)$) порядка $r=r_1+\ldots+r_m$, имеют место неравенства

$$\tilde{E}_{n,\ldots,n}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{n^r}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\omega\left(D^{\boldsymbol{r}}f;\ n^{-1}\right)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)}.\qquad(4)$$

Если

$$\omega(D^{\boldsymbol{r}}f;\ \delta)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)}\leqslant K\delta^\alpha,\quad 0<\alpha\leqslant 1,$$

т. е. если функции $D^r f$ удовлетворяют *Гёльдера условию*, то

$$\tilde{E}_{n, \ldots, n}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)} \leqslant \frac{M}{n^{r+\alpha}}, \; r=0, 1, \ldots, 0<\alpha\leqslant 1. \quad (5)$$

В последнем случае обратная теорема утверждает, что если для функции $f \in \tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)$ при всех $n=1, 2, \ldots$ справедлива оценка (5), то существуют производные $D^r f \in \tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющие при любом $h \in \mathbb{R}^m$ неравенствам

$$\| D^r f(t+h) - D^r f(t) \|_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)} \leqslant K |h|^{\alpha}, \quad (6)$$

если $0<\alpha<1$, или

$$\| D^r f(t+h) - 2D^r f(t) - D^r f(t-h) \|_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)} \leqslant K |h|, \quad (7)$$

если $\alpha=1$, где K не зависит от длины $|h|=(h_1^2+\ldots+h_m^2)^{1/2}$ вектора $h=(h_1, \ldots, h_m)$.

Теоремы, аналогичные приведенным, верны также для непериодич. функций $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, если в качестве аппарата приближения применяются целые функции экспоненциального типа. Приведенные результаты распространяются также на классы функций, гладкость к-рых описывается в терминах модулей непрерывности (модулей гладкости) более высокого порядка (см. [1]).

В случае приближения функций $f \in L_p(Q)$ алгебраич. многочленами $P_{n_1, \ldots, n_m}$ на ограниченном параллелепипеде (и нек-рых других ограниченных множествах) доказаны прямые теоремы, аналогичные (3), (4) и (5). Обращение этих теорем, как и для функций, заданных на конечном отрезке, возможно лишь на множестве Q_1, лежащем строго внутри Q. Известны обратные теоремы, предполагающие повышение порядка приближения вблизи границы множества Q (см. [13]), а также прямые теоремы, утверждающие возможность такого улучшения вблизи угловых точек (см. [14]). Необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность функции f классу $H_C^{r+\alpha}(Q)$ (определяемому в метрике $C(Q)$ условиями, аналогичными условиям (6), (7)) за счет повышения порядка приближения вблизи границы (как в одномерном случае), неизвестны (1983). Однако имеет место следующий результат отрицательного характера (см. [13]). Пусть $Q=\{t : t \in \mathbb{R}^2, |t| \leqslant 1\}$. Не существует ни одной определенной на Q последовательности функций $\lambda_n^{(\alpha)}(|t|)$, $n=1, 2, \ldots$, $0<\alpha<1$, обладающей следующими двумя свойствами:

1) для всякой функции f из $H_C^{\alpha}(Q)$ найдется постоянная M и последовательность многочленов

$$P_n(t) = \sum\nolimits_{0 \leqslant k_1+k_2 \leqslant n} a_{k_1, k_2}^{(n)} t_1^{k_1} t_2^{k_2}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

таких, что

$$| f(t) - P_n(t) | \leqslant M \lambda_n^{(\alpha)}(|t|), \; t \in Q; \quad (8)$$

2) из того, что для определенной на Q функции f существуют постоянная $M>0$ и последовательность многочленов $P_n(t)$, удовлетворяющих неравенству (8), следует, что $f \in H_C^{\alpha}(Q)$.

В качестве других примеров, отражающих специфику приближения функций многих переменных, можно привести следующие результаты.

Пусть $\tilde{E}_{n_1, n_2}(f)_{\tilde{X}}$ — наилучшее приближение 2π-периодической функции f двух переменных тригонометрич. полиномами T_{n_1, n_2} в метрике $\tilde{X}$ ($\tilde{X}=\tilde{C}(\mathbb{R}^2)$ или $\tilde{X}=\tilde{L}_p(\mathbb{R}^2)$), а $\tilde{E}_{n_1, \infty}(f)_{\tilde{X}}$ — наилучшее приближение f в $\tilde{X}$ функциями $T_{n_1, \infty}$, являющимися тригонометрич. полиномами порядка n_1 по переменному t_1, коэффициенты к-рых суть функции от t_2. Аналогично определяются величины $\tilde{E}_{\infty,\, n_2}(f)_{\tilde{X}}$.

Если $1<p<\infty$, то выполняются неравенства

$$\tilde{E}_{n_1, n_2}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^2)} \leqslant A_p\,(\tilde{E}_{n_1, \infty}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^2)} + \tilde{E}_{\infty, n_2}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^2)}),$$

где A_p зависит лишь от p.

Если же $\tilde{X}=\tilde{L}_1(\mathbb{R}^2)$ или $\tilde{X}=\tilde{C}(\mathbb{R}^2)$, то

$$\tilde{E}_{n_1, n_2}(f)_{\tilde{X}} \leqslant A \ln(2+\min\{n_1, n_2\})\,(\tilde{E}_{n_1, \infty}(f)_{\tilde{X}} + \tilde{E}_{\infty, n_2}(f)_{\tilde{X}}), \quad (9)$$

где A — абсолютная постоянная, и множитель $\ln(2+\min\{n_1, n_2\})$ в неравенстве (9) нельзя заменить ни на какой другой, растущий при $\min\{n_1, n_2\}\to\infty$ по порядку медленнее (см. [15]).

Принципиальные особенности возникают в задачах интерполирования функций многих переменных. Напр., существование алгебраического интерполяционного многочлена в отличие от одномерного случая существенно зависит от расположения узлов интерполяции. Разработаны, тем не менее, эффективные способы построения полиномов и сплайнов, интерполирующих функцию $f(t_1, \ldots, t_m)$ на определенным образом выбранной сетке узлов (см. *Интерполирование*), Для многомерных интерполяционных сплайнов в ряде случаев найдены порядковые оценки погрешности приближения как самой функции f, так и ее частных производных, более детально исследованы в этом направлении двумерные сплайны малого порядка, а также локальные (эрмитовы) сплайны любого порядка (см. [7], [10] — [12]). Среди других линейных методов приближения функций многих переменных сравнительно лучше исследованы кратные суммы Фурье и их различные средние. Здесь известны порядковые оценки приближения на классах функций, в нек-рых случаях найдена точная асимптотика (см. [5], [6], [8]).

Лит.: [1] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [2] Гутер Р. С., Кудрявцев Л. Д., Левитан Б. М., Элементы теории функций, М., 1963, с. 106—98; [3] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [4] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [5] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [6] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [7] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976; [8] Степанец А. И., Равномерное приближение тригонометрическими полиномами. Линейные методы, К., 1981; [9] Лоран П.-Ж., Аппроксимация и оптимизация, пер. с франц., М., 1975; [10] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, пер. с англ., М., 1972; [11] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л., Методы сплайн-функций, М., 1980; [12] Варга Р., Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе, пер. с англ., М., 1974; [13] Никольский С. М., «Сиб. матем. ж.», 1969, т. 10, № 5, с. 1075—1083; [14] Брудный Ю. А., «Докл. АН СССР», 1970, т. 195, № 5, с. 1007—09; [15] Темляков В. Н., «Докл. АН СССР», 1975, т. 223, с. 1079—82. *В. Н. Коновалов, Н. П. Корнейчук.*

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ; экстремальные задачи на классах функций — задачи, связанные с отысканием верхней грани погрешности приближения на фиксированном классе функций и с выбором для него наилучшего в том или ином смысле аппарата приближения. Начало исследованиям по экстремальным задачам П. ф. положили работы А. Н. Колмогорова (см. [1] — [2]), Ж. Фавара (см. [3] — [4]) и С. М. Никольского (см. [5]—[6]). Широкое развитие эти исследования получили начиная с 50-х гг. 20 в.; они стимулировались потребностями вычислительной математики, все больше сталкивавшейся с задачами оптимизационного содержания.

Если в нормированном функциональном пространстве X рассматривается П. ф. из класса $\mathfrak{M}$ функциями фиксированного множества $\mathfrak{N} \subset X$, то интерес представляют задачи отыскания величин

$$E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} E(f, \mathfrak{N})_X, \tag{1}$$

где

$$E(f, \mathfrak{N})_X = \inf_{\varphi \in \mathfrak{N}} \|f - \varphi\|_X$$

— наилучшее приближение функции $f(t)$ множеством $\mathfrak{N}$, а также

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, U)_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - Uf\|_X, \tag{2}$$

где U — нек-рый конкретный метод приближения, задаваемый тем или иным оператором, действующим из X в $\mathfrak{N}$. С геометрич. точки зрения верхняя грань (1) характеризует величину уклонения множества $\mathfrak{M}$ от $\mathfrak{N}$ в метрике X. Практич. смысл величины $E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_X$ можно видеть в том, что она, во-первых, дает минимально возможную оценку сверху для наилучшего приближения множеством $\mathfrak{N}$ функции, о к-рой известно только, что она принадлежит классу $\mathfrak{M}$, а во-вторых, является определенным ориентиром при оценке и сравнении аппроксимативных возможностей конкретных методов приближения на классе $\mathfrak{M}$. Что касается величины (2), то наиболее важным является случай, когда $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_N$ есть N-мерное подпространство, U — линейный метод приближения. Известен целый ряд точных и асимптотически точных результатов по приближению классов функций конкретными линейными методами (в частности, полиномами и сплайнами) (см. [1]—[12], [19]), но особый интерес вызывают методы, реализующие точную нижнюю грань

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N)_X = \inf_{UX \subset \mathfrak{N}_N} \mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N, U)_X, \tag{3}$$

распространенную на все линейные ограниченные операторы U из X в $\mathfrak{N}_N$, т. е. линейные методы, наилучшие для класса $\mathfrak{M}$. Ясно, что всегда

$$E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N)_X \leqslant \mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N)_X,$$

и, естественно, возникает вопрос о возможности здесь знака равенства. Помимо тривиального случая, когда X — гильбертово пространство функций и наилучшее приближение каждой функции доставляют суммы Фурье по ортонормированному базису $\mathfrak{N}_N$, известны ситуации в негильбертовом пространстве, когда линейный метод реализует наилучшее приближение на всем классе $\mathfrak{M}$.

Так, если X — пространство 2π-периодических функций $\tilde{L}_p = \tilde{L}_p[0, 2\pi]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $\mathfrak{N}_{2n-1}^T$ — подпространство тригонометрич. полиномов порядка $n-1$ $(\dim \mathfrak{N}_{2n-1}^T = 2n-1)$, $M\tilde{W}_p^r (r = 1, 2, \ldots)$ — класс функций $f \in \tilde{L}_p$, у к-рых $f^{(r-1)}(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ и $\|f\|_{\tilde{L}_p} \leqslant M$, то

$$E(M\tilde{W}_p^r, \mathfrak{N}_{2n-1}^T)_{\tilde{L}_p} = \mathscr{E}(M\tilde{W}_p^r, \mathfrak{N}_{2n-1}^T)_{\tilde{L}_p} = MK_r n^{-r},$$

$$p = 1, \infty; \; n, r = 1, 2, \ldots,$$

где K_r — константы Фавара, причем наилучшее приближение на классах $M\tilde{W}_1^r$ и $M\tilde{W}_\infty^r$ реализует линейный метод U_{n-1}^λ, построенный на базе сумм Фурье (см. *Приближение функций*; линейные методы приближения, формула (3)) при определенном выборе множителей $\lambda_k^{(n-1)} = \lambda_k^{(n-1)}(r)$. Построены линейные операторы со значениями в $\mathfrak{N}_{2n-1}^T$, реализующие верхнюю грань наилучших приближений на классах сверток, включающих, в частности, классы $M\tilde{W}_\infty^r$ и $M\tilde{W}_1^r$ с дробными $r > 0$, а также классы сопряженных функций (см. [10], [11]).

Для приближения подпространством S^m_{2n} 2π-периодических сплайнов порядка m дефекта 1 с узлами склейки $k\pi/n$ ($\dim S^m_{2n}=2n$) справедливы равенства

$$E\left(M\tilde{W}^r_p,\ S^{r-1}_{2n}\right)_{\tilde{L}_p}=\mathscr{E}\left(M\tilde{W}^r_p,\ S^{r-1}_{2n}\right)_{\tilde{L}_p}=MK_r n^{-r},$$
$$p=1,\ \infty;\ n,\ r=1,\ 2,\ \ldots;$$

наилучшим линейным методом здесь являются сплайны $\sigma_{r-1}(f,\ t)$ из S^{r-1}_{2n}, интерполирующие функцию $f(t)$ в точках $k\pi/n$, если r четно, и в точках $k\pi/n+\pi/2n$, если r нечетно. Относительно класса $M\tilde{W}^r_\infty$ эти сплайны обладают исключительными аппроксимативными свойствами, т. к. наилучшим образом приближают функции $f(t)\in M\tilde{W}^r_\infty$ в любой метрике $\tilde{L}_p$ (см. [7]).

Перечисленные случаи, когда величины (1) и (3) совпадают и удается построить конкретный линейный метод, решающий сразу обе задачи, являются, в известном смысле, идеальными. В других ситуациях эффективным при решении задачи (1) оказывается подход, основанный на использовании общих теорем двойственности, отражающих фундаментальные соотношения геометрии выпуклого анализа (см. [7], [8]). Если, напр., X — произвольное линейное нормированное пространство, X^* — ему сопряженное, $\mathfrak{N}$ — выпуклое множество в X, то для любого элемента $x\in X$

$$\inf_{u\in\mathfrak{N}}\|x-u\|=\sup_{F\in X^*,\ \|F\|\leqslant 1}\left[F(x)-\sup_{u\in\mathfrak{N}}F(u)\right];\qquad(4)$$

в частности, если $\mathfrak{N}$ — подпространство, то

$$\inf_{u\in\mathfrak{N}}\|x-u\|=\sup\{F(x):\ F\in X^*,\ \|F\|\leqslant 1,$$
$$F(u)=0\ \ \forall u\in\mathfrak{N}\}.\qquad(5)$$

Соотношения (4) или (5) позволяют в ряде случаев свести вычисление или оценку верхней грани (1) к более обозримой задаче на экстремум явно задаваемого функционала на нек-ром множестве функций, связанных, если $\mathfrak{N}$ — подпространство, условиями ортогональности. Например, используя (5), оценку $E(\tilde{W}^r_q,\ \mathfrak{N}^T_{2n-1})_{\tilde{L}_p}$ $(1\leqslant p,\ q\leqslant\infty)$ можно свести с помощью известных неравенств к вычислению верхней грани норм $\|g\|_{q'}$ $(q'=q/(q-1))$ на множестве функций $g\in\tilde{W}^r_{p'}$ $(p'=p/(p-1))$ таких, что

$$\int_0^{2\pi}g(t)\begin{matrix}\cos kt\\ \sin kt\end{matrix}\,dt=0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Более тонкая ситуация возникает, если задача (1) решается на классах, задаваемых ограничениями не на норму r-й производной $f^{(r)}(t)$, а на ее модуль непрерывности $\omega(f^{(r)},\ \delta)_X$, в частности когда $\mathfrak{M}=\tilde{W}^rH^\omega$ ($r=0,\ 1,\ \ldots;$ $\tilde{W}^0H^\omega=\tilde{H}^\omega$) — класс 2π-периодических функций $f\in\tilde{C}^r$ $(\tilde{C}^0=\tilde{C})$, у к-рых

$$\omega(f^{(r)},\ \delta)_C=\omega(f^{(r)},\ \delta)\leqslant\omega(\delta),$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности, напр. $\omega(\delta)=M\delta^\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1,\ 0\leqslant\delta\leqslant\pi)$. Здесь применение (5) требует использования тонких свойств дифференцируемых периодич. функций типа теорем сравнения и *Колмогорова неравенств* (для норм производных), но описываемых с помощью аппарата перестановок (равноизмеримых функций). При условии выпуклости вверх $\omega(\delta)$ справедливы равенства (см. [7], [13])

$$E\left(\tilde{W}^rH^\omega,\ \mathfrak{N}^T_{2n-1}\right)_X=E\left(\tilde{W}^rH^\omega,\ S^r_{2n}\right)_X=\|f_{nr}(\omega)\|_X,$$
$$n=1,\ 2,\ \ldots;\ r=0,\ 1,\ \ldots,$$

где $X=\tilde{C}$ или $\tilde{L}_1$, $f_{nr}(\omega,\ t)$ — функция из $\tilde{W}^rH^\omega$ периода $2\pi/n$ с нулевым средним значением на периоде, у к-рой $f^{(r)}(\omega, t)$ четна, равна $|\omega(\pi/n-2t)|/2$ на $[0, \pi/2n]$ и равна $-|\omega(2t-\pi/n)|/2$ на $[\pi/2n, \pi/n]$. Нормы $\|f_{nr}(\omega)\|_X$ допускают явное выражение, напр.:

$$\|f_{n0}(\omega)\|_{\tilde{C}}=\frac{1}{2}\omega(\pi/n),$$

$$\|f_{nr}(\omega)\|_{\tilde{C}}=\frac{1}{2n^r}\int_0^\pi \Phi_r(\pi-t)\,\omega(t/n)\,dt,\ r=1,\ 2,\ \ldots,$$

где функции $\Phi_k(t)$ задаются на $[0, \pi]$ рекуррентно:

$$\Phi_1(t)=\frac{1}{2},$$

$$\Phi_k(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi-t}\Phi_{k-1}(u)\,du.$$

Решение задач о наилучшем для класса $\tilde{W}^rH^\omega$ линейном методе из $\tilde{C}$ в $\mathfrak{N}_{2n-1}^T$ или в S_{2n}^r известно в случае $\omega(\delta)=M\delta$ $(0\leqslant\delta\leqslant\pi)$, т. е. когда $\tilde{W}^rH^\omega=M\tilde{W}_\infty^{r+1}$. Интерполяционные сплайны $\sigma_r(f, t)$ из S_{2n}^r реализуют верхнюю грань $E(\tilde{W}^rH^\omega, S_{2n}^r)_{\tilde{C}}$ (при любом выпуклом $\omega(\delta)$) лишь в случае $r=1$.

При решении экстремальных задач на классах функций, заданных на конечном отрезке и не связанных жесткими краевыми условиями, нельзя ждать результатов в столь совершенном, как в периодич. случае, виде: на экстремальных функциях сказывается возмущающее действие концов промежутка, к-рое усугубляется с увеличением порядка дифференцируемости. Здесь известны нек-рые результаты с точной асимптотикой. Если $MW^rH^\alpha(r=0,1,\ldots;\ 0<\alpha\leqslant1,\ MW^0H^\alpha=MH^\alpha)$ — класс функций $f(t)\in C^r[-1,\ 1]$, у к-рых

$$|f^{(r)}(t')-f^{r}(t'')|\leqslant M\,|t'-t''|^\alpha\ (t',\ t''\in[-1,\ 1]),$$

то для наилучшего равномерного на $[-1,\ 1]$ приближения подпространством $\mathfrak{N}_n^A$ алгебраич. многочленов степени $n-1$ имеют место соотношения

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha E(MH^\alpha,\ \mathfrak{N}_n^A)_C=M\pi^\alpha/2, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{r+\alpha}E(MW^rH^\alpha,\ \mathfrak{N}_n^A)_C=$$
$$=\frac{M}{2}\int_0^\pi\Phi_r(\pi-t)\,t^\alpha\,dt,\quad r=1,\ 2,\ \ldots, \tag{7}$$

к-рые полезно сравнить с соответствующими результатами в периодич. случае; при $\alpha=1$ правые части (6) и (7) равны соответственно MK_1 и MK_{r+1}. Отказавшись от многочленов наилучшего приближения, можно усилить эти результаты, существенно улучшив приближение у концов отрезка $[-1,\ 1]$ без потери наилучшей асимптотики на всем промежутке. Напр., для любой $f\in MH^\alpha$ существует последовательность алгебраич. многочленов $p_n(f,\ t)\in\mathfrak{N}_n^A$ таких, что равномерно по $t\in[-1,\ 1]$ при $n\to\infty$

$$|f(t)-p_n(f,\ t)|\leqslant\frac{M}{2}\left[\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-t^2}\right)^\alpha+o(n^{-\alpha})\right]=$$
$$=E(MH^\alpha,\ \mathfrak{N}_n^A)_C\,[(1-t^2)^{\alpha/2}+o(1)].$$

Аналогичный факт имеет место для функций классов MW^rH^1 $(r=1,\ 2,\ \ldots)$ (см. [11]). В задачах приближения сплайнами (наилучшими и интерполяционными) классов функций, заданных на отрезке, известны нек-рые точные (гл. обр., для сплайнов малого порядка) и асимптотически точные результаты (см. [15]).

В случае одностороннего приближения (в интегральной метрике) известен ряд точных результатов по оценке погрешности наилучшего приближения полиномами и сплайнами на введенных выше классах функций (см. [19]). При их получении существенно использовались соотношения двойственности для наилучшего приближения при наличии ограничений, задаваемых с помощью конуса.

Отыскание наилучшего аппарата приближения (фиксированной размерности) для данного класса функций $\mathfrak{M}$ приводит к задачам о поперечниках: найти величины (см. (1) и (3))

$$d_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{\mathfrak{N}_N} E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N)_X,$$

$$d'_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{\mathfrak{N}_N} \mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N)_X,$$

где нижние грани берутся по всем подпространствам $\mathfrak{N}_N$ из X (и их сдвигам) размерности N, а также указать экстремальные (наилучшие) подпространства, реализующие эти нижние грани. Оценки сверху для d_N и d'_N дают найденные для конкретных подпространств $\mathfrak{N}_N$ величины $E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N)_X$ и $\mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N)_X$, основная трудность в задаче о поперечнике обычно состоит в получении точных оценок снизу. В ряде ситуаций получить такие оценки удается, привлекая топологич. соображения, в частности теорему Борсука об антиподах (см. [8]). Практически во всех случаях точного решения задачи о наилучшем приближении классов $M\tilde{W}^r_p$ и $\tilde{W}^r H^\omega$ периодич. функций подпространствами $\mathfrak{N}^T_{2n-1}$ (тригонометрич. полиномов порядка $n-1$) и S^m_{2n} (сплайнов нек-рого порядка m дефекта 1 по разбиению $k\pi/n$) найденные точные верхние грани $E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N)_X$ дают и значения поперечников d_N этих классов, причем оказалось, что для периодич. классов $d_{2n-1}=d_{2n}$. В частности (см. [7], [8]) ,

$$d_{2n-1}(\tilde{W}^r_\infty, \tilde{C}) = d_{2n}(\tilde{W}^r_\infty, \tilde{C}) = d_{2n-1}(\tilde{W}^r_1, \tilde{L}_1) =$$
$$= d_{2n}(\tilde{W}^r_1, \tilde{L}_1) = K_r n^{-r},$$
$$n, r = 1, 2, \ldots,$$

а при выпуклом вверх $\omega(\delta)$ и $X=\tilde{C}$ или $\tilde{L}_1$

$$d_{2n-1}(\tilde{W}^r H^\omega, X) = d_{2n}(\tilde{W}^r H^\omega, X) = \| f_{nr}(\omega) \|_X,$$
$$n = 1, 2, \ldots; \; r = 0, 1, \ldots$$

Следует отметить, что подпространство $\mathfrak{N}^T_{2n-1}$ является наилучшим для рассматриваемых классов при всех r и никакое подпространство размерности $2n$ не дает на этих классах лучшее приближение, чем $\mathfrak{N}^T_{2n-1}$ (имеющее размерность $2n-1$). Подпространство сплайнов S^m_{2n} является наилучшим для классов $\tilde{W}^{r+1}_\infty$ и $\tilde{W}^r H^\omega$ в $\tilde{C}$ при $m=r$ и для класса $\tilde{W}^{r+1}_p$ в $\tilde{L}_1$ при $m \geq r$. Линейные поперечники d'_N классов $\tilde{W}^r_\infty$ в $\tilde{C}$ и $\tilde{W}^r_1$ в $\tilde{L}_1$ совпадают с d_N, они реализуются на подпространствах $\mathfrak{N}^T_{2n-1}$ и S^{r-1}_{2n} наилучшими линейными методами, о к-рых упоминалось выше. Поперечники d_N и d'_N класса $\tilde{W}^r_2$ в $\tilde{L}_2$ при $N=2n-1$ и $N=2n$ равны и реализуются суммами Фурье по тригонометрич. системе. Для поперечников классов функций, заданных на отрезке, в ряде случаев известна точная асимптотика; поперечники d_N и d'_N классов W^r_∞ в $C\,[-1, 1]$ совпадают и реализуются интерполяционными сплайнами порядка $r-1$ по неравномерному разбиению (см. [8]).

Задачу оценки погрешности приближения на множестве X^r r-х интегралов от функций из X (не являющемся локально компактным) можно сделать корректной, если оценивать для $f \in X^r$ при фиксированном $\gamma > 0$ величину

$$E(f, \mathfrak{N}_N)_X / \omega(f^{(r)}, \gamma)_X$$

($\omega(g, \delta)_X$ — модуль непрерывности функции g в пространстве X) или (в случае приближения конкретным методом) величину

$$\| f - U_N f \|_X / \omega(f^{(r)}, \gamma)_X.$$

Отыскание точных верхних граней этих величин на множестве X^r равносильно нахождению наименьшей константы в соответствующем *Джексона неравенстве*; можно затем говорить о минимизации по всем подпространствам размерности N. В ряде случаев эти задачи решены. Напр., в неравенстве

$$E\left(f,\ S_{2n}^r\right)_{\tilde{C}} \leqslant M_r n^{-r} \omega\left(f^{(r)},\ \pi/n\right)_{\tilde{C}},\quad f \in \tilde{C}^r,$$

наименьшая константа $M_r = K_r/2$, причем она не может быть уменьшена, если S_{2n}^r заменить любым другим подпространством той же размерности (см. [14]). Известны точные константы в неравенстве Джексона для приближения тригонометрич. полиномами в равномерной и интегральной метрике (см. [7]). В непериодич. случае есть результаты с точной асимптотикой.

Среди экстремальных задач, в к-рых приближающее множество, не будучи линейным многообразием, является выпуклым множеством, интерес представляют задачи наилучшего приближения одного класса функций $\mathfrak{M}$ другим классом $\mathfrak{M}_1$ с лучшими, в том или ином смысле, гладкостными свойствами. Сначала такая задача возникла как промежуточная при получении точной оценки для

$$E\left(\tilde{H}^{\omega}, \mathfrak{N}_{2n-1}^T\right)_{\tilde{C}} \quad \left(\mathfrak{M} = \tilde{H}^{\omega},\ \mathfrak{M}_1 = M\tilde{W}_{\infty}^1\right)$$

(см. [7]); в дальнейшем ее стали рассматривать как самостоятельную, причем в ряде случаев использование соотношения (4) позволило получить точный результат. При

$$\mathfrak{M} = M_1 W_p^r,$$

$$\mathfrak{M}_1 = M_2 W_q^k \ (0 < r < k).$$

здесь обнаруживается связь с задачами о неравенствах между нормами производных и о наилучшем приближении оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами (см. [16]).

Многие экстремальные задачи приближения функций можно интерпретировать как задачи оптимального восстановления (см. [15], [17], [18]). Пусть информация о функции $f \in X$ задается вектором $T(f,\ \Lambda) = \{\lambda_1(f),\ \ldots,\ \lambda_n(f)\}$, где λ_k — заданные на X функционалы (напр., значения функции $f(t)$ или (и) нек-рых ее производных в фиксированных точках). Зная, что f принадлежит классу $\mathfrak{M}$, требуется по информации $T(f,\ \Lambda)$ восстановить с наименьшей погрешностью функцию f или значение $L(f)$ на ней нек-рого линейного функционала (напр., $L(f) = f(\bar{t})$, $L(f) = \int_a^b f(t)dt$ и т. п.). Минимизация может предполагаться не только по методам S, сопоставляющим вектору $T(f,\ \Lambda)$ функцию $\varphi(t) \approx f(t)$ (или функционал $l(f) \approx L(f)$), но также и по наборам функционалов λ_k $(k = 1,\ \ldots,\ N)$. В зависимости от выбора меры погрешности и класса методов S задача оптимального восстановления функции может быть иногда сведена к отысканию поперечников d_N или d_N', чебышевского центра или других характеристик класса $\mathfrak{M}$. Оптимальное восстановление интеграла $\int_a^b f(t)dt$ по информации вида $\{f(t_k)\}$ или $\{f^{(\nu)}(t_k)\}$ приводит к задаче о наилучшей квадратурной формуле для класса $\mathfrak{M}$. Наилучший аппарат восстановления в ряде случаев доставляют сплайны; так, напр., сплайны $\sigma_{r-1}(f,\ t)$ из S_{2n}^{r-1}, интерполирующие в равностоящих точках t_k, восстанавливают функции f из $\tilde{W}_{\infty}^r$ по информации $\lambda_k(f) = f(t_k)$ в каждой точке $t \neq t_k$ с минимально возможной на всем классе $\tilde{W}_{\infty}^r$ погрешностью.

В пространствах функций двух и большего числа переменных, если не считать тривиального случая приближения в гильбертовом пространстве, точных решений экстремальных задач почти нет (1983). В немногих случаях известны асимптотически точные соотношения для погрешности равномерного приближения классов функций суммами Фурье и нек-рыми их средними (см. [12]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Ann. Math.», 1935, v. 36, № 2, с. 521—26; [2] его же, там же, 1936, v. 37, № 1, p. 107—10; [3] Favard J., «C. r. Acad. sci.», 1936, t. 203, p. 1122—24; [4] его же, «Bull. sci. math.», 1937, t. 61, p. 209—24, 243—56; [5] Никольский С. М., «Тр. МИАН СССР», 1945, т. 15, с. 1—76; [6] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1946, т. 10, с. 207—56; [7] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [8] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [9] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [10] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [11] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [12] Степанец А. И., Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Линейные методы, К., 1981; [13] Корнейчук Н. П., «Матем. заметки», 1976, т. 20, № 5, с. 655—64; [14] его же, «Укр. матем. журн.», 1979, т. 31, № 4, с. 380—88; [15] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1981, т. 45, № 2, с. 266—90; [16] Арестов В. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1975, т. 138, с. 3—28; [17] Великин В. Л., «Матем. заметки», 1977, т. 22, № 5, с. 663—70; [18] Лигун А. А., «Anal. Math.», 1979, v. 5, № 4, p. 269—86; [19] Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г., Аппроксимация с ограничениями, К., 1982.
Н. П. Корнейчук.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО — раздел комплексного анализа, изучающий вопросы приближенного представления (аппроксимации) функций комплексного переменного посредством аналитич. функций специальных классов. Основными в теории П. ф. к. п. являются задачи о возможности приближения, скорости приближения и об аппроксимационных свойствах различных способов представления функций (интерполяционных последовательностей и рядов, рядов по ортогональным многочленам и многочленам Фабера, разложений в непрерывные дроби и аппроксимаций Паде, последовательностей полиномов из экспонент и рядов Дирихле и т. п.). Теория П. ф. к. п. тесно связана с другими разделами комплексного анализа и математики в целом; в теории приближений важную роль играют методы и результаты конформных отображений, интегральные представления, теория потенциала, теория функциональных алгебр и др.

Центральная проблематика теории П. ф. к. п. относится к приближению функций многочленами и рациональными функциями, в частности многочленами и рациональными функциями наилучшего приближения (существование, характеристич. свойства, единственность), а также экстремальные задачи и различные оценки для многочленов и рациональных функций (оценки роста, неравенства для производных, многочлены и рациональные функции, наименее уклоняющиеся от нуля, и т. п.). *А. А. Гончар.*

Приближение функций комплексного переменного многочленами и рациональными функциями. В этом разделе теории П. ф. к. п. можно выделить несколько направлений.

1) Изучение возможности приближения функции $f(z)$ комплексного переменного z с любой наперед заданной точностью посредством многочленов и рациональных функций от z в зависимости от свойств того множества E, на к-ром задана f и на к-ром происходит приближение, от свойств метрики уклонения ρ и, наконец, от свойств самой функции f.

2) Изучение свойств многочленов и рациональных функций наилучшего приближения, т. е. таких многочленов $P_n(z; f, E, \rho)$ и рациональных функций $R_n(z; f, E, \rho)$ степени не выше n, $n=0, 1, \dots,$ для к-рых

$$\rho(f, P_n(z; f, E, \rho)) = E_n(f, E, \rho) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\rho(f, P): \deg P \leqslant n\},$$

$$\rho(f, R_n(z; f, E, \rho)) = R_n(f, E, \rho) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\rho(f, R): \deg R \leqslant n\},$$

где нижние грани берутся соответственно по всем многочленам $P(z)$ степени $\deg P \leqslant n$ и рациональным функциям $R(z)$ степени $\deg R \leqslant n$ (либо по части множества таких многочленов или рациональных функций, выделяемой какими-либо дополнительными условиями). По существу здесь идет речь о свойствах решений нек-рого класса экстремальных задач. Сюда можно отнести также изучение и других экстремальных задач на множествах многочленов, рациональных функций и на нек-рых классах аналитич. функций, а также исследования аналитич. свойств многочленов и рациональных функций (в частности, получение неравенств между различными нормами этих функций и их производных).

3) Изучение зависимости скорости убывания к нулю величин $E_n(f, E, \rho)$ и $R_n(f, E, \rho)$ при $n \to \infty$ от свойств f, E и ρ (так наз. прямые теоремы теории приближения) и зависимости свойств функции f от скорости убывания $E_n(f, E, \rho)$ или $R_n(f, E, \rho)$ к нулю при $n \to \infty$ и свойств E и ρ (обратные теоремы). С этим направлением неразрывно связано изучение возможностей известных методов П. ф. к. п. (таких, как ряды по *Фабера многочленам*, различные *интерполяционные процессы* и т. п.) и отыскание новых эффективных методов приближения.

4) Приближение функций нескольких комплексных переменных. Здесь решаются в основном те же задачи, что и в случае одного переменного, однако результаты и методы их получения, как правило, резко отличаются от случая одного переменного.

Ниже отмечены нек-рые основные результаты.

1) Задачу о возможности сколь угодно хорошего равномерного приближения многочленами решают *Рунге теорема* (в случае аналитичности f на E), *Лаврентьева теорема* (непрерывность f на E), *Келдыша теорема* (E — замкнутая область, f непрерывна на E и аналитична внутри E), *Мергеляна теорема* (в общем случае: E — компакт, f непрерывна на E и аналитична во внутренних точках E).

2) Задачу о возможности приближения голоморфной функции на замкнутом подмножестве E расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ решает теорема Рунге. При изучении возможности приближения функций f из различных пространств в метрике этих пространств посредством рациональных функций важную роль играют количественные характеристики множеств $e \subset \mathbb{C}$, аналогичные *аналитической емкости* $\gamma(e)$. В терминах $\gamma(e)$ задача об описании компактов E, на к-рых любая непрерывная функция с любой точностью приближается рациональными функциями, решается следующим образом: необходимо и достаточно выполнение либо условия

(а) $\gamma(\sigma(r, a) \setminus E) = \gamma(\sigma(r, a)) = r$

для любого круга $\sigma(r, a) = \{z : |z-a| < r\}$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$; либо условия

(б) $\overline{\lim\limits_{r \to 0}}\, r^{-2}\gamma(\sigma(r, a) \setminus E) = \infty$

для любого $a \in E$ (эквивалентность условий (а) и (б) выражает т. н. «неустойчивость» аналитической емкости).

3) Если E ограничено и измеримо по Лебегу и $1 \leqslant p < 2$, то множество всех рациональных функций плотно в пространстве $L^p(E)$.

4) Если $p > 0$, G — односвязная область с жордановой спрямляемой границей, то семейство всех многочленов от z плотно в *Смирнова классе* $E_p(G)$ тогда и только тогда, когда G — *Смирнова область*.

5) Пусть комплекснозначные функции $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)$, $f(z)$ непрерывны на компакте $E \subset \mathbb{C}$, $n \geqslant 1$. Среди всех обобщенных полиномов вида

$$P(z) = c_1\varphi_1(z) + \ldots + c_n\varphi_n(z)$$

($c_1, \ldots, c_n$ — произвольные комплексные числа) обобщенный полином $P_0(z)$ является наименее уклоняющимся от f по метрике

$$\rho_C(f, P)=\max\{|f(z)-P(z)|:z\in E\}$$

тогда и только тогда, когда

$$\min\{\mathrm{Re}\,[P(z)(P_0(z)-f(z))]:z\in E,\ |f(z)-P_0(z)|=\rho_C(f, P_0)\}\leqslant 0$$

для каждого $P(z)$.

6) Если E — компакт со связным дополнением G и в G существует *Грина функция* (первой краевой задачи для уравнения Лапласа) $g(z, \infty)$ с полюсом в ∞, то при $z\in G$ для любого многочлена $P(z)$ степени n справедливо неравенство

$$|P(z)|\leqslant M\exp\{ng(z, \infty)\},$$
$$M=\max\{|P(z)|:z\in E\}.$$

7) Если E — ограниченный невырожденный континуум со связным дополнением G, $f(z)$ непрерывна на E с модулем непрерывности $\omega(\delta)$ и аналитична во внутренних точках E, то

$$E_n(f, E, \rho_C)\leqslant C(f)\,\omega\left(d\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right),$$

где

$$d(t)=\max\{\min\{|\zeta-z|:\zeta\in G,\ g(\zeta, \infty)=\ln(1+t)\}:z\in\partial G\}.$$

Если замкнутая область $\bar{G}$ ограничена аналитической кривой Γ, то условие

$$E_n(f, E, \rho_C)=O\left(n^{-p-\alpha}\right)$$

эквивалентно выполнению для $f^{(p)}(z)$ в G условия Гёльдера порядка α, $0<\alpha<1$. Изучен также случай, когда Γ — кусочно гладкая кривая с углами.

8) В ряде случаев эффективным аппаратом приближения аналитич. функций являются различные интерполяционные процессы, в том числе *Паде аппроксимации* и их обобщения.

9) При $n\geqslant 2$ в $\mathbb{C}^n$ существуют как незамкнутые жордановы кривые, на к-рых не каждая непрерывная функция равномерно с любой точностью приближается многочленами от $(z_1, \ldots, z_n)$, так и замкнутые жордановы кривые, на к-рых многочленами равномерно приближается любая непрерывная функция. В $\mathbb{C}^1$ это невозможно.

10) К настоящему времени (1983) имеется сравнительно мало прямых теорем теории приближения рациональными функциями со свободными полюсами (т. е. без всяких условий на расположение полюсов приближающей функции) и значительное количество обратных теорем. *Е. П. Долженко.*

Лит.: [1] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, М., 1954; [2] Уолш Дж. Л., Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, пер. с англ., М., 1961 (там же, Приложение: Мергелян С. Н., О некоторых результатах в теории равномерных и наилучших приближений полиномами и рациональными функциями, с. 461—99); [3] Смирнов В. И., Лебедев Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1964; [4] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [5] Русак В. Н., Рациональные функции как аппарат приближения, Минск, 1979; [6] Гамелин Т., Равномерные алгебры, пер. с англ., М., 1973; [7] Леонтьев А. Ф., Ряды экспонент, М., 1976; [8] Некоторые вопросы теории приближений, пер. с англ., М., 1963; [9] Келдыш М. В., «Докл. АН СССР», 1936, т. 4, с. 163—66; [10] Лаврентьев М. А., «Тр. Физ.-матем. ин-та АН СССР», 1934, т. 5, с. 159—245; [11] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1, с. 216—21; [12] Мергелян С. Н., там же, 1952, т. 7, в. 2, с. 31—122; [13] Витушкин А. Г., там же, 1967, т. 22, в. 6, с. 141—99; [14] Джрбашян М. М., «Матем. сб.», 1955, т. 36, с. 353—440; [15] Гончар А. А., в кн.: Тр. Международного конгресса математиков. Москва, 1966, М., 1968, с. 329—56; [16] Долженко Е. П., Ульянов П. Л., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем. Мех.», 1980, № 1, с. 3—13; [17] Мергелян С. Н., в кн.: Математика в СССР за сорок лет, т. 1, М., 1959, с. 383—98; [18] Гончар А. А., Мергелян С. Н., в кн.: История отечественной математики, т. 4, кн. 1, К., 1970, с. 112—93; [19] Тамразов П. М., Гладкости и полиномиальные приближения, К., 1975; [20] Мельников М. С., Синанян С. О., в кн.: Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 143—250.

ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОРЯДОК, аппроксимации порядок,— порядок погрешности приближения как переменной величины, зависящей от непрерывного или дискретного аргумента τ, относительно другой переменной $\varphi(\tau)$, поведение к-рой, как правило, считается известным. Обычно τ — нек-рый параметр, являющийся числовой характеристикой приближающего множества, (напр., размерность этого множества) или метода приближения (напр., шаг интерполяции); при этом множество значений τ имеет конечную или бесконечную предельную точку. Функция $\varphi(\tau)$ — чаще всего степенная, показательная или логарифмическая. В качестве $\varphi(\tau)$ может фигурировать *непрерывности модуль* приближаемой функции (или нек-рой ее производной) или его мажоранта.

П. п. характеризует как аппроксимативные возможности метода приближения, так и определенные свойства приближаемого объекта, напр., дифференциально-разностные свойства приближаемой функции (см. *Приближение функций*; прямые и обратные теоремы).

В численном анализе П. п. численного метода, имеющего погрешность $O(h^m)$ (h — шаг метода), наз. показатель m.

Лит.: [1] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [2] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [3] Бахвалов Н. С., Численные методы, т. 1, М., 1975. *Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.*

ПРИБЛИЖЕНИЯ ТЕОРИЯ, аппроксимации теория,— раздел математич. анализа, изучающий методы приближения одних математич. объектов другими и вопросы, связанные с исследованием и оценкой возникающей при этом погрешности.

Основное содержание П. т. относится к *приближению функций*. Фундамент П. т. был заложен работами П. Л. Чебышева (1854—59) о наилучшем равномерном приближении функций многочленами и К. Вейерштрасса (K. Weierstraß), установившего в 1885 принципиальную возможность приблизить непрерывную на конечном отрезке функцию алгебраич. многочленами со сколь угодно малой наперед заданной погрешностью. Развитие П. т. в значительной степени определялось основополагающими работами А. Лебега (H. Lebesgue), Ш. Ж. Валле Пуссена (Ch. J. La Vallée Poussin), С. Н. Бернштейна, Д. Джексона (D. Jackson), Ж. Фавара (J. Favard), А. Н. Колмогорова, С. М. Никольского о приближении функций и классов функций.

С развитием функционального анализа многие вопросы П. т. стали рассматривать в самой общей ситуации, напр. как приближение элементов произвольного линейного нормированного пространства X. При этом выделяют три круга задач, к-рые в определенной степени соответствуют и основным хронологич. этапам развития исследований в П. т.

1. Приближение фиксированного элемента $x \in X$ элементами фиксированного множества $\mathfrak{N} \subset X$. Если в качестве меры приближения взять величину

$$E(x, \mathfrak{N}) = \inf_{u \in \mathfrak{N}} \|x-u\|,$$

т. е. *наилучшее приближение* x множеством $\mathfrak{N}$, то, помимо исследования и оценки $E(x, \mathfrak{N})$, возникают вопросы о существовании элемента наилучшего приближения u_0 из $\mathfrak{N}$ (для к-рого $\|x-u_0\| = E(x, \mathfrak{N})$), его единственности и характеристич. свойствах. Любой оператор A, отображающий X в $\mathfrak{N}$, задает нек-рый метод приближения с погрешностью $\|x-Ax\|$. Если $\mathfrak{N}$ — линейное многообразие, то особое значение имеют линейные операторы. Для последовательности $\{A_n\}$ таких операторов возникает задача об условиях сходимости $A_n x \to x$ для любого $x \in X$.

2. Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ элементами другого фиксированного множества $\mathfrak{N}$ из X. Наилучшее приближение в этом случае выражается величиной

$$E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \sup_{x \in \mathfrak{M}} E(x, \mathfrak{N}),$$

к-рая дает минимально возможную оценку погрешности приближения любого элемента $x \in X$ элементами из $\mathfrak{N}$. В конкретных случаях задача состоит в том, чтобы оценить или точно выразить $E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ через характеристики, задающие множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Если приближение осуществляется с помощью оператора A, то исследуется верхняя грань

$$\sup_{x \in \mathfrak{M}} \| x - Ax \|,$$

а также (если $\mathfrak{N}$ — линейное многообразие) величина

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \inf_{AX \subset \mathfrak{N}} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \| x - Ax \|,$$

где нижняя грань распространена на все линейные операторы, отображающие X в $\mathfrak{N}$. Линейный оператор, реализующий эту нижнюю грань (если он существует), определяет *наилучший линейный метод* приближения. Особый интерес представляет выяснение случаев, когда $\mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

3. Наилучшее приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ заданным классом $\{\mathfrak{N}\}$ аппроксимирующих множеств из X. Предполагается, что в класс $\{\mathfrak{N}\}$ входят в каком-то смысле «равноценные» множества, напр. содержащие одно и то же количество элементов или имеющие одну и ту же размерность. Первый случай приводит к задаче об ε-энтропии множества $\mathfrak{M}$ (относительно X), второй — к задачам вычисления *поперечников* множества $\mathfrak{M}$ (в пространстве X), в частности величин

$$d_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{\mathfrak{N}_N} E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N), \tag{1}$$

и

$$d'_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{\mathfrak{N}_N} \mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N), \tag{2}$$

где нижние грани берутся по всем подпространствам $\mathfrak{N}_N$ из X фиксированной размерности N (или по всевозможным их сдвигам $\mathfrak{N}_N + a$). Таким образом, в задачах (1)—(2) речь идет об отыскании наилучшего (соответственно наилучшего линейного) аппарата приближения размерности N для множества $\mathfrak{M}$.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [2] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [3] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [4] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [5] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [6] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [7] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МЕРА — количественное выражение погрешности приближения. Когда речь идет о приближении функции $f(t)$ функцией $\varphi(t)$, мера приближения $\mu(f, \varphi)$ обычно определяется метрикой нек-рого функционального пространства, содержащего как $f(t)$, так и $\varphi(t)$. Напр., если функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, часто пользуются равномерной метрикой пространства $C[a, b]$, т. е. полагают

$$\mu(f, \varphi) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} | f(t) - \varphi(t) |.$$

Если же непрерывность приближаемой функции не гарантирована или по условию задачи важна близость между $f(t)$ и $\varphi(t)$ лишь в среднем на $[a, b]$, можно использовать интегральные метрики пространств $L_p[a, b]$, полагая

$$\mu(f, \varphi)=\int_a^b q(t)\,|f(t)-\varphi(t)|^p\,dt,\quad p>0,$$

где $q(t)$ — нек-рая весовая функция. Здесь наиболее употребительным и удобным с практич. точки зрения является случай $p=2$ (см. *Среднеквадратическое приближение* функций).

П. ф. м. может учитывать значения функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ лишь в отдельных точках t_k, $k=1, \ldots, n$, промежутка $[a, b]$, напр.:

$$\mu(f, \varphi)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|f(t_k)-\varphi(t_k)|,$$

$$\mu(f, \varphi)=\sum\nolimits_{k=1}^{n} q_k\,|f(t_k)-\varphi(t_k)|^p,$$

где q_k — нек-рые положительные коэффициенты.

Аналогично определяется мера приближения функций двух и большего числа переменных.

Мера приближения функции $f(t)$ семейством функций F обычно определяется как *наилучшее приближение*:

$$E(f, F)=\mu(f, F)=\inf_{\varphi\in F}\mu(f, \varphi).$$

Под мерой приближения класса $\mathfrak{M}$ функций $f(t)$ функциями $\varphi(t)$ из фиксированного множества F понимают величину

$$E(\mathfrak{M}, F)=\mu(\mathfrak{M}, F)=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\inf_{\varphi\in F}\mu(f, \varphi),$$

к-рая характеризует максимальное отклонение функций множества $\mathfrak{M}$ от ближайших к ним функций из F.

В общем случае, когда рассматривается приближение в произвольном метрич. пространстве X, мера приближения $\mu(x, u)$ элемента x элементом u (множеством F) есть расстояние $\rho(x, u)$ ($\rho(x, F)$) между x и u (x и F) в смысле метрики пространства X.

Лит.: [1] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [2] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

ПРИВАЛОВА ОПЕРАТОРЫ, параметры Привалова,— операторы, позволяющие выразить условие гармоничности функции без использования частных производных. Пусть $u(x)$ — локально интегрируемая функция в конечной области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$; $\omega(h)$ — объем шара $B(x;\,h)$ радиуса h с центром $x\in D$, расположенного в D;

$$\Delta_h u(x)=\frac{1}{\omega(h)}\int_{B(x;\,h)}u(y)\,dy-u(x).$$

Верхний и нижний операторы Привалова $\overline{\Delta}^* u(x)$ и $\underline{\Delta}^* u(x)$ соответственно определяются формулами

$$\overline{\Delta}^* u(x)=\varlimsup_{h\to 0}\left(\Delta_h u(x):\ \frac{h^2}{2(n+2)}\right),$$

$$\underline{\Delta}^* u(x)=\varliminf_{h\to 0}\left(\Delta_h u(x):\ \frac{h^2}{2(n+2)}\right).$$

Если верхний и нижний П. о. совпадают, то оператор Привалова $\Delta^* u(x)$ определяется формулой

$$\Delta^* u(x)=\overline{\Delta}^* u(x)=\underline{\Delta}^* u(x)=\lim_{h\to 0}\left(\Delta_h u(x):\ \frac{h^2}{2(n+2)}\right).$$

Если функция $u(x)$ имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно в точке $x\in D$, то в этой точке существует П. о. $\Delta^* u(x)$, и он равен значению оператора Лапласа: $\Delta^* u(x) = \Delta u(x)$. Справедлива теорема Привалова: если непрерывная в области D функция $u(x)$ удовлетворяет всюду в D условию

$$\underline{\Delta}^* u(x) \leqslant 0 \leqslant \overline{\Delta}^* u(x),$$

то $u(x)$ — гармонич. функция в D. Отсюда вытекает, что непрерывная функция $u(x)$ в D является гармонической тогда и только тогда, когда во всякой точке $x \in D$, начиная с достаточно малого h, $\Delta_h u(x) = 0$ или, иначе,

$$u(x) = \frac{1}{\omega(h)} \int_{B(x;\, h)} u(y)\, dy.$$

Среднее значение по объему шара здесь можно заменить средним значением по площади сферы.

Лит.: [1] Привалов И. И., «Матем. сб.», 1925, т. 32, с. 464—71; [2] его же, Субгармонические функции, М.—Л., 1937; [3] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964. *Е. Д. Соломенцев.*

ПРИВАЛОВА ТЕОРЕМА — 1) П. т. о сопряженных функциях: пусть

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

— периодическая непрерывная функция с периодом 2π и

$$\tilde{f}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kt - a_k \sin kt)$$

— тригонометрически сопряженная функция с $f(t)$; тогда если $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α, $f \in \operatorname{Lip} \alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то $\tilde{f} \in \operatorname{Lip} \alpha$ при $0 < \alpha < 1$ и $\tilde{f}$ имеет модуль непрерывности, не больший $M\delta \ln(1/\delta)$ при $\alpha = 1$. Эта теорема, доказанная И. И. Приваловым [1], имеет важные применения в теории тригонометрич. рядов. Она переносится и на условия Липшица в нек-рых других метриках (см., напр., [5]).

2) П. т. единственности аналитических функций: если однозначная аналитич. функция $f(z)$ в области D плоскости комплексного переменного z, ограниченной спрямляемой жордановой кривой Γ, на нек-ром множестве $E \subset \Gamma$ положительной меры Лебега на Γ имеет нулевые угловые граничные значения, то $f(z) \equiv 0$ в D. Эта теорема доказана И. И. Приваловым [2]; ее обобщением является *Лузина — Привалова теорема*; см. также *Единственности свойство* аналитических функций.

3) П. т. о сингулярном интеграле Коши, основная лемма Привалова,— один из основных результатов теории интеграла типа Коши — Стилтьеса (см. *Коши интеграл*). Пусть $\Gamma : \zeta = \zeta(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$,— спрямляемая (замкнутая) жорданова кривая на плоскости комплексного переменного z, l — длина кривой Γ, s — длина дуги на Γ, отсчитываемая от нек-рой фиксированной точки; $\varphi = \varphi(s)$ — угол между положительным направлением оси абсцисс и касательной к Γ, $\psi(s)$ — комплексная функция ограниченной вариации на Γ. Пусть точка $\zeta_0 \in \Gamma$ определяется значением s_0 длины дуги, $\zeta_0 = \zeta(s_0)$, $0 \leqslant s_0 \leqslant l$, и Γ_δ — часть линии Γ, оставшаяся после удаления из Γ меньшей дуги, концами к-рой являются точки $\zeta(s_0 - \delta)$ и $\zeta(s_0 + \delta)$. Конечный предел при $\delta \to 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} \frac{e^{i\varphi(s)}\, d\psi(s)}{\zeta - \zeta_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\varphi(s)}\, d\psi(s)}{\zeta - \zeta_0}, \qquad (1)$$

если он существует, наз. сингулярным интегралом Коши — Стилтьеса. Пусть D^+ и D^- — соответственно конечная и бесконечная области, ограничиваемые кривой Γ. Формулировка П. т.: если для почти всех по мере Лебега на Γ точек Γ существует сингулярный интеграл (1), то почти всюду на Г существуют угловые граничные значения $F^{\pm}(\zeta_0)$ интеграла типа Коши — Стилтьеса

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{i\varphi(s)}\,d\psi(s)}{\zeta-z},\quad z\in D^{\pm}, \tag{2}$$

соответственно из областей $D^{\pm}$, причем почти всюду справедливы *Сохоцкого формулы*:

$$F^{\pm}(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{i\varphi(s)}\,d\psi(s)}{\zeta-\zeta_0}\pm\frac{1}{2}\psi'(s_0). \tag{3}$$

Обратно, если почти всюду на Г существуют угловые граничные значения $F^{+}(\zeta_0)$ (или $F^{-}(\zeta_0)$) интеграла (2), то почти всюду на Г существуют сингулярный интеграл (1) и граничные значения с другой стороны $F^{-}(\zeta_0)$ (соответственно $F^{+}(\zeta_0)$), причем выполняются равенства (3). Эта теорема была установлена И. И. Приваловым для интегралов типа Коши — Лебега (т. е. для случая абсолютно непрерывной функции $\psi(s)$, см. [2]), а затем и для общего случая [3]. Она играет основную роль в теории сингулярных интегральных уравнений и разрывных граничных задач аналитич. функций (см. [6]).

4) П. т. о граничных значениях интеграла типа Коши — Лебега: если жорданова кривая Г кусочно гладкая и без точек заострения, а комплексная функция $f(\zeta)$, $\zeta\in\Gamma$, удовлетворяет условию Липшица

$$|f(\zeta_1)-f(\zeta_2)|<C|\zeta_1-\zeta_2|^{\alpha},\quad 0<\alpha\leqslant 1,$$

то интеграл типа Коши — Лебега

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},\quad z\in D^{\pm},$$

есть непрерывная функция в замкнутой области $\bar{D}^{+}$, причем для граничных значений $F^{\pm}(\zeta)$ выполняются условия:

$$|F^{\pm}(\zeta_1)-F^{\pm}(\zeta_2)|<C_1|\zeta_1-\zeta_2|^{\alpha},$$

если $0<\alpha<1$, и

$$|F^{\pm}(\zeta_1)-F^{\pm}(\zeta_2)|<C_2(\delta)|\zeta_1-\zeta_2|\ln\frac{1}{|\zeta_1-\zeta_2|},$$

если $\alpha=1$, $|\zeta_1-\zeta_2|\leqslant\delta<1$ (см. [2]).

Лит.: [1] Привалов И. И., «Bull. Soc. math. France», 1916, t. 44, p. 100—03; [2] его же, Интеграл Cauchy, Саратов, 1918; [3] его же, Граничные свойства однозначных аналитических функций, М., 1941; [4] его же, Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [5] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., М., 1965; [6] Хведелидзе Б. В., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 7, М., 1975, с. 5—162.

Е. Д. Соломенцев.

ПРИВЕДЕНИЕ К АБСУРДУ — правило логич. вывода, позволяющее заключить, что если из списка утверждений Г, A следует как утверждение B, так и утверждение $\neg B$, то из списка Г следует $\neg A$. Правило П. к а. записывают, напр., в виде

$$\frac{\Gamma, A\to B;\quad \Gamma, A\to\neg B}{\Gamma\to\neg A}$$

и наз. также *правилом введения отрицания*. П. к а. является *допустимым правилом* для подавляющего большинства логико-математич. исчислений.

С. Ю. Маслов.

ПРИВЕДЕННАЯ СИСТЕМА ВЫЧЕТОВ по модулю m — набор, составленный из всех чисел *полной системы вычетов* по модулю m, взаимно простых с m. П. с. в. по модулю m состоит из $\varphi(m)$ чисел, где $\varphi(m)$ — функция Эйлера. В качестве П. с. в. по модулю m обычно берутся взаимно простые с m числа полной системы вычетов $0, 1, \ldots, m-1$.

С. А. Степанов.

ПРИВЕДЕННАЯ СХЕМА — схема, локальное кольцо любой точки к-рой не содержит ненулевых нильпотентных элементов. Для любой схемы $(X, \mathcal{O}_X)$ существует наибольшая замкнутая приведенная подсхема $(X_{\mathrm{red}}, \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}})$, характеризуемая соотношениями

$$\mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}, x} = \mathcal{O}_{X, x}/r_x,$$

где r_x — идеал, состоящий из всех нильпотентных элементов кольца $\mathcal{O}_{X, x}$. Групповая схема над полем характеристики 0 всегда приведена [3]. П. с.— классич. объект изучения в алгебраич. геометрии.

Лит.: [1] Артин М., «Математика», 1970, т. 14, № 4, с. 3—47; [2] Гротендик А., Дьёдонне Ж., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, № 2, с. 135—48; [3] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968. *С. Г. Танкеев.*

ПРИВИЛЕГИРОВАННЫЙ КОМПАКТ — понятие, часто используемое в теории комплексных пространств, в особенности в теории модулей комплексных структур. Пусть K — компакт в $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{O}_K$ — ограничение на K пучка ростков голоморфных функций в $\mathbb{C}^n$. Компакт K наз. привилегированным относительно когерентного аналитического пучка $\mathcal{F}$, заданного на K, если существует точная последовательность отображений $\mathcal{O}_K$-пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{L}_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \longrightarrow 0, \quad (1)$$

в к-рой $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_K^{r_i}$ с нек-рыми $r_i \geqslant 0$, $i=0, 1, \ldots, n$, такая, что порожденная ею последовательность непрерывных операторов

$$0 \longrightarrow B(K, \mathcal{L}_n) \xrightarrow{d} B(K, \mathcal{L}_{n-1}) \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow B(K, \mathcal{L}_1) \xrightarrow{d} B(K, \mathcal{L}_0) \quad (2)$$

точна и расщепляема. Здесь

$$B(K, \mathcal{L}_i) = B(K, \mathcal{O})^{r_i},$$

а $B(K, \mathcal{O})$ есть банахово пространство непрерывных на K функций, голоморфных внутри K, наделенное равномерной нормой. Расщепляемость последовательности (2) означает, что ядро и образ дифференциала d в каждом члене имеет прямое замкнутое дополнение. Это условие расщепляемости эквивалентно следующему: существует линейный непрерывный оператор h в (2), переводящий $B(K, \mathcal{L}_i)$ в $B(K, \mathcal{L}_{i+1})$, такой, что $dhd=d$ (оператор гомотопии). Свойство точности и расщепляемости последовательности (2) не зависит от выбора последовательности (1).

Пусть точка z принадлежит внутренности компакта K. Тогда существует морфизм π комплекса (2) в слой комплекса (1) над точкой z, переводящий элемент $B(K, \mathcal{L}_i)$, т. е. функцию на K со значениями в $\mathbb{C}^{r_i}$ в ее росток в точке z. Отсюда вытекает, что последовательность

$$B(K, \mathcal{L}_1) \xrightarrow{d} B(K, \mathcal{L}_0) \xrightarrow{\pi\varphi} \mathcal{F}_z \quad (3)$$

полуточна. Компакт K наз. $\mathcal{F}$-привилегированной окрестностью точки z, если он $\mathcal{F}$-привилегирован и последовательность (3) точна. Это свойство также не зависит от выбора последовательности (1).

Для всякого когерентного аналитич. пучка $\mathcal{F}$ всякая точка его области определения обладает фундаментальной системой $\mathcal{F}$-привилегированных окрестностей. В качестве таких окрестностей выбираются поликруги с определенными соотношениями типа неравенств для радиусов. Известно достаточное условие $\mathcal{F}$-привилегированности полицилиндра, связывающее пучок $\mathcal{F}$ с устройством границы (см. [1]).

Рассматриваются также привилегированные компакты по отношению к пучку, заданному на произвольном комплексном пространстве X, при этом имеют в виду компакты, привилегированные относительно пучков $f_*(\mathcal{F})$, где f карта на X.

Лит.: [1] Douady A., «Ann. Inst. Fourier», 1966, t. 16, p. 1—95. *В. П. Паламодов.*

ПРИВОДИМАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА обыкновенных дифференциальных уравнений — система

$$\dot{x}=A(t)\,x,\ x\in\mathbb{R}^n\ (\text{или }\mathbb{C}^n),\qquad (*)$$
$$A(\cdot):\ \mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)\ (\text{или }\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\ \mathbb{C}^n)),$$

переходящая в систему с постоянными коэффициентами $\dot{y}=By$ в результате замены $x=L(t)y$, где $L(t)$ — нек-рое *Ляпунова преобразование.* Если отображение $A(t)$ непрерывно и периодически зависит от t, то система (*) приводима (теорема Ляпунова). Для приводимости системы (*) необходимо и достаточно, чтобы нашлись преобразование Ляпунова $L(t)$ и оператор B такие, что всякое решение системы (*) имеет вид

$$x(t)=L(t)\,e^{tB}x(0)$$

(критерий Еругина).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, в его кн.: Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956, с. 7—263; [2] Еругин Н. П., Приводимые системы, Л.— М., 1946 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 13). *В. М. Миллионщиков.*

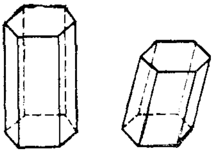
ПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — линейное представление, в пространстве к-рого есть собственное *инвариантное подпространство.* *А. И. Штерн.*

ПРИВОДИМОЕ РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — риманово пространство M, у к-рого линейная (или, иначе, однородная) *голономии группа* приводима, т. е. имеет нетривиальные инвариантные подпространства. Риманово пространство с неприводимой группой голономии наз. неприводимым. Полное односвязное П. р. п. разложимо (теорема де Рама), т. е. разлагается в прямое произведение римановых пространств положительной размерности. Более точно, любое полное односвязное риманово пространство изометрично прямому произведению $M_0\times M_1\times\ldots\times M_k$ евклидова пространства M_0 и полных односвязных неприводимых римановых пространств M_i, $i>0$, причем такое разложение M единственно с точностью до порядка сомножителей.

Ослабленный вариант этой теоремы справедлив для псевдоримановых пространств: псевдориманово пространство наз. слабо неприводимым, если все нетривиальные инвариантные относительно группы голономии Γ подпространства касательного пространства изотропны, т. е. индуцированное на них скалярное произведение вырождено. Любое полное односвязное псевдориманово пространство разлагается в прямое произведение слабо неприводимых псевдоримановых пространств. Если подпространство неподвижных относительно группы голономии векторов неизотропно, то такое разложение единственно с точностью до порядка сомножителей. Слабо неприводимое псевдориманово пространство не разлагается в прямое произведение псевдоримановых пространств [3].

Лит.: [1] Лихнерович А., Теория связностей в целом и групп голономий, пер. с франц., М., 1960; [2] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1981; [3] Wu H., «Illinois J. Math.», 1964, v. 8, № 2, p. 291—311; [4] Шапиро Я. Л., «Докл. АН СССР», 1972, т. 206, № 4, с. 831—33. *Д. В. Алексеевский.*

ПРИЗМА — многогранник, у к-рого две грани суть n-угольники (основания П.), а остальные n граней (боковых) — параллелограммы. Основания П. конгруэнтны и расположены в параллельных плоскостях. П. наз. прямой, если плоскости боковых граней перпендикулярны к плоскости основания. Прямую П. наз. правильной, если основанием ее служит правильный многоугольник. П. бывают треугольные, четырехугольные и т. д., смотря по тому, лежит ли в основании треугольник, четырехугольник и

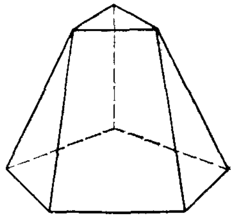


т. д. На рисунке дана шестиугольная П. (слева — прямая). Объем П. равен произведению площади основания на высоту (расстояние между основаниями П.).

БСЭ-3.

ПРИЗМАТОИД — многогранник, две грани к-рого (о с н о в а н и я П.) лежат в параллельных плоскостях, а остальные являются треугольниками или трапециями, причем у треугольников одна сторона, а у трапеций оба основания являются сторонами оснований П. (см. рис.). Объем П. равен

$$\frac{h}{6}(S+S'+4S''),$$



где h — расстояние между основаниями П., S и S' — их площади, S'' — площадь сечения, одинаково удаленного от обоих оснований.

БСЭ-3.

ПРИКОСНОВЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, к а с а т е л ь н о е п р е о б р а з о в а н и е, к о н т а к т н о е п р е о б р а з о в а н и е,— преобразование кривых на плоскости, при к-ром две касающиеся друг друга кривые преобразуются в две кривые, также касающиеся друг друга. См. *Контактное преобразование.*

ПРИКОСНОВЕНИЯ ТОЧКА — точка x множества A в топологич. пространстве X такая, что всякая ее окрестность имеет непустое пересечение с A. Множество всех П. т. образует з а м ы к а н и е $[A]$ множества A.

М. И. Войцеховский.

ПРИМАРНОЕ КОЛЬЦО — кольцо с единицей, факторкольцо к-рого по радикалу Джекобсона изоморфно кольцу матриц над телом или, что то же самое, является артиновым простым кольцом. Если идемпотенты П. к. R с радикалом Джекобсона J можно поднимать по модулю J (т. е. у каждого идемпотента из R/J существует идемпотентный прообраз в R), то R изоморфно кольцу всех матриц над нек-рым локальным кольцом. Это, в частности, имеет место, если J есть нильидеал.

Лит.: [1] Д ж е к о б с о н Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Ф е й с К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79.

Л. А. Скорняков.

ПРИМАРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — то же, что *факторпредставление.*

ПРИМАРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ — представление идеала I кольца R (или подмодуля N модуля M) в виде пересечения примарных идеалов (примарных подмодулей). П. р. обобщает разложение целого числа в произведение степеней различных простых чисел. Существование П. р. в кольце многочленов доказал Э. Ласкер [1], в произвольном коммутативном *нётеровом кольце* — Э. Нётер [2]. Пусть R — коммутативное нётерово кольцо. П. р. $I=\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ наз. н е п р и в о д и м ы м, если $\bigcap_{i\neq j} Q_i\neq I$ для любого $j=1, \ldots, n$ и радикалы $P_1, \ldots, P_n$ идеалов $Q_1, \ldots, Q_n$ попарно различны (р а д и к а л о м примарного идеала Q наз. такой единственный простой идеал $P\supseteq Q$, что $P^n\subseteq Q$ для нек-рого натурального числа n). Совокупность простых идеалов $\{P_1, \ldots, P_n\}$ определена однозначно идеалом I (п е р в а я т е о р е м а е д и н с т в е н н о с т и П. р.), минимальные по включению элементы этой совокупности наз. и з о л и р о в а н н ы м и п р о с т ы м и и д е а л а м и идеала I, остальные — в л о ж е н н ы м и п р о с т ы м и и д е а л а м и, причем примарные идеалы, соответствующие изолированным простым идеалам, также однозначно определены идеалом I (в т о р а я т е о р е м а е д и н с т в е н н о с т и П. р., см. [3]). Изолированным простым идеалам идеала I кольца многочленов над полем соответствуют неприводимые компоненты *аффинного многообразия* корней идеала I. Имеются различные некоммутативные обобщения понятия

П. р. Аксиоматизация П. р. привела к развитию *аддитивной теории идеалов.*

Лит.: [1] Lasker E., «Math. Ann.», 1905, Bd 60, S. 20—116; [2] Noether E., «Math. Ann.», 1921, Bd 83, S. 24—66; [3] Атья М., Макдональд И., Введение в коммутативную алгебру, пер. с англ., М., 1972; [4] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1—2, М., 1963; [5] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *В. Т. Марков.*

ПРИМАРНЫЙ ИДЕАЛ коммутативного кольца R — такой идеал $I \subset R$, что если $a, b \in R$ и $ab \in I$, то либо $b \in I$, либо $a^n \in I$ для нек-рого натурального числа n. В кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ П. и.— идеал вида $p^n\mathbb{Z}$, где p — простое, n — натуральное число. Важную роль в коммутативной алгебре играет представление любого идеала коммутативного *нётерова кольца* в виде пересечения конечного числа П. и.— *примарное разложение.* Более общо, пусть $\mathrm{Ass}(M)$ обозначает множество первичных идеалов кольца R, являющихся аннуляторами ненулевых подмодулей модуля M. Подмодуль N модуля M над нётеровым кольцом R наз. примарным, если $\mathrm{Ass}(M/N)$ — одноэлементное множество. Если кольцо R коммутативно, то любой собственный подмодуль нётерова R-модуля, не представимый в виде пересечения двух строго содержащих его подмодулей, примарен. В некоммутативном случае это не так, поэтому предпринимались попытки построить различные некоммутативные обобщения понятия примарности. Напр., собственный подмодуль N модуля M наз. примарным, если для любого ненулевого инъективного подмодуля E' инъективной оболочки E модуля M/N пересечение ядер гомоморфизмов из E в E' тривиально. Другое удачное обобщение — понятие терциарного идеала [4]: левый идеал I нётерова слева кольца R наз. терциарным, если для любых элементов $a \in R$, $b \in R \setminus I$ из $aRb \subseteq I$ следует, что для любого $c \in R \setminus I$ найдется элемент $d \in Rc \setminus I$ такой, что $aRd \subseteq I$. Оба эти обобщения приводят к некоммутативным аналогам примарного разложения. Каждый терциарный идеал нётерова кольца R примарен в том и только в том случае, когда кольцо R удовлетворяет условию Артина — Риса: для любых левых идеалов I, J кольца R найдется натуральное число n такое, что $I^n \cap J \subseteq IJ$ (см. [3]).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [3] Goldman O., «J. Algebra», 1969, v. 13, № 1, p. 10—47; [4] Lesieur L., Croisot R., Algèbre noethérienne non commutative, P., 1963. *В. Т. Марков.*

ПРИМИТИВНАЯ ГРУППА ПОДСТАНОВОК — группа подстановок $(G; M)$, сохраняющая лишь тривиальные отношения эквивалентности на множестве M (т. е. равенство и аморфную эквивалентность). Изучаются главным образом конечные П. г. п.

П. г. п. транзитивна и всякая 2-транзитивная группа примитивна (см. *Транзитивная группа*). В точности 1-транзитивные (т. е. не являющиеся уже 2-транзитивными) группы подстановок наз. унипримитивными. Коммутативными П. г. п. являются циклич. группы простого порядка и только они. Транзитивная группа подстановок примитивна тогда и только тогда, когда стабилизатор G_α каждой точки $\alpha \in M$ есть максимальная подгруппа в группе G. Другой признак примитивности основан на сопоставлении каждой транзитивной группе $(G; M)$ ее графов, соответствующих бинарным орбитам этой группы. Группа $(G; M)$ примитивна тогда и только тогда, когда графы, соответствующие нерефлексивным 2-орбитам, связны. Число 2-орбит наз. рангом группы $(G; M)$. Ранг равен 2 для дважды транзитивных групп, а ранг унипримитивной группы не меньше 3.

Всякий неединичный нормальный делитель П. г. п. транзитивен. Всякая транзитивная группа подстановок погружается в кратное сплетение П. г. п. (правда, такое представление не однозначно).

Многие вопросы теории групп подстановок сводятся к обозрению П. г. п. Известен список всех П. г. п. степени $\leqslant 50$ (см. [4]). Изучаются связи между П. г. п. и простыми конечными группами.

Обобщение понятия П. г. п.— кратно примитивные группы. Группа подстановок $(G; M)$ наз. k раз примитивной, если она k раз транзитивна и фиксатор $(k-1)$-й точки действует примитивно на остальных точках.

Лит.: [1] Cameron P., «Bull. London Math. Soc.», 1981, v. 13, p. 1—22; [2] Krasner M., Kaloujnine L., «Acta Scient. math. (Szeged)», 1951, v. 14, p. 39—66; [3] Wielandt H., Finite permutation groups, N.Y.—L., 1964; [4] Погорелов Б. А., в кн.: VI Всесоюзный симпозиум по теории групп. Сборник, К., 1980, с. 146—57; [5] Шмидт О. Ю., Абстрактная теория групп, 2 изд., М.—Л., 1933.

Л. А. Калужнин.

ПРИМИТИВНАЯ РЕКУРСИЯ — способ определения функций от натуральных аргументов с натуральными значениями. Говорят, что $(n+1)$-местная функция $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ получена примитивной рекурсией из n-местной функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $(n+2)$-местной функции $h(x_1, \ldots, x_n, y, z)$, если для всех натуральных значений $x_1, \ldots, x_n, y$ имеет место

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$$

и

$$f(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

Для данных g и h такая функция f всегда существует и единственна. При $n=0$ определяющие равенства для f записываются в виде

$$f(0) = a, \ f(x+1) = h(x, f(x)).$$

Фундаментальным свойством П. р. является то, что при любом разумном уточнении понятия вычислимости функция f, полученная из вычислимых функций g и h с помощью П. р., сама вычислимая. П. р.— одно из основных правил порождения из исходного набора простейших функций всех примитивно рекурсивных и всех частично рекурсивных функций.

Лит.: [1] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [2] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [3] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

С. Н. Артемов.

ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВНАЯ ФУНКЦИЯ — функция от натуральных аргументов с натуральными значениями, к-рую можно получить из простейших функций

$$s(x) = x+1, \ \ o(x) = 0, \ \ I_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m$$

конечным числом операций суперпозиции и *примитивной рекурсии.*

Поскольку исходные функции являются вычислимыми, а операторы суперпозиции и примитивной рекурсии вычислимость сохраняют, множество всех П. р. ф. есть подкласс класса всех *вычислимых функций.* Каждая П. р. ф. задается описанием ее построения из исходных функций (примитивно рекурсивное описание) и, следовательно, класс всех П. р. ф. счетен. Практически все арифметич. функции, употребляемые в математике по конкретным поводам, являются П. р. ф., напр.: $x+y$, $x \cdot y$, x^y, $\mathrm{sg}(x)$, $\left[\frac{x}{y}\right]$, остаток от деления x на y, $\pi(x)$ — простое число с номером x и т. д.

Отношение $P(x_1, \ldots, x_n)$ на натуральных числах наз. примитивно рекурсивным отношением (п. р. о.), если функция $g(x_1, \ldots, x_n)$, равная 1, когда $P(x_1, \ldots, x_n)$ истинно, и 0, когда $P(x_1, \ldots, x_n)$ ложно, является П. р. ф. Говорят, что отношение $P(x_1, \ldots, x_n, z)$ получено из отношения $Q(x_1, \ldots, x_n,$

y, z) с помощью ограниченного квантора, если

$$P(x_1, \ldots, x_n, z) \Leftrightarrow \forall y\,(y \leqslant z \Rightarrow Q(x_1, \ldots, x_n, y, z))$$

или

$$P(x_1, \ldots, x_n, z) \Leftrightarrow \exists y\,(y \leqslant z \,\&\, Q(x_1, \ldots, x_n, y, z)).$$

Класс п. р. о. замкнут относительно применения всех логич. связок (включая отрицание) и ограниченных кванторов.

Пусть $f_1, \ldots, f_{s+1}$ суть n-местные П. р. ф., а $P_1, \ldots, P_s$ — такие п. р. о., что на любом наборе значений аргументов истинно не более одного из них. Тогда функция

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } P_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_s(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } P_s(x_1, \ldots, x_n), \\ f_{s+1}(x_1, \ldots, x_n), & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

является П. р. ф.

Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n, z)$ получена из всюду определенной функции $g(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ применением ограниченного оператора минимизации, если $f(x_1, \ldots, x_n, z)$ равно минимальному y такому, что $y \leqslant z$ и $g(x_1, \ldots, x_n, y, z)=0$, и равно $z+1$, если такого y нет. Класс П. р. ф. замкнут относительно применения ограниченных операторов минимизации.

Функция $\Phi(y, x_1, \ldots, x_n)$ наз. универсальной для класса всех n-местных П. р. ф., если для каждой П. р. ф. $f(x_1, \ldots, x_n)$ найдется натуральное число k такое, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(k, x_1, \ldots, x_n).$$

Для каждого $n \geqslant 1$ такая универсальная функция существует, но она не может быть П. р. ф.

Всякое рекурсивно перечислимое множество есть область значений П. р. ф.; всякое рекурсивно перечислимое отношение $R(x_1, \ldots, x_n)$ представимо в виде $\exists y A(y, x_1, \ldots, x_n)$, где A — п. р. о. Всякая П. р. ф. представима в *арифметике формальной*, т. е. для каждой П. р. ф. $f(x_1, \ldots, x_n)$ найдется арифметич. формула $F(y, x_1, \ldots, x_n)$ такая, что для натуральных $k_1, \ldots, k_n, m$ при $f(k_1, \ldots, k_n)=m$ в формальной арифметике выводима формула $F(\overline{m}, \overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n)$, а при $f(k_1, \ldots, k_n) \neq m$ выводима $\urcorner F(\overline{m}, \overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n)$ (здесь $\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{m}$ — арифметич. термы, изображающие в формальной арифметике натуральные числа $k_1, \ldots, k_n, m$). Этот факт занимает центральное место в доказательстве неполноты формальной арифметики (см. [4]).

Лит.: [1] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [2] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [3] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [4] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1976. *С. Н. Артемов.*

ПРИМИТИВНОЕ КОЛЬЦО правое — ассоциативное кольцо, обладающее правым точным *неприводимым модулем*. Аналогично (с помощью левого неприводимого модуля) определяется левое примитивное кольцо. Классы правых и левых П. к. не совпадают. Всякое коммутативное П. к. является полем. Всякое полупростое (в смысле *Джекобсона радикала*) кольцо является подпрямым произведением П. к. Простое кольцо либо является П. к., либо радикально. П. к. с ненулевыми минимальными правыми идеалами описываются теоремой плотности. П. к. с условием минимальности для правых идеалов (т. е. артиновы П. к.) являются простыми.

Кольцо R примитивно тогда и только тогда, когда оно обладает максимальным модулярным правым идеалом I, к-рый не содержит двусторонних идеалов кольца R, отличных от нулевого идеала. Это свойство может быть принято за определение П. к. в классе неассоциативных колец.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972. *К. А. Жевлаков.*

ПРИМИТИВНЫЙ ИДЕАЛ, правопримитивный идеал,— такой двусторонний идеал P ассоциативного кольца R, что факторкольцо R/P является (правым) *примитивным кольцом.* Аналогично, с помощью левых примитивных колец может быть определен левопримитивный идеал. Множество П всех П. и. кольца, снабженное нек-рой топологией, оказывается полезным при изучении отдельных классов колец. Обычно множество П топологизируется при помощи следующего *замыкания отношения*:

$$A=\{P' \mid P' \in \Pi,\ P' \supseteq (\bigcap P,\ P \in A)\},$$

где A подмножество в П. Множество всех П. и. кольца, снабженное такой топологией, наз. структурным пространством этого кольца.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961. *К. А. Жевлаков.*

ПРИМИТИВНЫЙ КЛАСС алгебраических систем — то же, что многообразие (см. *Алгебраических систем многообразие*).

ПРИМИТИВНЫЙ МНОГОЧЛЕН — многочлен $f(X) \in R[X]$, где R — ассоциативно-коммутативное кольцо с однозначным разложением на множители, коэффициенты к-рого не имеют нетривиальных общих делителей. Любой многочлен $g(X) \in R[X]$ можно записать в виде $g(X)=c(g)f(X)$, где $f(X)$ — П. м., а $c(g)$ — наибольший общий делитель коэффициентов многочлена $g(X)$. Элемент $c(g) \in R$, определенный с точностью до умножения на обратимые элементы из R, наз. содержанием многочлена $g(X)$. Справедлива лемма Гаусса: если $g_1(X),\ g_2(X) \in R[X]$, то $c(g_1g_2)=c(g_1)c(g_2)$. В частности, произведение П. м. снова примитивно.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963. *Л. В. Кузьмин.*

ПРИОРИТЕТА МЕТОД — метод, применяемый в рекурсивной теории множеств для построения просто устроенных с рекурсивной точки зрения (в простейших случаях — рекурсивно перечислимых) множеств (функций, нумераций и т. п.), удовлетворяющих бесконечной системе условий определенного типа. Специфика допустимых условий такова, что для того чтобы удовлетворить отдельному условию из данной системы, обычно бывает достаточно, чтобы в строящееся множество был включен определенный (зависящий от рассматриваемого условия) элемент. Однако на каждом этапе построения (представляющего собой нек-рый вычислительный процесс, чем и обеспечивается рекурсивная простота строения искомого объекта) каждое из условий системы (к-рое определяется, вообще говоря, бесконечным множеством конструктивных объектов) представлено нек-рой своей конечной аппроксимацией. Включение в строящееся множество элемента, обеспечивающего выполнение аппроксимации j-го условия, еще не дает гарантии, что тем самым будет удовлетворено само j-е условие. П. м. позволяет в известных случаях обходить это препятствие. С этой целью j-му условию данной системы, $j=1, 2, 3, \ldots$, в процессе построения ставится в соответствие натуральное число, являющееся кандидатом на роль элемента, включение к-рого в строящееся множество удовлетворяет j-му условию; про такой элемент принято говорить, что он помечен маркером $\left|\overline{j}\right|$ (снабженным, возможно, дополнительными индексами). Каждый такой кандидат может в процессе построения заменяться (или, что то же самое, маркер может сдвигаться), но при этом в простейших приоритетных конструкциях сама последовательность, в к-рой выполняются попытки удовлетворить данным условиям, организуется так, что каждый маркер может изменить свое положение лишь конечное число раз, причем в своем заключительном положении он с необходимостью отмечает элемент, гарантирующий выполнение соответствующего условия.

П. м. был создан при решении проблемы Поста о существовании нетривиальных рекурсивно перечислимых степеней. Впоследствии он был использован в многочисленных задачах, возникших при изучении тьюринговых и других степеней, структуры рекурсивно перечислимых множеств (упорядоченной отношением включения), теории вычислимых нумераций и др. При этом возникли различные модификации первоначального П. м. (в частности, иногда допускается, чтобы нек-рые маркеры меняли свое положение бесконечно много раз), поэтому нередко предпочитают говорить о методах приоритета.

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [2] Sacks G. E., Degrees of unsolvability, Princeton (N.J.), 1963.

В. А. Душский.

ПРИСОЕДИНЕННАЯ ГРУППА группы G — линейная группа $\mathrm{Ad}\, G$, являющаяся образом группы Ли или алгебраич. группы G при *присоединенном представлении.* П. г. $\mathrm{Ad}\, G$ содержится в группе $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ всех автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, а ее алгебра Ли совпадает с присоединенной алгеброй $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Связная полупростая группа есть группа присоединенного типа (т. е. она изоморфна своей П. г.) тогда и только тогда, когда ее корни порождают группу рациональных характеров максимального тора; центр такой группы тривиален. Если основное поле имеет характеристику 0 и G связна, то $\mathrm{Ad}\, G$ однозначно определяется алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и наз. иногда П. г., или группой внутренних автоморфизмов, алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В частности, если G полупроста, то $\mathrm{Ad}\, G$ совпадает со связной компонентой единицы в $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980.

А. Л. Онищик.

ПРИСОЕДИНЕННАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность Y, находящаяся с данной поверхностью X в *Петерсона соответствии*, причем асимптотич. сети на Y соответствует на X сопряженная сеть σ с равными инвариантами, и наоборот. П. п. Y является *вращения индикатрисой* для X, и наоборот. Если сеть σ — главное основание изгибания X, то Y — *Бианки поверхность.*

И. Х. Сабитов.

ПРИСОЕДИНЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ группы Ли или алгебраической группы G — линейное представление Ad группы G в касательном пространстве $T_e(G)$ (или в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G), сопоставляющее каждому $a \in G$ дифференциал $\mathrm{Ad}\, a = d(\mathrm{Int}\, a)_e$ внутреннего автоморфизма $\mathrm{Int}\, a : x \to axa^{-1}$. Если $G \subseteq GL(V)$ — линейная группа в пространстве V, то

$$(\mathrm{Ad}\, a)\, X = aXa^{-1}, \quad X \in T_e(G).$$

Ядро $\mathrm{Ker\,Ad}$ содержит центр группы G, а в случае, когда G связна и основное поле имеет характеристику 0, совпадает с центром. Дифференциалом П. п. группы G в точке e служит присоединенное представление ad алгебры $\mathfrak{g}$.

Присоединенным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ наз. линейное представление ad алгебры $\mathfrak{g}$ в модуле $\mathfrak{g}$, действующее по формуле

$$(\mathrm{ad}\, x)\, y = [x, y], \quad x, y \in \mathfrak{g},$$

где $[\ ,\ ]$ — операция в алгебре $\mathfrak{g}$. Ядро $\mathrm{Ker\,ad}$ есть центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Присоединенные операторы ad x являются дифференцированиями алгебры $\mathfrak{g}$ и наз. внутренними дифференцированиями. Образ ad $\mathfrak{g}$ называется присоединенной алгеброй и является идеалом в алгебре Ли Der $\mathfrak{g}$ всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}$, причем Der $\mathfrak{g}$/Ad $\mathfrak{g}$ есть пространство $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ 1-мерных когомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$, определяемых П. п. В частности, ad $\mathfrak{g}$=Der $\mathfrak{g}$, если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над полем характеристики 0.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980.

А. Л. Онищик.

ПРИСТРЕЛКИ МЕТОД, стрельбы метод,— метод решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, к-рый заключается во введении управляющих переменных (параметров) и последующем нахождении их из системы уравнений, при этом выбор параметров имеет решающее значение для успешного решения задачи.

Пусть имеется при $a \leqslant x \leqslant b$ дифференциальное уравнение

$$y' = F(x, y) \tag{1}$$

с граничным условием

$$g(y(a),\ y(b)) = h, \tag{2}$$

где вектор-функция $y=(y_1, \ldots, y_n)^\top$ от x подлежит определению, вектор-функции $F=(F_1, \ldots, F_n)^\top$ и $g=(g_1, \ldots, g_n)^\top$ известны, числовой вектор $h=(h_1, \ldots, h_n)^\top$ задан.

Пусть задача Коши

$$\partial Z/\partial x = F(x, Z), \tag{3}$$

$$Z(a, r) = r, \tag{4}$$

где $Z=(Z_1, \ldots, Z_n)^\top$, $r=(r_1, \ldots, r_n)^\top$, имеет единственное решение $Z(x, r)$, определенное при $a \leqslant x \leqslant b$, $r \in E^n$. При подстановке в (2) вместо $y(a)$ заданного значения $Z(a, r)=r$, а вместо $y(b)$ найденного значения $Z(b, r)$ получают уравнение

$$g(r,\ Z(b, r)) = h \tag{5}$$

относительно параметра r.

Алгоритм П. м. состоит в следующем: сначала находят решение $r=r^*$ уравнения (5), а затем — искомое решение граничной задачи (1) — (2) как решение задачи Коши

$$y' = F(x, y), \quad y(a) = r^*.$$

Для решения упоминавшихся здесь задач Коши могут быть использованы численные методы. Для решения уравнения (5) целесообразно избрать какой-либо итерационный метод.

В случае, когда нек-рые из компонент вектора g зависят только от $y(a)$, а остальные компоненты — только от $y(b)$, выгоден другой выбор параметров (см. [1], а также *Нелинейная краевая задача*; численные методы решения). Имеются другие варианты П. м. (см. [4]). П. м. применяют и при решении сеточной краевой задачи.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977; [3] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы, т. 2, М., 1977; [4] Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1979.

А. Ф. Шапкин.

ПРИТЯЖЕНИЯ ОБЛАСТЬ устойчивого распределения — совокупность всех функций распределения $F(x)$ таких, что для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ с функцией распределения $F(x)$ при подходящем подборе постоянных A_n и $B_n>0$, $n=1, 2, \ldots$, распределения случайных величин

$$\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - A_n\right)\Big/B_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots, \qquad (*)$$

слабо сходятся при $n\to\infty$ к невырожденной функции распределения $V(x)$, к-рая с необходимостью оказывается устойчивой.

Одной из основных задач теории устойчивых законов является описание П. о. устойчивых законов. Так, для нормального распределения в 1935 А. Я. Хинчиным, В. Феллером (W. Feller) и П. Леви (P. Lévy) было установлено, что $F(x)$ принадлежит П. о. нормального закона тогда и только тогда, когда при $x\to\infty$

$$x^2 \int_{|y|>x} dF(y) \Big/ \int_{|y|<x} y^2\, dF(y) \longrightarrow 0.$$

Позже Б. В. Гнеденко (1939) и В. Дёблин (W. Doeblin, 1940) дали описание П. о. устойчивого закона с показателем α, $0<\alpha<2$: для принадлежности $F(x)$ П. о. невырожденного устойчивого закона $V(x)$ с показателем α необходимо и достаточно, чтобы

$$F(-x)/[1-F(x)+F(-x)] \longrightarrow c_1/(c_1+c_2) \quad \text{при} \quad x\longrightarrow\infty$$

для нек-рых $c_1\geqslant 0$, $c_2\geqslant 0$, $c_1+c_2>0$, определяемых по $V(x)$, и

$$[1-F(x)+F(-x)]/[1-F(tx)+F(-tx)] \longrightarrow t^\alpha$$
$$\text{при } x\longrightarrow\infty$$

при каждом постоянном $t>0$. Ограничение на характер поведения нормирующих коэффициентов B_n, $n=1, 2, \ldots$, приводит к уменьшению совокупности функций распределения, для к-рых имеет место сходимость по распределению для последовательности (*). Совокупность функций распределения $F(x)$, для к-рых функции распределения последовательности случайных величин (*) при подходящем выборе последовательности A_n, $n=1, 2, \ldots$, постоянной $c>0$ и $B_n=cn^{-1/\alpha}$, $n=1, 2, \ldots$, слабо сходятся к устойчивой функции распределения $V(x)$ с показателем α, наз. **областью нормального притяжения** $V(x)$. Нормальная П. о. нормального распределения совпадает с совокупностью невырожденных распределений с конечной дисперсией.

Нормальная П. о. невырожденной устойчивой функции распределения $V(x)$ с показателем α $(0<\alpha<2)$ образована функциями $F(x)$ такими, что существуют и конечны

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)/|x|^\alpha = c_1 \geqslant 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} (1-F(x))/x^\alpha = c_2 \geqslant 0,$$

где c_1 и c_2 определяются устойчивым законом $V(x)$.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949; [2] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972.
Б. А. Рогозин.

ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ЯЗЫК — специализированный язык программирования задач, принадлежащих нек-рому четко выделяемому классу. Выделение класса производится либо фиксацией математич. объектов, лежащих в основе решаемых задач (напр., класс задач линейной алгебры), либо фиксацией области применения ЭВМ (напр., класс задач оперативного планирования и учета на предприятии). Проблемная ориентация обычно производится в контексте нек-рого универсального языка программирования, по отношению к к-рому П.-о. я. является либо над-, либо пред-, либо подъязыком. Надъязык получается обогащением универсального языка дополнительными конструкциями, особенно удобными для формулирования задачи из класса. Обычные конструкции универсального языка используются либо для «скрепления» дополнительных конструкций в целостную программу, либо для программирования «нестандартных» компонент задачи. В п р е д ъ я з ы к е дополнительные конструкции полностью «загораживают» универсальный язык и переводятся на него специальным препроцессором. П о д ъ я з ы к получается из универсального языка отказом от конструкций, неупотребительных в данном классе задач, либо предварительным составлением библиотеки «стандартных программ», в совокупности достаточных для выражения любой задачи из класса. Во всех случаях выгода от употребления П.-о. я. состоит в том, что вместо программирования заново каждой задачи из класса достаточно лишь указать средствами П.-о. я. параметры, отличающие одну задачу от другой.

А. П. Ершов.

ПРОГОНКИ МЕТОД — метод переноса одноточечного граничного условия с помощью дифференциального или разностного уравнения, соответствующего данному уравнению. Применяется для решения граничной задачи в том случае, когда *пристрелки метод* не эффективен.

Пусть на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ задано линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'(x)+A(x)\,y(x)=f(x), \tag{1}$$

где квадратная матрица $A(x)$ порядка n и вектор $f(x)=[f_1(x), \ldots, f_n(x)]^{\top}$ — известные непрерывные функции, дифференцируемая вектор-функция $y(x)=[y_1(x), \ldots, y_n(x)]^{\top}$ подлежит определению. К уравнению (1) присоединены граничные условия в форме

$$\varphi^{\top} y(a)=\alpha, \quad \psi^{\top} y(b)=\beta, \tag{2}$$

где известные матрицы φ и ψ имеют размеры $n\times k$ и $n\times l$ и ранги k и l соответственно,

$$\alpha=[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]^{\top}, \quad \beta=[\beta_1, \ldots, \beta_l]^{\top}, \quad k+l=n.$$

Используя дифференциальные уравнения

$$u'(x)-A^{\top}(x)\,u(x)=0,$$
$$\gamma'(x)=u^{\top}(x)\,f(x)$$

с начальными условиями $u(a)=\varphi$, $\gamma(a)=\alpha$, где искомая дифференцируемая матрица-функция $u(x)$ имеет размеры $n\times k$, $\gamma(x)=[\gamma_1(x), \ldots, \gamma_k(x)]^{\top}$, можно определить $u(x)$ и $\gamma(x)$ на всем отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ (п р я м о й х о д п р о г о н к и). С помощью уравнения

$$u^{\top}(b)\,y(b)=\gamma(b)$$

и второго из граничных условий (2) можно определить значение $y(b)$, если квадратная матрица $[u(b), \psi]$ имеет ранг n. Искомое решение граничной задачи (1)—(2) вычисляется теперь как решение задачи Коши для уравнения (1) в направлении от точки $x=b$ к точке $x=a$ (о б р а т н ы й х о д п р о г о н к и). Указанный метод применим и к многоточечной задаче, когда условия вида (2) задаются не только на концах, но и в нескольких внутренних точках отрезка $a \leqslant x \leqslant b$. Разработаны варианты метода прогонки для переноса линейных граничных условий, отличных от (2) (см. [1]).

Достоинства П. м. видны на примере следующей граничной задачи:

$$y''(x)+Q(x)\,y(x)=f(x), \tag{3}$$

$$y'(a)+\varphi y(a)=\alpha, \tag{4}$$

$$y'(b)+\psi y(b)=\beta, \tag{5}$$

где квадратная матрица $Q(x)$ порядка n и вектор $f(x)$ размера n — известные непрерывные функции, дважды дифференцируемая вектор-функция $y(x)$ подлежит определению, известные квадратные матрицы φ и ψ имеют порядок n, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\top}$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)^{\top}$.

Используя дифференциальные уравнения

$$v(x)=[v(x)]^2+Q(x),$$
$$\gamma'(x)=v(x)\gamma(x)+f(x)$$

с начальными условиями $v(a)=\varphi$, $\gamma(a)=\alpha$, где искомая дифференцируемая квадратная матрица-функция $v(x)$ имеет порядок n, $\gamma(x)=[\gamma_1(x), \ldots, \gamma_n(x)]^{\top}$, ищутся $v(x)$ и $\gamma(x)$ на всем отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ (прямой ход прогонки).

С помощью уравнения

$$y'(b)+v(b)y(b)=\gamma(b)$$

и граничного условия (5) можно определить значение

$$y(b)=[v(b)-\psi]^{-1}[\gamma(b)-\beta], \tag{6}$$

если матрица $v(b)-\psi$ имеет ранг n. Искомое решение граничной задачи (3) — (5) находится как решение задачи Коши для уравнения

$$y'(x)+v(x)y(x)=\gamma(x)$$

с начальным условием (6) (обратный ход прогонки). Таким образом, П. м. для задачи (3) — (5) является методом понижения порядка дифференциального уравнения (3).

В случае конечной последовательности линейных алгебраич. уравнений

$$a_i\varphi_{i-1}-b_i\varphi_i+c_i\varphi_{i+1}=f_i, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где коэффициенты a_i, c_i, b_i — известные квадратные матрицы порядка ν, а f_i и φ_i — известный и искомый вектор-столбцы размера ν, $a_1=0$, $c_n=0$, алгоритм прогонки определяется следующим образом:

$$\beta_{i+1}=(b_i-a_i\beta_i)^{-1}c_i, \tag{8}$$

$$z_{i+1}=(b_i-a_i\beta_i)^{-1}(a_iz_i-f_i), \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

при условиях $\beta_1=0$, $z_1=0$ (прямой ход) и

$$\varphi_i=\beta_{i+1}\varphi_{i+1}+z_{i+1}, \tag{10}$$
$$i=n, n-1, \ldots, 1,$$

при условии $\varphi_{n+1}=0$ (обратный ход). Здесь β_i — квадратная матрица порядка ν, z_i и φ_i — вектор-столбцы размера ν. Изложенный метод наз. методом правой прогонки. Аналогично формулам (8)—(10) получаются формулы левой прогонки. Комбинируя левую и правую прогонки, получают метод встречных прогонок. При решении уравнений (7) с сильно меняющимися коэффициентами применяется потоковый метод прогонки. Для нахождения периодич. решения бесконечной последовательности уравнений вида (7) с периодич. коэффициентами используется циклическая прогонка (см. [4]).

См. также *Ортогональной прогонки метод*.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы, т. 2, М., 1977; [3] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [4] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

А. Ф. Шапкин.

ПРОГРАММ ОПТИМИЗИРУЮЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ — применяемые при трансляции направленные преобразования программы, представленной в нек-рой ее промежуточной форме, с целью улучшения рабочих характеристик программы, связанных с использованием ею ресурсов ЭВМ, главными из к-рых являются время выполнения и объем занимаемой памяти.

Обычно каждое применение П. о. п. изменяет локальную семантику фрагментов программы, но сохраняет семантику программы в целом — результирующая программа либо эквивалентна исходной, либо является ее доопределением на более широкое множество входов.

Различают машинно-зависимые П. о. п., к-рые определяются особенностями машинного языка или другими характеристиками конкретной ЭВМ, и универсальные П. о. п. (такие, напр., как удаление из программы операторов, недостижимых от начала), к-рые определяются только семантикой, вкладываемой в исходную запись алгоритма, и применимы для широкого класса ЭВМ.

Основные способы улучшения машинной программы при П. о. п. заключаются в удалении вычислений или объектов из процессов выполнения программы или в замене в них сложных вычислений на более простые (на основе априорных оценок сложности вычислений). Это требует учета управляющих, информационных и частотных отношений, возникающих в этих процессах между операторами и объектами программы. П. о. п. по существу включает в себя: нахождение необходимых ему отношений указанного типа по локальной семантике операторов программы — т. н. потоковый анализ программы; проверку нек-рых свойств собранной информации — т. н. контекстных условий; преобразование фрагмента программы в случае удовлетворения этих свойств — собственно трансформация данного П. о. п.

По величине той части программы (т. н. участка экономии), к-рая обрабатывается П. о. п. независимо от окружения, П. о. п. разделяются на локальные, участок экономии к-рых не более оператора; глобальные, участком экономии к-рых является вся программа; квазилокальные, где участок экономии — нек-рый фрагмент программы, имеющий фиксированную внутреннюю структуру,— напр., луч (линейная последовательность операторов), зона (нетривиальный сильно связный подграф управляющего графа программы), не содержащая других зон, или гамак (подграф, связанный с остальной частью управляющего графа в точности двумя вершинами — входной и выходной; входная вершина принадлежит гамаку, а выходная нет), не содержащий других гамаков и зон.

Для уменьшения временно́й и емкостной сложности глобального П. о. п. часто используется факторизация — замена глобального П. о. п. серией квазилокальных, применяемых к фрагментам программы в соответствии с их вложенностью.

Только для узких классов программ таких, как, напр., класс линейных программ, можно построить конечный полный набор П. о. п. Поэтому в конкретных трансляторах набор П. о. п. в значительной степени строится на эвристич. основе и существенно зависит от класса задач, для к-рых предназначен транслятор. Важным является выбор последовательности применений П. о. п., поскольку, как правило, используемые наборы П. о. п. не являются системами Чёрча — Россера, в к-рых результат не зависит от порядка применения преобразований.

Набор П. о. п. для трансляторов с наиболее распространенных *проблемно-ориентированных языков* (таких, напр., как *алгол*, *фортран*, *ПЛ/I*) является хорошо исследованным и позволяет получать машинные программы, сравнимые по качеству с программами, написанными вручную. Он содержит преобразования по удалению повторных вычислений с одинаковым результатом, частичному выполнению программы при трансляции, по чистке программы от бесполезных объектов и действий, замене сложных вычислений на более простые, уменьшению суммарного размера одновременно существующих объектов, сокращению размера программы.

Лит.: [1] Ахо А., Ульман Дж., Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции, пер. с англ., т. 2, М., 1978; [2] Бабецкий Г. И. и др., Альфа-система автоматизации программирования, Новосиб., 1967; [3] Касьянов В. Н., Поттосин И. В., Технология трансляции, Новосиб., 1979. *В. Н. Касьянов.*

ПРОГРАММА — план действий, подлежащих выполнению нек-рым исполнителем, обычно автоматическим устройством, чаще всего ЭВМ; предписание, *алгоритм*. П. представляется в виде конечной совокупности команд (инструкций), каждая из к-рых побуждает исполнителя выполнить нек-рую элементарную операцию над данными, хранящимися в памяти исполнителя и имена к-рых являются параметрами команды. Автоматизм исполнения достигается тем, что любая текущая команда, кроме завершающей, указывает однозначно на команду П., к-рая должна выполниться после текущей. Особенностью исполнения является наличие команд ветвления (условных переходов), в к-рых выбор одного из нескольких указанных продолжений делается на основании проверки свойств данных, упоминаемых в команде. Другой особенностью является возможность многократного выполнения отдельных команд. Эти особенности приводят к тому, что последовательность выполняемых команд и ее длина при исполнении П. могут варьировать, однозначно определяясь входными данными. Таким образом, П., являясь конечным объектом, побуждает исполнителя закономерно реагировать на потенциально бесконечное разнообразие входных данных. Тем самым П. так же, как и теоремы с их доказательствами, реализуют свойство всеобщности математич. закономерностей.

Математич. абстракции П. изучаются *программированием теоретическим*. П. важна не только как предписание для ЭВМ, но и как источник операционного знания для человека. Тем самым *алгоритмические языки*, созданные для записи П., несут также коммуникативную функцию, свойственную естественным языкам.

Составление П. для ЭВМ, или *программирование*, стало в связи с широким применением ЭВМ новой массовой формой математич. практики.

Лит.: [1] Ершов А. П., «Кибернетика», 1972, № 5, с. 95—99; [2] Турский В., Методология программирования, М., 1981. *А. П. Ершов.*

ПРОГРАММИРОВАНИЕ — 1) процесс составления *программы*, плана действий; 2) дисциплина, изучающая методы и приемы составления программ. С определенной долей условности П. как дисциплина делится на *программирование теоретическое*, изучающее математич. абстракции программ и способов их построения, системное программирование, имеющее дело с разработкой *математического обеспечения* ЭВМ, т. е. программных комплексов массового и длительного применения, и прикладное программирование, обслуживающее конкретные применения ЭВМ во всем их разнообразии.

Составление программы является творч. задачей, т. к. поиски способа достижения даже четко сформулированной цели в общем случае требуют выработки или привлечения нового знания. В нек-рых частных случаях возможно нахождение более систематической и формальной процедуры П. Так, если задание на П. уже сформулировано в виде алгоритма, то П. сводится к переводу с языка записи алгоритма, или *алгоритмического языка*, к языку, непосредственно воспринимаемому исполнителем. В нек-рых математич. моделях задача перевода решается исчерпывающе. Напр., если задача сформулирована в виде теоремы существования

$$\forall x \exists ! y P(x, y),$$

где $P(x, y)$ — нек-рая формула узкого исчисления предикатов, то из доказательства теоремы в конструктивной логике эффективно извлекается рекурсивное описание функции $\varphi(x)$, для к-рой $\forall x P(x, \varphi(x))$ (теорема Клини — Нельсона). Поиски систематич. процедур перевода записей алгоритма в программы и извлечения программы из условия задачи и дополнительной информации составляют предмет *автоматизации программирования* и ее частного случая — *трансляции* программ.

Методика П. уделяет особое внимание способам описания исходной спецификации задачи, подлежащей П., поскольку умелое использование заложенной в спецификации информации позволяет придать П. более достоверный характер. Важным аспектом П. является забота о четкой структуре программы, облегчающей проверку ее правильности, а главное — выделение и изоляцию тех фрагментов программы, дальнейшая детализация к-рых требует привлечения нового знания.

Нек-рое представление о способе перехода от спецификации задачи к программе дает следующий пример П. задачи возведения x в натуральную степень n.

Исходное знание: $x^1 = x$, $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$, $x^{nm} = (x^n)^m$. Обнаруживая, что эти соотношения позволяют свести решение задачи x^n к более простой (т. е. с меньшим n), пытаются придать исходному знанию простейшую форму (творч. шаг):

$$x^0 = 1, \; x^{n+1} = x^n \cdot x, \; x^{2n} = (x^n)^2.$$

Содержательный анализ показывает, что третье соотношение эффективнее, нежели второе, но зато применимо не всегда. Второе соотношение переписывается в виде случая, дополнительного к третьему (творч. шаг):

$$x^0 = 1, \; x^{2n+1} = x^{2n} \cdot x, \; x^{2n} = (x^n)^2.$$

Используя обратимость функций $2n$ и $n+1$ и логич. несовместимость соотношений, получают рекурсивное соотношение методом разбора случаев (формальный шаг):

$$x^n = \begin{cases} \text{если } n = 0, \text{ то } 1; \\ \text{если } n \text{ четное, то } (x^{n/2})^2; \\ \text{если } n \text{ нечетное, то } x \cdot x^{n-1}. \end{cases}$$

Остается переписать это правило на каком-либо алгоритмич. языке, напр. алгол-60 (формальный шаг):

```
real power (x, n); real x, integer n;
power:= if n=0 then 1 else
if even (n) then power (x,n/2)↑2 else x×power (x, n—1).
```

Определение процедуры проверки четности *even* (n) становится отдельной, более частной задачей П.

Важной составной частью П. является проверка правильности программы. Одним из способов обеспечения правильности является придание процессу П. формы, сходной с доказательством теоремы, т. е. когда каждый шаг построения программы сопровождается рассуждением, подтверждающим непротиворечивость этого шага исходному знанию о программе и дополнительному знанию, использованному в данном шаге. Возникающие при этом формальные дедуктивные системы также изучаются в *программировании теоретическом*. Дополнительным средством проверки правильности уже составленной программы является ее отладка, т. е. систематич. испытания программы на машине и сравнение эффекта, производимого программой, с ожидаемым. Хотя на практике отладка является преимущественным способом проверки программ, теоретически она не может быть исчерпывающей, т. к. установление правильности программы путем конечной системы испытаний может быть достигнуто только для очень узких классов задач (см. *Автоматов теория*).

Лит.: [1] Любимский Э. З., Мартынюк В. В., Трифонов Н. П., Программирование, М., 1980; [2] Дейкстра Э. В., Дисциплина программирования, пер. с англ., М., 1978; [3] Мейер Б., Бодуэн К., Методы программирования, пер. с франц., т. 1—2, М., 1982. *А. П. Ершов.*

ПРОГРАММИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ — см. *Математическое программирование.*

ПРОГРАММИРОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ — раздел программирования, связанный с изучением и разработкой методов и средств для: а) адекватного описания в программах естественного параллелизма моделируемых в ЭВМ и управляемых ЭВМ систем и процессов, б) распараллеливания обработки информации в многопроцессорных и мультипрограммных ЭВМ с целью ускорения вычислений и эффективного использования ресурсов ЭВМ.

В отличие от программирования последовательных вычислений, концептуальную основу к-рого составляет понятие алгоритма, реализуемого по шагам строго последовательно во времени, в П. п. программа порождает совокупность параллельно протекающих процессов обработки информации, полностью независимых или связанных между собой статическими или динамическими пространственно-временными или причинно-следственными отношениями.

Вычислительный параллелизм выступает в разных конкретных формах в зависимости от этапа программирования, от сложности параллельных фрагментов и характера связей между ними.

В текстах, описывающих задачи и программы, можно выделить уровни сложности фрагментов, для к-рых задача распараллеливания, т. е. составления параллельной программы, решается по-разному: выражения со скалярными данными; выражения над структурными данными (векторы, матрицы, деревья и т. п.), записываемые в алгоритмич. языках с помощью операторов цикла; подзадачи и подпрограммы; независимые задачи и программы в мультипроцессорных системах.

Предпосылкой для распараллеливания выражений служит тот факт, что входящие в них операции и функции удовлетворяют нек-рым соотношениям, индуцирующим на всем множестве выражений отношение эквивалентности по результатам (например, для арифметич. операций — ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность). Задача распараллеливания состоит в построении по заданному выражению E эквивалентного выражения E', к-рое может быть исполнено за наименьшее число параллельных шагов, где параллельный шаг — это совокупность действий, выполняемых одновременно на разных вычислителях (процессорах). Напр., выражение

$$a+b+(c\times d)/(e\times f)+g$$

преобразуется в эквивалентное выражение

$$((a+b)+g)+((c\times d)/(e\times f)),$$

исполнение к-рого осуществляется за 3 параллельных шага. Отношение числа параллельных шагов исполнения к числу последовательных шагов наз. ускорением распараллеливания. Любое арифметич. выражение с n операндами может быть вычислено параллельно за $O(\log n)$ шагов с использованием n процессоров. Относительная простота алгоритмов распараллеливания выражений позволяет реализовать их автоматически в ЭВМ с помощью специальных программ или аппаратными средствами.

Большее ускорение может быть получено за счет распараллеливания обработки структурных данных. В алгоритмич. языках типа алгол или фортран выражения над структурными данными программируются с помощью операторов цикла вида FOR $I=A$, B, C, DO S, где I — целочисленный параметр цикла, A — его начальное значение, B — конечное значение, C — шаг изменения параметра, S — тело цикла, задающее действия, выполнимые на одном шаге итерации. Для распараллеливания системы вложенных циклов рассматривается n-мерное целочисленное пространство итераций с координатными осями I_1, I_2, . . ., I_n. Выполнение K_1-й итерации по параметру I_1, K_2-й итерации по параметру I_2, . . ., K_n-й итерации по параметру I_n изображается точкой (K_1, . . ., K_n) этого пространства. В пространстве итераций ищется семейство поверхностей, удовлетворяющих условию: все итерации (K_1, . . ., K_n), лежащие на любой из этих поверхностей, могут выполняться параллельно. Для программного представления параллельной обработки структурных данных необходимы специальные языковые средства. С этой целью разработаны модификации существующих языков программирования (в основном — фортрана), в к-рые вводятся параллельные операторы циклов, напр., вида

$$\text{FOR ALL } (I,\ J,\ K)/[1{:}N;\ 1{:}L;\ 1{:}M],$$

при исполнении к-рых тело цикла копируется по определенным правилам на параллельно исполняемые итерации. Эти языки снабжаются также более развитыми средствами описания структурных данных и средствами управления размещением их в памяти для обеспечения быстрого параллельного доступа к структурным данным. Дальнейшее повышение уровня языков программирования состоит в использовании групповых операций над структурными данными таких, как покомпонентное умножение и сложение векторов и матриц, скалярное и векторное произведение, обращение матриц и т. п. Применение таких языков позволяет заменить автоматич. распараллеливание последовательных циклов, к-рое на практике осуществимо, но относительно сложно, на непосредственное задание параллельных групповых операций.

Параллельные выражения могут исполняться асинхронно или синхронно. В первом случае не фиксируется связь между временами выполнения параллельных операций, во втором случае времена их выполнения должны вкладываться в жесткие рамки тактированного расписания. Если операции имеют фиксированные длительности и известно число процессоров, доступных в любой момент исполнения, то целесообразно применять синхронный метод вычислений, в противном случае — более гибкий асинхронный. Управление асинхронным исполнением выражений основано на потоковом принципе: операция может выполняться в любой момент времени после того, как для нее подготовлены операнды.

Распараллеливание на уровне подзадач и подпрограмм существенно сложнее. В этом случае параллельные процессы могут иметь сложную внутреннюю структуру, длительность их выполнения не фиксирована; процессы взаимодействуют, обмениваясь данными и обращаясь к общим ресурсам (общие данные и программы в памяти, внешние устройства и т. п.). Автоматич. распараллеливание на этом уровне требует сложных алгоритмов анализа задач и учета динамич. ситуаций в системе. В связи с этим особое значение имеет создание языков П. п., позволяющих программисту непосредственно описывать сложные взаимодействия параллельных процессов.

В большинстве языков и систем П. п. принята частично асинхронная организация вычислений. В языках П. п. имеются средства выделения (порождения) параллельных процессов и средства их синхронизации, к-рые в аппаратуре поддерживаются механизмами прерываний — принудительных остановок процессов с запоминанием их текущих состояний и с последующей активацией или возобновлением др. процессов.

Наиболее известными и простыми программными механизмами синхронизации являются семафоры и события. Семафор — это специальная управляющая переменная, принимающая целочисленные значения. Семафор обычно связан с нек-рым конфликтным ресурсом. К семафору применимы только две операции P и V. Если в ходе исполнения процесса встретится операция $P(s)$, где s — семафор, то процесс может продолжаться с уменьшением значения s на 1 только в том случае, когда значение s положительно; в противном случае он приостанавливается и занимает место в очереди $q(s)$ процессов, ждущих соответствующего ресурса. Операция V увеличивает значение s на 1 и возобновляет первый в очереди $q(s)$ процесс. Механизм семафоров широко используется в языках управления процессами в операционных системах ЭВМ и в ряде универсальных языков программирования (напр., *алгол-68*). Механизм событий включает управляющие переменные, текущие значения к-рых отмечают наступление каких-либо программных или системных событий (завершение процессов, прерывания и т. п.), и специальные операторы ожидания событий.

Семафоры и события являются универсальными средствами синхронизации, но они слишком примитивны, и неправильное их использование может привести к аварийным ситуациям таким, как взаимная блокировка процессов (напр., два процесса требуют для своего продолжения по два ресурса и каждый «захватил» по одному). Стремление повысить надежность программирования приводит к появлению более сложных механизмов синхронизации: «почтовые ящики» — особые структуры для обмена сообщениями, для к-рых фиксированы правила работы с ними параллельных процессов; мониторы — наборы процедур и данных, к к-рым процессы могут обращаться только поочередно и к-рые содержат заданные программистом правила организации взаимодействий.

Чисто асинхронное П. п. используется для организации вычислений в распределенных вычислительных системах, в к-рых полностью исключены конфликты по ресурсам. Стремление упростить организацию взаимодействий между процессами с общими ресурсами привлекает внимание к асинхронным методам вычислений, в к-рых разрешен нерегламентированный доступ параллельных процессов к общим ресурсам. Напр., разрабатываются асинхронные алгоритмы, в к-рых параллельные процессы обмениваются данными с общей памятью, причем неупорядоченный доступ к памяти не мешает достижению однозначного результата.

В теории П. п. разрабатываются формальные модели параллельных программ, процессов и систем и с их помощью исследуются различные аспекты П. п.: автоматич. распараллеливание последовательных алгоритмов и программ; разработка параллельных методов вычислений для разных классов задач и разных классов параллельных вычислительных систем; оптимальное планирование параллельных вычислений и распределение ресурсов между параллельными процессами; формальное описание семантики программ и языков П. п. Среди таких моделей — схемы параллельных программ, отражающие с разной степенью детализации структурные свойства программ; графовые модели и асинхронные сети (*Петри сети*), являющиеся математич. абстракциями дискретных процессов и систем.

Лит.: [1] Котов В. Е., «Кибернетика», 1974, № 1, с. 1—16; №2, с. 1—18; [2] Нариньяни А. С., там же, № 3, с. 1—15; № 5, с. 1—14; [3] Фаддеева В. Н., Фаддеев Д. К., там же, 1977, № 6, с. 28—40; [4] Kuck D. J., «Comp. Surveys», 1977, v. 9, № 1, p. 29—59. *В. Е. Котов.*

ПРОГРАММИРОВАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ — математическая дисциплина, изучающая математич.

абстракции программ, трактуемых как объекты, выраженные на формальном языке, обладающие определенной информационной и логич. структурой и подлежащие исполнению на автоматич. устройствах. П. т. сформировалось преимущественно на основе двух моделей вычислений: последовательных программ с памятью, или операторных программ, и рекурсивных программ. Обе модели строятся над нек-рой абстрактной алгебраич. системой $\langle D, \Phi, \Pi \rangle$, образованной предметной областью D, конечным набором (сигнатурой) функциональных $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ и предикатных $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ символов с заданным для каждого символа числом его аргументов (арностью).

Определение класса программ слагается из трех частей: схемы программы (синтаксиса), интерпретации и семантики. Схема программы — это конструктивный объект, показывающий, как строится программа с использованием сигнатуры и других формальных символов. Интерпретация — это задание конкретной предметной области и сопоставление символам сигнатуры конкретных функций и предикатов (базовых операций), согласованных с предметной областью и арностью символов. Семантика — это способ сопоставления каждой программе результата ее выполнения. Как правило, с программами связывают вычисляемые ими функции. Интерпретация обычно входит в семантику как параметр, поэтому схема программы задает множество программ и вычисляемых ими функций, к-рое получается при варьировании интерпретаций над нек-рым запасом базовых операций.

Схема программы с памятью, называемая также алголоподобной, или операторной, схемой, задается в виде конечного ориентированного графа переходов, имеющего обычно одну входную и одну выходную вершины, вершины с одной (преобразователи) и двумя (распознаватели) исходящими дугами. С помощью символов сигнатуры и счетного множества символов переменных и констант обычным образом строится множество функциональных и предикатных термов. Каждому распознавателю сопоставляется нек-рый предикатный терм, а преобразователю — оператор присваивания, имеющий вид $y := \tau$, где y — символ переменной, а τ — функциональный терм. Конечная совокупность всех переменных в схеме образует ее память. Интерпретация в дополнение к конкретизации базовых операций предписывает каждой переменной область ее изменения, а каждой константе — ее значение. Для программ с памятью наиболее обычна т. н. операционная семантика, состоящая из алгоритма выполнения программы на заданном состоянии памяти. Программа выполняется при движении по графу переходов. При попадании на распознаватель вычисляется предикатный терм и происходит переход по дуге, соответствующей значению предиката. При попадании на преобразователь с оператором $y := \tau$ вычисляется значение τ и присваивается переменной y. Результат выполнения программы — состояние памяти при попадании на выходную вершину.

Схема рекурсивной программы, или рекурсивная схема, использует кроме функциональных т. н. условные термы, образующие вместе с первыми множество вычислительных термов. Условный терм задает вычисление методом разбора случаев и имеет вид $(\pi|\tau_1|\tau_2)$, где π — предикатный, а τ_1 и τ_2 — вычислительные термы, и соответствует конструкции условного выражения в *алголе*:

$$\text{if } \pi \text{ then } \tau_1 \text{ else } \tau_2.$$

Термы строятся над счетным множеством входных и формальных переменных, констант и символов определяемых функций. Рекурсивная схема состоит из главного вычислительного терма с входными переменными и конечного набора рекурсивных уравнений вида $f(x_1, \ldots, x_n)=\tau$, где f — символ определяемой функции, $x_1, \ldots, x_n$ — формальные переменные, а τ — терм с переменными из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и с определяемыми функциями из набора уравнений. При естественных предположениях на интерпретацию базовых операций система уравнений относительно определяемых функций всегда имеет т. н. наименьшую неподвижную точку (н. н. т.) — совокупность функций, удовлетворяющих уравнениям, с графиками, принадлежащими графикам любых других решений уравнений. Подставляя в главный терм вместо символов определяемых функций соответствующие компоненты н. н. т., получают функциональный терм, задающий нек-рую функцию входных переменных, к-рая и объявляется функцией, вычисляемой рекурсивной программой. Поскольку такой способ сопоставления программе вычисляемой ею функции не дает конкретного алгоритма вычисления, определенная так семантика наз. денотационной.

Указанные формализмы как бы отмечают диапазон уровней изобразительных средств языков программирования: если операторные схемы близки к структуре машинной программы, то рекурсивные схемы ближе к исходной формулировке задач, подлежащих программированию.

Исследования по П. т. несут на себе отпечаток общематематич. средств, используемых при изучении моделей программ. Формально-комбинаторные методы формируют теорию схем программ, к-рая изучает свойства программ, инвариантные относительно выбора интерпретации базовых операций. Логич. методы изучают способы определения семантики программы, а также ищут закономерности в процессе построения программы. Алгебраич. методы, отвлекаясь от конкретной структуры программы, концентрируют свое внимание на изучении множеств, возникающих при рассмотрении программы или класса программ.

Сложившиеся разделы П. т. охватывают в основном модели последовательных вычислений, выполняемых одним активным устройством. Изучение проблем, возникающих при необходимости организовать совместную работу ансамбля машин, объединяемых для решения одной задачи или взаимодействующих посредством передачи сигналов и информации, составляет предмет новой дисциплины — т. н. *программирования параллельного*.

Теория схем программ. Отправным понятием теории схем программ является понятие функциональной эквивалентности. Две схемы функционально эквивалентны, если для любой интерпретации соответствующие программы вычисляют одинаковые функции. Каждому выполнению программы можно сопоставить его протокол — особого рода терм в сигнатуре базовых операций, отражающий порядок их выполнения. Если известны значения истинности предикатов, входящих в программу, то протокол по этим значениям строится однозначно, при этом для построения не нужно знать интерпретации базовых операций. Если выбирать значения истинности предикатов произвольно, то в результате для схемы программы создается нек-рое множество формальных протоколов, называемое ее детерминантом. Две схемы формально эквивалентны, если их детерминанты совпадают. Формальная эквивалентность корректна, если из нее следует функциональная эквивалентность. Поскольку детерминант строится чисто комбинаторно на основе произвольного выбора из конечного множества, он образует формальный язык, воспринимаемый нек-рым автоматом. Представляют особый интерес такие определения протокола схем программ, к-рые приводят к разрешимым детерминантам. Для таких детерминантов можно ставить вопрос о поиске системы преобразований схем программ, полной в том смысле, что любые две формально эквивалентные схемы переводимы одна в другую этими преобразованиями.

Структура теории схем программ сложилась на базе основополагающих работ А. А. Ляпунова и Ю. И. Янова (см. [5], [10]). Последний полностью изучил простейшую модель операторных схем с сигнатурой одноместных операций и допускающих в программе только одну переменную (с х е м ы Я н о в а). Протоколом схемы Янова является последовательность выполняемых операций, перемежаемых значениями предикатов. Автомат, воспринимающий детерминант, оказывается конечным автоматом, а формальная эквивалентность разрешима, при этом она совпадает с функциональной. Для схем Янова найдена полная система преобразований.

Для общей модели операторных схем функциональная эквивалентность оказалась неразрешимой, однако удалось найти форму протокола — т. н. л о г и к о-т е р м а л ь н у ю и с т о р и ю, к-рая приводит к разрешимому детерминанту. Этот протокол фиксирует последовательность выполнения и значения предикатов схемы, а для каждого аргумента предиката указывает функциональный терм, к-рый вычислял значение данного аргумента при выполнении программы. Автоматом, воспринимающим детерминант, оказывается двухленточный конечный автомат. Для логико-термальной формальной эквивалентности также найдена полная система преобразований.

Существенное место в теории схем программ занимают вопросы перевода схем программ из одной вычислительной модели в другую. Операторные схемы эффективно переводятся в рекурсивные схемы в той же сигнатуре, однако обратная трансляция невозможна, т. к. выполнение рекурсивной программы требует, вообще говоря, сколь угодно большого числа ячеек памяти. Детерминант рекурсивной схемы может быть задан в виде контекстно-свободного языка (см. *Грамматика бесконтекстная*), однако вопрос о разрешимости соответствующей формальной эквивалентности остается пока (1983) открытым.

Теория схем программ занимается также изучением отдельных классов схем программ с целью выделить случаи разрешимых эквивалентностей, она также обогащает базовую вычислительную модель дополнительными конструкциями языков программирования, изучая при этом выразительную силу обогащений и вопросы сводимости.

Логическая теория программ. Говорят, что программа A ч а с т и ч н о п р а в и л ь н а относительно входного условия P и выходного условия Q (обозначение $P\ \{A\}\ Q$), если в случае, когда P истинно для входных значений переменных и A завершает работу, Q истинно для выходных значений переменных. При этом P наз. п р е д у с л о в и е м, а Q — п о с т у с л о в и е м п р о г р а м м ы A. Программа A т о т а л ь н о п р а в и л ь н а (обозначение $P \langle A \rangle Q$), если A частично правильна относительно P и Q, а также A завершает работу для входных значений переменных, удовлетворяющих условию P. Для доказательства частичной правильности последовательных программ часто используется м е т о д Ф л о й д а, к-рый состоит в следующем. На схеме программы выбираются контрольные точки так, чтобы любой циклич. путь проходил по крайней мере через одну точку. Контрольные точки также связываются с входом и выходом схемы. С каждой контрольной точкой ассоциируется специальное условие (т. н. и н д у к т и в н о е у т в е р ж д е н и е, или инвариант цикла), к-рое истинно при каждом переходе через эту точку. С входной и выходной точками ассоциируются входное и выходное условия. Затем каждому пути программы между двумя соседними контрольными точками сопоставляется т. н. условие правильности. Выполнимость всех условий правильности гарантирует частичную правильность программы. Один из способов доказательства завершения работы программы состоит во введении в программу дополнительных счетчиков и установлении ограниченности этих счетчиков на выходе программы в процессе доказательства частичной правильности.

Было предложено задавать аксиоматич. семантику языков программирования посредством конечной аксиоматич. системы (т. н. логики Хоара), состоящей из аксиом и правил вывода, в к-рой в качестве теорем выводимы утверждения о частичной правильности программ. Напр., для оператора присваивания схема аксиом имеет вид

$$P\,(x \leftarrow e)\,\{x := e\}\,P,$$

где $P\,(x \leftarrow e)$ означает результат подстановки в P выражения e вместо всех вхождений переменной x, а для оператора цикла типа while правило вывода имеет вид

$$(P \wedge R)\,\{A\}\,P \vdash P\,\{\text{while}\ R\ \text{do}\ A\}\,(P \wedge \neg R)$$

(то есть P является инвариантом цикла).

Пусть рассматривается логика Хоара, у к-рой в качестве языка для записи условий взят язык арифметики 1-го порядка. Утверждение о частичной правильности программы наз. выводимым, если оно выводимо в расширении этой логики посредством добавления истинных формул арифметики, и наз. истинным, если оно истинно по отношению к операционной (или денотационной) семантике программы. Логика Хоара наз. состоятельной, если каждое выводимое в ней утверждение истинно, и наз. полной (относительно арифметики), если каждое истинное утверждение выводимо в ней. Состоятельная и полная логика Хоара построена, в частности, для языка программирования, содержащего простые переменные и операторы присваивания, составной, условный, цикла и процедуры (возможно, рекурсивные, но с рядом ограничений).

Важным обобщением логики Хоара является т. н. алгоритмическая (или динамическая) логика. Пусть $P\{A\}Q$ представлено в виде $P \supset [A]Q$, где $[A]Q$ есть самое слабое предусловие, для к-рого справедливо утверждение о частичной правильности программы A с постусловием Q. Аналогично для случая тотальной правильности пусть $P<A>Q$ представлено в виде $P \supset <A>Q$. Формулы алгоритмич. логики строятся из формул базового логич. языка (для записи условий) и программ с помощью булевых операций, кванторов, а также операций вида $[A]Q$, $<A>Q$. В алгоритмич. логике выразимы различные утверждения о программах, напр. их эквивалентность. Аналогично логике Хоара для алгоритмич. логики построена состоятельная и полная конечная аксиоматич. система в случае языка программирования, допускающего и недетерминированные программы.

Для доказательства утверждений о рекурсивных программах часто используется специальная индукция, связанная с определением н. н. т. Пусть для простоты рекурсивная программа задается одним уравнением $f = \tau(f)$, а ее денотационная семантика — н. н. т. $f_н$. При естественных предположениях об условии P справедлив следующий принцип индукции: если формула $P(\Omega)$ истинна и из $P(\tau^i(\Omega))$ следует $P(\tau^{i+1}(\Omega))$, то выполняется $P(f_н)$ (здесь Ω — нигде не определенная функция). Для описания денотационной семантики языков программирования высокого уровня используется задание области данных в виде т. н. полных решеток Скотта.

Задачу синтеза программы можно формализовать как задачу построения доказательства теоремы $\forall x \exists y \Pi(x, y)$ и последующего извлечения программы из этого доказательства. Построен алгоритм, к-рый по доказательству в интуиционистской логике дает программу на языке алгол-68. Если доказательство использует правило индукции, то ему соответствует в программе цикл вида for to . . . do . . . od. Извлекаемая программа будет приемлемой сложности, если использовать предположение, что она строится из стандартных (т. е. заданных) функций и предикатов, свойства к-рых описаны аксиомами специального вида.

Алгебраическая теория программ. Примером применения алгебраич. методов в П. т. может служить проблема эквивалентности дискретных преобразователей Глушкова, в к-рые естественно вкладываются операторные схемы программ. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечный автомат Мили с входным алфавитом X и выходным алфавитом Y и с заданными начальным и заключительным состояниями. Пусть G — полугруппа с множеством образующих Y и единицей e. Пусть рассматривается автомат Мура G_μ (возможно, бесконечный) с множествами состояний G, входов Y, выходов X, начальным состоянием e, функцией выходов $\mu(g)$ и функцией переходов $q(g, y)=gy$. Автомат $\mathfrak{A}$, работающий совместно с G_μ, наз. дискретным преобразователем, если $\mathfrak{A}$ воспринимает в качестве входа выход G_μ, а G_μ воспринимает в качестве входа выход $\mathfrak{A}$. Выходом $\mathfrak{A}$ считается при этом состояние G_μ в момент остановки $\mathfrak{A}$. Дискретные преобразователи эквивалентны относительно полугруппы G, если для каждого отображения μ из G в X они оба не останавливаются при работе с G_μ либо оба останавливаются с одинаковым выходом. Установлена разрешимость проблемы эквивалентности дискретных преобразователей относительно полугруппы с левым сокращением, неразложимой единицей, в к-рой разрешима проблема тождества слов. Описаны также все разрешимые и неразрешимые случаи эквивалентности дискретных преобразователей относительно коммутативной полугруппы.

П. т. оказывает свое влияние на практику прежде всего как концептуальный багаж при изучении программирования и — более технич. путем — через теорию формальных языков программирования. Здесь свойства абстрактных моделей вычислений используются для уточнения семантики языков программирования и для обоснования различных манипуляций с программами (см. *Трансляция* программ, *Программ оптимизирующие преобразования*).

Лит.: [1] Глушков В. М., Летичевский А. А., в кн.: Избранные вопросы алгебры и логики, Новосиб., 1973, с. 5—39; [2] Ершов А. П., Введение в теоретическое программирование, М., 1977; [3] Котов В. Е., Введение в теорию схем программ, Новосиб., 1978; [4] Лавров С. С., «Программирование», 1978, № 6, с. 3—10; [5] Ляпунов А. А., «Проблемы кибернетики», 1958, в. 1, с. 46—74; [6] Непейвода Н. Н., «Программирование», 1979, № 1, с. 15—25; [7] Плюшкявичюс Р. А. [и др.], «Кибернетика», 1979, № 2, с. 12—19; [8] Семантика языков программирования. Сб. статей, пер. с англ., М., 1980; [9] Скотт Д., «Кибернетический сборник», 1977, в. 14, с. 107—21; [10] Янов Ю. И., «Проблемы кибернетики», 1958, в. 1, с. 75—127; [11] Manna Z., Mathematical theory of computation, N.Y., — [a.o.], 1974.

А. П. Ершов, В. А. Непомнящий.

ПРОГРАММИРОВАНИЯ ЯЗЫК — формальная знаковая система, служащая общению человека с ЭВМ. Решая вычислительные задачи или управляя исполнительными механизмами, ЭВМ с ее программным обеспечением демонстрирует сложные формы поведения, обычно относимые к умственной деятельности человека. Именно это сходство функций, отражающее общность кибернетич. законов обработки информации в живых организмах и автоматич. устройствах, позволяет говорить о языке ЭВМ, о понимании машиной передаваемой ей информации, об общении человека и ЭВМ.

Основное назначение П. я.— быть средством *программирования*, т. е. формулирования программ, подлежащих выполнению на ЭВМ. Осмысленная программа для ЭВМ представляет собой своеобразную операционную и информационную модель нек-рой закономерности внешнего мира, причем программа фиксирует эту закономерность в точной и воспроизводимой форме. Эта документальная сторона программирования делает П. я. также важным средством профессионального общения людей.

Наиболее распространенным видом П. я. являются *алгоритмические языки*, формулирующие алгоритм решения задачи на ЭВМ. Обычно П. я. носит универсальный характер, допуская формулирование алгоритмов решения разнообразных задач, подлежащих решению на разных ЭВМ. В то же время для более удобного представления задач из нек-рого четко выделяемого класса создают *проблемно-ориентированные языки*, а для более полного использования возможностей конкретной ЭВМ создают *машинно-ориентированные языки*. Наиболее распространенные П. я. в 1970-е гг.— *алгол*, *фортран*, *кобол*, *ПЛ / I*, *алгол-68*. К более специальным языкам относятся *лисп*, *симула*, *снобол*. В СССР получили распространение также языки *альфа* и *рефал*.

Лит.: [1] Криницкий Н. А., Миронов Г. А., Фролов Т. Д., Программирование и алгоритмические языки, 2 изд., М., 1979; [2] Пратт Т., Языки программирования: разработка и реализация, пер. с англ., М., 1979.

А. П. Ершов.

ПРОГРАММЫ СХЕМА — формальный конструктивный объект, получающийся из *программы* абстрагированием от лексич. особенностей использованного при ее записи формального языка программирования и от смысла элементарных действий и объектов, употребляемых в программе. П. с. изучаются в *программировании теоретическом*. *А. П. Ершов.*

ПРОГРЕССИЯ — см. *Арифметическая прогрессия*, *Геометрическая прогрессия*.

ПРО-p-ГРУППА — проконечная группа, являющаяся проективным пределом конечных p-групп. Напр., аддитивная группа кольца $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел является П.-p-г. В теории Галуа П.-p-г. появляются как группы Галуа p-расширений полей.

Пусть G есть П.-p-г. Ее системой образующих наз. подмножество $E \subset G$, обладающее свойствами: 1) G совпадает с минимальной замкнутой подгруппой группы G, содержащей E, 2) в любой окрестности единицы группы G содержатся почти все (т. е. все, кроме конечного числа) элементы из E.

Пусть I — множество индексов и F_I — абстрактная свободная группа с системой образующих $\{a_i | i \in I\}$. Проективный предел $F(I)$ системы групп F_I/N, где N — такие нормальные делители группы F_I, что индекс подгруппы N в F_I является степенью числа p, а почти все элементы a_i, $i \in I$, лежат в N, является П.-p-г., к-рая наз. свободной П.-p-г. с системой образующих $\{a_i | i \in I\}$. Всякая замкнутая подгруппа свободной П.-p-г. сама является свободной П.-p-г. Всякая П.-p-г. G есть факторгруппа свободной П.-p-г., то есть существует точная последовательность гомоморфизмов П.-p-г.

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \longrightarrow 1,$$

где F — подходящая свободная П.-p-г. (эта последовательность наз. представлением группы G с помощью F). Подмножество $E \subset R$ наз. системой соотношений группы G, если R является наименьшим замкнутым нормальным делителем в R, содержащим E, и любой открытый нормальный делитель в R содержит почти все элементы из E. Мощности минимального (относительно включения) множества образующих и минимальной системы соотношений соответствующего представления П.-p-г. G допускают когомологич. интерпретацию: первая мощность совпадает с размерностью над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ пространства $H^1(G)=H^1(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, а вторая — с размерностью над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ пространства $H^2(G)=H^2(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Здесь $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ рассматривается как дискретный G-модуль с тривиальным действием. Если G — конечная p-группа, то

$$4 \dim H^2(G) \geqslant (\dim H^1(G)-1)^2;$$

из этого результата выводится отрицательное решение классич. проблемы *башни полей* классов [4].

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [2] Кох Х., Теория Галуа p-расширений, пер. с нем., М., 1973; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [4] Голод Е. С., Шафаревич И. Р., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 261—72.

В. Л. Попов.

ПРОДОЛЖАЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ — свойство решений обыкновенных дифференциальных уравнений быть продолженными на больший интервал независимого переменного. Пусть

$$x=\varphi(t), \quad t \in I, \tag{1}$$

— решение системы

$$\dot{x}=f(t, x), \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Решение $x=\psi(t)$, $t \in J$, системы (2) наз. продолжением решения (1), если $J \supset I$ и $\psi(t) \equiv \varphi(t)$, $t \in I$.

Пусть функция

$$f(t, x)=(f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n))$$

определена в области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{t, x}$ и $t_0 \in I$. Решение (1) наз. неограниченно продолжаемым (неограниченно продолжаемым вперед (вправо), неограниченно продолжаемым назад (влево)), если существует его продолжение, определенное на оси $-\infty<t<\infty$ (соответственно на полуоси $t_0 \leqslant t<\infty$, на полуоси $-\infty<t \leqslant t_0$). Решение (1) наз. продолжаемым вперед (вправо) до границы Γ области G, если существует его продолжение $x=\psi(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_+ < \infty$, обладающее свойством: для любого компакта $F \subset G$ найдется значение $t=t_F$, $t_0<t_F<t_+$, такое, что точка $(t_F, \psi(t_F))$ не содержится в F. Аналогично определяется продолжаемость назад (влево) до границы Γ. Решение, к-рое нельзя продолжить, наз. непродолжаемым.

Если функция $f(t, x)$ непрерывна в области G, то всякое решение (1) системы (2) может быть продолжено вперед (назад) либо неограниченно, либо до границы Γ. Другими словами, всякое решение системы (2) может быть продолжено до непродолжаемого решения. Если частные производные

$$\partial f_i / \partial x_j, \quad i, j=1, \ldots, n, \tag{3}$$

непрерывны в области G, то такое продолжение единственно.

Интервал J наз. максимальным интервалом существования решения системы (2), если его нельзя продолжить на больший интервал. Для любого решения линейной системы

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j+f_i(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

с непрерывными на интервале J коэффициентами $a_{ij}(t)$ и правыми частями $f_i(t)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, максимальный интервал существования решения совпадает с J. Для решений нелинейных систем максимальный интервал существования может быть разным для разных решений, и его отыскание — трудная задача. Напр., для решения задачи Коши

$$\dot{x}=x^2, \quad x(t_0)=x_0$$

имеет место

$$J=(t_0+x_0^{-1}, \ \infty)$$

при $x_0<0$,

$$J=(-\infty, \ t_0+x_0^{-1})$$

при $x_0>0$,

$$J=(-\infty, \ \infty)$$

при $x_0=0$.

Достаточные условия, при к-рых можно указать максимальный интервал существования решения, дает, напр., теорема Уинтнера: пусть функция $f(t, x)$ непрерывна при $t \in J=[t_0, t_0+a]$, $x \in \mathbb{R}^n$ и в этой области выполняется оценка

$$|f(t, x)| \leqslant L(|x|),$$

где $L(r)$ — непрерывная при $r \geqslant 0$ функция, $L(r)>0$ и

$$\int^{+\infty} dr/L(r)=+\infty;$$

тогда максимальный интервал существования любого решения системы (2) совпадает с J.

Эта теорема справедлива и в том случае, когда $J=[t_0, \infty)$. Большой интерес представляют достаточные условия неограниченной продолжаемости решений. Напр., если функция $f(t, x)$ и ее частные производные (3) непрерывны при $t_0 \leqslant t<\infty$, $x \in \mathbb{R}^n$ и при этих значениях t, x выполняются оценки

$$|\partial f_i/\partial x_j| \leqslant c(t) < \infty, \ i, \ j=1, \ \ldots, \ n,$$

то решение системы (2) такое, что $x(t_0)=x_0$, существует при $t_0 \leqslant t<\infty$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Пусть рассматривается задача Коши

$$\dot{x}=f(x), \quad x(t_0)=x_0 \tag{4}$$

для *автономной системы*, причем функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема в области $G \subseteq \mathbb{R}_x^n$. Если при возрастании t фазовая траектория решения $x=\varphi(t)$ задачи (4) остается в компактном подмножестве $F \subset G$, то это решение можно продолжить на полуось $t_0 \leqslant t<\infty$.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970; [2] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971; [3] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [4] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [5] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [6] Чезари Л., Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1964; [7] Wintner A., «Amer. J. Math.», 1945, v. 67, p. 277—84.

М. В. Федорюк.

ПРОДОЛЖЕНИЙ И ОХВАТОВ МЕТОД — метод исследования различных дифференциально-геометрич. структур на гладких многообразиях и их подмногообразиях. В основе П. и о. м. лежат дифференциально-алгебраич. критерии операций, позволяющих в инвариантной (безкоординатной) форме присоединять к данной структуре внутренне связанные с ней структуры, в том числе и их дифференциальные инварианты. Исторически П. и о. м. возник вслед за методом подвижного репера как инвариантный метод исследования подмногообразий однородных пространств или пространств со связностью. Впоследствии П. и о. м. был распространен на геометрию произвольных расслоенных пространств. В отличие от главной цели метода подвижного репера — построения канонич. поля реперов и дифференциальных инвариантов изучаемой структуры путем последовательного сужения соответствующих главных расслоенных пространств, П. и о. м.

ставит целью построение инвариантов и инвариантно присоединяемых структур без сужения главных расслоений реперов. В необходимых случаях П. и о. м. включает и процесс канонизации репера.

Пусть G — группа Ли и $K(G)$ — класс всех G-пространств с левосторонним действием группы Ли G на них как группы преобразований. G-о х в а т о м наз. такое гладкое сюръективное отображение

$$f: X \longrightarrow Y; \quad X,\ Y \in K(G),$$

что для любого $g \in G$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ l_g \downarrow & & \downarrow l_g^1 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array},$$

где l_g и l_g^1 — преобразования G-пространств X и Y соответственно, определяемые элементом g. В этом случае говорят, что пространство Y с помощью f о х в а ч е н о п р о с т р а н с т в о м X или п р о с т р а н с т в о X является п р о д о л ж е н и е м п р о с т р а н с т в а Y. Класс $K(G)$ становится категорией с морфизмами — G-охватами.

Примеры G-охватов.

1) Пусть $T(p, q) \in K(\mathrm{GL}(n, R))$ — пространство тензоров типа (p, q), $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$. Охватом является отображение свертки

$$T(p,\ q) \longrightarrow T(p-1,\ q-1).$$

Полная свертка тензоров пространства $T(p, p)$

$$T(p,\ p): T(p,\ p) \longrightarrow R$$

является примером охвата инварианта.

2) Если $X,\ Y \in K(G)$, то $X \times Y$ с помощью pr_X и pr_Y охватывает X и Y соответственно. Иными словами, $X \times Y$ является продолжением как X, так и Y.

Понятие охвата естественным образом распространяется на классы расслоенных пространств, присоединенных к главным расслоениям. Пусть $\pi: P(M, H) \to M$ — главное расслоенное пространство со структурной группой H, действующей на P правым образом, и $F \in K(H)$ — любое левое H-пространство. Объектами класса $K(P)$ присоединенных к P расслоенных пространств являются пространства типа

$$F(P) = P \times F / H,$$

где факторизация подразумевается по следующему правому действию группы H на $P \times F$:

$$(\xi,\ Y)\, h = (\xi h,\ h^{-1} Y); \ (\xi,\ Y) \in P \times F, \quad h \in H.$$

Пространство $F(P) \in K(P)$ является расслоенным над базой M пространством с типовым слоем F. Элемент $y \in F(P)$, определяемый парой $(\xi, Y) \in P \times F$, записывают в виде $y = \xi Y$. Если $F,\ \Phi \in K(H)$ и $f: F \to \Phi$ — отображение H-охвата, то в силу конструкций $F(P)$ и $\Phi(P)$ f индуцирует послойное сюръективное отображение $\tilde{f}: F(P) \to \Phi(P)$, называемое P-о х в а т о м. P-охват $\tilde{f}$ определяется по закону:

$$\tilde{f}(\xi Y) = \xi f(Y), \quad \xi \in P, \quad Y \in F.$$

Таким образом, класс $K(P)$ присоединенных к P расслоенных пространств является категорией с морфизмами типа P-охватов $\tilde{f}$. Соответствие $F \mapsto F(P)$, $f \mapsto \tilde{f}$ является биективным функтором категории $K(H)$ на категорию $K(P)$. Следовательно, достаточно изучать операции охвата в категориях H-пространства.

Если $s: M \to F(P)$ — сечение расслоенного пространства $F(P)$ (п о л е г е о м е т р и ч е с к о г о о б ъ е к т а типа F), то P-охват $\tilde{f}: F(P) \to \Phi(P)$ присоединяет к сечению s сечение $\tilde{s} = \tilde{f} \bigcirc s$ охваченного расслоения $\Phi(P)$; иными словами, поле геометрич. объекта $s(x)$, $x \in M$, охватывает поле геометрич. объекта $\tilde{f} \bigcirc s(x)$. Если $s(x)$ — структурный объект нек-рой G-структуры, то изучение G-структуры и ее инвариантов сводится во многом к отысканию охватываемых геометрич. объектов. В процессе отыскания охватываемых геометрич. объектов важную роль играют дифференциальные критерии охватов, формулируемые в терминах структурных дифференциальных форм расслоенных пространств и составляющие основу П. и о. м.

Лит.: [1] Лаптев Г. Ф., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 275—382; [2] его же, в кн.: Тр. Третьего Всесоюзного матем. съезда. Москва, 1956, т. 3, М., 1958, с. 409—18.

Л. Е. Евтушик.

ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ МЕТОД — включение данной задачи в однопараметрическое ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$) семейство задач, связывающее данную задачу ($\alpha = 1$) с известной разрешимой задачей ($\alpha = 0$), и изучение зависимости решений от параметра α. Метод широко используется в теории дифференциальных уравнений.

Пусть, напр., требуется доказать разрешимость в классе Гёльдера задачи Дирихле

$$\left.\begin{array}{r} Lu = f, \\ u\,|_{\partial D} = \varphi \end{array}\right\} \qquad (1)$$

в ограниченной N-мерной области $D \in A^{(n,\ \mu)}$ для линейного эллиптич. оператора 2-го порядка

$$Lu = \sum\nolimits_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum\nolimits_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\, u,$$

$$c(x) \leqslant 0,\ \ a_{ij},\ \ b_i,\ \ c \in C^{(n-2,\ \mu)}(\overline{D}),\ \ \overline{D} = D + \partial D,$$

$$n \geqslant 2,\ \ \mu > 0.$$

Вводится семейство эллиптич. операторов

$$L_\alpha u = \alpha L u + (1-\alpha)\,\Delta u,\ \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

и рассматривается для него задача Дирихле

$$\left.\begin{array}{r} L_\alpha u = f \text{ в } D, \\ u\,|_{\partial D} = \varphi. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество тех $\alpha \in [0, 1]$, для к-рых задача (2) однозначно разрешима в классе $C^{(n,\ \mu)}(\overline{D})$ при любых f и φ, $f \in C^{(n-2,\ \mu)}(\overline{D})$, $\varphi \in C^{(n,\ \mu)}(\partial D)$. Множество $\mathfrak{A}$ не пусто, поскольку при $\alpha = 0$ (т. е. для оператора Лапласа) задача (2) однозначно разрешима в классе $C^{(n,\ \mu)}(\overline{D})$, как это следует из теории потенциала. Множество $\mathfrak{A}$ одновременно открыто и замкнуто на $[0, 1]$ и, следовательно, совпадает с $[0, 1]$. Таким образом, $\alpha = 1$ принадлежит $\mathfrak{A}$ и задача (1) разрешима.

П. по п. м. (в варианте аналитич. продолжения по параметру) был предложен и развит в ряде работ С. Н. Бернштейна (см. [1], [2]). В дальнейшем этот метод нашел широкое применение в различных вопросах теории линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, причем идея аналитич. продолжения по параметру была дополнена более общими функциональными и топологич. принципами (см. [3]).

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., «Math. Ann.», 1904, Bd 59, S. 20—76; [2] его же, Собр. соч., т. 3, М., 1960; [3] Лерэ Ж., Шаудер Ю., «Успехи матем. наук», 1946, в. 3/4, с. 71—95.

И. А. Шишмарев.

ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ МЕТОД — метод приближенного решения нелинейных функциональных уравнений. П. по п. м. состоит в том, что решаемое уравнение $P(x) = 0$ обобщается к виду $F(x,\ t) = 0$ путем введения параметра t, принимающего заданные значения на конечном интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$, так, что первоначальное уравнение получается при $t = t^* : F(x,\ t^*) = P(x)$, а уравнение $F(x,\ t_0) = 0$ легко решается или известно его решение x_0 (см. [1] — [3]).

Обобщенное уравнение $F(x, t)=0$ последовательно решается при отдельных значениях $t: t_0, t_1, \ldots, t_k=t^*$. Уравнение при $t=t_{i+1}$ решается каким-либо итерационным методом (методом Ньютона, простой итерации, итерационным методом вариации параметра [4] и др.), начиная с полученного решения x_i уравнения $F(x, t)=0$ при $t=t_i$. Применение на каждом шаге по i, напр. n итераций метода Ньютона, приводит к следующей формуле:

$$x_{i+1}^{(\nu+1)}=x_{i+1}^{(\nu)}-\left[F'_x(x_{i+1}^{(\nu)}, \ t_{i+1})\right]^{-1} F(x_{i+1}^{(\nu)}, t_{i+1}),$$

$$i=0, 1, 2, \ldots, k-1; \ \nu=0, 1, 2, \ldots, n-1; \ x_{i+1}^{(0)}=x_i^{(n)}.$$

Если разность $t_{i+1}-t_i$ достаточно мала, то значение x_i может оказаться достаточно хорошим начальным приближением, обеспечивающим сходимость, для получения решения x_{i+1} при $t=t_{i+1}$ (см. [1], [3], [5]).

На практике часто исходная задача естественным образом зависит от нек-рого параметра, к-рый может быть выбран в качестве параметра t.

П. по п. м. применяется как для решения систем нелинейных алгебраич. и трансцендентных уравнений (см. [1], [2]), так и для более общих нелинейных функциональных уравнений в банаховых пространствах (см. [5] — [7]).

П. по п. м. иногда наз. также прямой метод вариации параметра (см. [2], [6]), а также комбинированный метод прямого и итерационного методов вариации параметра. В этих методах построение решений обобщенного уравнения сводится путем дифференцирования по параметру к решению дифференциальной задачи с начальными условиями (задачи Коши) методами численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Применяя простейший метод Эйлера в прямом методе вариации параметра к задаче Коши

$$\frac{dx}{dt}=-\left[F'_x(x, \ t)\right]^{-1} F'_t(x, \ t), \ x(t_0)=x_0,$$

приближенные значения $x(t_i)=x_i$, $i=1, 2, \ldots, k$, решения $x(t)$ уравнения $F(x, t)=0$ можно определить следующими равенствами:

$$x_{i+1}=x_i-(t_{i+1}-t_i)\left[F'_x(x_i, \ t_i)\right]^{-1} F'_t(x_i, \ t_i),$$

$$i=0, 1, 2, \ldots, k-1.$$

Элемент x_k будет искомым приближенным решением исходного уравнения $P(x)=0$. Уточнение всех или нек-рых значений x_{i+1} можно проводить итерационным методом вариации параметра [4] (или методом Ньютона). Обобщенное уравнение при этом рассматривается обычно в виде

$$F(x, \ t_{i+1})=(1-\lambda) F(x^{(0)}, \ t_{i+1}), \ x^{(0)}=x_{i+1}$$

на конечном промежутке $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ или, заменяя здесь $1-\lambda$ на $e^{-\tau}$, на бесконечном промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant \infty$.

Метод вариации параметра применен к широкому классу задач как для построения решений, так и для доказательства их существования (см., напр., [3], [4], [6], [7]).

Лит.: [1] Lahaye E., «Acad. Roy. Belg. Bull., Cl. Sci. Sér. 5», 1948, t. 34, p. 809—27; [2] Давиденко Д. Ф., «Укр. матем. ж.», 1953, т. 5, № 2, с. 196—206; [3] Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975; [4] Давиденко Д. Ф., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1975, т. 15, № 1, с. 30—47; [5] Дементьева А. М., «Докл. АН СССР», 1971, т. 201, № 4, с. 774—777; [6] Давиденко Д. Ф., «Укр. матем. ж.», 1955, т. 7, № 1, с. 18—28; [7] Шидловская Н. А., «Уч. зап. ЛГУ», 1958, № 271, в. 33, с. 3—17.
Д. Ф. Давиденко.

ПРОДОЛЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ — теоремы о продолжении функции с нек-рого множества на более широкое таким образом, что продолженная функция обладает определенными свойствами. К П. т. относятся прежде всего задачи об аналитическом продолжении функций.

Примером теоремы существования непрерывного продолжения непрерывной функции является теорема Брауэра—Урысона: если E — замкнутое подмножество нормального пространства X и $f: E \to \mathbb{R}$ — непрерывная действительная ограниченная функция, то существует такая непрерывная ограниченная функция $F: X \to \mathbb{R}$, что $F=f$ на E. К числу П. т. относится *Хана — Банаха теорема* о продолжении линейных функционалов в векторных пространствах.

В евклидовом пространстве П. т. в основном связаны с решением следующих двух задач: 1) продолжение функций с областей, лежащих в пространстве, на все пространство; 2) продолжение функций с границы области на саму область. В обоих случаях требуется, чтобы продолженная функция обладала определенными свойствами гладкости, т. е. принадлежала определенному функциональному классу, зависящему от свойств продолжаемой функции.

Задача о продолжении функции с сохранением непрерывности частных производных с области с достаточно гладкой границей на все пространство была решена М. Хестенсом [3] и Х. Уитни [4]. Если на $(n-1)$-мерной границе ∂G области G, лежащей в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, заданы функции $\varphi_k: \partial G \to \mathbb{R}$, $k=0, 1, \ldots, m$, то задача построения такой функции $u: G \to \mathbb{R}$, что для нее

$$\frac{\partial^k u}{\partial n^k} = \varphi_k, \ k=0, 1, \ldots, m, \ u \in C^\infty(G), \qquad (*)$$

где n — нормаль к ∂G, в случае, когда гладкость функций φ_k и границы ∂G описывается в терминах непрерывности и принадлежности *Гёльдерову пространству* (при наличии, быть может, нек-рых особенностей), рассматривалась Э. Леви [5], Ж. Жиро [6] — [7] и М. Жевре [8]. Изучался также порядок роста частных производных порядка $k>m$ при стремлении аргумента к границе ∂G области G.

Систематически обе указанные задачи о продолжении функций в разных метриках L_p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, для разных измерений и в различных функциональных пространствах изучались С. М. Никольским и его учениками (см. [9], [10]). В терминах ряда функциональных пространств установлены наилучшие характеристики дифференциальных свойств функций, к-рые можно получить при продолжении функции, обладающей заданными дифференциально-разностными свойствами (см. *Вложения теоремы*). Для задачи (*) было найдено продолжение, наилучшее с точки зрения роста производных порядка $k>m$ при подходе к граничному многообразию (см. [11], [12]).

Часто методы продолжения функций и систем функций (*) с границы области на всю область основаны на интегральных представлениях функций. Подобные методы продолжения функций обычно являются линейными. Существуют и другие методы продолжения функций, напр., основанные на разложении функций в ряды с последующим продолжением каждого члена ряда. Этот метод, вообще говоря, не линейный. Имеются случаи, когда заведомо не существует линейного метода продолжения [13].

Лит.: [1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Hestenes M. R., Extension of the range of differentiable function, «Duke Math. J.», 1941, v. 8, p. 183—92; [4] Whitney H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1934, v. 36, p. 63—89; 1936, v. 40, p. 309—17; [5] Levi E. E., «Mem. Soc. It. dei XL», 1909, v. 16, p. 3—112; [6] Giraud G., «Ann. Éc. norm. sup.», 1929, t. 46, p. 131—245; [7] его же, там же, 1932, t. 49, p. 1—104, 245—308; [8] Gevrey M., «Ann. Éc. norm. sup.», 1935, t. 52, p. 39—108; [9] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [10] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1975; [11] Кудрявцев Л. Д., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1959, т. 55; [12]

Успенский С. В., «Сиб. матем. ж.», 1966, т. 7, № 1, с. 192—99; № 2, с. 409—18; [13] Буренков В. И., Гольдман М. Л., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1979, т. 150, с. 31—51. *Л. Д. Кудрявцев.*

ПРОДОЛЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ в аналитической геометрии — утверждения о продолжении функций, сечений аналитич. пучков, аналитич. пучков, аналитич. подмножеств, голоморфных и мероморфных отображений с дополнения $X \setminus A$ в аналитич. пространстве X к подмножеству A (как правило, тоже аналитическому) на все пространство X. Классич. результатами о продолжении функций являются две теоремы Римана.

Первая теорема Римана утверждает, что всякая аналитич. функция на $X \setminus A$, где X — нормальное комплексное пространство, а A его аналитич. подмножество коразмерности $\geqslant 2$, продолжается до аналитич. функции на всем X. Вторая теорема Римана утверждает, что всякая аналитич. функция f на $X \setminus A$, где A нигде не плотное аналитич. подмножество нормального комплексного пространства X, локально ограниченная на X, продолжается до аналитич. функции на всем X. Существуют обобщения этих теорем на произвольные комплексные пространства X, а также на сечения когерентных аналитич. пучков (см. *Локальные когомологии*).

Важнейшими результатами о продолжениях аналитических подмножеств являются теорема Реммерта — Штейна — Шифмана и теорема Бишопа. Теорема Реммерта — Штейна — Шифмана утверждает, что всякое чисто p-мерное комплексное аналитич. подмножество в $X \setminus A$, где X — комплексное аналитич. многообразие, а A его замкнутое подмножество, имеющее нулевую $(2p-1)$-мерную меру Хаусдорфа, продолжается до чисто p-мерного комплексного аналитич. подмножества во всем X. Теорема Бишопа утверждает, что всякое чисто p-мерное комплексное аналитич. подмножество V в $X \setminus A$, где X — комплексное аналитич. многообразие, а A — его комплексное аналитич. подмножество, продолжается до чисто p-мерного комплексно аналитич. подмножества $\overline{V}$ во всем X, если V имеет локально конечный объем в нек-рой окрестности U множества A в X.

Имеются критерии продолжаемости аналитич. отображений, обобщающие классич. *Пикара теорему*. Напр., всякое аналитич. отображение $X \setminus A \to Y$, где X — комплексное многообразие, A — его аналитическое нигде не плотное подмножество, а Y — гиперболическое компактное комплексное многообразие, можно продолжить до аналитич. отображения $X \to Y$. Всякое не всюду вырожденное аналитич. отображение $X \setminus A \to Y$, где X — комплексное многообразие, A — его аналитич. подмножество, Y — компактное комплексное многообразие с отрицательным первым классом Чжэня, можно продолжить до мероморфного отображения $X \to Y$.

Лит.: [1] Гриффитс Ф., Кинг Дж., Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий, пер. с англ., М., 1976; [2] Кобаяси Ш., «Математика», 1973, т. 17, в. 1, с. 47—96; [3] Харви Р., Голоморфные цепи и их границы, пер. с англ., М., 1979.

Д. А. Пономарев.

ПРОДУКТИВНОЕ МНОЖЕСТВО — множество натуральных чисел A, для к-рого существует такая частично рекурсивная функция φ, что $\varphi(x) \in A - W_x$ для всякого рекурсивно перечислимого множества W_x с геделевым номером x, содержащегося в A. Известно, что для всякого П. м. A существует такая общерекурсивная функция ψ, что уже для каждого x в зависимости от взаимного расположения множеств A и W_x имеет место либо $\psi(x) \in A - W_x$, либо $\psi(x) \in W_x - A$. Таким образом, П. м. «эффективно» отличается от любого рекурсивно перечислимого множества. С другой стороны, всякое П. м. содержит бесконечное рекурсивно перечислимое подмножество, в силу чего П. м. противопоставляются *иммунным множествам*, хотя иммунными и продуктивными множествами не исчерпывается совокупность множеств, не являющихся рекурсивно перечислимыми. Продуктивными оказываются многие множества, играющие важную роль в рекурсивной теории множеств (напр., множество всех гёделевых номеров общерекурсивных функций в нек-рой гёделевой нумерации всех частично рекурсивных функций) и в ее приложениях (в частности, множества всех номеров истинных и ложных формул элементарной арифметики при естественной нумерации всех ее формул). Рекурсивно перечислимые множества, дополнение к-рых (до натурального ряда) является продуктивным, наз. креативными; они образуют важный класс рекурсивно перечислимых множеств.

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

В. А. Душский.

ПРОЕКТИВНАЯ АЛГЕБРА в узком смысле — алгебра точек на проективной прямой; проективно-инвариантные конструкции для определения сложения и умножения точек проективной прямой l, расположенной в нек-рой проективной плоскости π, для к-рой выполняется *Дезарга предложение*. Эти конструкции зависят от выбора на l трех различных точек O, E, U.

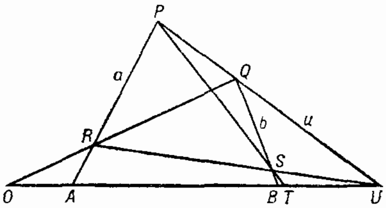


Рис. 1.

Конструкция I определяет для любых двух точек A и B, отличных от U, третью точку $A+B$, также отличную от U и называемую суммой точек A и B. Для этого в плоскости π проводятся три прямые a, b и u, отличные от l, не проходящие через одну точку и проходящие соответственно через точки A, B и U. Пусть P — точка пересечения прямых u и a, Q — точка пересечения прямых u и b, R — точка пересечения прямых OQ и a, S — точка пересечения прямых b и UR. Тогда прямая PS пересекает прямую l в определенной точке $T=A+B$ (общий случай — на рис. 1). Оказывается, так построенная точка зависит лишь от A, B, O, U и не зависит от выбора прямых и точки E.

Конструкция II определяет для любых двух точек A и B, отличных от U, третью точку $A \cdot B$, также отличную от U, называемую произведением точек A и B. Для этого в плоскости проводятся три прямые a, b, u, проходящие соответственно через точки A, B и U, отличные от l и не проходящие через одну точку. Пусть P — точка пересечения прямых u и a, Q — точка пересечения прямых u и b, R — точка пересечения прямых EQ и a, S — точка пересечения прямых OR и b. Тогда прямая PS пересекает прямую l в определенной точке $T=A \cdot B$ (общий случай — на рис. 2). Оказывается, так построенная точка зависит лишь от A, B, O, E, U, но не зависит от выбора прямых a, b и u.

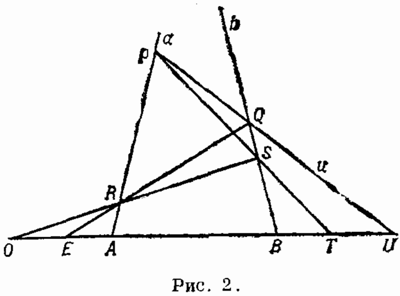


Рис. 2.

Относительно этих операций сложения и умножения точки прямой l (отличные от U) образуют тело $K(O, E, U)$. Поменяв ролями A и B в конструкции II, получают инверсно изоморфное тело $K^*(O, E, U)$. Если O',

E', U' — любая другая упорядоченная тройка точек на прямой l из той же плоскости π, то соответствующее тело $K'(O', E', U')$ изоморфно $K(O, E, U)$ вследствие того, что между прямыми l и l' существует проективное соответствие; поэтому любое тело K, изоморфное им, наз. просто телом данной проективной плоскости (или даже данной проективной геометрии); говорят также, что имеет место проективная геометрия над телом K. В общих случаях конструкций I и II фигурируют четыре лежащие в одной плоскости точки P, Q, R, S, никакие три из к-рых не коллинеарны; они образуют т. н. (полный) четырехвершинник с тремя парами противоположных сторон PQ, RS; PS, QR; PR, QS. Точки пересечения Z, X, Y этих пар противоположных сторон называется диагональными точками, а прямые, соединяющие диагональные точки,— диагоналями. Специальный случай, не показанный на рисунке, соответствует той ситуации, когда X, Y, Z коллинеарны (см. *Фано постулат*).

Аналогичные построения проводятся и в пучке прямых, проходящих через одну точку с использованием (полного) четырехсторонника — фигуры, двойственной четырехвершиннику, и приводят к телу K^*, инверсно изоморфному K.

Свойства проективной прямой l как алгебраич. системы определяются геометрическими (проективно-инвариантными) свойствами проективной плоскости, в к-рой она расположена. Так, напр., коммутативность K эквивалентна выполнению *Паппа аксиомы*; то, что характеристика K не равна 2, эквивалентно постулату Фано; при отсутствии автоморфизмов у тела K, отличных от внутренних, любое *проективное преобразование* есть *коллинеация*, и т. д.

С помощью тела K на прямой, а затем и в проективном пространстве, ее содержащем, вводятся *проективные координаты*, описывающие алгебраич. модель проективного пространства, так что содержание проективной геометрии по существу определяется свойствами того тела K, над к-рым она построена.

В широком смысле П. а. исследует совокупность подпространств проективного пространства, являющуюся *дедекиндовой решеткой* с дополнениями; при этом конечномерности пространства не требуется, но накладываются условия полноты, существования однородного базиса и т. д., благодаря чему устанавливаются разнообразные связи с теорией простых и регулярных колец, теорий операторных абелевых групп и др. разделами алгебры.

Лит.: [1] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1954; [2] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969.

М. И. Войцеховский.

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, изучающий свойства фигур, не меняющиеся при *проективных преобразованиях*, напр. при проектировании. Такие свойства наз. проективными; к ним относятся, напр., прямолинейное расположение точек (коллинеарность), порядок алгебраич. кривой и т. д.

При проектировании точек одной плоскости П на другую плоскость П′ не каждая точка П′ имеет прообраз в П и не каждая точка из П имеет образ в П′. Это обстоятельство привело к необходимости дополнения евклидова пространства т. н. *бесконечно удаленными элементами* (несобственными точками, прямыми и плоскостью) и к образованию нового геометрич. объекта — трехмерного *проективного пространства*. При этом каждая прямая дополняется одной несобственной точкой, каждая плоскость — одной несобственной прямой, все пространство — одной несобственной плоскостью. Параллельные прямые дополняются одной и той же несобственной точкой, непараллельные — разными, параллельные плоскости дополняются одной и той же несобственной прямой, непараллельные — разными. Несобственные точки, которыми дополняется плоскость, принадлежат несобственной прямой, дополняющей ту же плоскость. Все несобственные точки и несобственные прямые принадлежат несобственной плоскости. Дополнение евклидова пространства до проективного пространства приводит к тому, что проектирование становится взаимно однозначным. Аналогичная процедура применима и для n-мерного пространства.

Существуют различные способы аксиоматич. построения проективного пространства. Наиболее распространенным является видоизменение системы аксиом, предложенной в 1899 Д. Гильбертом (D. Hilbert) для обоснования элементарной геометрии (см. *Гильберта система аксиом*). Проективное пространство рассматривается как совокупность элементов трех родов: точек, прямых и плоскостей, между к-рыми установлено основное для П. г. отношение инцидентности, характеризующееся надлежащими аксиомами. Они отличаются от соответствующей группы аксиом элементарной геометрии тем, что требуют, чтобы каждые две прямые, лежащие в одной плоскости, имели общую точку, и на каждой прямой имелось, по крайней мере, три различные точки. В конкретных случаях для получения более «богатой» П. г. эта совокупность аксиом дополняется аксиомами порядка и непрерывности (для действительного проективного пространства), *Паппа аксиомой* (для П. г. над коммутативным телом), *Фано постулатом* (для П. г. над телом, характеристика к-рого $\neq 2$) и т. д.

Замечательным положением П. г. является *двойственности принцип*. Говорят, что точка и прямая (точка и плоскость, прямая и плоскость) и н ц и д е н т н ы, если точка лежит на прямой (или прямая проходит через точку) и т. д. Тогда если верно нек-рое предложение $\mathcal{A}$ о точках, прямых и плоскостях проективного пространства, сформулированное только в терминах инцидентности между ними, то будет верно и двойственное предложение $\mathcal{B}$, к-рое получается из $\mathcal{A}$ заменой слова «точка» на слово «плоскость», слова «плоскость» на слово «точка» и с сохранением слова «прямая».

Важную роль в П. г. играет *Дезарга предложение*, выполнение к-рого необходимо и достаточно для введения проективными средствами системы *проективных координат*, составленных из элементов нек-рого тела K, естественным образом связанного с точками проективной прямой (см. *Проективная алгебра*).

Основы П. г. были заложены в 17 в. Ж. Дезаргом (G. Desargues) (в связи с развитием им учения о перспективе) и Б. Паскалем (B. Pascal) (в связи с изучением им нек-рых свойств конич. сечений). Большое значение для последующего развития П. г. имели работы Г. Монжа (G. Monge, 2-я пол. 18 — нач. 19 вв.). Как самостоятельная дисциплина П. г. была изложена Ж. Понселе (J. Poncelet, нач. 19 в.). Заслуга Ж. Понселе заключалась в выделении проективных свойств фигур в отдельный класс и установлении соответствий между метрическими и проективными свойствами этих фигур. К этому же периоду относятся работы Ж. Брианшона (J. Brianchon). Дальнейшее развитие П. г. получила в трудах Я. Штейнера (J. Steiner) и М. Шаля (M. Chasles). Большую роль в развитии П. г. сыграли работы К. Штаудта (Ch. Staudt), в к-рых были намечены также контуры аксиоматич. построения П. г. Все эти геометры стремились доказывать теоремы П. г. синтетич. методом, положив в основу изложения проективные свойства фигур. Аналитич. направление в П. г. было намечено работами А. Мёбиуса (A. Möbius). Влияние на развитие П. г. оказали работы Н. И. Лобачевского по созданию неевклидовой геометрии, позволившие в дальнейшем А. Кэли (A. Cayley) и Ф. Клейну (F. Klein) рассмотреть различные геометрич. системы с точки зрения П. г. Развитие аналитич. методов обычной П. г. и построение на этой базе комплексной П. г. (Э. Штуди, E. Study, Э. Картан, E. Cartan) поставили задачу о зависимости тех или иных проективных свойств от того тела, над которым построена геометрия. В решении этого вопроса больших успехов добились А. Н. Колмогоров и Л. С. Понтрягин.

Лит.: [1] Глаголев Н. А., Проективная геометрия, 2 изд., М.— Л., 1963; [2] Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 3 изд., М., 1981; [3] Кокстер Х. С. М., Действительная проективная плоскость, пер. с англ., М., 1959; [4] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [5] Хартсхорн Р., Основы проективной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [6] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [7] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии . . ., М., 1968; [8] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, М., 1970; [9] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [10] Veblen O., Young J. W., Projective geometry, v. 1—2, Boston—N.Y., 1910—18; [11] Blaschke W., Projektive Geometrie, 3 Aufl., Basel, 1954. *М. И. Войцеховский.*

ПРОЕКТИВНАЯ ГРУППА от n переменных над телом K — группа $PGL_n(K)$ преобразований $(n-1)$-мерного проективного пространства $P_{n-1}(K)$, индуцированных невырожденными линейными преобразованиями пространства K^n. Имеется естественный эпиморфизм

$$P: GL_n(K) \longrightarrow PGL_n(K),$$

ядром к-рого служит группа гомотетий пространства K^n, изоморфная мультипликативной группе Z^* центра Z тела K. Элементы группы $PGL_n(K)$, наз. проективными преобразованиями, являются коллинеациями пространства $P_{n-1}(K)$. Наряду с группой $PGL_n(K)$, наз. также полной проективной группой, рассматривают унимодулярную проективную группу $PSL_n(K)$ и вообще группы вида $P(G)$, где G — нек-рая линейная группа.

При $n \geqslant 2$ группа $PSL_n(K)$ проста, за исключением двух случаев, когда $n=2$ и $|K|=2$ или 3. Если K — конечное поле из q элементов, то

$$|PSL_n(K)| = (q-1, n)^{-1} q^{n(n-1)/2} (q^n-1) \times$$
$$\times (q^{n-1}-1) \ldots (q^2-1).$$

Лит.: [1] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974. *Э. Б. Винберг.*

ПРОЕКТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, изучающий дифференциально-геометрические свойства кривых и поверхностей, сохраняющихся при проективных преобразованиях. Таковы, напр., понятия асимптотич. направления или, более общо, *сопряженных направлений*, *соприкасающейся квадрики* (в частности, квадрики Ли, пучка квадрик Дарбу и т. п.), *проективной нормали* и т. д. Важную роль в П. д. г. играет *двойственности принцип*, так, напр., поверхность в проективном пространстве может рассматриваться и как двухпараметрич. семейство точек, и как огибающая двухпараметрич. семейства плоскостей. Разработанными разделами П. д. г. являются (проективная) теория прямолинейных *конгруэнций*, вопросы *проективного изгибания*, асимптотич. преобразования (в частности, преобразования Бэклунда, Бианки, Эйзенхарта, Лапласа и др.).

Первые исследования по П. д. г. начались в кон. 19 в.; здесь особенно важны работы Г. Дарбу (G. Darboux) по теории поверхностей и конгруэнций. Первой книгой, где систематически изложена классич. П. д. г., явилась работа [1]. В дальнейшем появились монографии [2], [3], [4], в к-рых П. д. г. предстает уже широко развитой геометрич. теорией, связанной с другими разделами геометрии и имеющей широкие приложения, напр. в теории дифференциальных уравнений (в особенности нелинейных, что выяснилось в последнее время при «бесквадратурном» получении их решений путем аналогов асимптотич. преобразований, см., напр., *Синус Гордона уравнение*).

Г. Фубини (G. Fubini) и Э. Чех (E. Čech) дали изложение П. д. г. в тензорной форме, используя *ковариантное дифференцирование* и положив в основу фундаментальные формы (см., напр., *Фубини форма*). Так была решена задача проективно инвариантного оснащения поверхности 3-мерного пространства. Большой вклад в П. д. г. внесен С. П. Финиковым и его школой, в особенности это касается теории конгруэнций и теории пар конгруэнций и их преобразований. Проблема проективно инвариантного оснащения многообразия в многомерном проективном пространстве исследовалась Г. Ф. Лаптевым и др.

Эффективным средством изучения П. д. г. многомерных пространств является метод нормализации А. П. Нордена [6]. В этом методе с каждой точкой x m-мерной поверхности X_m проективного пространства P_n ассоциируется инцидентная x $(n-m)$-мерная плоскость (нормаль 1-го рода), пересекающая касательную плоскость в единственной точке x, а в касательной m-мерной плоскости выбирается $(m-1)$-мерная плоскость (нормаль 2-го рода), не инцидентная точке x. При этом на поверхности X_m индуцируется *аффинная связность* без кручения, свойства к-рой зависят как от строения X_m, так и от выбора нормализации. В случае нормализованной гиперповерхности возникает двойственная конструкция, приводящая к внутренним связностям без кручения 1-го и 2-го рода, сопряженным относительно асимптотич. тензора гиперповерхности. При специальном выборе нормализации в общую схему включается дифференциальная геометрия пространств, отвечающих подгруппам проективной группы: аффинных, биаксиальных, неевклидовых и евклидовых пространств.

Наконец, в работах Э. Картана (E. Cartan) построена общая теория пространств *проективной связности*. Г. Ф. Лаптев, используя метод внешних форм, исследовал их как расслоенные пространства, структурная группа к-рых является группой проективных преобразований проективного пространства.

Лит.: [1] Wilczynski F., «Mém. publ. Acad. Belgique», 1911, t. 3, pt. 2; [2] Fubini G., Čech E., Geometria proiectiva differenziale, t. 1—2, Bol., 1926—27; [3] Bol G., Projective Differentialgeometrie, t. 1—3, Gött., 1950—67; [4] Фиников С. П., Проективно дифференциальная геометрия, М.— Л., 1937; [5] его же, Теория конгруэнций, М.— Л., 1950; [6] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976; [7] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2, М.— Л., 1948.

А. П. Норден, А. П. Широков.

ПРОЕКТИВНАЯ МЕТРИКА — метрика $\rho(x, y)$ в подмножестве R проективного пространства P^n такая, что кратчайшая относительно этой метрики является частью или всей проективной прямой. При этом полагают, что R не принадлежит ни одной гиперплоскости и что 1) для любых трех неколлинеарных точек x, y, z неравенство треугольника выполняется в строгом смысле

$$\rho(x, y)+\rho(y, z) > \rho(x, z);$$

2) если x, y — различные точки из R, то пересечение $l(x, y)$ прямой l, проходящей через x и y, с R есть либо вся l (большой круг), либо получается из l удалением нек-рого отрезка (могущего сводиться и к одной точке) (метрическая прямая).

Множества R, наделенные П. м., наз. проективно метрическими пространствами (п. м. п.).

В одном и том же п. м. п. не могут одновременно существовать оба типа линий: либо все они — метрич. прямые (т. е. изометричны отрезку из $\mathbb{R}^1$), либо же все они — большие круги одинаковой длины (теорема Гамеля). Пространства первого типа наз. открытыми (они совпадают с подмножествами аффинного пространства, то есть с P^n, из к-рого удалена некрая гиперплоскость); геометрия открытых п. м. п. наз. также *Гильберта геометрией*. Пространства второго типа наз. замкнутыми (они совпадают со всем P^n).

Проблема определения всех П. м.— это так наз. 4-я проблема Гильберта (см. [2]), полное ее решение дано А. В. Погореловым (1974).

С П. м. связано, как частный ее случай, т. н. *проективное мероопределение* — введение в подмножества проективного пространства методами проективной геометрии такой метрики, при к-рой эти подмножества оказываются изоморфными евклидову, гиперболическому и эллиптическому пространствам. Так, геометрия открытых п. м. п., подлежащее множество к-рых совпадает со всем аффинным пространством, наз. геометрией Минковского. Евклидова геометрия — это одновременно геометрия Гильберта и геометрия Минковского.

Гиперболическая геометрия — геометрия Гильберта, в к-рой существуют отражения от всех прямых. Для этого необходимо и достаточно, чтобы R было внутренностью эллипсоида.

Эллиптическая геометрия (или *Римана геометрия*) — геометрия п. м. п. второго типа.

Лит.: [1] Буземан Г., Келли П. Дж., Проективная геометрия и проективные метрики, пер. с англ., М., 1957; [2] Проблемы Гильберта, пер. с нем., М., 1969.

М. И. Войцеховский.

ПРОЕКТИВНАЯ НОРМАЛЬ — обобщение понятия нормали в метрич. геометрии. В отличие от последней, где нормаль вполне определяется касательной плоскостью к поверхности (т. е. окрестностью первого порядка), в проективной геометрии это не так. Даже и члены третьего порядка малости не определяют вершину координатного тетраэдра, не лежащую в касательной плоскости (т. е. к выбранной *Дарбу квадрике* можно построить не один автополярный тетраэдр). Это естественно: проективная группа значительно шире группы движений, а потому ее инварианты должны быть более высокого порядка; но и окрестность 4-го порядка не определяет единственной прямой, к-рую можно принять за третью ось тетраэдра. На этом пути, напр., получаются:

директриса Вильчинского

$$W = N + \frac{1}{I} u^i r_i,$$

ребро Грина

$$G = N + \frac{1}{4}\left(g^{pq}\frac{\partial_q I}{I} - \frac{1}{I} A_{ij} T^{ijp}\right) r_p,$$

ось Чеха

$$C = N + \frac{1}{3}\left(g^{is}\frac{\partial_s I}{2I} - \frac{1}{I} A_{jk} T^{ijk}\right) r_i,$$

нормаль Фубини

$$F = N + g^{is}\frac{\partial_s I}{2I} r_i$$

(здесь N — аффинная нормаль).

Все они лежат в одной плоскости.

Лит.: [1] Широков П. А., Широков А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959; [2] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976; [3] Фиников С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.— Л., 1937.

М. И. Войцеховский.

ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ, двумерное проективное пространство,— инцидентностная структура $\pi = \{\mathcal{P}, \mathcal{L}, I\}$, где элементы множества $\mathcal{P}$ наз. точками, элементы множества $\mathcal{L}$ — прямыми, а I — отношение инцидентности. Инцидентностная структура удовлетворяет следующим аксиомам:

1) для любых двух различных точек p и q существует единственная прямая L такая, что pIL и qIL;

2) для любых двух различных прямых L и M существует единственная точка p такая, что pIL и pIM;

3) существуют четыре точки, никакие три из к-рых не инцидентны одной прямой.

Напр., пучок П прямых и плоскостей трехмерного аффинного пространства, проходящих через точку O, является П. п., если в качестве проективной точки считать прямую пучка П, а в качестве проективной прямой — плоскость из П. В этой интерпретации получают прозрачный геометрич. смысл однородные координаты точки П. п. над полем как координаты какого-либо вектора прямой, изображающей эту точку (см. *Проективная геометрия*, *Проективные координаты*). Другим примером является П. п., состоящая из семи точек A_i, $i=1, \ldots, 7$, и семи прямых $\{A_1, A_2, A_4\}$, $\{A_2, A_3, A_5\}$, $\{A_3, A_4, A_6\}$, $\{A_4, A_5, A_7\}$, $\{A_5, A_6, A_1\}$, $\{A_6, A_7, A_2\}$, $\{A_7, A_1, A_3\}$ (рис. 1), — представитель класса конечных проективных плоскостей. П. п. $P(2, n)$ наз. **конечной проективной плоскостью порядка** n, если отношение инцидентности удовлетворяет еще одной аксиоме:

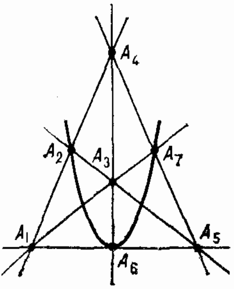


Рис. 1.

4) существует прямая, инцидентная ровно $n+1$ точке.

В $P(2, n)$ каждая точка (прямая) инцидентна $n+1$ прямой (точке), а число точек плоскости равно числу прямых и равно n^2+n+1. Остается невыясненным (1983) вопрос, для каких значений n существует П. п. $P(2, n)$. Доказано существование конечной П. п., порядок к-рой есть степень простого числа (см. [4]). Доказано также (см. [5]) отсутствие П. п. $P(2, n)$ для широкого класса чисел: если n сравнимо с 1 или 2 по модулю 4 и если в разложении этого числа на простые множители встречается в нечетной степени хотя бы одно простое число, сравнимое с 3 по модулю 4, то $P(2, n)$ не существует; таковы, напр., $n=6, 14, 21, 22, \ldots$. Вопрос относительно $n=10, 12, 15, 18, \ldots$ остается открытым. Важной задачей теории конечных П. п. является изучение подплоскостей заданной плоскости $P(2, n)$. Так, если $P(2, m)$ является собственной подплоскостью конечной П. п. $P(2, n)$, то $m^2+m\leqslant n$ или $m^2=n$ (см. [5]).

Специфическим для П. п. является понятие двойственности. Две П. п. наз. **двойственными**, или **дуальными**, если между точками (прямыми) одной плоскости и прямыми (точками) другой можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее инцидентность. Нек-рые П. п. (напр., П. п. над полем k) допускают двойственное отображение на себя, к-рое наз. **корреляцией**, а П. п., допускающие корреляцию, наз. **автодуальными**. Для П. п. имеет место т. н. малый принцип двойственности: если верно нек-рое предложение $\mathcal{A}$ о точках и прямых П. п., сформулированное только в терминах инцидентности между ними, то будет верно предложение $\mathcal{B}$, двойственное $\mathcal{A}$, т. е. предложение, к-рое получается из $\mathcal{A}$ заменой слова «точка» на слово «прямая» и наоборот.

Изоморфное отображение П. п. на себя наз. **коллинеацией**. Коллинеация конечной П. п. $P(2, n)$ является подстановкой множества точек и подстановкой множества прямых, причем эти подстановки подобны. Конечная П. п. наз. **дезарговой**, если она имеет группу коллинеаций, дважды транзитивную на ее точках. Группа коллинеаций дезарговой П. п. $PG(2, p^h)$ имеет порядок

$$h(p^{2h}+p^h+1)(p^{2h}+p^h)p^{2h}(p^h-1)^2.$$

Группа коллинеаций недезарговой П. п. $P(2, n)$ имеет порядок, не превосходящий

$$n^s (n^2+n+1)(n^2+n) n^2 (n-1)^2,$$

где $s \leqslant \ln_2 n$. Порядки групп коллинеаций известных недезарговых П. п. не превосходят порядков групп коллинеаций дезарговых плоскостей того же порядка.

На рассмотрении 53 типов множеств

$$T(G) = \{(x, X) \mid G \text{ является } (x, X)\text{-транзитивной}\},$$

определенных для полной группы коллинеаций G, основана классификация Ленца — Бартолоцци П. п. Одним из основных путей изучения П. п. является введение в ней координат и тернарной операции. Каждому возможному типу П. п. классификации Ленца — Бартолоцци соответствует система алгебраич. законов, к-рой должно удовлетворять натуральное тело П. п., определенное через тернарную операцию. Напр., П. п. является дезарговой (папповой) тогда и только тогда, когда во всех ее натуральных телах выполняется ассоциативный (коммутативный) закон. Дезаргова конечная П. п. $P(2, n)$ является папповой.

Особенность дезарговой П. п. $PG(2, n)$ в том, что она обладает коллинеацией порядка n^2+n+1, циклической на точках и прямых. Этот результат дает возможность представить П. п. $PG(2, n)$ в виде циклич. таблицы. Такое представление $PG(2, n)$ заключается в том, что точки плоскости, занумерованные натуральными числами от 1 до n^2+n+1, располагаются в прямоугольной таблице из $n+1$ строки и n^2+n+1 столбца таким образом, что каждый столбец, означающий прямую со всеми на ней точками, получается прибавлением к каждому элементу предыдущего столбца единицы по модулю n^2+n+1. Напр., представление плоскости $P(2, 2)$ имеет вид

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3. \end{matrix}$$

Плоскости $P(2, n)$, где $n \leqslant 8$, единственны с точностью до изоморфизма — это дезарговы плоскости или плоскости Галуа (см. [6]), а уже для $n=9$ известны четыре неизоморфные плоскости (см. [7]).

Если к аксиомам П. п. и предложению Дезарга присоединить аксиомы порядка (к-рыми описывается разделенность двух пар точек, лежащих на одной прямой: напр., на рис. 2 пара C, D разделяет пару A, B, а пара A, C не разделяет пару B, D) и аксиому непрерывности, то полученная П. п. оказывается изоморфной действительной аффинной плоскости, пополненной несобственными элементами: к каждой прямой присоединяется несобственная (бесконечно удаленная) точка, к параллельным прямым — одна и та же, а к непараллельным — разные, причем все несобственные точки лежат на одной несобственной прямой.

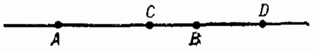


Рис. 2.

П. п. наз. топологической, если множества ее точек и прямых являются топологич. пространствами, причем отношение инцидентности является непрерывным. В топологич. плоскости тернарная операция непрерывна по всем своим аргументам. С топологич. точки зрения множество точек действительной П. п. (равно как и множество прямых) представляет собой замкнутое неориентируемое многообразие, эйлерова характеристика к-рого равна 1.

Лит.: [1] Кокстер Х., Действительная проективная плоскость, пер. с англ., М., 1959; [2] Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, пер. с англ., М., 1955; [3] Скорняков Л. А., «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 6, с. 112—54; [4] Картеси Ф., Введение в конечные геометрии, пер. с англ., М., 1980; [5] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962, гл. 20; [6] Dembowski P., Finite geometries, B.—N.Y., 1968; [7] Room T. G., Kirkpatrick P. B., Miniquaternion geometry, Camb., 1971.

В. В. Афанасьев.

ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ — *проективное пространство* размерности 1; П. п., рассматриваемая как самостоятельный объект, является замкнутым одномерным многообразием. П. п. является своеобразным проективным пространством — на ней нет интересных отношений инцидентности, как у проективных пространств большей размерности. Единственным инвариантом П. п. служит число ее точек. П. п. наз. непрерывной, дискретной или конечной, если она инцидентна со множеством точек мощности континуума, счетным или конечным соответственно.

П. п. наз. упорядоченной, если на ней задано отношение разделения двух пар различных точек. Предполагается, что разделение не зависит от порядка пар и порядка точек в парах и любая четверка различных точек разбивается на две взаимно разделяющиеся пары единственным образом, а также принимается аксиома расположения, связывающая пять различных точек (см., напр., [1]). Упорядочение П. п. над полем $\mathbb{R}$ связано с упорядоченностью этого поля, а именно: пара точек $\{A, B\}$ разделяет пару $\{C, D\}$, если *двойное отношение* $(A, B; C, D)$ отрицательно, и не разделяет, если $(A, B; C, D)$ положительно. Конечную П. п. $PG(1, q)$ над *Галуа полем* нечетного порядка q можно упорядочить аналогично вещественной П. п. Полагают (см. [4]), что пара точек $\{A, B\}$ разделяет пару $\{C, D\}$ тогда и только тогда, когда $(A, B; C, D)$ — квадратичный вычет поля Галуа $GF(q)$.

П. п. приобретает определенное геометрич. строение, если она вложена в проективное пространство большей размерности; так, напр., П. п. однозначно определяется двумя различными точками, а аналитич. определение П. п. как множества классов эквивалентности пар элементов тела k, не равных одновременно нулю, по существу эквивалентно вложению П. п. в проективное пространство $P_n(k)$, $n \geqslant 2$. Если $P_1(k)$ является П. п. над полем k, то группа автоморфизмов П. п. Aut $P_1(k)$ может быть представлена на точках $P_1(k)$ в параметрич. форме как множество отображений

$$k \longrightarrow \frac{k^{\alpha}a+b}{k^{\alpha}c+d}, \; a, \; b, \; c, \; d \in k, \; ad-bc \neq 0, \; \alpha \in \operatorname{Aut} k.$$

Группа алгебраич. автоморфизмов действительной П. п. изоморфна группе перемещений действительной плоскости Лобачевского, а порядок группы Aut $PG(1, p^h)$ равен $h(p^{3h}-p^h)$.

На П. п. можно построить другие геометрии. Так, напр., плоскость Мёбиуса порядка p допускает интерпретацию на П. п. $PG(1, p^2)$ (см. [5]). Другой традиционной геометрич. конструкцией является изображение проективного пространства $P_n(k)$ на П. п. $P_1(k)$ (см. [2]), при к-ром точки из $P_n(k)$ изображаются набором n точек П. п. $P_1(k)$ (здесь k — алгебраически замкнутое поле).

Лит.: [1] Глаголев Н. А., Проективная геометрия, М., 1963; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [3] Hughes D. R., Piper F. C., Projective planes, N. Y., 1973; [4] Kustaanheimo P., «Comment. phys.-math.», 1957, v. 20, № 8; [5] Veblen O., Young J. W., Projective geometre, v. 1, Boston, 1910.

В. В. Афанасьев.

ПРОЕКТИВНАЯ СВЯЗНОСТЬ — *дифференциально-геометрическая структура* на гладком многообразии M; специальный вид *связности на многообразии*, когда приклеенное к M гладкое расслоенное пространство E имеет своим типовым слоем проективное пространство P_n размерности $n = \dim M$. Структурой такого E к каждой точке $x \in M$ присоединяется экземпляр проективного пространства $(P_n)_x$, к-рый отождествляется (с точностью до гомологий с инвариантной связкой прямых в точке x) с касательным центроаффинным пространством $T_x(M)$, дополненным бесконечно удаленной гиперплоскостью. П. с., как связность в таком E, предусматривает сопоставление каждой гладкой кривой

$\mathscr{L}\in M$ с началом x_0 и каждой ее точке x_t проективного отображения $(P_n)_{x_t}\to(P_n)_{x_0}$ так, что удовлетворяется следующее условие. Пусть M покрыто координатными областями, в к-рых фиксировано гладкое поле репера $(P_n)_x$, у к-рого вершина, определяемая вектором e_0, совпадает с x. (Репер в P_n определяется классом эквивалентности базисов в векторном пространстве V_{n+1}, если эквивалентными считаются те $\{e_\alpha\}$ и $\{e'_\alpha\}$, $\alpha=0,1, \ldots, n$, у к-рых $e'_\alpha=\lambda e_\alpha$, $\lambda\neq 0$.) Тогда при $t\to 0$ отображение семейства должно стремиться к тождественному отображению, причем главная часть его отклонения от последнего должна определяться относительно поля реперов в нек-рой окрестности точки x_0 матрицей линейных дифференциальных форм

$$\omega_\alpha^\beta=\Gamma_{\beta i}^\alpha dx^i,\ \det\|\Gamma_{0i}^j\|\neq 0, \tag{1}$$
$$\alpha,\ \beta=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

общей для всех L. Другими словами, образ репера в точке x_t при отображении $(P_n)_{x_t}\to(P_n)_{x_0}$ должен быть определен векторами

$$e_\beta\left[\delta_\alpha^\beta+\omega_\alpha^\beta(X)\,t+\varepsilon_\alpha^\beta(t)\right],$$

где X — касательный вектор к L в точке x_0 и $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\varepsilon_\alpha^\beta(t)}{t}=0$. Возможность перехода к эквивалентным базисам приводит к тому, что среди форм (1) существенны только

$$\omega_0^i,\ \theta_i^j=\omega_i^j-\delta_i^j\omega_0^0,\ \omega_i^0. \tag{2}$$

При преобразовании репера поля в произвольной точке $x\in M$ согласно формулам $e_{\alpha'}=A_{\alpha'}^\beta e_\beta$, $e_\beta=A_\beta^{\alpha'}e_{\alpha'}$, где $A_{0'}^i=A_0^{i'}=0$, т. е. при переходе к произвольному элементу главного расслоенного пространства П реперов в пространствах $(P_n)_x$, формы (1) заменяются следующими 1-формами на П:

$$\omega_{\alpha'}^{\beta'}=A_\gamma^{\beta'}dA_{\alpha'}^\gamma+A_{\alpha'}^\gamma A_\delta^{\beta'}\omega_\gamma^\delta. \tag{3}$$

2-формы

$$\Omega_{\alpha'}^{\beta'}=d\omega_{\alpha'}^{\beta'}+\omega_{\gamma'}^{\beta'}\wedge\omega_{\alpha'}^{\gamma'} \tag{4}$$

являются полубазовыми, т. е. линейными комбинациями $\omega_0^k\wedge\omega_0^l$, и тензорными, т. е. при преобразовании репера матрицами A_α^γ имеют место формулы

$$\Omega_{\alpha'}^{\beta'}=A_{\alpha'}^\gamma A_\delta^{\beta'}\Omega_\gamma^\delta,$$

где $\Omega_{\alpha'}^{\beta'}$ составлены из (3) аналогично (4). Для существенных форм (2) имеют место структурные уравнения П. с. (где для простоты опущены штрихи):

$$\left.\begin{array}{c} d\omega_0^i+\theta_j^i\wedge\omega_0^j=\Omega_0^i,\\ d\theta_i^j+\theta_k^j\wedge\theta_i^k+\omega_0^k\wedge\left(\delta_i^j\omega_k^0+\delta_k^j\omega_i^0\right)=\Theta_i^j,\\ d\omega_i^0+\omega_k^0\wedge\theta_i^k=\Omega_i^0,\end{array}\right\} \tag{5}$$

где $\Theta_i^j=\Omega_i^j-\delta_i^j\Omega_0^0$. Здесь правые части полубазовы; они составляют систему форм кручения-кривизны П. с.

Равенство $\Omega_0^i=0$ имеет инвариантный смысл. В этом случае говорят о П. с. нулевого кручения; для нее $\Theta_{i'}^{i'}=\Theta_i^i$. Инвариантные тождества

$$\Omega_0^i\equiv 0,\quad \Theta_i^i\equiv 0,$$
$$K_{ikj}^j\equiv 0,\ \Theta_i^j=\frac{1}{2}K_{ikl}^j\,\omega_0^k\wedge\omega_0^l,$$

выделяют специальный класс П. с., называемых (по Картану) н о р м а л ь н ы м и П. с.

Формы (1) определяют П. с. на M однозначно: образ при отображении $(P_n)_{x_t}\to(P_n)_{x_0}$ репера в точке x_t

определяется решением $\{e_\alpha(t)\}$ системы

$$du_\alpha = (\omega_\alpha^\beta)_{x(t)}(\dot{x}(t))\, u_\beta \qquad (6)$$

при начальных условиях $u_\alpha(0)=e_\alpha$, где $x^i=x^i(t)$ — уравнения кривой L в нек-рой координатной окрестности ее точки x_0 с координатами $x^i(0)$.

Любые 1-формы ω_0^i, θ_i^j, ω_i^0, заданные на П и удовлетворяющие уравнениям (5) с правыми частями, выражающимися через $\omega_0^k \wedge \omega_0^l$, где ω_0^i, $i=1, \ldots, n$, линейно независимы, определяют в этом смысле нек-рую П. с. на M.

Кривая, к-рую описывает в $(P_n)_{x_0}$ точка, определяемая первым вектором $e_0(t)$ решения $\{e_\alpha(t)\}$ системы (6), наз. *разверткой* кривой L. Кривая наз. *геодезической линией* П. с. на M, если ее развертка в нек-рой окрестности произвольной ее точки x является прямой пространства $(P_n)_x$. Уравнения $x^i=x^i(t)$ геодезич. линии определяются с помощью функций

$$\xi(t) = (\omega^i)_{x(t)}(\dot{x}(t))$$

из системы

$$d\xi^i + \xi^j(\theta_j^i)_{x(t)}(\dot{x}(t)) = \vartheta_{x(t)}(\dot{x}(t))\,\xi^i,$$

где ϑ — нек-рая 1-форма. В репере, где $\omega^i=dx^i$, $\xi^i=\dot{x}^i$, эта система имеет вид

$$\frac{d^2x^a}{(dx^n)^2} = -Q^a\left(\frac{dx^1}{dx^n}, \ldots, \frac{dx^{n-1}}{dx^n}\right) + \\ + \frac{dx^a}{dx^n} Q^n\left(\frac{dx^1}{dx^n}, \ldots, \frac{dx^{n-1}}{dx^n}\right), \qquad (7)$$

где Q^a и Q^n — многочлены 2-го порядка, коэффициенты к-рых есть функции от $x^1, \ldots, x^n$.

Теорема Картана: если на гладком многообразии M задана система кривых, локально определяемая системой дифференциальных уравнений вида (7), то существует одна и только одна нормальная П. с., для к-рой эта система кривых является системой геодезич. линий.

Теория П. с. дает, таким образом, средство для инвариантного исследования систем дифференциальных уравнений специального вида. П. с. полезны также при исследовании геодезических (или проективных) отображений пространств аффинной связности. П. с. сводится к *аффинной связности*, если на M существуют локальные поля реперов, относительно к-рых $\omega_i^0 = P_{ij}\omega_0^j$. Для каждой аффинной связности на M существует единственная нормальная П. с., имеющая общие геодезич. линии, из к-рой она может быть получена. Две аффинные связности геодезически (или проективно) эквивалентны, если их нормальные П. с. совпадают. В частности, аффинная связность на M при $\dim M>2$ проективно евклидова тогда и только тогда, когда ее тензор проективной кривизны K_{ikl} обращается в нуль.

Лит.: [1] Cartan E., «Bull. Soc. math. France», 1924, t. 52, p. 205—41; [2] его же, Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective, P., 1937; [3] его же, Пространства аффинной, проективной и конформной связности, пер. с франц., Казань, 1962; [4] Kobayashi S., Nagano T., «J. Math. and Mech.», 1964, v. 13, № 2, p. 215—35. *Ю. Г. Лумисте.*

ПРОЕКТИВНАЯ СХЕМА — замкнутая подсхема проективного пространства P_k^n; в однородных координатах $x_0, \ldots, x_n$ на P_k^n проективная схема задается системой однородных алгебраич. уравнений:

$$f_1(x_0, \ldots, x_n) = 0, \ \ldots, \ f_r(x_0, \ldots, x_n) = 0.$$

Каждая П. с. является полной (компактной в случае $k=\mathbb{C}$); обратно, полная схема проективна, если на ней есть обильный обратимый пучок. Имеются и другие критерии проективности.

Обобщением понятия П. с. служит проективный морфизм. Морфизм схем $f\colon X \to Y$ наз. *проективным* (а X — схемой, проективной над Y), если X является замкнутой подсхемой проективного расслоения $P_Y(\mathscr{E})$, где $\mathscr{E}$ — локально свободный $\mathscr{O}_Y$-модуль. Композиция проективных морфизмов проективна. Проективность морфизма сохраняется и при замене базы; в частности, слои проективного морфизма являются проективными схемами (но не обратно). Если схема X проективна, а $X \to Z$ — конечный сюръективный морфизм, то и Z проективна.

Любая П. с. (над Y) может быть получена при помощи конструкции проективного спектра. Ограничиваясь случаем аффинной базы, $Y = \operatorname{Spec} R$; пусть $A = \bigoplus_{i \geqslant 0} A_i$ — градуированная R-алгебра, причем R-модуль A_1 имеет конечный тип и порождает алгебру A, и пусть $\operatorname{Proj}(A)$ — множество однородных простых идеалов $p \subset A$, не содержащих A_1. Снабженное естественной топологией и структурным пучком множество $\operatorname{Proj}(A)$ является проективной Y-схемой; более того, любая проективная Y-схема имеет такой вид.

Лит.: [1] Мамфорд Д., Алгебраическая геометрия, т. 1 — Комплексные проективные многообразия, пер. с англ., М., 1979; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 47—112. *В. И. Данилов.*

ПРОЕКТИВНОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество точек проективного пространства P^n, определенного над полем k, имеющее (в однородных координатах) вид

$$V(I) = \{(a_0, \ldots, a_n) \in P^n \mid f(a_0, \ldots, a_n) = 0 \text{ для любого } f \in I\}.$$

Здесь I — однородный идеал в кольце многочленов $k[X_0, \ldots, X_n]$. (Идеал I однороден, если из $f \in I$ и $f = \sum f_i$, где все f_i — однородные многочлены степени i, следует, что все $f_i \in I$.)

Свойства П. а. м.:

1) $V\left(\sum_{i \in S} I_i\right) = \bigcap_{i \in S} V(I_i)$;

2) $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$;

3) если $I_1 \subset I_2$, то $V(I_2) \subset V(I_1)$;

4) $V(I) = V(\sqrt{I})$,

где $\sqrt{I}$ — радикал идеала I. Из свойств 1)—3) следует, что на $V(I)$ можно ввести топологию Зариского. Если $I = \sqrt{I}$, то I однозначно представляется в виде пересечения однородных простых идеалов:

$$I = \mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_s$$

и

$$V(I) = V(\mathfrak{P}_1) \cup \ldots \cup V(\mathfrak{P}_s).$$

В случае, когда I — однородный простой идеал, П. а. м. $V(I)$ наз. проективным многообразием.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1—2, М., 1963.

Вик. С. Куликов.

ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ — распространение на проективную геометрию понятия изгибания (наложения) в метрич. теории поверхностей, дано Г. Фубини (G. Fubini, 1916) (обобщение этого понятия на геометрию любой группы преобразований получил Э. Картан, E. Cartan, 1920) с использованием понятия т. н. качения одной поверхности по другой.

Пусть G — группа преобразований пространства E. Поверхность S' налагается на поверхность S (или катится по S) в геометрии группы G, если между их точками устанавливается взаимно однозначное соответствие так, что каждой паре соответствующих точек $M \in S$, $M' \in S'$ можно присоединить преобразование $g \in G$, к-рое переводит S' в положение S. При этом требуется, чтобы

1) M' совмещалась с M;

2) каждая кривая $l' \in S'$, проходящая через M, имела в этой точке касание n-го порядка с соответствующей

кривой $l \in S$ (т. е. расстояние между точками M'^* и M^*, близкими к общей точке $M'=M$, будет бесконечно малым порядка $n+1$ по сравнению с расстоянием их от общей точки). Соответствие S и S', характеризующееся числом n, наз. наложением n-го порядка.

Содержащееся здесь понятие расстояния не вносит ограничения на геометрию группы. Однако здесь речь идет о порядке касания кривых в несколько более тесном, чем обычно, смысле слова (отличие состоит в том, что соответствие между точками обеих кривых уже установлено наложением, тогда как обычно оно устанавливается при определении порядка касания).

Пусть, далее, G — группа проективных преобразований и пусть S и S' проективно налагаются. Тогда П. и. есть преобразование поверхности S с сохранением проективного линейного элемента

$$ds = \frac{F_3}{F_2},$$

где F_2 и F_3 — *Фубини формы* (при этом здесь — наложимость 2-го порядка). И оказывается, что, кроме линейчатых поверхностей, только т. н. поверхности R (см. [1]) допускают нетривиальное П. и.

Проективная геометрия занимает некое среднее положение между метрической, где, вообще говоря, всякая поверхность может изгибаться, и аффинной, где понятие изгибания не имеет места: любые две поверхности допускают наложение 1-го порядка и никакие две различные не могут иметь наложение 2-го порядка.

Лит.: [1] Фиников С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.— Л., 1937; [2] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976.

М. И. Войцеховский.

ПРОЕКТИВНОЕ МЕРООПРЕДЕЛЕНИЕ — введение в подмножествах *проективного пространства* методами проективной геометрии такой метрики, при к-рой эти подмножества оказываются изоморфными евклидову, гиперболическому или эллиптическому пространствам. Это достигается выделением из класса всех *проективных преобразований* таких преобразований, к-рые порождают в этих подмножествах группу преобразований, изоморфную соответствующей группе движений. Наличие движений позволяет «откладывать» отрезки от данной точки в данном направлении и тем самым ввести понятие длины отрезка.

Чтобы получить евклидово мероопределение в n-мерном проективном пространстве P, выделяют в нем одну $(n-1)$-мерную гиперплоскость π, называемую несобственной гиперплоскостью, и устанавливают в этой гиперплоскости эллиптическое полярное соответствие П точек и $(n-2)$-мерных гиперплоскостей (т. е. полярное соответствие, при к-ром никакая точка не принадлежит соответствующей ей $(n-2)$-мерной плоскости).

Пусть E_n — подмножество проективного пространства P, получающееся удалением из него несобственной гиперплоскости; X, Y, X', Y' — точки, принадлежащие E_n. Два отрезка XY и $X'Y'$ наз. конгруэнтными, если существует проективное преобразование φ, переводящее точки X и Y соответственно в точки X' и Y', при к-ром сохраняется *поляритет* П.

Определенное таким образом понятие конгруэнтности отрезков позволяет в E_n ввести метрику евклидова пространства. Для этого в проективном пространстве P вводится система *проективных координат* с базисным симплексом $OA_1A_2 \ldots A_n$, причем точка O не принадлежит несобственной гиперплоскости π, а точки A_1, $A_2, \ldots, A_n$ принадлежат этой плоскости. Пусть точка O в этой системе имеет координаты $0, 0, \ldots, 0, 1$, а точки A_i, $i=1, 2, \ldots, n$, имеют координаты

$$x_1=0, x_2=0, \ldots, x_{i-1}=0, x_i=1, x_{i+1}=0, \ldots, x_{n+1}=0.$$

Тогда эллиптическое полярное соответствие П, заданное в гиперплоскости π, может быть записано в виде

$$u_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Матрица $\|a_{ij}\|$ этого соответствия будет симметрической, а соответствующая ей квадратичная форма

$$Q\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\sum a_{ij}x_ix_j$$

— положительно определенной. Пусть

$$X=(a_1:a_2:\ldots:a_n:a_{n+1}) \text{ и } Y=(b_1:b_2:\ldots:b_n:b_{n+1})$$

— две точки, принадлежащие E_n (то есть $a_{n+1}\neq 0$, $b_{n+1}\neq 0$). Можно положить:

$$\frac{a_1}{a_{n+1}}=x_1,\ \frac{a_2}{a_{n+1}}=x_2,\ \ldots,\ \frac{a_n}{a_{n+1}}=x_n;$$

$$\frac{b_1}{b_{n+1}}=y_1,\ \frac{b_2}{b_{n+1}}=y_2,\ \ldots,\ \frac{b_n}{b_{n+1}}=y_n.$$

Тогда расстояние ρ между точками X и Y определяется соотношением

$$\rho\,(X,\ Y)=\sqrt{Q\ (x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ \ldots,\ x_n-y_n)}.$$

Для установления П. м. в n-мерном гиперболич. пространстве в n-мерном проективном пространстве P рассматривается множество U внутренних точек действительной овальной гиперповерхности S 2-го порядка. Пусть $X,\ Y,\ X',\ Y'$ принадлежат множеству U, тогда отрезки XY и $X'Y'$ считаются конгруэнтными, если существует проективное преобразование пространства P, при к-ром гиперповерхность S отображается на себя, переводящее точки X и Y соответственно в точки X' и Y'. Введенное таким образом понятие конгруэнтности отрезков приводит к установлению во множестве U метрики гиперболич. пространства. Длина отрезка в этой метрике определяется соотношением

$$\rho\,(X,\ Y)=c\,|\ln\,(XYPQ)\,|,$$

где P и Q — точки пересечения прямой XY с гиперповерхностью S, а c — положительное число, связанное с кривизной пространства Лобачевского.

Для введения в проективном пространстве P эллиптич. метрики в этом пространстве рассматривается эллиптическое полярное соответствие П. Два отрезка XY и $X'Y'$ наз. конгруэнтными, если существует проективное преобразование φ, переводящее точки X и Y соответственно в точки X' и Y', при к-ром сохраняется поляритет П (т. е. для любой точки M и ее поляры m полярой точки $\varphi(M)$ будет $\varphi(m)$). Если эллиптическое полярное соответствие П задано соотношениями

$$u_i=\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1,$$

то матрица (a_{ij}) будет симметрической, а соответствующая ей квадратичпая форма — положительно определенной. Тогда если

$$X=(x_1:x_2:\ldots:x_n:x_{n+1}),\ Y=(y_1:y_2:\ldots:y_n:y_{n+1}),$$

то

$$\rho\,(X,\ Y)=\arccos\frac{|\,B\,(X,\ Y)\,|}{\sqrt{B\,(X,\ X)}\sqrt{B\,(Y,\ Y)}}\ ,$$

где B — билинейная форма с матрицей $\|a_{ij}\|$.

Во всех рассмотренных случаях (если дополнить действительное проективное пространство до комплексного проективного пространства) при проективных преобразованиях, определяющих конгруэнтность отрезков, т. е. движениях, остаются инвариантными нек-рые гиперповерхности 2-го порядка, наз. а б с о л ю т а м и. В случае евклидова мероопределения абсолютом будет мнимая $(n-2)$-мерная овальная поверхность 2-го порядка, в случае гиперболич. мероопределения — овальная $(n-1)$-мерная действительная гиперповерхность 2-го порядка, в случае эллиптич. мероопределения —

мнимая $(n-1)$-мерная овальная гиперповерхность 2-го порядка.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [2] Глаголев Н. А., Проективная геометрия, 2 изд., М., 1963; [3] Буземан Г., Келли П. Дж., Проективная геометрия и проективные метрики, пер. с англ., М., 1957. *П. С. Моденов, А. С. Пархоменко.*

ПРОЕКТИВНОЕ МНОЖЕСТВО — множество, к-рое может быть получено из *борелевских множеств* повторным применением операций проектирования и перехода к дополнению. П. м. классифицируются по классам, образующим проективную иерархию. Пусть $I=\omega^{\omega}$ — бэровское пространство (гомеоморфное пространству иррациональных чисел). Множество $P \subset I^m$ принадлежит: 1) классу A_1, если P есть проекция борелевского множества пространства I^{m+1}; 2) классу CA_n (P есть CA_n-множество), если его дополнение $I^m \setminus P$ есть A_n-множество ($n \geqslant 1$); 3) классу A_n (P есть A_n-множество), если P есть проекция CA_{n-1}-множества пространства I^{m+1}, $n \geqslant 2$; 4) классу B_n, если P принадлежит одновременно классам A_n и CA_n, $n \geqslant 1$. Те же классы получаются заменой проекции непрерывным образом (множества того же пространства I^m).

В силу *Суслина теоремы* класс A_1 совпадает с классом *А-множеств* (следовательно, класс CA_1 — с классом *СА-множеств*), а класс B_1 — с классом борелевских множеств. Для каждого класса A_n построено универсальное множество, и при его помощи доказана следующая теорема о проективной иерархии (теорема «существования», теорема «о непустоте классов»): $B_n \subset A_n \subset B_{n+1}$ (следовательно, $B_n \subset A_n \subset \subset B_{n+1}$), где каждое из включений — строгое. Мощность множества всех П. м. пространства I равна $2^{\aleph_0}$.

Каждое A_2-множество — объединение $\aleph_1$ борелевских множеств и, значит, счетно или имеет мощность $\aleph_1$ или $2^{\aleph_0}$ (см. [2], [7]). Для класса A_2 выполнены принципы униформизации и редукции, а для класса CA_2 — (первый) принцип отделимости. Каждый из проективных классов с номером $n \geqslant 2$ инвариантен относительно *А-операции*. Для каждого из классов A_n, CA_n существует *δs-операция*, дающая в точности все множества этого класса, исходя из замкнутых множеств. Изучение П. м. (даже второго класса) — трудная задача. Многие вопросы теории П. м. оказались неразрешимыми в классич. смысле, что полностью подтвердило предвидение (см. [6]): «область П. м. есть область, где принцип исключенного третьего уже не применим». Теория П. м. получила свое дальнейшее продвижение с привлечением сильных теоретико-множественных предположений, таких, как МС (существует измеримый кардинал), PD (аксиома проективной определимости), $V=L$.

В предположении МС: каждое A_2-множество измеримо (по Лебегу), обладает *Бэра свойством* и, если несчетно, содержит (непустое) совершенное подмножество; каждое A_3-множество может быть униформизировано A_4-множеством.

В предположении PD: 1) каждое П. м. измеримо, обладает свойством Бэра и, если несчетно, содержит совершенное подмножество, может быть униформизировано П. м., точнее: принцип униформизации выполнен для классов A_{2n} и CA_{2n+1}; 2) для классов A_{2n} и CA_{2n+1} выполнен принцип редукции, следовательно, для классов A_{2n+1} и CA_{2n} — принцип отделимости.

В предположении $V=L$: 1) существует несчетное CA-множество, не содержащее совершенного подмножества, и неизмеримое B_2-множество без свойства Бэра; 2) при $n \geqslant 2$ для класса A_n выполнен принцип униформизации.

Если для класса A_n выполнен принцип униформизации, то выполнен и принцип редукции. При $n \geqslant 3$ обратная импликация не доказуема в ZFC. Если существует неизмеримое (или без свойства Бэра) A_2-множество, то существует несчетное CA-множество, не содержащее совершенного подмножества. Если каждое несчетное

CA-множество содержит совершенное подмножество, то это же верно для каждого несчетного A_2-множества (см. [7]).

Отмеченные результаты справедливы не только для пространства I, но и для числовой прямой и, вообще, для любого полного сепарабельного метрич. пространства. Имеет место следующая теорема о топологич. инвариантности П. м.: гомеоморфный образ П. м. данного класса, расположенный в том же или любом другом полном сепарабельном метрич. пространстве, есть П. м. того же класса.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., «C. r. Acad. sci.», 1925, v. 180, p. 1572 (пер.: [6], с. 304—306); [2] Sierpiński W., «Fund. math.», 1925, t. 7, p. 237—43; [3] Куратовский К., Топология, пер. [с англ.], т. 1, М., 1966; [4] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [5] Sierpiński W., Les ensembles projectifs et analytiques, P., 1950; [6] Лузин Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958, с. 242, 268; [7] Jech T., Set theory, N.Y., 1978; [8] Hinman P., Recursion theoretic hierarchies, B., 1978; [9] Новиков П. С., Избр. труды, М., 1979; [10] Козлова З. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 2, с. 223—60; [11] Канторович Л. В., Ливенсон Е. М., «Fund. math.», 1932, t. 18, p. 214—79; [12] Martin D., в кн.: Handbook of mathematical logic, Amst., 1977, p. 783—815; [13] Moschovakis Y., в кн.: Proc. of the Inter. Congr. of Mathem. (Vancouver, 1974), v. 1, Montreal, 1975, p. 251—57; [14] Кановей В. Г., «Докл. АН СССР», 1980, т. 253, № 4, с. 800—03; [15] Любецкий В. А., в сб.: Исследования по теории множеств и неклассич. логикам, М., 1976, с. 96—122; [16] Kechris A., в кн.: Logic colloquim'77, Amst., 1978, p. 155—60; [17] Mauldin R., «Mathematika», 1976, v. 23, № 2, p. 151—55; [18] Marcus S., «Math. Nachr.», 1959, Bd 17, № 3—6, S. 143—50; [19] Козлова З. И., Филиппов В. П., «Изв. ВУЗов. Матем.», 1978, № 7, с. 33—39.

А. Г. Елькин.

ПРОЕКТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ группы G — гомоморфизм этой группы в группу $PGL(V)$ проективных преобразований проективного пространства $P(V)$, связанного с векторным пространством V над полем k.

С каждым П. п. φ группы G связано центральное расширение этой группы

$$1 \longrightarrow k^* \xrightarrow{i} E_\varphi \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1, \qquad (*)$$

где p — естеств. проекция группы $GL(V)$ на $PGL(V)$, i — вложение мультипликативной группы поля k в $GL(V)$ в виде скалярных матриц, а $E_\varphi = p^{-1}(\varphi(G))$. Каждое сечение s проекции p над $\varphi(G)$ задает отображение

$$\Psi = s \circ \varphi : G \longrightarrow GL(V),$$

обладающее свойством

$$\Psi(g_1 g_2) = c(g_1, g_2)\, \Psi(q_1)\, \Psi(q_2),$$

где c: $G \times G \to k^*$ — двумерный коцикл на группе G. Класс когомологий h этого коцикла не зависит от выбора сечения s. Он определяется П. п. φ и определяет класс эквивалентности расширения (*). Условие $h=0$ необходимо и достаточно для того, чтобы П. п. φ получалось факторизацией линейного представления группы G.

П. п. естественным образом возникают при изучении линейных представлений расширений групп. Важнейшие примеры П. п.: спинорное представление ортогональной группы и представление Вейля симплектич. группы. На П. п. непосредственно переносятся определения эквивалентности и неприводимости линейных представлений. Классификация неприводимых П. п. конечных групп получена И. Шуром (I. Schur, 1904).

П. п. наз. **унитарным**, если пространство V гильбертово, а отображение Ψ можно выбрать так, чтобы оно принимало значение в группе $U(V)$ унитарных операторов в V. Изучались унитарные неприводимые П. п. топологич. групп [4]; для связной группы Ли G их изучение сводится к изучению унитарных неприводимых представлений односвязной группы Ли $\tilde{G}$, алгебра Ли к-рой является центральным расширением алгебры

Ли $\mathfrak{g}$ группы G с помощью d-мерной коммутативной алгебры Ли, где $d = \dim H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Кертис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [3] Mackey G. W., «Acta math.», 1958, v. 99, p. 265—311; [4] Bargmann V., «Ann. Math.», 1947, v. 48, p. 568—640. *А. А. Кириллов.*

ПРОЕКТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — взаимно однозначное отображение F *проективного пространства* Π_n на себя, сохраняющее отношение порядка частично упорядоченного (по включению) множества всех подпространств Π_n, т. е. отображение Π_n в себя такое, что

1) если $S_p \subset S_q$, то $F(S_p) \subset F(S_q)$;

2) для каждого $\tilde{S}_p$ существует S_p такое, что $F(S_p) = \tilde{S}_p$;

3) $S_p = S_q$ тогда и только тогда, когда $F(S_p) = F(S_q)$.

При П. п. сохраняются сумма и пересечение подпространств, точки отображаются в точки, независимость точек сохраняется. П. п. образуют группу, наз. проективной группой. Примеры П. п.: *коллинеация, перспектива, гомология.*

Пусть пространство Π_n интерпретируется как совокупность подпространств $P_n(K)$ левого векторного пространства $A_{n+1}(K)$ над телом K; полулинейным преобразованием A_{n+1} в себя наз. пара $(\overline{F}, \varphi)$, состоящая из автоморфизма $\overline{F}$ аддитивной группы A_{n+1} и автоморфизма φ тела K такого, что для любых $a \in A_{n+1}$ и $k \in K$ имеет место: $\overline{F}(ka) = \varphi(k)\, \overline{F}(a)$; в частности, полулинейное преобразование $(\overline{F}, \varphi)$ является линейным, если $\varphi(k) = k$. Полулинейное преобразование $(\overline{F}, \varphi)$ индуцирует П. п. F. Обратное утверждение — первая основная теорема проективной геометрии: если $n \geqslant 2$, то каждое П. п. F индуцируется нек-рым полулинейным преобразованием $(\overline{F}, \varphi)$ пространства $A_{n+1}(K)$.

Лит.: [1] Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, пер. с англ., М., 1955; [2] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1954. *М. И. Войцеховский.*

ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО — совокупность всех подпространств инцидентностной структуры $\pi = \{\mathcal{P}, \mathcal{L}, I\}$, где элементы множества $\mathcal{P}$ наз. точками, а элементы множества $\mathcal{L}$ — прямыми, I — отношение инцидентности. Подпространством инцидентностной структуры π наз. подмножество S множества $\mathcal{P}$, для к-рого справедливо условие: если $p, q \in S$ и $p \neq q$, то множество точек прямой, проходящей через точки p и q, также принадлежат S. Инцидентностная структура π удовлетворяет следующим требованиям:

1) для любых двух различных точек p и q существует единственная прямая L такая, что pIL, qIL;

2) каждая прямая инцидентна по крайней мере с тремя точками;

3) если две различные прямые L, M пересекаются в точке p и выполнено qIL и rIL, а sIM, tIM, то прямые, проходящие через пары точек r, t и s, q, пересекаются.

Подпространство S порождено множеством s точек из $\mathcal{P}$ (пишут $S = \langle s \rangle$), если S является пересечением всех подпространств, содержащих s. Множество точек s наз. независимым, если для любого $x \in s$ имеет место $x \notin \langle s \setminus \{x\} \rangle$. Упорядоченное максимальное и независимое множество точек подпространства S наз. базисом S, а число его элементов $d(S)$ — размерностью подпространства S. Подпространство размерности 0 является точкой, размерности 1 — *проективной прямой*. Подпространство размерности 2 наз. *проективной плоскостью*.

В П. п. определены операции сложения и пересечения подпространств. Суммой $P_m + P_k$ подпространств P_m и P_k наз. наименьшее из подпространств, содержащее и P_m, и P_k. Пересечением $P_m \cap P_k$ подпространств

P_m и P_k наз. наибольшее из подпространств, содержащееся и в P_m, и в P_k. Размерности подпространств P_m, P_k, их суммы и пересечения связаны соотношением

$$m+k=d\,(P_m\cap P_k)+d\,(P_m+P_k).$$

Для любого P_m существует P_{n-m-1} такое, что $P_m\cap\cap P_{n-m-1}=P_{-1}=\varnothing$ и $P_m+P_{n-m-1}=P_n$ (P_{n-m-1} — дополнение P_m в P_n), и если $P_m\subset P_r$, то

$$(P_m+P_k)\cap P_r=P_m+P_k\cap P_r$$

для любого P_k (дедекиндово правило), т. е. относительно введенных операций П. п. является дедекиндовой решеткой с дополнениями.

П. п. размерности больше двух дезаргово (см. *Дезарга предложение*), а следовательно, изоморфно П. п. (левому или правому) над подходящим телом k (см. [1]). $P_n^l(k)$ (напр., левое) размерности n над телом k — совокупность линейных подпространств нек-рого $(n+1)$-мерного левого линейного пространства $A_{n+1}^l(k)$ над телом k; точками $P_n^l(k)$ являются прямые $A_{n+1}^l(k)$, т. е. множества классов эквивалентности слева строк $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, составленных из элементов тела k и не равных одновременно нулю (строки $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ эквивалентны слева, если существует такое $\lambda\in k$, что $x_i=\lambda y_i$, $i=0, 1, \ldots, n$); подпространствами $P_m^l(k)$, $m=1, \ldots, n$, являются $(m+1)$-мерные подпространства $A_{m+1}^l(k)$. Можно установить нек-рое соответствие между левым $P_n^l(k)$ и правым $P_n^r(k)$ П. п., при к-ром подпространству $P_s^l(k)$ соответствует $P_{n-s-1}^r(k)$ (подпространства $P_s^l(k)$ и $P_{n-s-1}^r(k)$ наз. дуальными друг другу), пересечению подпространств соответствует сумма, а сумме — пересечение. Если нек-рое утверждение, основанное только на свойствах линейных подпространств, их пересечений и сумм, справедливо для $P_n^l(k)$, то справедливо и соответствующее утверждение для $P_n^r(k)$. Это соответствие между свойствами пространств $P_n^l(k)$ и $P_n^r(k)$ наз. принципом двойственности для П. п. (см. [2]).

Конечное тело необходимо коммутативно, следовательно, конечное П. п. размерности больше двух и порядка q изоморфно П. п. над *Галуа полем* $PG(n, q)$. Конечное П. п. $P(n, q)$ содержит $(q^{n+1}-1)/(q-1)$ точек и $\prod_{i=0}^{r}(q^{n+1-i}-1)/\prod_{i=0}^{r}(q^{r+1-i}-1)$ подпространств размерности r (см. [4]).

Коллинеацией П. п. является перестановка ее точек, к-рая отображает прямые в прямые, при этом подпространства отображаются на подпространства. Нетривиальная коллинеация П. п. имеет не более одного центра и не более одной оси. Группа коллинеаций конечного П. п. $PG(n, p^h)$ имеет порядок, равный

$$hp^{hn(n+1)/2}\prod_{i=1}^{n+1}(p^{hi}-1).$$

Каждое П. п. $PG(n, q)$ допускает циклическую транзитивную группу коллинеаций (см. [3]).

Корреляцией δ П. п. является перестановка подпространств, к-рая меняет включения, т. е. если $S\subset T$, то $S^\delta\supset T^\delta$. П. п. допускает корреляцию, только если оно конечномерно. Важное значение в проективной геометрии играет корреляция порядка два, наз. *поляритетом*.

Лит.: [1] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [2] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1954; [3] Dembowski P., Finite geometries, В.—[а. о.], 1968; [4] Segre В., Lectures on modern geometry, Roma, 1961. *В. В. Афанасьев.*

ПРОЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ — взаимно однозначное соответствие между элементами *проективного пространства* $\Pi_n(K)$ (проективными подпространствами S_q) и классами эквивалентных упорядоченных конечных подмножеств элементов тела K. П. к. подпространств S_q при $q>0$ (наз. также грассмановыми координатами) определяются через координаты точек (0-мерных подпространств), лежащих в S_q, и потому достаточно определить П. к. точек проективного пространства.

Пусть в совокупности строк $(x^0, x^1, \ldots, x^n)=x$ не равных одновременно нулю элементов тела K (к-рые наз. также однородными координатами точек) введено отношение эквивалентности слева (справа): $x\sim y$, если существует $\lambda\in K$ такое, что $x^i=\lambda y^i$ $(x^i=y^i\lambda)$, $i=0, \ldots, n$. Тогда совокупность классов эквивалентности находится во взаимно однозначном соответствии с совокупностью точек $\mathcal{P}$ проективного пространства $P_n^l(K)$ $(P_n^r(K))$. Если $\mathcal{P}$ интерпретируется как множество прямых левого (правого) векторного пространства $A_{n+1}^l(K)$ $(A_{n+1}^r(K))$, то однородные координаты точки M имеют смысл координат векторов, принадлежащих прямой l, представляющей эту точку, а П. к.— совокупности всех таких координат.

В общем случае П. к. точек проективного пространства Π_n относительно нек-рого базиса вводятся чисто проективными средствами (при обязательном выполнении в Π_n *Дезарга предложения*) следующим образом.

Множество σ_n $(n+1)$ независимых точек $A_0, \ldots, A_n$ пространства Π_n наз. симплексом, при этом точки $A_0, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ также независимы и определяют нек-рое подпространство $S_{n-1}=\Sigma^i$, наз. гранью этого симплекса. Существует нек-рая точка E, не лежащая ни на одной из граней Σ^i. Пусть i_0, $i_1, \ldots, i_n$ — любая перестановка чисел $0, 1, \ldots, n$. Точки $A_{i_{k+1}}, \ldots, A_{i_n}$, $k\geqslant 0$, и E оказываются независимыми и определяют нек-рое S_{n-k}. Далее, точки $A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}$ определяют тоже нек-рое S_k, а так как суммой S_k и S_{n-k} является все пространство Π_n, то S_k и S_{n-k} имеют в точности одну общую точку $E_{i_0\ldots i_k}$, не лежащую ни в одном из $(k-1)$-мерных подпространств, определяемых точками $A_{i_0}, \ldots, A_{i_{j-1}}, A_{i_{j+1}}, \ldots, A_{i_k}$; при этом $E_{i_0\ldots i_k}, A_{i_{k+1}}, \ldots, A_{i_n}$ также независимы. Таким образом получается $2^{n+1}-1$ точек $E_{i_0\ldots i_k}$, включая точки $E_i=A_i$ и $E_{0\ldots n}=E$, к-рые и образуют репер пространства $S_n=\Pi_n$; симплекс σ_n является его остовом.

На каждой прямой A_iA_j имеются три точки A_i, A_j, E_{ij}, пусть они играют роль точек O, U, E в определении тела K рассматриваемой проективной геометрии (см. *Проективная алгебра*). Тела $K(A_i, E_{ij}, A_j)$ и $K(A_k, E_{kl}, A_l)$ изоморфны друг другу, причем изоморфизм устанавливается проективным соответствием T_{ij}^{kl} между точками двух прямых A_iA_j и A_kA_l таким, что точки A_k, E_{kl}, A_l отвечают точкам A_i, E_{ij}, A_j. Элемент тела K, соответствующий точке P прямой A_iA_j, наз. проективной координатой p точки P в шкале (A_i, E_{ij}, A_j). В частности, П. к. E_{ij} всегда равна 1, а П. к. P в шкале (A_j, E_{ij}, A_i) есть $p^*=p^{-1}$.

Пусть P — точка пространства, не лежащая ни на одной из граней симплекса σ_n: $A_0, \ldots, A_n$, образующего вместе с нек-рой точкой E репер R. Если использовать точку P вместо E в вышеприведенной конструкции репера, то получится последовательность точек P_i, P_{ij}, $P_{ijk}, \ldots$, где $P_{i_0\ldots i_k}$ лежит в подпространстве, определяемом $A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}$ (но не лежит ни в одной из граней симплекса σ_k, образованного этими точками). Пусть p_{ij} — координата точки P_{ij} (лежащей на A_iA_j) в шкале (A_i, E_{ij}, A_j). Тогда если i, j, k попарно различны, то

1) $p_{ij}p_{ji}=1$;

2) $p_{ik}p_{kj}p_{ji}=1$.

Пусть x_0 — произвольный элемент K, отличный от нуля, а $x_i = x_0 p_{i0}$, $x \neq 0$, $i=1, \ldots, n$ (при этом оказывается, что $p_{ij} = x_j^{-1} x_i$). Тогда совокупность эквивалентных между собой строк, определяемых различными элементами x_0, и дает П. к. точки P относительно репера R.

Пусть P лежит в подпространстве S_k, определяемом точками $A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}$, но не лежит ни в одной из граней симплекса, определяемого этими точками. Пусть совокупность эквивалентных строк $(x_{i_0}, \ldots, x_{i_k})$ является П. к. точки P относительно репера R подпространства S_k, определяемого симплексом σ_k и точкой $E_{i_0 \ldots i_k}$. Тогда П. к. точки P относительно репера R задаются следующим образом: $y_i = x_i$, $i = i_0, \ldots, i_k$; $y_i = 0$, $i \neq \neq i_0, \ldots, i_k$.

Любая совокупность эквивалентных между собой слева (справа) $(n+1)$ строк, построенная вышеизложенным способом, соответствует одной и только одной точке P пространства Π_n и определяет поэтому в нем П. к.

Лит.: [1] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1954. *М. И. Войцеховский.*

ПРОЕКТИВНЫЙ МОДУЛЬ — модуль P, удовлетворяющий любому из следующих эквивалентных условий: 1) для любого эпиморфизма модулей $\alpha: B \to C$ и любого гомоморфизма $\beta: P \to C$ найдется такой гомоморфизм $\gamma: P \to C$, что $\beta = \alpha\gamma$; 2) модуль P является прямым слагаемым свободного модуля; 3) функтор Hom $(P, -)$ точен; 4) любой эпиморфизм модулей $A \to P$ расщепляется.

Теорема Капланского [2], утверждающая, что всякий П. м. является прямой суммой П. м. со счетным числом образующих, сводит изучение структуры П. м. к счетному случаю. П. м. с конечным числом образующих изучаются в алгебраической K-теории. Простейшим примером П. м. является свободный модуль. Над кольцами, разложимыми в прямую сумму, всегда существуют П. м., отличные от свободных. Совпадение классов проективных и свободных модулей доказано для локальных колец [2], колец многочленов над полем от нескольких переменных (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Kaplansky J., «Ann. Math.», 1958, v. 68, № 2, p. 372—77; [3] Суслин А. А., «Докл. АН СССР», 1976, т. 229, № 5, с. 1063—66; [4] Quillen D., «Invent. Math.», 1976, v. 36, p. 167—71. *В. Е. Говоров.*

ПРОЕКТИВНЫЙ ОБЪЕКТ категории — понятие, формализующее свойства ретрактов (или прямых слагаемых) свободных групп, свободных модулей и т. п. Объект P категории $\mathfrak{K}$ наз. проективным, если для всякого эпиморфизма $\nu: A \to B$ и произвольного морфизма $\gamma: P \to B$ найдется такой морфизм $\gamma': P \to A$, что $\gamma = \gamma'\nu$. Другими словами, объект P проективен, если основной функтор $H_P(X) = H(P, X)$ из $\mathfrak{K}$ в категорию множеств $\mathfrak{S}$ переводит эпиморфизмы из $\mathfrak{K}$ в эпиморфизмы категории $\mathfrak{S}$, т. е. в сюръективные отображения.

Примеры. 1) В категории множеств всякий объект проективен. 2) В категории групп проективны свободные группы и только они. 3) В категории ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ левых модулей над ассоциативным кольцом Λ с единицей модуль проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым свободного модуля. Описание колец, над к-рыми всякий проективный модуль свободен, составляет содержание проблемы Серра. 4) В категории ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ все модули проективны тогда и только тогда, когда кольцо Λ классически полупросто. 5) В категории функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{S})$ из малой категории $\mathfrak{D}$ в категорию множеств $\mathfrak{S}$ каждый объект проективен тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}$ — дискретная категория.

В определении П. о. иногда предполагают, что функтор H_P переводит в сюръективные отображения не все эпиморфизмы, а морфизмы выделенного класса $\mathfrak{E}$. В частности, если $\mathfrak{E}$ — класс допустимых эпиморфизмов бикатегории $\mathfrak{K}=(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$, то P наз. допустимым проективным объектом. Напр., в нек-рых многообразиях групп свободные группы этого многообразия являются допустимыми П. о. относительно класса всех сюръективных гомоморфизмов, но не являются П. о., поскольку существуют несюръективные эпиморфизмы.

Дуальным к понятию П. о. является понятие инъективного объекта. Фундаментальная роль проективных и инъективных объектов была выявлена при построении гомологич. алгебры. В категориях модулей всякий модуль представим в виде фактормодуля проективного модуля. Это свойство позволяет строить т. н. проективные резольвенты и исследовать различные типы гомологич. размерности.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966. *М. Ш. Цаленко.*

ПРОЕКТИВНЫЙ ПРЕДЕЛ, обратный предел,— конструкция, возникшая первоначально в теории множеств и топологии, а затем нашедшая широкое применение во многих разделах математики. Наиболее часто используется П. п. семейства однотипных математич. структур, индексированных элементами нек-рого предупорядоченного множества. Пусть I — множество, снабженное отношением предпорядка $<$, и каждому элементу $i \in I$ сопоставлено множество X_i, а каждой паре (i, j), $i, j \in I$, в к-рой $i<j$, сопоставлено отображение $\varphi_{ij} X_i \to X_j$, причем φ_{ii}, $i \in I$,— тождественные отображения и $\varphi_{ij}\varphi_{jk}=\varphi_{ik}$ при $i<j<k$. Множество X наз. проективным пределом семейства множеств X_i и отображений φ_{ij}, если выполнены следующие условия: а) существует такое семейство отображений π_i: $X \to X_i$, что $\pi_i\varphi_{ij}=\pi_j$ для любой пары $i<j$; б) для любого семейства отображений $\alpha_i: Y \to X_i$, $i \in I$, произвольного множества Y, для к-рого выполнены равенства $\alpha_i\varphi_{ij}=\alpha_j$ при $i<j$, существует такое однозначно определенное отображение α: $Y \to X$, что $\alpha_i=\alpha\pi_i$ для всех $i \in I$. Конструктивно П. п. можно описать следующим образом: рассматривается прямое произведение $\prod_{i \in I} X_i$ и в нем выделяется подмножество всех функций f: $I \to \bigcup_{i \in I} X_i$, для к-рых выполняются равенства $\varphi_{ij}(f(i))=f(j)$ при $i<j$. Это подмножество является П. п. семейства X_i. Если все X_i снабжены дополнительной однотипной структурой, к-рая переносится на $\prod_{i \in I} X_i$, то эта же структура индуцируется и в П. п. Поэтому можно говорить о П. п. групп, модулей, топологич. пространств и т. д.

Естественным обобщением понятия П. п. является понятие П. п. функтора. Пусть $F: \mathfrak{D} \to \mathfrak{K}$ — одноместный ковариантный функтор из малой категории $\mathfrak{D}$ в произвольную категорию $\mathfrak{K}$. Объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$, вместе с морфизмами π_D: $X \to F(D)$, $D \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$, наз. проективным пределом (обратным пределом, или просто пределом) функтора F, если выполнены следующие условия: а) $\pi_D F(\varphi)=\pi_{D'}$ для любого морфизма φ: $D \to D'$; б) для всякого семейства морфизмов $\alpha_D: Y \to F(D)$, для к-рого $\alpha_D F(\varphi)=\alpha_{D'}$ при $\varphi: D \to D'$, существует такой единственный морфизм $\alpha: Y \to X$, что $\alpha_D=\alpha\pi_{D'}$ для любого $D \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$. Обозначение: $\lim F=(X, \pi_D)$. Аналогично определяется проективный предел контравариантного функтора.

Примеры П. п. 1) Пусть I — дискретная категория. Тогда для произвольного функтора F: $I \to \mathfrak{K}$ проективный предел функтора F совпадает с *прямым произведением* семейства объектов $F(i)$, $i \in I$.

2) Пусть $\mathfrak{D}$ — категория с двумя объектами A, B и двумя неединичными морфизмами α, β: $A \to B$. Тогда предел любого функтора $F: \mathfrak{D} \to \mathfrak{K}$ является *ядром* пары морфизмов $F(\alpha)$, $F(\beta)$.

Если в категории $\mathfrak{K}$ существуют произведения любых семейств объектов и ядра пар морфизмов, то в $\mathfrak{K}$ существует предел любого функтора $F: \mathfrak{D} \to \mathfrak{K}$ из произвольной малой категории $\mathfrak{D}$. *М. Ш. Цаленко.*

ПРОЕКТИВНЫЙ СПЕКТР кольца — *схема* $X = \mathrm{Proj}(R)$, сопоставляемая градуированному кольцу $R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n$. Как множество точек X представляет собою множество однородных простых идеалов $p \subset R$, таких, что $p \not\supset \sum_{n=1}^{\infty} R_n$. Топология на X определяется следующим базисом открытых множеств: $X_f = \{p \mid f \notin p\}$ для $f \in R_n$, $n > 0$. Структурный пучок $\mathcal{O}_X$ локально окольцованного пространства X задается на базисных открытых множествах так: $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) = [R_{(f)}]_0$, т. е. подкольцо элементов степени 0 кольца частных $R_{(f)}$ по мультипликативной системе $\{f^n\}_{n \geq 0}$.

Наиболее важным примером П. с. является $P^n = \mathrm{Proj}\ \mathbb{Z}[T_0, T_1, \ldots, T_n]$. Множество его k-значных точек P_k^n для любого поля k находится в естественном соответствии с множеством точек проективного n-мерного пространства над полем k.

Если все кольца R_m как R_0-модули натянуты на $\underbrace{R_1 \otimes \ldots \otimes R_1}_{m}$, то на $\mathrm{Proj}(R)$ определена еще дополнительная структура. А именно, покрытие $\{X_f \mid f \in R_1\}$ и единицы f/g определяют 1-коцикл Чеха на $\mathrm{Proj}(R)$, к-рому отвечает обратимый пучок, обозначаемый через $\mathcal{O}(1)$. Через $\mathcal{O}(n)$ принято обозначать n-ю тензорную степень $\mathcal{O}(1)^{\otimes n}$ пучка $\mathcal{O}(1)$. Существует канонич. гомоморфизм $R_n \xrightarrow{\varphi_n} \Gamma(X, \mathcal{O}(n))$, указывающий геометрич. смысл градуировки кольца R (см. [1]). Если, напр., $R = k[T_0, \ldots, T_n]$, то $\mathcal{O}(1)$ соответствует пучку гиперплоских сечений в P_k^n.

Лит.: [1] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [2] Grothendieck A., Eléments de géométrie algébrique, t. 1—4, P., 1960—1967 (Publ. IHES). *В. В. Шокуров.*

ПРОЕКТОР, проекционный оператор,— линейный оператор P в векторном пространстве X такой, что $P^2 = P$. *М. И. Войцеховский.*

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ — методы отыскания приближенного решения операторного уравнения в заданном подпространстве, основанные на проектировании уравнения на нек-рое (вообще говоря, другое) подпространство. П. м. являются основой построения различных вычислительных схем решения краевых задач, в том числе метода конечных элементов и метода коллокации.

Пусть L — оператор, область определения $D(L)$ к-рого лежит в банаховом пространстве X, а область значений $R(L)$ — в банаховом пространстве Y. Для решения уравнения

$$Lx = y \tag{1}$$

проекционным методом выбирают две последовательности подпространств $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$,

$$X_n \subset D(L) \subset X, \ Y_n \subset Y, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а также проекторы P_n, проектирующие Y на Y_n. Уравнение (1) заменяется приближенным

$$P_n L x_n = P_n y, \ \ x_n \in X_n. \tag{2}$$

В случае $X = Y$, $X_n = Y_n$, $n = 1; 2, \ldots$ П. м. (2) принято называть методом Галеркина (иногда последний метод трактуется более широко, см. *Галеркина метод*).

Имеет место теорема сходимости П. м. для линейных уравнений (для случая конечномерных подпространств X_n и Y_n). Пусть L линеен и переводит

$D(L)$ на $R(L)$ взаимно однозначно, причем $D(L)$ и $R(L)$ плотны в X и Y соответственно; подпространства X_n и Y_n конечномерны, $\dim X_n = \dim Y_n$, $n=1, 2, \ldots$, а проекторы P_n ограничены равномерно по n, то есть $\|P_n\| \leqslant c = \text{const}$, $n=1, 2, \ldots$ Тогда следующее условие а) равносильно набору условий б) и в):

а) начиная с нек-рого $n=n_0$ существует единственное решение x_n уравнения (2) и $\|Lx_n - y\| \to 0$ при любом $y \in F$;

б) последовательность подпространств LX_n предельно плотна в Y, т. е. расстояние $d(y, LX_n) \to 0$ при $n \to \infty$ для $\forall y \in F$;

в) $\tau \equiv \varliminf_{n\to\infty} \tau_n > 0$, где $\tau_n = \inf_{y_n \in LX_n,\ \|y_n\|=1} \|P_n y_n\|$.

Быстрота сходимости при соблюдении условий б) и в) характеризуется неравенством

$$d(y, LX_n) \leqslant \| Lx_n - y \| < (1 + c/\tau_n)\, d(y, LX_n). \quad (3)$$

В случае, когда пространства X и Y гильбертовы, а P_n и Q_n — ортопроекторы, проектирующие Y соответственно на Y_n и LX_n, условие в) равносильно условию

в') $\theta \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \theta_n < 1$, где $\theta_n = \|P_n - Q_n\|$ — раствор подпространств Y_n и LX_n; вместо (3) получается оценка

$$\| y - Q_n y \| \leqslant \| Lx_n - y \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\theta_n^2}} \| y - Q_n y \|.$$

В случае $Y_n = LX_n$ (метод наименьших квадратов) $\theta_n = 0$, $n=1, 2, \ldots$, и критерием сходимости является условие б).

Теорема дает условие сходимости невязки $\|Lx_n - y\|$. Если L^{-1} ограничен и $y \in R(L)$, то из сходимости невязки следует сходимость самих приближений x_n к решению $x = L^{-1}y$ уравнения (1). Из теоремы можно извлечь удобный критерий сходимости метода Галеркина; для метода Галеркина — Петрова следует дополнительно наложить условие типа в').

Пусть l — линейная ограниченная форма, а a — билинейная ограниченная форма на действительном гильбертовом пространстве H (или полуторалинейная в случае комплексного H). Допускается, что a представима в виде $a = \hat{a} + b$, так что

$$\hat{a}(u, u) \geqslant \gamma \| u \|^2 \quad \forall u \in H, \quad \gamma = \text{const} > 0,$$

а билинейная форма b вполне непрерывна, т. е. слабые сходимости $u_n \to u$, $v_n \to v$ в H влекут за собой сходимость $b(u_n, v_n) \to b(u, v)$ (симметричность форм a, $\hat{a}$, b не обязательна). Пусть поставлена задача: найти $u \in H$ такое, что

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H. \quad (4)$$

Метод Галеркина решения задачи (4) заключается в следующем. Выбирают какие-нибудь (замкнутые) подпространства $H_n \subset H$, $n=1, 2, \ldots$, и находят $u_n \in H_n$ такое, что

$$a(u_n, v_n) = l(v_n) \quad \forall v_n \in H_n. \quad (5)$$

Имеет место следующая теорема: пусть $\{H_n\}$ предельно плотна в H, выполнены наложенные выше на a условия, и задача (4) имеет единственное решение $u \in H$ (равносильное условие: однородная задача отыскания u из условия $a(u, v) = 0$ $\forall v \in H$ имеет лишь тривиальное решение $u=0$); тогда задача (5) при всех достаточно больших n имеет единственное решение $u_n \in H_n$ и $\|u_n - u\| \to 0$ с оценкой

$$\| u - O_n u \| \leqslant \| u_n - u \| \leqslant c \| u - O_n u \|,$$

где O_n — ортопроектор, проектирующий H на H_n, $c = \text{const}$.

В применении к краевым задачам для уравнений эллиптич. типа в качестве H, как правило, выбирается энергетич. пространство главной части соответствующего дифференциального оператора.

Лит.: [1] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.

Г. М. Вайникко.

ПРОЕКЦИОННЫЙ СПЕКТР — индексированное *направленным множеством* $(A, >)$ семейство *симплициальных комплексов* $\{N_\alpha : \alpha \in A\}$ такое, что для каждой пары индексов α, $\alpha' \in A$, для к-рых $\alpha' > \alpha$, определено симплициальное отображение (проекция) $\pi_\alpha^{\alpha'}$ комплексов $N_{\alpha'}$ на комплекс N_α. При этом требуется, чтобы $\pi_\alpha^{\alpha''} = \pi_\alpha^{\alpha'} \pi_{\alpha'}^{\alpha''}$, когда $\alpha'' > \alpha' > \alpha$ (условие транзитивности). Тогда и говорят, что задан проекционный спектр $S = \{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, A\}$, или просто $S = \{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$. Это понятие принадлежит П. С. Александрову (см. [2]); оно, по сути, эквивалентно общему понятию обратной системы, или обратного спектра (см. *Спектр* в категории). Действительно, каждый комплекс N_α естественным образом превращается в частично упорядоченное множество симплексов этого комплекса, а следовательно в топологическое T_0-пространство N_α. При этом проекции $\pi_\alpha^{\alpha'}$ становятся непрерывными отображениями. Обратно, если $\{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$ — обратная система из топологических T_0-пространств и непрерывных проекций $\pi_\alpha^{\alpha'}$, то каждое T_0-пространство N_α естественно превращается в частично упорядоченное множество, а это частично упорядоченное множество реализуется в виде симплициального комплекса N_α. При этом непрерывные проекции $\pi_\alpha^{\alpha'}$ становятся симплициальными отображениями. Таким образом, П. с. — это в точности обратная система из топологических T_0-пространств (см. [3]).

Понятия «П. с.» (а следовательно, и обратной системы пространств) и нерва системы множеств (см. ниже) оказали огромное влияние не только на развитие топологии, но и на развитие всей теоретико-множественной математики. После этого стало возможным говорить о теории аппроксимации сложных топологических и алгебро-топологич. объектов более простыми.

Если для каждого $\alpha \in A$ комплекс N_α конечен, то спектр $S = \{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$ наз. конечным проекционным спектром. С каждым П. с. $S = \{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$ связываются следующие понятия. Всякий набор симплексов $\xi = \{t_\alpha : \alpha \in A\}$ по одному из каждого комплекса N_α спектра S наз. нитью этого спектра, если при $\alpha' > \alpha$ всегда $\pi_\alpha^{\alpha'} t_{\alpha'} = t_\alpha$, где t_α, $t_{\alpha'} \in \xi$. Множество $\overline{S}$ всех нитей с топологией, базу к-рой образуют множества вида $Ot_{\alpha_0} = \{\xi' \in S : t'_{\alpha_0} \leqslant t_{\alpha_0}\}$, где $\alpha_0 \in A$, $t_{\alpha_0} \in N_{\alpha_0}$ произвольны, а $t'_{\alpha_0} \leqslant t_{\alpha_0}$ означает, что симплекс t'_{α_0} нити ξ' в комплексе N_{α_0} является гранью симплекса t_{α_0}, наз. полным пределом спектра S. Та же топология получается, если индуцировать на $\overline{S}$ топологию тихоновского произведения $\Pi\{\mathcal{N}_\alpha : \alpha \in A\}$, где $\mathcal{N}_\alpha$ — соответствующее комплексу N_α топологическое T_0-пространство. Нить $\xi' = \{t'_\alpha\}$ объемлет нить $\xi = \{t_\alpha\}$, если для каждого $\alpha \in A$ выполнено $t'_\alpha \geqslant t_\alpha$. Нить ξ наз. максимальной (соответственно минимальной), если не существует никакой отличной от нее нити, для к-рой она была бы объемлемой (соответственно объемлющей). Подпространство полного предельного пространства $\overline{S}$ спектра S, состоящее из всех максимальных (соответственно из всех минимальных) нитей, наз. верхним (соответственно нижним) пределом спектра S. Полный предел $\overline{S}$ является полурегулярным (в другой терминологии —

семирегулярным) T_0-пространством, а верхний $\hat{S}$ и нижний $\check{S}$ пределы суть T_1-пространства. Если S — конечный П. с., то $\widetilde{S}$, $\hat{S}$ и $\check{S}$ — бикомпактные пространства.

В основе всей теории аппроксимации топологич. пространств полиэдрами, вернее симплициальными комплексами, лежит введенное П. С. Александровым (см. [1]) понятие нерва системы множеств. Н е р в о м данной системы α множеств наз. симплициальный комплекс N_α, вершины к-рого взаимно однозначно соответствуют элементам системы α таким образом, что каждое множество вершин определяет симплекс комплекса N_α тогда и только тогда, когда соответствующие этим вершинам множества системы α имеют непустое пересечение.

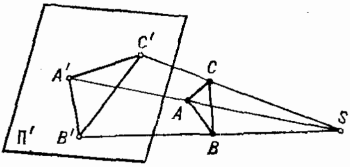
Удобнее рассматривать т. н. канонич. покрытия пространства X. Локально конечное (конечное) покрытие α пространства X наз. к а н о н и ч е с к и м, если его элементы — *канонические множества* (замкнутые) (в другой терминологии — регулярные замкнутые) с дизъюнктными открытыми ядрами. Если из двух канонич. покрытий пространства X покрытие α' следует за покрытием α, т. е. α' вписано в α (в этом случае $\alpha' > \alpha$), то определено естественное симплициальное отображение $\pi_\alpha^{\alpha'}$ (проекция) нерва $N_{\alpha'}$ на нерв N_α, к-рое возникает, если каждому элементу $A^{\alpha'} \in \alpha'$ покрытия α' поставить в соответствие тот единственный элемент A^α покрытия α, для к-рого $A^\alpha \supset A^{\alpha'}$. Пусть $\mathfrak{A}(X)$ (соответственно $\mathfrak{A}_0(X)$) обозначает совокупность всех локально конечных (конечных) канонич. покрытий пространства X. Для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}(X)$ (соответственно $\alpha \in \mathfrak{A}_0(X)$) обозначена вся совокупность всех локально конечных (конечных) канонич. покрытий пространства X. Для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}(X)$ (соответственно $\alpha \in \mathfrak{A}_0(X)$) рассматривается комплекс N_α, являющийся нервом покрытия α. Если $\alpha' > \alpha$, то определено симплициальное отображение $\pi_\alpha^{\alpha'} : N_{\alpha'} \to N_\alpha$. Полученный таким образом П. с. $S = \{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$ наз. п о л н ы м (соответственно к о н е ч н ы м) П. с. топологич. пространства X. П. С. Александров [2] еще в 1928 доказал, что каждый метрический (n-мерный) компакт является верхним пределом (n-мерного) конечного П. с. над счетным множеством индексов. А. Г. Курош в 1934 доказал, что каждый бикомпакт есть верхний предел своего конечного П. с. В 1961 В. И. Пономарев доказал, что каждый паракомпакт есть верхний предел своего полного П. с., то есть спектра, построенного над множеством $\mathfrak{A}(X)$ всех локально конечных канонич. покрытий пространства X. В. И. Пономарев ввел понятие р а с с л а б л е н и я симплициального комплекса K, понимая под этим всякий замкнутый подкомплекс $K' \subset K$, содержащий все вершины комплекса K. Нульмерный комплекс, состоящий из всех вершин комплекса K, наз. его п о л н ы м р а с с л а б л е н и е м (или о с т о в о м). Заменяя все комплексы данного П. с. их (полным) расслаблением и сохраняя при этом проекции, получают (полное) расслабление спектра. Исследование неприводимых совершенных отображений паракомпактов сводится к исследованию расслаблений их полных П. с. При этом предел полного расслабления полного П. с. паракомпакта X есть т. н. *абсолют* $\dot{X}$ паракомпакта X, а предел полного расслабления конечного П. с. любого регулярного пространства — бикомпактное расширение Стоуна — Чеха $\beta\dot{X}$ абсолюта $\dot{X}$ этого регулярного пространства. Всякий конечный абстрактный П. с. эквивалентен спектру над нек-рым направленным измельчающимся множеством конечных канонических покрытий нек-рого полурегулярного бикомпактного T_0-пространства, т. е. получается из этого спектра посредством конечного числа следующих операций: 1) замена спектра изоморфным ему спектром, 2) замена *спектра его конфинальной частью,* 3) *замена спектра* спектром, содержащим данный в качестве конфинальной части (теорема Зайцева).

Понятия нерва и П. с. доставили средства для редукции свойств общих пространств, и прежде всего паракомпактов, бикомпактов и метрич. компактов, к свойствам комплексов и их симплициальных отображений. Это позволило определить и изучать гомологические и когомологические инварианты общих пространств, а не только полиэдров (см. *Александрова — Чеха гомологии и когомологии*, *Спектральные гомологии*). Все это привело к синтезу геометрических и теоретико-множественных идей в топологии.

Лит.: [1] Александров П. С., «C.r. Acad. sci.», 1927, t. 184, p. 317—20; [2] его же, «Ann. Math.», 1929, v. 30, p. 101—87; [3] его же, «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 1, с. 5—57; [4] его же, Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [5] Александров П. С., Пономарёв В. И., в кн.: General topology and its relations to modern analysis and algebra, v. 2, Prague, 1967, p. 25—30; [6] Александров П. С., Федорчук В. В., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 3, с. 3—48; [7] Пономарев В. И., «Матем. сборник», 1963, т. 60, № 1, с. 89—119; [8] Зайцев В. И., «Труды Моск. матем. об-ва», 1972, т. 27, с. 129—93.

В. И. Пономарев.

ПРОЕКЦИЯ — термин, связанный с операцией проектирования (проецирования), к-рую можно определить следующим образом (см. рис.): выбирают произвольную точку S пространства в качестве центра проектирования и плоскость Π', не проходящую через точку S, в качестве плоскости проекций.



Чтобы спроектировать точку A (прообраз) пространства на плоскость Π' через центр проекций S, проводят прямую SA до ее пересечения в точке A' с плоскостью Π'. Точку A' (образ) наз. проекцией точки A; проекцией фигуры F наз. совокупность П. всех ее точек. Описанная П. наз. центральной (или конической). П. с бесконечно удаленным центром проектирования наз. параллельной (или цилиндрической). Если плоскость П. расположена перпендикулярно к направлению проектирования, то П. наз. ортогональной (или прямоугольной).

Параллельные П. широко используются в *начертательной геометрии* для получения различных видов изображений (см., напр., *Аксонометрия*, *Перспектива*). Имеются специальные виды П. на плоскость, сферу и др. поверхности (см., напр., *Картографическая проекция*, *Стереографическая проекция*). *А. Б. Иванов.*

ПРОИЗВЕДЕНИЕ семейства объектов категории — понятие, описывающее на языке морфизмов конструкцию декартова произведения. Пусть A_i, $i \in I$, — индексированное семейство объектов категории $\mathfrak{K}$. Объект $P \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ (вместе с морфизмами $\pi_i : P \to A_i$, $i \in I$) наз. произведением семейства объектов A_i, $i \in I$, если для всякого семейства морфизмов $\alpha_i : X \to A_i$, $i \in I$, существует такой единственный морфизм $\alpha : X \to P$, что $\alpha\pi_i = \alpha_i$, $i \in I$. Морфизмы π_i наз. проекциями произведения; П. обозначается $\prod^{\times}_{i \in I} A_i(\pi_i)$, или $\prod_{i \in I} A_i$, или $A_1 \times \ldots \times A_n$ в случае $I = \{1, \ldots, n\}$. Морфизм α, входящий в определение П., иногда обозначается $\prod_{i \in I} \alpha_i$ или $(\times)_{i \in I}\alpha_i$. П. семейства A_i, $i \in I$, определено однозначно с точностью до изоморфизма; оно ассоциативно и коммутативно. Понятие П. семейства объектов двойственно понятию *копроизведения* семейства объектов.

Произведением пустого семейства объектов является правый нуль (терминальный объект) категории. В большинстве категорий структуризованных множеств (категории множеств, групп, топологич. пространств и т. д.) понятие П. семейства объектов совпадает с понятием декартова (прямого) П. этих объектов. Тем не менее такое совпадение не является обязательным: в категории периодических абелевых групп П. семейства групп G_i, $i \in I$, есть периодич. часть декартова П. этих групп, к-рая в общем случае отличается от самого декартова П.

В категориях с нулевыми морфизмами для любого произведения $P = \prod_{i \in I}^{\times} A_i(\pi_i)$ существуют такие однозначно определенные морфизмы $\sigma_i : A_i \to P$, $i \in I$, что $\sigma_i \pi_i = 1_{A_i}$, $\sigma_i \pi_j = 0$ при $i \neq j$. Если I конечно, то в абелевой категории $\pi_1\sigma_1 + \ldots + \pi_n\sigma_n = 1$ и П. семейства объектов $A_1, \ldots, A_n$ совпадает с их копроизведением.

Лит.: [1] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974. *М. Ш. Цаленко.*

ПРОИЗВОДНАЯ — одно из основных понятий математич. анализа. Пусть действительная функция $f(x)$ действительного переменного x определена в нек-рой окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (*)$$

Этот предел и наз. производной от функции $f(x)$ в точке x_0. Если положить $y = f(x)$,

$$x - x_0 = \Delta x, \; f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y,$$

то предел (*) запишется так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Используют также обозначения $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x_0)$ и нек-рые другие.

Операцию вычисления П. наз. дифференцированием. Если производная $f'(x_0)$ конечна, то функцию $f(x)$ наз. дифференцируемой в точке x_0. Функцию, дифференцируемую в каждой точке нек-рого множества, наз. дифференцируемой на этом множестве. Дифференцируемая функция всегда непрерывна. Однако существуют непрерывные функции, не имеющие П. во всех точках заданного промежутка (см. *Недифференцируемая функция*).

Пусть функция дифференцируема в нек-ром промежутке. Ее производная $f'(x)$ может оказаться при этом *разрывной функцией*. Однако по классификации Бэра (см. *Бэра классы*) она всегда является функцией 1-го класса и обладает свойством Дарбу: приняв два значения, принимает и все промежуточные.

Обобщением понятия П. является понятие П. по множеству. Пусть действительная функция $f(x)$ определена на нек-ром множестве E действительных чисел, x_0 — предельная точка этого множества, $x_0 \in E$, и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \to x_0,\, x \in E} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

к-рый и наз. производной от функции $f(x)$ по множеству E в точке x_0 и обозначают символом $f'_E(x_0)$. П. функции по множеству есть обобщение понятия П. Разновидностями этого обобщения являются понятия *односторонней производной*, *производного числа*, *аппроксимативной производной*.

Данное определение П. (и его обобщение), а также простейшие ее свойства почти без изменений распространяются на комплексные функции и вектор-функции действительного или комплексного переменного. Кроме того, существуют понятия П. скалярной функции точки евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (см. *Градиент*), П. функции множества по мере (в частности, по площади, по объему и т. п.), понятие П. распространяют на вектор-функции точки абстрактного пространства (см. *Дифференцирование отображения*).

О геометрич. и механич. истолковании П., о простейших правилах дифференцирования, о П. высших порядков, о частных П., а также лит. см. в ст. *Дифференциальное исчисление*. *Г. П. Толстов.*

ПРОИЗВОДНОЕ МНОЖЕСТВО — совокупность M' всех *предельных точек* множества M в топологич. пространстве. Множество M, совпадающее со своим П. м., наз. совершенным. *М. И. Войцеховский.*

ПРОИЗВОДНОЕ ПРАВИЛО вывода для данного исчисления — *вывода правило*, заключение к-рого выводимо из его посылок в рассматриваемом исчислении. Напр., в *высказываний исчислении* правило вывода

$$\frac{A \supset B,\ B \supset C}{A \supset C}$$

является П. п., поскольку в этом исчислении имеет место выводимость из посылок:

$$A \supset B,\ B \supset C \vdash A \supset C.$$

Всякое П. п. является *допустимым правилом*, но не всякое допустимое правило является П. п. Напр., *подстановки правило* в исчислении высказываний является допустимым правилом, но не производным.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *С. Н. Артемов.*

ПРОИЗВОДНОЕ ЧИСЛО, производное число Дини,— понятие теории функций действительного переменного. Верхним правым П. ч. Λ_α наз. верхний предел отношения $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ при $x_1 \to x$, где $x_1 > x$. Аналогично определяют нижнее правое λ_α, верхнее Λ_g и нижнее λ_g левые П. ч. Если $\Lambda_\alpha=\lambda_\alpha$ ($\Lambda_g=\lambda_g$), то $f(x)$ имеет в точке x одностороннюю правую (левую) производную. Обыкновенная производная существует, если все четыре П. ч. конечны и совпадают. П. ч. были введены У. Дини [1]. Как показал Н. Н. Лузин, если все четыре П. ч. конечны на нек-ром множестве, то функция имеет обычную производную всюду на этом множестве, кроме точек множества меры нуль.

Лит.: [1] Dini U., Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa, 1878; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949. *Т. П. Лукашенко.*

ПРОИЗВОДНЫЙ АВТОМОРФИЗМ в эргодической теории — преобразование T_X, определяющееся по автоморфизму T *пространства с мерой* (M, μ) и измеримому подмножеству положительной меры $X \subset M$, почти все точки к-рого под действием итераций T снова попадают в X. Для каждой такой точки x определяют $T_X(x)$ как ту точку траектории $T^n x$, в к-рой эта траектория впервые после x возвращается в X (согласно *Пуанкаре теореме* о возвращении, условие, чтобы почти все точки из X со временем снова возвращались в X, автоматически выполняется, если $\mu(M) < \infty$). Преобразование T_X оказывается автоморфизмом (точнее, автоморфизмом по mod 0) пространства X с индуцированной на нем мерой (последняя есть мера μ, рассматриваемая только на подмножествах X; если $\mu(X) < \infty$, то обыкновенно эту меру еще нормируют).

Обратно, если $\bigcup_{n \geqslant 0} T^n X = M$ (это условие автоматически выполняется, если автоморфизм T эргодичен), то исходный автоморфизм T восстанавливается (с точностью до сопряжения посредством нек-рого изоморфизма пространств с мерой) по T_X и **времени возвращения**

$$n_X(x)=\min\{n>0:T^n x\in X\}.$$

А именно, T есть *специальный автоморфизм*, построенный по T_X и n_X. *Д. В. Аносов.*

ПРОИЗВОДНЫЙ ФУНКТОР — функтор, «измеряющий» отклонение основного функтора от точного. Пусть $T(A, C)$ — аддитивный функтор из категории R_1-модулей и R_2-модулей в категорию R-модулей, ковариантный по первому аргументу и контравариантный по второму. Для инъективной резольвенты X модуля A и проективной резольвенты Y модуля C получают дважды градуированный комплекс $T(X, Y)$. Группы гомологий ассоциированного одинарного комплекса $T(A, C)$ не зависят от выбора резольвент, обладают функторными свойствами и наз. правыми производными функторами $R^nT(A, C)$ функтора $T(A, C)$. Основное свойство П. ф.— существование бесконечных точных последовательностей

$$\longrightarrow R^nT(A', C)\longrightarrow R^nT(A, C)\longrightarrow R^nT(A''C)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow R^{n+1}T(A', C)\longrightarrow\ldots$$
$$\longrightarrow R^nT(A, C'')\longrightarrow R^nT(A, C)\longrightarrow R^nT(A, C')\longrightarrow$$
$$\longrightarrow R^{n+1}(A, C'')\longrightarrow\ldots,$$

индуцированных короткими точными последовательностями

$$0\longrightarrow A'\longrightarrow A\longrightarrow A''\longrightarrow 0,$$
$$0\longrightarrow C'\longrightarrow C\longrightarrow C''\longrightarrow 0.$$

Левые П. ф. определяются двойственным образом. П. ф. функтора Hom обозначаются Ext^n_R. Функтор $\mathrm{Ext}^1_R(A, C)$ классифицирует все расширения модуля A с ядром C с точностью до эквивалентности (см. *Бэра умножение*, *Когомологии алгебр*).

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966. *В. Е. Говоров.*

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ, **генератриса**, числовой или функциональной последовательности $\{a_n(x)\}$ — сумма степенного ряда

$$F(x, w)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n(x)\, w^n$$

с положительным радиусом сходимости. Если известна П. ф., то для изучения последовательности $\{a_n(x)\}$ используются свойства коэффициентов Тейлора аналитич. функций. Для многочленов $\{P_n(x)\}$, ортогональных на интервале (a, b) с весовой функцией $h(x)$, при нек-рых общих условиях существует П. ф.

$$F(x, w)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, w^n,\quad x\in(a, b).$$

Для классических ортогональных многочленов П. ф. представляется в явном виде через весовую функцию $h(x)$ и используется для вычисления значений этих многочленов в отдельных точках, а также для вывода различных тождественных соотношений между этими многочленами и их производными.

В теории вероятностей П. ф. случайной величины ξ, принимающей целочисленные значения $\{n\}_0^\infty$ с вероятностями $\{P_\xi(n)\}$, определяется формулой

$$F(\xi, z)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} P_\xi(n)\, z^n,\quad |z|\leqslant 1.$$

С помощью П. ф. вычисляются распределения вероятностей случайной величины ξ, ее математич. ожидание и дисперсия:

$$P_{\xi}(n)=\frac{1}{n!}F_{z^n}^{(n)}(\xi,0),\ \mathsf{E}\xi=F_z'(\xi,1),$$

$$\mathsf{D}\xi=F_{z^2}''(\xi,1)+F_z'(\xi,1)-\left[F_z'(\xi,1)\right]^2.$$

П. ф. случайной величины ξ можно определить как математич. ожидание случайной величины z^{ξ}, то есть $F(\xi,z)=\mathsf{E}z^{\xi}$.

Лит.: [1] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [2] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967. *П. К. Суетин.*

ПРОИЗВОДЯЩИЙ ОПЕРАТОР полугруппы — производная в нуле от полугруппы линейных ограниченных операторов $T(t)$, $0<t<\infty$, действующих в комплексном банаховом пространстве X. Если $T(t)$ непрерывна по норме операторов, то она имеет вид $T(t)=e^{tA_0}$, где A_0 — ограниченный оператор,

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}[T(t)x-x]=A_0x \tag{1}$$

при любом $x\in X$ и A_0 есть П. о. $T(t)$. Обратно, если предел слева существует при всех $x\in X$, то $T(t)=e^{tA_0}$.

Более сложная картина возникает, когда $T(t)$ только *сильно непрерывная полугруппа*. В этом случае предел (1) существует не при всех x. Оператор A_0, определенный на линейном множестве $D(A_0)$ всех тех x, для к-рых предел существует, является линейным неограниченным оператором и наз. инфинитезимальным оператором. В частности, A_0 определен на всех элементах вида $\int_{\alpha}^{\beta}T(t)y\,dt$, α, $\beta>0$, $y\in X$. Если обозначить через X_0 замыкание объединения областей значений всех операторов $T(t)$, $t>0$, то $D(A_0)$ плотно в X_0 и, более того, $\bigcap_n D(A_0^n)$ плотно в X_0. Все значения оператора A_0 также лежат в X_0. Если оператор A_0 неограничен, то $D(A_0)$ является множеством первой категории в X_0.

Если в X_0 нет элементов x, на к-рых $T(t)x\equiv 0$, то оператор A_0 допускает замыкание $A=\bar{A}_0$, к-рое и наз. производящим оператором полугруппы $T(t)$. В этом случае при $x\in D(A)$

$$\begin{gathered}T(t)x-T(s)x=\int_s^t T(\tau)Ax\,d\tau,\\ \frac{dT(t)x}{dt}=A_0T(t)x=T(t)Ax.\end{gathered} \tag{2}$$

Равенство (2) определяет замкнутый оператор A, к-рый, вообще говоря, шире, чем замыкание A_0. Его иногда наз. обобщенным производящим оператором полугруппы $T(t)$.

На множестве D_R тех же $x\in X$, для к-рых сходится несобственный интеграл

$$\int_0^t T(s)x\,ds, \tag{3}$$

определен оператор

$$R(\lambda)x=\lim_{t\to 0}\int_t^{\infty}e^{-\lambda s}T(s)x\,ds$$

при $\operatorname{Re}\lambda>\omega$, где ω — тип полугруппы $T(t)$. Этот оператор обладает свойствами:

1) $R(\lambda)D_R\subset D_R$;
2) $R(\lambda)x-R(\mu)x=(\mu-\lambda)R(\lambda)R(\mu)x$;
3) $R(\lambda)(\lambda I-A_0)x=x$, $x\in D(A_0)$;
4) $(\lambda I-A)R(\lambda)x=x$, $x\in D_R\cap X_0$.

Если интеграл (3) абсолютно сходится при любом $x\in X$, то П. о. A существует тогда и только тогда, когда из $T(t)x\equiv 0$, $x\in X_0$, следует $x=0$; оператор $R(\lambda)$ ограничен, и, если $X_0=X$, он совпадает с *резольвентой* оператора A; для того чтобы A_0 был замкнутым ($A=A_0$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)\,x\,ds=x$$

при любом $x\in X_0$.

Основной задачей теории полугрупп операторов является установление связи между свойствами полугрупп и свойствами их П. о., причем последние обычно формулируются в терминах операторов $R(\lambda)$.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., М., 1962; [2] Забрейко П. П., Зафиевский А. В., «Докл. АН СССР», 1969, т. 189, № 5, с. 934—37; [3] его же, там же, 1970, т. 195, № 1, с. 24—27. *С. Г. Крейн.*

ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ ВАРИАЦИЯ — метод решения линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных систем (или уравнений). Этот метод позволяет записать в замкнутой форме *общее решение* неоднородной системы, если известно общее решение соответствующей однородной системы. Идея метода П. п. в. состоит в том, что произвольные постоянные, входящие в общее решение однородной системы, заменяются функциями независимой переменной, к-рые подбираются так, чтобы удовлетворить неоднородной системе. В конкретных задачах этот метод применялся еще Л. Эйлером (L. Euler) и Д. Бернулли (D. Bernoulli), но его полная разработка принадлежит Ж. Лагранжу [1].

Пусть рассматривается задача Коши для линейной неоднородной системы

$$\dot{x}=A(t)\,x+f(t),\quad x(t_0)=x_0, \tag{1}$$

где

$$A:(\alpha,\ \beta)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n),$$
$$f:(\alpha,\ \beta)\longrightarrow \mathbb{R}^n$$

— суммируемые на каждом конечном отрезке отображения, $t_0\in(\alpha,\ \beta)$. Если $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы

$$\dot{y}=A(t)\,y, \tag{2}$$

то $y=\Phi(t)c$, $c\in\mathbb{R}^n$,— общее решение этой системы. П. п. в. представляет собой замену переменных в системе (1):

$$x=\Phi(t)\,u$$

и приводит к формуле Коши для решения задачи (1):

$$x=\Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)\,x_0+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)\,f(\tau)\,d\tau,$$

к-рую наз. иногда формулой вариации (произвольных) постоянных (см. также *Линейное дифференциальное уравнение обыкновенное*).

Идею П. п. в. иногда удается использовать в более общей нелинейной ситуации для описания связи решений возмущенной полной системы и решений невозмущенной укороченной системы (см. [3], [4]). Напр., для решения $x(t)$ задачи

$$\dot{x}=A(t)\,x+f(t,\ x),\quad x(t_0)=x_0$$

(где A, f — непрерывные отображения и где обеспечивается условие единственности решения) справедлива формула П. п. в., являющаяся интегральным уравнением:

$$x(t)=\Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)\,x_0+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)\,f(\tau,\ x(\tau))\,d\tau;$$

здесь $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений системы (2).

Лит.: [1] Lagrange J., Œuvres, t. IV, P., 1869, p. 151—251; [2] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 5 изд., М., 1983; [3] Алексеев В. М., «Вестн.

Моск. ун-та», 1961, № 2, с. 28—36; [4] Рейзинь Л. Э., Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений, Рига, 1971.
Н. Х. Розов.

ПРОКОНЕЧНАЯ ГРУППА — топологическая группа, являющаяся *проективным пределом* системы конечных групп G_i, $i \in I$, снабженных дискретной топологией (I — предупорядоченное множество). П. г. G обозначается $\varprojlim G_i$. Как подпространство прямого произведения $\prod_{i \in I} G_i$, снабженного компактной топологией (базой окрестностей единицы является система ядер проекций $\prod_{i \in I} G_i \to G_i$), она замкнута и потому компактна.

Примеры. 1) Пусть I — множество целых чисел, бо́льших нуля, с естественным отношением порядка и $G_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$. Пусть $\tau_i^{i+1} : G_{i+1} \to G_i$ — естественный эпиморфизм и

$$\tau_i^j = \tau_i^{i+1} \tau_{i+1}^{i+2} \ldots \tau_{j-1}^j$$

для любых $i < j$. Тогда $\varprojlim G_i$ — (аддитивная) группа кольца $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел.

2) Всякая компактная аналитич. группа над полем p-адических чисел (напр., $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$) является (как топологич. группа) П. г.

3) Пусть G — абстрактная группа и $\{H_i, i \in I\}$ — семейство всех ее нормальных делителей конечного индекса. На I можно ввести отношение $\leqslant$, положив $i \leqslant j$, если $H_i \supseteq H_j$. Это отношение превращает I в предупорядоченное множество. Сопоставляя каждому $i \in I$ группу G/H_i и каждой паре $i \leqslant j$ из I — естественный гомоморфизм $\tau_i^j : G/H_j \to G/H_i$, получают П. г. $\hat{G} = \varprojlim G/H_i$, наз. ассоциированной с G П. г.; она является отделимым пополнением группы G относительно топологии, определенной подгруппами конечного индекса. Ядро естественного гомоморфизма $G \to \hat{G}$ является пересечением всех подгрупп конечного индекса. В этой конструкции можно было бы вместо семейства всех нормальных делителей конечного индекса рассматривать лишь те, индекс к-рых есть степень фиксированного простого числа p. Соответствующая группа обозначается $\hat{G}_p$ и является *про-р-группой*.

4) П. г. следующим образом естественно возникают в теории Галуа (вообще говоря, бесконечных) алгебраич. расширений полей. Пусть K/k — *Галуа расширение* и $\{K_i/k, i \in I\}$ — семейство всех конечных расширений Галуа поля k, лежащих в K. Тогда $K = \bigcup_{i \in I} K_i$. На I можно ввести отношение $\leqslant$, положив $i \leqslant j$, если $K_i \subseteq K_j$. Тогда I становится предупорядоченным множеством. Пусть $\mathrm{Gal}\, K_i/k$ — группа Галуа расширения K_i/k. Каждой паре $i \leqslant j$ из I сопоставляется естественный гомоморфизм

$$\tau_i^j : \mathrm{Gal}\, K_j/k \longrightarrow \mathrm{Gal}\, K_i/k.$$

Тогда соответствующая П. г. $\varprojlim \mathrm{Gal}\, K_i/k$ (абстрактно) изоморфна групце $\mathrm{Gal}\, K/k$, что позволяет считать $\mathrm{Gal}\, K/k$ П. г. Система подгрупп $\mathrm{Gal}\, K/K_i$ образует в $\mathrm{Gal}\, K/k$ систему окрестностей единицы (см. *Галуа топологическая группа*). Эта конструкция получает обобщение в алгебраич. геометрии при определении фундаментальной группы схемы. П. г. могут быть охарактеризованы как компактные вполне несвязные группы (см. *Компактная группа*), а также как компактные группы, у к-рых имеется множество открытых нормальных делителей, образующее систему окрестностей единицы. Теория когомологий П. г. (см. *Когомологии групп*, *Галуа когомологии*) играет важную роль в современной теории Галуа.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [2] Кох Х., Теория Галуа p-расширений, пер. с нем., М., 1973; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969. *В. Л. Попов.*

ПРОМЕЖУТОК, открытый промежуток, интервал,— множество точек, заключенных между двумя данными, т. е. удовлетворяющих условию вида $a<x<b$. П. не включает концов и обозначается (a, b), в отличие от отрезка $[a, b]$ (замкнутого П.), включающего концы, т. е. состоящего из точек $a \leqslant x \leqslant b$. *БСЭ-3.*

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ЛОГИКА высказываний — произвольное непротиворечивое множество пропозициональных формул, замкнутое относительно правила вывода *модус поненс* и правила подстановки и содержащее все аксиомы *интуиционистского исчисления высказываний I*.

Наиболее естественным способом задания П. л. являются промежуточные пропозициональные исчисления. Каждое такое исчисление задается указанием нек-рого числа классически общезначимых пропозициональных формул, добавляемых к аксиомам исчисления I.

Совокупность всех П. л. образует дистрибутивную решетку относительно включения $\subseteq$, причем конечно аксиоматизируемые П. л. образуют в ней подрешетку, в к-рую изоморфно вложима любая конечная дистрибутивная решетка.

П. л. L наз. разрешимой, если существует алгоритм, к-рый по каждой пропозициональной формуле A распознает, принадлежит A П. л. L или нет. Так, разрешимыми являются интуиционистская и классическая П. л. Вообще, всякая финитно аппроксимируемая (см. ниже) конечно аксиоматизируемая П. л. разрешима. Построен пример конечно аксиоматизируемой неразрешимой П. л. (см. [7]).

П. л. L наз. дизъюнктивной, если из $(A \vee B) \in L$ следует, что $A \in L$ или $B \in L$. Этим свойством обладает, напр., интуиционистская П. л., но не обладает классическая П. л. Существует бесконечно много дизъюнктивных П. л.

Интерполяционное свойство П. л. (теорема Крейга) состоит в том, что если формула $A \supset B$ принадлежит П. л. L, то существует формула C, содержащая только общие для A и B переменные и такая, что $(A \supset C) \in L$ и $(C \supset B) \in L$; если A и B не имеют общих переменных, то $\neg A \in L$ или $B \in L$. Показано, что интерполяционным свойством, кроме интуиционистской и классической П. л., обладают еще ровно пять П. л. (см. [6]).

Формула A наз. выразимой через формулы B_1, B_2, ... в П. л. L, если A можно получить из B_1, B_2, ... с помощью конечного числа замен на эквивалентные (в L) формулы и конечного числа подстановок ранее полученных формул вместо переменных. Список формул $\Sigma = \{B_1, B_2, \ldots\}$ функционально полон в П. л. L, если всякая формула выразима в L через Σ. Алгоритмическая проблема распознавания функциональной полноты любого списка формул разрешима для интуиционистской и нек-рых других П. л. (см. [3]). Другая алгоритмич. проблема — проблема распознавания выразимости A через Σ по данным формуле A и списку Σ — положительно решена лишь для нек-рых П. л.; она остается пока (1983) открытой для интуиционистской П. л.

Другой способ задания П. л. дает т. н. семантич. подход. Под семантикой здесь понимается нек-рое множество S структур (моделей) $\mathfrak{M}$, на к-рых определено отношение истинности $\mathfrak{M} \models_\theta A$ данной пропозициональной формулы A при данной оценке θ (оценка — отображение, сопоставляющее переменным формулы A нек-рые значения в $\mathfrak{M}$). Формула A, истинная в $\mathfrak{M}$ при любой оценке, наз. общезначимой на $\mathfrak{M}$ (обозначение $\mathfrak{M}\models A$). Если $S_1 \subseteq S$, то П. л. $L(S_1)$ есть совокупность всех формул, общезначимых на любой структуре $\mathfrak{M}\in S_1$. Для данной семантики S естественно определяется отношение семантического следования $\Gamma\models_S A$, где Γ состоит из формул; это отношение означает, что для любой структуры $\mathfrak{M}\in S$ из $\mathfrak{M}\models B$ для всех $B\in\Gamma$ следует $\mathfrak{M}\models A$. Семантики S_1 и S_2 наз. эквивалентными, если отношения $\models_{S_1}$ и $\models_{S_2}$ совпадают. Основное требование, предъявляемое к семантике,— это ее корректность: из $\Gamma\vdash_l A$ должно следовать $\Gamma\models_S A$. Все упоминаемые ниже семантики корректны. Другое важное свойство семантики — полнота. П. л. L наз. полной относительно семантики S, если $A\in L \Leftrightarrow L\models_S A$.

Алгебраическая семантика S_A состоит из псевдобулевых алгебр, т. е. алгебр вида

$$\mathfrak{M}=(M,\ \bar{\&},\ \bar{\vee},\ \bar{\supset},\ \bar{\neg};\ 1,\ 0),$$

где $\bar{\neg}$ — унарная, а $\bar{\&}$, $\bar{\vee}$, $\bar{\supset}$ — бинарные операции на M, соответствующие связкам $\neg$, &, $\vee$, $\supset$, причем $(M,\ \bar{\&},\ \bar{\vee})$ — дистрибутивная решетка, а 1 и 0 — наибольший и наименьший элементы в M. Операции $\bar{\supset}$ и $\bar{\neg}$ удовлетворяют свойствам: для любых $a,\ b,\ c\in M$

$$a\leqslant(b\,\bar{\supset}\,c)\Leftrightarrow(a\,\bar{\&}\,b)\leqslant c \quad\text{и}\quad \bar{\neg}\,a=(a\,\bar{\supset}\,0).$$

Отношение $\mathfrak{M}\models_\theta A$ здесь означает, что A принимает в $\mathfrak{M}$ значение 1 при данной оценке θ.

Каждая П. л. полна относительно конечно порожденных псевдобулевых алгебр. Если П. л. L полна относительно множества конечных псевдобулевых алгебр (одной конечной псевдобулевой алгебры), то она наз. финитно аппроксимируемой (соответственно табличной). Простейшей табличной П. л. является классическая П. л. Дизъюнктивные П. л., в частности интуиционистская, табличными не являются. Имеется пример не финитно аппроксимируемой конечно аксиоматизируемой П. л. (см. [3]).

Семантика Крипке S_K состоит из *Крипке моделей*, имеющих в данном случае вид $(\mathfrak{M},\ \theta)$, где $\mathfrak{M}=(M,\ \leqslant)$ — *частично упорядоченное множество*, наз. также остовом, или шкалой, а значениями оценки θ являются подмножества M, причем для любых $\alpha,\ \beta\in M$ из $\alpha\in\theta(p_i)$ и $\alpha\leqslant\beta$ следует $\beta\in\theta(p_i)$.

Между семантиками S_A и S_K имеется тесная связь (см. [5]), однако они не эквивалентны; в частности, существуют П. л., не полные относительно S_K (см. [3]).

Конструктивные семантики — это семантика *реализуемости* S_R (см. [1]) и семантика финитных задач S_F. Эти семантики не полны даже для интуиционистской П. л., более того, существуют формулы, общезначимые в S_R и не общезначимые в S_F, и наоборот.

Предикатные П. л. определяются по аналогии с П. л. высказываний, т. е. это — расширения интуиционистской логики предикатов LI, содержащиеся в классич. логике предикатов. В отличие от пропозициональных П. л. все предикатные П. л. неразрешимы. Семантика предикатных П. л. аналогична соответствующей семантике П. л. высказываний (см. [2]).

Лит.: [1] Новиков П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977; [2] Драгалин А. Г., Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979; [3] Кузнецов А. В., в кн.: Логический вывод, М., 1979, с. 5—33; [4] его же, «Математические исследования», 1975, т. 10, в. 2, с. 150—58; [5] Эсакиа Л. Л., в кн.: Логический вывод, М., 1979, с. 147—72; [6] Максимова Л. Л., «Алгебра и логика», 1977, т. 16, с. 643—81; [7] Шехтман В. Б., «Докл. АН СССР», 1978, т. 240, № 3, с. 549—52; [8] Hosoi T., Ono H., «J. Tsuda College», 1973, v. 5, p. 67—82. *С. К. Соболев.*

ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ ЯКОБИАН — набор комплексных торов, определяемых нечетномерными когомологиями комплексного кэлерова многообразия, геометрия к-рых тесно связана с геометрией самого многообразия.

Пусть $H^n(X, \mathbb{R})$ (соответственно $H^n(X, \mathbb{Z})$) — пространство n-мерных когомологий с действительными (соответственно с целыми) коэффициентами комплексно-аналитич. кэлерова многообразия X. На веществ. торе

$$T^n(X) = H^n(X, \mathbb{R})/H^n(X, \mathbb{Z})$$

при нечетном n можно двумя различными способами ввести комплексную структуру, используя представление n-мерных когомологий с комплексными коэффициентами в виде прямой суммы $H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$ пространств $H^{p,q}$ гармонич. форм типа (p, q). Пусть $P_{p,q}: H^n(X, \mathbb{C}) \to H^{p,q}$ — проекция, а

$$C_W = \sum_{p+q=n} i^{p-q} P_{p,q} \quad \text{и} \quad C_G = \sum_{p+q=n} i^{\frac{p-q}{|p-q|}} P_{p,q}$$

— операторы, переводящие когомологии с действительными коэффициентами в себя. Полагая

$$(a+ib)\,\omega = a\omega + bC_W(\omega) \quad \text{и} \quad (a+ib)\,\omega = a\omega + bC_G(\omega),$$

для любого ω из $H^n(X, \mathbb{R})$, a, $b \in \mathbb{R}$, получают комплексные структуры на $T^n(X)$, первая из к-рых $T^n_W(X)$ наз. **промежуточным якобианом Вейля**, а вторая $T^n_G(X)$ — **промежуточным тором Гриффитса**. Если X — многообразие Ходжа, то ходжева метрика на X канонически определяет на П. я. $T^n_W(X)$ структуру поляризованного абелева многообразия, что не всегда имеет место для $T^n_G(X)$. С другой стороны, при голоморфной вариации многообразия X промежуточные торы $T^n_G(X)$ варьируются голоморфно [2], а П. я. Вейля этим свойством могут не обладать. Cup-произведение, задающее спаривание пространств $H^n(X, \mathbb{R})$ и $H^{d-n}(X, \mathbb{R})$, где $d = \dim_{\mathbb{R}} X$, определяет комплексное спаривание торов $T^n_G(X)$ и $T^{d-n}_G(X)$ и двойственность между абелевыми многообразиями $T^n_W(X)$ и $T^{d-n}_W(X)$. В случае, когда $\dim_{\mathbb{C}} X = 2k+1$, П. я. $T^{2k+1}_W(X)$ является самодвойственным абелевым многообразием с главной поляризацией, а $T^{2k+1}_G(X)$ — главным тором.

П. я. служит важным инвариантом кэлеровых многообразий. Если для двух многообразий X и Y из совпадения $T^n_W(X) = T^n_W(Y)$ (соответственно $T^n_G(X) = T^n_G(Y)$) следует, что $X \simeq Y$, то говорят, что для X выполнена **теорема Торелли**. Теорема Торелли выполняется, напр., для алгебраич. кривых. С помощью П. я. была доказана нерациональность общей кубики в проективном пространстве P^4 (см. [1]) и нек-рых других многообразий Фано.

Лит.: [1] Clemens C., Griffiths Ph., «Ann. Math.», 1972, v. 95, № 2, p. 281—356; [2] Griffiths Ph., «Amer. J. math.», 1968, v. 90, p. 568—626, 805—65; [3] Weil A., «Amer. J. math.», 1952, v. 74, p. 865—94. *Вик. С. Куликов.*

ПРОНОРМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА — подгруппа H группы G, удовлетворяющая следующему условию: если K — подгруппа из G, сопряженная с H, то K сопряжена с H в подгруппе, порожденной H и K. *Силова подгруппы* в конечных группах, *Холла подгруппы* и *Картера подгруппы* в конечных разрешимых группах пронормальны. Понятие П. п. тесно связано с понятием *абнормальной подгруппы*. Любая абнормальная подгруппа пронормальна, а нормализатор П. п. абнормален.

Лит.: [1] Шеметков Л. А., Формации конечных групп, М., 1978. *В. Д. Мазуров.*

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ — символ *формального языка*, служащий для обозначения произвольного высказывания. *С. К. Соболев.*

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ СВЯЗКА — символ *формального языка*, служащий для обозначения *логической операции*, с помощью к-рой из данных высказываний можно получать новые высказывания. Важнейшими П. с. являются конъюнкция & (иначе $\wedge$), дизъюнкция $\vee$, импликация $\supset$ (иначе $\to$ или $\Rightarrow$), отрицание $\neg$ (иначе $\sim$), эквивалентность $\equiv$ (иначе $\leftrightarrow$ или $\Leftrightarrow$). Эти П. с. соответствуют в русском языке выражениям «и», «или», «влечет», «не верно, что» и «равносильно». Иногда рассматриваются и другие П. с., напр. т. н. *Шеффера штрих.*

Символ $\equiv$ обычно вводится не как независимая П. с., а как сокращение:

$$A \equiv B \leftrightarrows (A \supset B) \& (B \supset A). \quad (1)$$

Если же в языке имеется пропозициональная константа $\perp$, обозначающая «ложь», то отрицание можно рассматривать как сокращение: $\neg A \leftrightarrows (A \supset \perp)$.

П. с. &, $\vee$, $\supset$ и $\neg$ не являются независимыми в классич. логике, поскольку в ней верны эквивалентности:

$$A \& B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \equiv \neg(A \supset \neg B), \quad (2)$$

$$A \vee B \equiv \neg(\neg A \& \neg B) \equiv (\neg A \supset B) \equiv ((A \supset B) \supset B), \quad (3)$$

$$A \supset B \equiv (\neg A \vee B) \equiv \neg(A \& \neg B), \quad (4)$$

т. е. каждая из П. с. &, $\vee$, $\supset$ выражается через $\neg$ и одну из остальных. Поэтому при формулировках классического *пропозиционального исчисления* высказываний в качестве исходной можно брать две П. с.: $\neg$ и одну из П. с. &, $\vee$, $\supset$, а остальные рассматривать как сокращения, согласно (1) — (4). В интуиционистской логике П. с. &, $\vee$, $\supset$ и $\neg$ являются независимыми. *С. К. Соболев.*

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ ФОРМА, высказывательная форма,— языковое выражение, содержащее переменные, вместо к-рых можно подставлять высказывания, получая при этом новые высказывания. В формализованных языках П. ф. наз. формулы, содержащие свободные вхождения пропозициональных переменных, принимающих значения в множестве *истинностных значений.*

П. ф. наз. также выражения, построенные по типу *пропозициональной формулы*, в к-рых вместо пропозициональных переменных используются символы *метаязыка*, обозначающие произвольные формулы *высказываний исчисления.*

Лит.: [1] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1971. *В. Н. Гришин.*

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ ФОРМУЛА — выражение, построенное из *пропозициональных переменных* с помощью *пропозициональных связок* &, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\equiv$ (и, возможно, нек-рых других) по следующим правилам: 1) каждая пропозициональная переменная есть П. ф.; 2) если A, B суть П. ф., то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ и $(\neg A)$ суть также П. ф.

Если σ — нек-рый набор пропозициональных связок (сигнатура), то под П. ф. сигнатуры σ понимается такая П. ф., в построении к-рой в 2) использовались лишь связки из σ. *С. К. Соболев.*

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, аргументами и значениями к-рой являются *истинностные значения.* Этот термин употребляют, когда речь идет об интерпретации формализованного логич. языка.

Если Ω — множество истинностных значений формул данного языка, то П. ф.— это любое отображение вида $\Omega^n \to \Omega$ $(n \geqslant 0)$. Этими функциями интерпретируются *пропозициональные связки*, позволяющие образовывать из предложений или формул новые предложения или формулы. При классической двузначной интерпретации множества истинностных значений, т. е. когда $\Omega=\{0, 1\}$, такие функции наз. также функциями алгебры логики. *В. Н. Гришин.*

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, исчисление высказываний,— *логическое исчисление*, в к-ром выводимыми объектами являются *пропозициональные формулы*. Каждое П. и. задается набором аксиом (произвольных пропозициональных формул) и *вывода правил*. Формула, выводимая в данном П. и., наз. теоремой этого П. и. В качестве правил вывода обычно берут *модус поненс* и подстановку (произвольных пропозициональных формул вместо переменных). Иногда П. и. задают не аксиомами, а *аксиом схемами*; тогда правило подстановки оказывается излишним.

Классическое П. и. задается следующими аксиомами:

1) $p \supset (q \supset p)$,
2) $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$,
3) $(p \ \& \ q) \supset p$,
4) $(p \& q) \supset q$,
5) $p \supset (q \supset (p \& q))$,
6) $p \supset (p \vee q)$,
7) $q \supset (p \vee q)$,
8) $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$,
9) $(p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p)$,
10) $\neg\neg p \supset p$.

В этом П. и. *пропозициональные связки* $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$ не являются независимыми. Его можно задать с помощью только аксиом 1), 2), 9) и 10), основываясь на связках $\supset$, $\neg$ в качестве исходных. Тогда связки $\&$ и $\vee$ рассматриваются как сокращения:

$$A \& B \leftrightarrows \neg(A \supset \neg B), \ A \vee B \leftrightarrows \neg A \supset B,$$

а аксиомы 3) — 8) становятся теоремами. Классическое П. и. наз. также полным П. и., поскольку добавление к нему любой невыводимой в нем формулы в качестве аксиомы приводит к противоречивому П. и., т. е. к такому, в к-ром выводимы все пропозициональные формулы. Часто классическое П. и. наз. просто П. и.

Интуиционистское (конструктивное) П. и. получается из классического П. и. заменой аксиомы 10) более слабой аксиомой

11) $\neg p \supset (p \supset q)$.

П. и., получаемое из конструктивного П. и. добавлением конечного (или рекурсивного) числа аксиом, наз. промежуточным, суперинтуиционистским (или суперконструктивным). См. также *Промежуточная логика*.

Другими примерами П. и. являются *импликативное пропозициональное исчисление*, *минимальное пропозициональное исчисление*, *позитивное пропозициональное исчисление*.

Интерпретация П. и. осуществляется с помощью алгебр (матриц) вида

$$\mathfrak{M}=\langle M, \ D; \ \&^*, \ \vee^*, \ \supset^*, \ \neg^*\rangle,$$

где M — множество *истинностных значений*, D — множество выделенных истинностных значений,

$$D \subset M, \text{ а } \&^*, \ \vee^*, \ \supset^*, \ \neg^*$$

— операции на M, соответствующие связкам $\&$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$. Множество D должно удовлетворять следующему условию: для любых a, $b \in D$, если $a \in D$ и $(a \supset^* b) \in D$, то $b \in D$ (согласованность с правилом модус поненс). Формула наз. **общезначимой** на матрице $\mathfrak{M}$, если она принимает выделенное значение при любой интерпретации ее переменных элементами M. Простейшей матрицей является матрица $\mathfrak{M}_2$, состоящая из двух элементов 1, 0 («истина», «ложь») и одного выделенного значения 1, а операции $\&^*$, $\vee^*$, $\supset^*$, $\neg^*$ определяются обычным образом (см. *Алгебра логики*). Пропозициональная формула, общезначимая на $\mathfrak{M}_2$, наз. **тавтологией**. Формула является тавтологией тогда и только тогда, когда она является теоремой классического П. и.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960. *С. К. Соболев.*

ПРОСТАЯ АЛГЕБРА — неодноэлементная алгебра без двусторонних идеалов, отличных от 0 и всей алгебры. П. а. без единицы может и не быть *простым кольцом*, т. к. в этом случае не всякий идеал кольца является идеалом алгебры. Для нек-рых классов алгебр известна классификация конечномерных П. а. (см. *Альтернативные кольца и алгебры*, *Йорданова алгебра*, *Ли алгебра*). Любая ассоциативная алгебра над полем, обладающая единицей, вложима в П. а. с той же единицей.

Лит. см. при ст. *Простое кольцо*. *Л. А. Скорняков.*

ПРОСТАЯ ГИПОТЕЗА в **математической статистике** — утверждение, согласно к-рому наблюдаемая случайная величина подчиняется конкретно заданному распределению вероятностей. Распределение вероятностей, определяемое П. г., наз. **гипотетическим распределением**. Напр., если наблюдается случайная величина X, то утверждение «X подчиняется закону Пуассона с параметром 1» является П. г. См. также *Сложная гипотеза*.

М. С. Никулин.

ПРОСТАЯ ГРУППА — группа, не имеющая нормальных подгрупп, отличных от всей группы и единичной подгруппы. Описание всех *простых конечных групп* является центральной проблемой в теории конечных групп. В теории бесконечных групп значение П. г. значительно меньше ввиду их необозримости. Простой является группа всех четных подстановок, каждая из к-рых перемещает конечное подмножество элементов множества M, если мощность M не меньше 5. Эта группа бесконечна, если M бесконечно. Существуют конечно порожденные и даже конечно определенные бесконечные П. г. Всякая группа вложима в П. г. В теории групп Ли и алгебраич. групп определение П. г. несколько отличается от приведенного выше (см. *Ли полупростая группа*). *А. Л. Шмелькин.*

ПРОСТАЯ ДУГА — гомеоморфный образ отрезка. Внутренняя характеристика: П. д. — это *линия*, имеющая в двух точках индекс ветвления 1 (**концевые точки**), а во всех остальных точках — индекс ветвления 2 (**внутренние точки**).

М. И. Войцеховский.

ПРОСТАЯ КОНЕЧНАЯ ГРУППА — конечная группа, в к-рой нет нормальных подгрупп, отличных от всей группы и от единичной подгруппы. П. к. г. — наименьшие «строительные блоки», из к-рых с помощью расширений может быть «собрана» любая конечная группа. Каждый фактор *композиционного ряда* конечной группы является П. к. г., а минимальная нормальная подгруппа — прямое произведение П. к. г. Простейшими примерами П. к. г. служат циклич. группы простых порядков. Только таким П. к. г. изоморфны факторы композиционных рядов разрешимых групп. Все остальные П. к. г. неразрешимы и их порядки четны [см. *Бёрнсайда проблема* — 1)]. Бесконечные серии примеров неразрешимых П. к. г. дают знакопеременные группы $\mathfrak{A}_n$, проективные специальные линейные группы $PSL(n, q)$ над конечным полем порядка q, проективные симплектич. группы $PSP(2n, q)$, проективные ортогональные группы $P\Omega(n, q)$ и проективные унитарные группы $PSU(n, q^2)$. Все перечисленные П. к. г. были известны еще в прошлом веке. Кроме них, в кон. 19 в. были открыты еще 5 групп (см. *Матьё группа*). В нач. 20 в. построены конечные аналоги простых групп Ли типа G_2 (см. *Диксона группа*). Открытия новых бесконечных серий П. к. г., сделанные в 50-х гг., позволили получить большинство типов известных простых групп из групп автоморфизмов простых алгебр Ли (см. *Шевалле группа*). Известные бесконечные серии П. к. г. представлены в таблице.

Обозначение, связанное с типом соответствующей алгебры Ли	Другое обозначение	Условия существования П. к. г.	Порядок группы	d
	$\mathbb{Z}_p$	p — простое число	p	
	$\mathfrak{A}_l$	$l \geqslant 5$	$l!/2$	
$A_l(q)$	$PSL(l+1, q)$	$l \geqslant 2$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l(l+1)/2}(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^{l+1}-1)/d$	$(l+1, q-1)$
$B_l(q)$	$P\Omega(2l+1, q)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l^2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l}-1)/d$	$(2, q-1)$
$C_l(q)$	$PSp(2l, q)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l^2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l}-1)/d$	$(2, q-1)$
$D_l(q)$	$P\Omega+(2l, q)$	$l \geqslant 3$	$q^{l(l-1)}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l-2}-1)(q^l-1)/d$	$(4, q^l-1)$
$E_6(q)$			$q^{36}(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)/d$	$(3, q-1)$
$E_7(q)$			$q^{83}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{10}-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)/d$	$(2, q-1)$
$E_8(q)$			$q^{120}(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)(q^{20}-1)\cdot(q^{24}-1)(q^{30}-1)$	
$F_4(q)$			$q^{24}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{12}-1)$	
$G_2(q)$			$q^6(q^2-1)(q^6-1)$	
${}^2A_l(q^2)$	$PSU(l+1, q^2)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$ $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l(l+1)/2}(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)\cdots(q^{l+1}+(-1)^l)/d$	$(l+1, q+1)$
${}^2D_l(q^2)$	$P\Omega^-(2l, q)$	$l \geqslant 2$	$q^{l(l-1)/2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l-2}-1)(q^l+1)/d$	$(4, q^l+1)$
${}^2E_6(q^2)$			$q^{36}(q^2-1)(q^5+1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9+1)(q^{12}-1)/d$	$(3, q+1)$
${}^3D_4(q^3)$			$q^{12}(q^2-1)(q^6-1)(q^8+q^4+1)$	
${}^2B_2(q)$	$Sz(q)$	$q=2^{2l+1}$	$q^2(q-1)(q^2+1)$	
${}^2G_2(q)$	$R(q)$	$q=3^{2l+1}$	$q^3(q-1)(q^3+1)$	
${}^2F_4(q)'$		$q=2^{2l-1}$	$q^{12}(q-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^6+1)/d$	2 при $q=2$; 1 при $q>2$

Здесь q — ненулевая степень простого числа, l — натуральное число, (s, t) — наибольший общий делитель чисел s и t. Кроме перечисленных в таблице, известны еще 26 П. к. г., не входящих ни в одну бесконечную серию П. к. г. (т. н. *спорадические простые группы*).

Главной задачей теории П. к. г. является проблема классификации П. к. г., содержанием к-рой служит доказательство того, что каждая П. к. г. изоморфна одной из известных простых групп. Другая задача состоит в изучении свойств известных простых групп: изучении их матричных представлений (см. *Конечной группы представление*), описании примитивных подстановочных представлений (см. *Подстановок группа*) или, более общо, представлений в виде групп автоморфизмов различных математич. объектов (графов, конечных геометрий), описании подгрупп, в частности максимальных подгрупп, и т. д.

Лит.: [1] Картер Р., «Математика», 1966, т. 10, № 5, с. 3—47; [2] Ашбахер М., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, № 2, с. 141—72; [3] Huppert B., Endliche Gruppen, [Bd] 1, В., 1967; [4] Blackburn N., Huppert B., Finite groups II, III, В., 1981.

В. Д. Мазуров.

ПРОСТАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, не содержащая собственных идеалов или конгруэнций того или иного фиксированного типа. В зависимости от рассматриваемого типа возникают различные типы П. п.: идеально простая — не содержащая собственных двусторонних идеалов (термин «П. п.» часто относят только к таким полугруппам), простая слева (справа) — не содержащая собственных левых (правых) идеалов, 0-простая (слева, справа) — полугруппа с нулем, не содержащая собственных ненулевых двусторонних (левых, правых) идеалов и не являющаяся двухэлементной полугруппой с нулевым умножением, бипростая — состоящая из одного $\mathscr{D}$-класса (см. *Грина отношения эквивалентности*), 0-бипростая — состоящая из двух $\mathscr{D}$-классов, один из к-рых нулевой, простая относительно конгруэнций — не имеющая конгруэнций, кроме универсального отношения и отношения равенства.

Всякая простая слева или справа полугруппа бипроста; всякая бипростая полугруппа идеально проста, но существуют идеально П. п., не являющиеся бипростыми (и даже такие, что все их $\mathscr{D}$-классы одноэлементны). Важнейшим типом идеально П. п. (0-простых полугрупп) является *вполне простая полугруппа* (вполне 0-простая полугруппа). Важнейшие примеры бипростых, но не вполне П. п.: *бициклическая полугруппа*, четырехспиральная полугруппа Sp_4 (см. [11]) — это полугруппа, заданная порождающими a, b, c, d и определяющими соотношениями $a^2=a$, $b^2=b$, $c^2=c$, $d^2=d$, $ba=a$, $ab=b$, $bc=b$, $cb=c$, $dc=c$, $cd=d$, $da=d$; полугруппа Sp_4 изоморфна *рисовской полугруппе матричного типа* над бициклич. полугруппой с порождающими u, v, где $uv=1$, с сэндвич-матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & v \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Четырехспиральная полугруппа является в нек-ром смысле минимальной среди бипростых и не вполне П. п., порожденных конечным числом идемпотентов, и нередко возникает как подполугруппа таких полугрупп.

Простые справа полугруппы (п. с. п.) наз. также полугруппами с правым делением или полугруппами с правой обратимостью. Основанием для этих терминов является следующее свойство таких полугрупп, эквивалентное определению: для любых элементов a и b существует элемент x такой, что $ax=b$. П. с. п., содержащие идемпотенты,— это в точности *правые группы*. Важный пример п. с. п. без идемпотентов доставляет полугруппа $T(M, \delta, p, q)$ всех таких преобразований φ множества ективные унитарные группы $PSU(n, q^2)$. Все перечисленные П. к. г. были известны еще в прошлом веке. Кроме них, в кон. 19 в. были открыты еще 5 групп (см. *Матьё группа*). В нач. 20 в. построены конечные аналоги простых групп Ли типа G_2 (см. *Диксона группа*). Открытия новых бесконечных серий П. к. г., сделанные в 50-х гг., позволили получить большинство типов известных простых групп из групп автоморфизмов простых алгебр Ли (см. *Шевалле группа*). Известные бесконечные серии П. к. г. представлены в таблице.

Обозначение, связанное с типом соответствующей алгебры Ли	Другое обозначение	Условия существования П. к. г.	Порядок группы	d
	$\mathbb{Z}_p$	p — простое число	p	
	$\mathfrak{A}_l$	$l \geqslant 5$	$l!/2$	
$A_l(q)$	$PSL(l+1, q)$	$l \geqslant 2$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l(l+1)/2}(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^{l+1}-1)/d$	$(l+1, q-1)$
$B_l(q)$	$P\Omega(2l+1, q)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l^2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l}-1)/d$	$(2, q-1)$
$C_l(q)$	$PSp(2l, q)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l^2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l}-1)/d$	$(2, q-1)$
$D_l(q)$	$P\Omega^+(2l, q)$	$l \geqslant 3$	$q^{l(l-1)}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l-2}-1)(q^l-1)/d$	$(4, q^l-1)$
$E_6(q)$			$q^{36}(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)/d$	$(3, q-1)$
$E_7(q)$			$q^{63}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{10}-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)/d$	$(2, q-1)$
$E_8(q)$			$q^{120}(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)(q^{20}-1)\cdot(q^{24}-1)(q^{30}-1)$	
$F_4(q)$			$q^{24}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{12}-1)$	
$G_2(q)$			$q^6(q^2-1)(q^6-1)$	
${}^2A_l(q^2)$	$PSU(l+1, q^2)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$ $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l(l+1)/2}(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)\cdots(q^{l+1}+(-1)^l)/d$	$(l+1, q+1)$
${}^2D_l(q^2)$	$P\Omega^-(2l, q)$	$l \geqslant 2$	$q^{l(l-1)/2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l-2}-1)(q^l+1)/d$	$(4, q^l+1)$
${}^2E_6(q^2)$			$q^{36}(q^2-1)(q^5+1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9+1)(q^{12}-1)/d$	$(3, q+1)$
${}^3D_4(q^3)$			$q^{12}(q^2-1)(q^6-1)(q^8+q^4+1)$	
${}^2B_2(q)$	$Sz(q)$	$q=2^{2l+1}$	$q^2(q-1)(q^2+1)$	
${}^2G_2(q)$	$R(q)$	$q=3^{3l+1}$	$q^3(q-1)(q^3+1)$	
${}^2F_4(q)'$		$q=2^{2l-1}$	$q^{12}(q-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^6+1)/d$	2 при $q=2$ 1 при $q>2$

Здесь q — ненулевая степень простого числа, l — натуральное число, (s, t) — наибольший общий делитель чисел s и t. Кроме перечисленных в таблице, известны еще 26 П. к. г., не входящих ни в одну бесконечную серию П. к. г. (т. н. *спорадические простые группы*).

Главной задачей теории П. к. г. является проблема классификации П. к. г., содержанием к-рой служит доказательство того, что каждая П. к. г. изоморфна одной из известных простых групп. Другая задача состоит в изучении свойств известных простых групп: изучении их матричных представлений (см. *Конечной группы представление*), описании примитивных подстановочных представлений (см. *Подстановок группа*) или, более общо, представлений в виде групп автоморфизмов различных математич. объектов (графов, конечных геометрий), описании подгрупп, в частности максимальных подгрупп, и т. д.

Лит.: [1] Картер Р., «Математика», 1966, т. 10, № 5, с. 3—47; [2] Ашбахер М., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, № 2, с. 141—72; [3] Huppert B., Endliche Gruppen, [Bd] 1, B., 1967; [4] Blackburn N., Huppert B., Finite groups II, III, B., 1981.

В. Д. Мазуров.

ПРОСТАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, не содержащая собственных идеалов или конгруэнций того или иного фиксированного типа. В зависимости от рассматриваемого типа возникают различные типы П. п.: идеально простая — не содержащая собственных двусторонних идеалов (термин «П. п.» часто относят только к таким полугруппам), простая слева (справа) — не содержащая собственных левых (правых) идеалов, 0-простая (слева, справа) — полугруппа с нулем, не содержащая собственных ненулевых двусторонних (левых, правых) идеалов и не являющаяся двухэлементной полугруппой с нулевым умножением, бипростая — состоящая из одного $\mathcal{D}$-класса (см. *Грина отношения эквивалентности*), 0-бипростая — состоящая из двух $\mathcal{D}$-классов, один из к-рых нулевой, простая относительно конгруэнций — не имеющая конгруэнций, кроме универсального отношения и отношения равенства.

Всякая простая слева или справа полугруппа бипроста; всякая бипростая полугруппа идеально проста, но существуют идеально П. п., не являющиеся бипростыми (и даже такие, что все их $\mathcal{D}$-классы одноэлементны). Важнейшим типом идеально П. п. (0-простых полугрупп) является *вполне простая полугруппа* (вполне 0-простая полугруппа). Важнейшие примеры бипростых, но не вполне П. п.: *бициклическая полугруппа*, четырехспиральная полугруппа Sp_4 (см. [11]) — это полугруппа, заданная порождающими a, b, c, d и определяющими соотношениями $a^2=a$, $b^2=b$, $c^2=c$, $d^2=d$, $ba=a$, $ab=b$, $bc=b$, $cb=c$, $dc=c$, $cd=d$, $da=d$; полугруппа Sp_4 изоморфна *рисовской полугруппе матричного типа* над бициклич. полугруппой с порождающими u, v, где $uv=1$, с сэндвич-матрицей

$$\left\|\begin{matrix} 1 & v \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Четырехспиральная полугруппа является в нек-ром смысле минимальной среди бипростых и не вполне П. п., порожденных конечным числом идемпотентов, и нередко возникает как подполугруппа таких полугрупп.

Простые справа полугруппы (п. с. п.) наз. также полугруппами с правым делением или полугруппами с правой обратимостью. Основанием для этих терминов является следующее свойство таких полугрупп, эквивалентное определению: для любых элементов a и b существует элемент x такой, что $ax=b$. П. с. п., содержащие идемпотенты,— это в точности *правые группы*. Важный пример п. с. п. без идемпотентов доставляет полугруппа $T(M, \delta, p, q)$ всех таких преобразований φ множества

M, что 1) ядро φ равно отношению эквивалентности δ на M, 2) мощность фактормножества M/δ равна p, 3) множество M_φ пересекается с каждым δ-классом не более чем по одному элементу, 4) множество δ-классов, не пересекающихся с $M\varphi$, имеет бесконечную мощность q, причем $q \leqslant p$. Полугруппа $T(M, \delta, p, q)$ наз. полугруппой Тесье типа (p, q), а в случае, когда δ — отношение равенства, она наз. полугруппой Бэра — Леви типа (p, q) (см. [6], [7]). Полугруппа Тесье — пример п. с. п. без идемпотентов, не обязательно удовлетворяющей правостороннему закону сокращения. Всякая п. с. п. без идемпотентов вкладывается в подходящую полугруппу Тесье, а всякая п. с. п. без идемпотентов и с правосторонним законом сокращения вкладывается в подходящую полугруппу Бэра — Леви (причем в обоих случаях можно выбрать $p=q$).

Различные типы П. п. часто возникают в качестве «блоков», из к-рых строятся рассматриваемые полугруппы. По поводу классич. примеров П. п. см. *Вполне простая полугруппа*, *Брандта полугруппа*, *Правая группа*; о бипростых инверсных полугруппах (в том числе структурные теоремы при нек-рых ограничениях на полурешетку идемпотентов) см. [1], [8], [9]. Существуют идеально простые инверсные полугруппы с произвольным числом $\mathcal{D}$-классов. При изучении вложений полугрупп в П. п. обычно либо указываются условия для возможности соответствующего вложения, либо устанавливается, что всякая полугруппа вкладывается в подходящую П. п. рассматриваемого типа; напр., любая полугруппа вкладывается в бипростую полугруппу с единицей (см. [1]), в бипростую полугруппу, порожденную идемпотентами (см. [10]), в простую относительно конгруэнций полугруппу (к-рая может обладать теми или иными наперед заданными свойствами: наличие или отсутствие нуля, полнота, пустота подполугруппы Фраттини и т. д., см. [3] — [5]).

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Бокуть Л. А., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 3, с. 500—18; [4] Шутов Э. Г., «Матем. сб.», 1963, т. 62, № 4, с. 496—511; [5] Климов В. Н., «Сиб. матем. ж.», 1973, т. 14, № 5, с. 1025—36; [6] Baer R., Levi F., «Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl.», 1932, Abh. 2, S. 3—12; [7] Teissier M., «Compt. rend. Acad. sci.», 1953, v. 236, № 11, p. 1120—22; [8] Munn W. D., в кн.: Semigroups, N. Y. — L., 1969, p. 107—23; [9] Howie J., An introduction to semigroup theory, L. — [a. o.], 1976; [10] Pastijn F., «Semigroup Forum», 1977, v. 14, № 3, p. 247—263; [11] Byleen K., Meakin J., Pastijn F., «J. Algebra», 1978, v. 54, p. 6—26. *Л. Н. Шеврин.*

ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК — случайная последовательность моментов времени $0<\tau_1<\tau_2<\ldots$, в к-рые происходят события нек-рого потока событий (напр., потока вызовов, приходящих на телефонную станцию), удовлетворяющая условию независимости и одинаковой показательной распределенности разностей $\tau_{i+1}-\tau_i$. П. п. с распределением

$$F(x)=\mathsf{P}\{\tau_{i+1}-\tau_i\leqslant x\}=1-e^{-\lambda x},\ x\geqslant 0, \qquad (*)$$

является частным случаем процесса восстановления (см. *Восстановления теория*). С П. п. связан *пуассоновский процесс* $\xi(t)$, равный числу событий потока в отрезке времени $(0, t)$. П. п. и соответствующий ему пуассоновский процесс удовлетворяют следующим условиям.

Стационарность. Для любых $0<t_0$, $0<t_1<<t_2<\ldots<t_k$ распределение случайных величин

$$\xi(t_l+t_0)-\xi(t_{l-1}+t_0),\ l=2, \ldots, k,$$

не зависит от t_0.

Ординарность. Вероятность появления в интервале $(t, t+\Delta t)$ двух или более событий потока равна $o(\Delta t)$ при $\Delta t\to 0$.

Отсутствие последействия. При $0<t_1<t_2<\ldots<t_n$ случайные величины $\xi(t_l)-\xi(t_{l-1})$, $l=1, \ldots, k$, независимы.

Доказывается, что при выполнении этих условий и при условии

$$P\{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

поток будет простейшим с показательным распределением (*).

Лит.: [1] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963. *Б. А. Севастьянов.*

ПРОСТОГО СЛОЯ ПОТЕНЦИАЛ — выражение вида

$$u(x)=\int_S h(|x-y|)f(y)\,d\sigma(y), \qquad (1)$$

где S — замкнутая поверхность Ляпунова (класса $C^{(1,\lambda)}$) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, разделяющая $\mathbb{R}^n$ на внутреннюю область D^+ и внешнюю D^-; $h(|x-y|)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа:

$$h(|x-y|)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-2)\,\omega_N\,|x-y|^{N-2}}, & n\geqslant 3;\\[2mm] \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-y|}, & n\geqslant 2;\end{cases}$$

$\omega_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $|x-y|$ — расстояние между точками x и y, $d\sigma(y)$ — элемент площади S.

Если $f(x)\in C^{(0)}(S)$, то П. с. п. $u(x)$ определен всюду в $\mathbb{R}^n$. П. с. п. представляет собой частный случай *ньютонова потенциала*, порождаемого массами, распределенными на поверхности S с поверхностной плотностью $f(y)$, и обладает следующими свойствами.

В D^+ и D^- П. с. п. $u(x)$ имеет производные всех порядков, к-рые можно вычислять под знаком интеграла, и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u(x)=0$, т. е. является *гармонической функцией*. При $n\geqslant 3$ эта функция регулярна на бесконечности, $u(\infty)=0$. П. с. п. $u(x)$ непрерывен во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, причем $u(x)\in C^{(0,\nu)}(\mathbb{R}^n)$ при любом ν, $0<\nu<\lambda$. При переходе через поверхность S производная по направлению внешней нормали $\boldsymbol{n}_0$ к S в точке $y_0\in S$ терпит разрыв. Предельные значения нормальной производной из области D^+ и из области D^- существуют и непрерывны всюду на S и выражаются соответственно формулами

$$\lim_{x\to y_0}\left.\frac{du}{d\boldsymbol{n}_0}\right|_i=\frac{du(y_0)}{d\boldsymbol{n}_0}-\frac{f(y_0)}{2}, \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to y_0}\left.\frac{du}{d\boldsymbol{n}_0}\right|_l=\frac{du(y_0)}{d\boldsymbol{n}_0}+\frac{f(y_0)}{2},$$

где

$$\frac{du(y_0)}{d\boldsymbol{n}_0}=\int_S\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_0}h(|y-y_0|)f(y)\,d\sigma(y) \qquad (3)$$

— т. н. прямое значение нормальной производной П. с. п. в точке $y_0\in S$, причем $du(y_0)/d\boldsymbol{n}_0\in C^{(0,\nu)}(S)$ при всех ν, $0<\nu<\lambda$. Если $f(y)\in C^{(0,\lambda)}(S)$, то частные производные функции $u(x)$ непрерывно продолжаются в $\overline{D^+}$ и в $\overline{D^-}$ до функций классов $C^{(0,\lambda)}(\overline{D^+})$ и $C^{(0,\lambda)}(\overline{D^-})$ соответственно. В этом случае также

$$du(y_0)/d\boldsymbol{n}_0\in C^{(0,\lambda)}(S).$$

Эти свойства обобщаются в различных направлениях. Напр., если $f(y)\in L^1(S)$, то $u(x)\in L^1$ внутри и вне S, формулы (2) имеют место почти всюду на S, причем интеграл (3) суммируем на S. Изучены также свойства П. с. п., понимаемых как интегралы по произвольной радоновской мере μ, сосредоточенной на S:

$$u(x)=\int h(|x-y|)\,d\mu(y);$$

здесь также $u(x)$ — гармонич. функции вне S, формулы (2) имеют место почти всюду на S по мере Лебега с заменой $f(y)$ на производную меры $\mu'(y_0)$ по мере Лебега. В определении (1) фундаментальное решение оператора Лапласа можно заменить на произвольную функцию Леви для общего эллиптич. оператора 2-го порядка с переменными коэффициентами класса $C^{(0,\lambda)}$ с заменой нормальной производной d/dn_0 на производную по конормали. При этом перечисленные свойства остаются в силе (см. [2] — [4]).

П. с. п. используется при решении краевых задач для эллиптич. уравнений. Представление искомого решения 2-й краевой задачи в виде П. с. п. с неизвестной плотностью $f(y)$ и использование свойства (3) приводит к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода на S для определения $f(y)$ (см. [2] — [5]).

При решении краевых задач для параболич. уравнений используется тепловой потенциал простого слоя вида

$$v(x, t)=\int_0^t d\tau \int_S G(x, t; y, \tau) f(y, \tau)\, d\sigma(y),$$

где

$$G(x, t; y, \tau)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n (t-\tau)^{n/2}} \exp\left[-|x-y|^2/4(t-\tau)\right]$$

— фундаментальное решение уравнения теплопроводности в n-мерном пространстве, $f(y, \tau)$ — плотность. Функция $v(x, t)$ и ее обобщение на случай произвольного параболич. уравнения 2-го порядка обладают свойствами, аналогичными указанным для $u(x)$ (см. [3], [4], [6]).

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [3] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, 5 изд., М., 1958; [5] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [6] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966. *Е. Д. Соломенцев.*

ПРОСТОЕ КОЛЬЦО — неодноэлементное кольцо без двусторонних идеалов, отличных от 0 и всего кольца. Ассоциативное П. к. с единицей, содержащее минимальный односторонний идеал, изоморфно кольцу матриц над нек-рым телом. Без предположения существования единицы такое кольцо оказывается локально матричным над нек-рым телом D, т. е. каждое его конечное подмножество содержится в подкольце, изоморфном кольцу матриц над D (см. [2]). Существуют П. к. без делителей нуля (даже нётеровы), отличные от тел, а также нётеровы П. к. с делителями нуля, но без идемпотентов [3]. Известны П. к., радикальные в смысле Джекобсона (см. [1]). Однако открыт вопрос о существовании простых нильколец.

Описание строения альтернативных П. к. сводится к ассоциативному случаю (см. *Альтернативные кольца и алгебры*). См. также *Простая алгебра.*

Лит.: [1] Бокуть Л. А., Ассоциативные кольца, ч. 1—2, Новосиб., 1977—81; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Залесский А. Е., Нерославский О., «Communs. Alg.», 1977, v. 5, № 3, p. 231—44; [4] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [5] Cozzens J., Faith C., Simple Noetherian rings, Camb.— [a. o.], 1975. *Л. А. Скорняков.*

ПРОСТОЕ МНОЖЕСТВО — рекурсивно перечислимое множество натуральных чисел, дополнение к-рого есть *иммунное множество.* П. м. являются промежуточными в смысле так наз. m-сводимости (см. *Рекурсивная теория множеств*) между разрешимыми множествами и творческими (креативными) множествами — последние являются наибольшими среди перечислимых множеств в смысле m-сводимости. Пусть P — произвольное П. м., а K — произвольное креативное множество натуральных чисел (напр., множество гёделевых номеров теорем формальной арифметики). Тогда не существует общерекурсивной функции $f(x)$, сводящей K к P, т. е. такой, что

$$x \in K \Leftrightarrow f(x) \in P.$$

Сводимость P к K имеет место всегда, а к P не сводится ни одно разрешимое множество.

Лит.: [1] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [2] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [3] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972. *С. Н. Артемов.*

ПРОСТОЕ ОТНОШЕНИЕ трех точек M_1, M, M_2 на прямой — число λ такое, что

$$\overline{M_1M} = \lambda \overline{MM_2}.$$

При этом говорят, что точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ. Если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — координаты точек M_1 и M_2, то координаты точки M определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

П. о. является инвариантом аффинных преобразований.
А. Б. Иванов.

ПРОСТОЕ ПОЛЕ — поле, не содержащее собственных подполей. Каждое поле содержит единственное простое подполе. П. п. характеристики 0 изоморфно полю рациональных чисел. П. п. характеристики p изоморфно полю вычетов по модулю p. *О. А. Иванова.*

ПРОСТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — то же, что *неприводимое представление.*

ПРОСТОЕ ЧИСЛО — натуральное (целое положительное) число $p > 1$, имеющее только два делителя 1 и p:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$$

Числа, имеющие не менее трех различных делителей, наз. составными. Понятие П. ч. является основным при изучении делимости натуральных чисел. Так, основная теорема элементарной теории чисел утверждает, что всякое натуральное число, отличное от единицы, либо простое, либо, если оно составное, может быть представлено в виде произведения простых чисел. При этом такое представление единственно (с точностью до расположения сомножителей). Запись этого произведения в виде степеней одинаковых П. ч., а самих П. ч. в порядке возрастания, дает канонич. разложение натурального числа:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}.$$

С помощью канонич. разложений натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ находят наибольший общий делитель $d = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и наименьшее общее кратное $m = [a_1, a_2, \ldots, a_k]$ этих чисел. С помощью канонич. разложения натурального числа n вычисляются значения теоретико-числовых функций $\tau(n)$, $S(n)$ и $\varphi(n)$, к-рые обозначают соответственно число делителей, сумму делителей числа n и количество натуральных чисел $m \leqslant n$, взаимно простых с n (т. е. таких, что $(m, n) = 1$):

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1),$$

$$S(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \, \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \ldots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1},$$

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Существенной особенностью этих формул является их зависимость от арифметич. структуры натурального аргумента n.

П. ч. играют роль своеобразных «кирпичиков», из к-рых строятся все остальные натуральные числа. Еще в 3 в. до н. э. Евклид доказал бесконечность множества П. ч., а Эратосфен нашел способ отсеивания П. ч. из множества натуральных чисел (см. *Эратосфена решето*). Л. Эйлер (L. Euler) нашел доказательство бесконечности множества П. ч., основанное на использовании средств математич. анализа. Дальнейшее развитие аналитич. метода Эйлера оказалось очень плодотворным (см. *Аналитическая теория чисел*). П. Л. Чебышев открыл ряд новых законов, к-рым подчиняются П. ч. В частности, с помощью элементарных рассуждений, использующих канонич. разложение для числа $n!$, П. Л. Чебышев нашел неравенства, к-рым должно удовлетворять количество $\pi(x)$ простых чисел $p \leqslant x$:

$$\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b\frac{x}{\ln x},$$

где $a<1$, $b>1$ — нек-рые положительные константы. Наиболее глубокие закономерности, к-рым подчиняется поведение последовательности П. ч., были получены путем углубления исходных идей П. Л. Чебышева с помощью аналитических и, в ряде случаев, элементарных методов (см. *Распределение простых чисел*).

П. ч. связаны не только с мультипликативной, но и с аддитивной структурой натуральных чисел. Достаточно характерной в этом отношении является *Гольдбаха проблема* о разбиении натуральных чисел на сумму трех П. ч., решенная в 1937 И. М. Виноградовым (см. *Аддитивная теория чисел*). Изучение законов разложения П. ч. в алгебраич. полях проливает свет на свойства обычных П. ч. Напр., рассматривая закон разложения П. ч. $p \neq 2$ в поле гауссовых чисел, получают теорему Гаусса: $p=a^2+b^2$ тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod 4$.

Существует много пока (1983) еще не решенных проблем, относящихся к П. ч. Напр.:

будет ли бесконечным множество П. ч. Мерсенна:

$$p=2^q-1, \text{ где } q \text{ — простое;}$$

будет ли бесконечным множество П. ч. Ферма:

$$p=2^{2^n}+1, \text{ где } n \geqslant 0 \text{ — целое;}$$

существует ли бесконечное множество П. ч. p_1 и p_2 «близнецов», т. е. таких, что $p_1-p_2=2$.

Экспериментальные и эвристич. соображения свидетельствуют в пользу положительного решения сформулированных выше проблем и др. аналогичных задач.

Лит.: [1] Хассе Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953. *Б. М. Бредихин.*

ПРОСТОЙ ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП — класс клеточных комплексов, принадлежащих одному *гомотопическому типу*, такой, что *Уайтхеда кручение* соответствующей гомотопич. эквивалентности равно нулю. *М. И. Войцеховский.*

ПРОСТОЙ ИДЕАЛ — двусторонний идеал P кольца R такой, что из $AB \subseteq P$, где A и B — идеалы в R, следует, что либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$. Для ассоциативного кольца эквивалентным определением на языке элементов будет следующее:

$$aRb \subseteq P \longrightarrow a \in P \text{ или } b \in P,$$

где a, b — элементы кольца R. Всякий *примитивный идеал* прост.

Пусть R — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Тогда простота идеала $P \subset R$ эквивалентна тому, что $ab \in P \to a \in P$ или $b \in P$, т. е. тому, что фактор-кольцо R/P есть область целостности. В этом случае всякий максимальный идеал прост, а пересечение всех простых идеалов кольца R является радикалом нулевого идеала (т. е. множеством нильпотентных элементов).

Обобщением понятия П. и. служит понятие *примарного идеала*. В теории *примарных разложений* П. и. играют ту же роль, что простые числа в разложении целых чисел по степеням простых, а примарные идеалы — роль степеней простых чисел.

Идеал P решетки L наз. простым, если

$$ab \in P \longrightarrow a \in P \text{ или } b \in P.$$

Идеал P прост тогда и только тогда, когда $F = L \setminus P$ — простой фильтр, т. е. если $a + b \in F \rightarrow a \in F$ или $b \in F$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [4] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970.

О. А. Иванова.

ПРОСТОЙ ИНТЕРВАЛ частично упорядоченного множества — подмножество, состоящее из двух элементов $a < b$ таких, что между ними в данном частично упорядоченном множестве нет других элементов, т. е.

$$a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow a = x \wedge b = x.$$

О. А. Иванова.

ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ МЕТОД — метод приближенного решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax = b$, к-рая преобразуется к виду $x = Bx + c$ и решение к-рой находится как предел последовательности $x^{k+1} = Bx^k + c$, $k = 0, 1, \ldots$, где x^0 — начальное приближение. Для сходимости П. и. м. при любом начальном приближении x^0 необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы B были по модулю меньше единицы; и достаточно, чтобы какая-либо норма матрицы B была меньше единицы. Если для нормы матрицы B, согласованной с нормой вектора x, имеет место оценка $\|B\| \leqslant \rho < 1$, то П. и. м. сходится со скоростью геометрич. прогрессии и для погрешности метода верна оценка

$$\|x^m - x\| \leqslant \rho^m \|x^0 - x\|.$$

Для случая кубической, октаэдрической и сферической векторных норм условие $\|B\| \leqslant \rho$ будет выполнено, если имеют место оценки:

1) $\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \leqslant \rho, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$

2) $\sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \leqslant \rho, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$

3) $\sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij}^2 \leqslant \rho^2.$

Простейший вариант метода соответствует случаю, когда в качестве матрицы B выбирают матрицу $E - A$, где E — единичная матрица. Если все диагональные элементы матрицы A отличны от нуля, то, выбирая $b = D^{-1}(D - A)$ и $c = D^{-1}b$, где D — диагональная матрица, диагональные элементы к-рой совпадают с диагональными элементами матрицы A, получают *Якоби метод* или метод одновременных смещений.

Частным случаем П. и. м. является метод $B = E - \tau A$ и $c = \tau b$, где τ — итерационный параметр, к-рый выбирается из условия минимума по τ нормы матрицы $E - \tau A$. Если γ_1 и γ_2 — минимальное и максимальное собственные значения симметричной положительно определенной матрицы A, то при $\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ для сферич. нормы матрицы B имеет место оценка $\|B\| \leqslant \rho$, где $\rho = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} < 1$.

Для нелинейной системы алгебраич. уравнений

$$\varphi_i(x) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

П. и. м. имеет вид

$$x_i^{k+1}=x_i^k-\tau\varphi_i(x^k),\quad 1\leqslant i\leqslant n,\quad k\geqslant 0.$$

Вопрос о выборе итерационного параметра τ решается в зависимости от дифференциальных свойств функций $\varphi_i(x)$. Часто он подчинен требованию локальной сходимости метода в окрестности решения.

Лит.: [1] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М., 1963; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [3] Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975; [4] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

Е. С. Николаев.

ПРОСТОЙ ЭЛЕМЕНТ — обобщение понятия простого числа. Пусть G — область целостности или коммутативная полугруппа с единицей, удовлетворяющая закону сокращения. Ненулевой элемент $p\in G$, не являющийся делителем единицы, наз. простым, если произведение ab может делиться на p лишь в том случае, когда хотя бы один из элементов a или b делится на p. Всякий П. э. является неприводимым, т. е. делится только на делители единицы и ассоциированные с ним элементы. Неприводимый элемент не обязан быть простым, однако в *гауссовой полугруппе* эти два понятия совпадают. Более того, если всякий неприводимый элемент из G является простым, то полугруппа G гауссова. Аналогичные утверждения имеют место для *факториальных колец*. Элемент кольца является простым тогда и только тогда, когда главный идеал, порожденный этим элементом,— *простой идеал*.

Существуют обобщения этих понятий на некоммутативный случай (см. [2]).

Лит.: [1] Кон П., Свободные кольца и их связи, пер. с англ., М., 1975; [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [3] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

О. А. Иванова.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФОРМЫ — связные полные римановы пространства постоянной кривизны. Проблема классификации n-мерных римановых пространств произвольной постоянной кривизны была сформулирована В. Киллингом (W. Killing, 1891), к-рый назвал ее проблемой пространственных форм Клиффорда — Клейна; современная формулировка этой проблемы дана Х. Хопфом (H. Hopf, 1925).

Примеры П. ф.: евклидово пространство E^n размерности n есть П. ф. нулевой кривизны (так называемое плоское пространство); сфера S^n в E^{n+1} радиуса $r>0$ есть П. ф. положительной кривизны $1/r^2$; пространство Лобачевского (гиперболич. пространство) Λ^n есть П. ф. отрицательной кривизны; плоский тор $T^n=E^n/\Gamma$, где Γ — n-мерная решетка в E^n, есть П. ф. нулевой кривизны (плоское пространство).

Любая П. ф. M^n кривизны σ может быть получена из односвязной П. ф. $\tilde{M}^n$ той же кривизны факторизацией по дискретной группе Γ движений пространства $\tilde{M}^n$, действующих свободно (т. е. без неподвижных точек); при этом два пространства $M^n=\tilde{M}^n/\Gamma$ и $M'^n=\tilde{M}^n/\Gamma'$ изометричны в том и только в том случае, когда Γ и Γ' сопряжены в группе всех движений $\tilde{M}^n$. Тем самым проблема классификации П. ф. сводится к задаче описания всех несопряженных групп движений пространств S^n, E^n и Λ^n, действующих свободно. Пространство M^n наз. сферической пространственной формой (с. п. ф.), если $M^n=S^n/\Gamma$, евклидовой пространственной формой (е. п. ф.), если $M^n=E^n/\Gamma$, и гиперболической пространственной формой (г. п. ф.), если $M^n=\Lambda^n/\Gamma$; фундаментальная группа M^n изоморфна Γ. При изучении проблемы классификации П. ф. ненулевой кривизны σ значение

$|\sigma|$ не играет существенной роли, поэтому обычно считают $|\sigma|=1$.

Если n четно, то единственным движением сферы S^n без неподвижных точек является центральная симметрия, переводящая каждую точку сферы в диаметрально противоположную; факторпространство S^n/Γ по группе Γ, порожденное этим движением, есть пространство Римана (эллиптич. пространство). Любая с. п. ф. четной размерности n изометрична либо S^n, либо P^n. Были классифицированы трехмерные с. п. ф. (см. [2]). Следующим шагом в направлении классификации с. п. ф. явилась общая программа решения этой проблемы и её применение для классификации с. п. ф. размерности $4k+1$ (см. [4]). Поскольку сфера S^n компактна, дискретная группа Γ движений S^n конечна, то для классификации n-мерных с. п. ф. достаточно описать все несопряженные конечные подгруппы ортогональной группы $0(n+1)$, действующие свободно на S^n. Говорят, что ортогональное представление π конечной группы G в E^{n+1} свободно от неподвижных точек, если для всех $g\in G\setminus\{1\}$ преобразование $\pi(g)$ сферы S^n не имеет неподвижных точек; в частности, π — точное представление. Согласно программе, изложенной в [4], решение проблемы с. п. ф. Клиффорда — Клейна можно разбить на ряд этапов. Во-первых, найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы абстрактная группа G могла служить фундаментальной группой с. п. ф. и классифицировать такие группы; получается нек-рое семейство $\{G_\lambda\}$ групп. Во-вторых, описать все неэквивалентные неприводимые ортогональные представления каждой из групп $\{G_\lambda\}$ и выделить среди них представления, свободные от неподвижных точек. Наконец, определить все автоморфизмы групп $\{G_\lambda\}$ и выяснить, какие из найденных представлений эквивалентны по модулю автоморфизма соответствующей группы. Эта программа в полном объеме была реализована в [5], что привело к исчерпывающей классификации с. п. ф. Любая конечная циклич. группа принадлежит семейству $\{G_\lambda\}$; чтобы нециклич. группа порядка N могла служить фундаментальной группой n-мерной с. п. ф., необходимо (но не достаточно), чтобы N было взаимно просто с $n+1$ и делилось на квадрат какого-либо целого числа.

Глобальная теория е. п. ф. возникла как приложение нек-рых результатов геометрич. кристаллографии. В работе [3] был использован известный с кон. 19 в. список кристаллографич. групп в E^3 и получена топологическая, а в компактном случае аффинная, классификация трехмерных е. п. ф. Теоремы Бибербаха о кристаллографич. группах в E^n приводят к структурной теории компактных е. п. ф. произвольной размерности. В частности, для любого $n\geqslant 2$ существует только конечное число разных классов эквивалентных компактных е. п. ф. размерности n, при этом две компактные е. п. ф. $M^n=E^n/\Gamma$ и $M'^n=E^n/\Gamma'$ аффинно эквивалентны, если и только если их фундаментальные группы Γ и Γ' изоморфны. Напр., любая двумерная компактная е. п. ф. гомеоморфна (а следовательно, аффинно эквивалентна) либо плоскому тору, либо поверхности Клейна. Абстрактная группа Γ тогда и только тогда может служить фундаментальной группой компактной е. п. ф. M^n, когда а) Γ имеет нормальную абелеву подгруппу Γ^* конечного индекса, изоморфную $\mathbb{Z}^n$; б) Γ^* совпадает со своим централизатором в Γ; в) Γ не имеет элементов конечного порядка. Если такая группа Γ реализована в виде дискретной подгруппы в группе всех движений пространства E^n, то Γ^* совпадает с множеством параллельных сдвигов, принадлежащих Γ, и имеется нормальное накрытие p пространства $M^n=E^n/\Gamma$ плоским тором $T^n=E^n/\Gamma^*$, определенное формулой $p(\Gamma^*(x))=\Gamma(x)$ для всех $x\in E^n$.

Конечная группа Γ/Γ^* изоморфна группе накрывающих преобразований для p, к-рая в свою очередь изоморфна *голономии группе* пространства M^n. Компактная е. п. ф. всегда имеет конечную группу голономии. Справедливо и обратное утверждение: компактное риманово пространство, группа голономии к-рого конечна, является плоским. Доказано, что любая конечная группа изоморфна группе голономии нек-рой компактной е. п. ф. Аффинная классификация компактных е. п. ф. заданной размерности n в настоящее время (1983) известна только для $n \leqslant 4$. При $n=3$ имеется 6 классов ориентируемых и 4 класса неориентируемых аффинно эквивалентных компактных е. п. ф. Классифицированы компактные е. п. ф. с циклич. группами голономии простого порядка. Семейство всех неизометричных плоских торов T^n можно параметризовать элементами из

$$SL(n, \mathbb{Z}) \diagdown GL^+(n, R)/SO(n),$$

где $GL^+(n, R)$ — связная компонента единицы в $GL(n, R)$, а изометрич. классификация компактных е. п. ф. размерности n непосредственно следует из их аффинной классификации и изометрич. классификации торов T^n. Некомпактные е. п. ф. классифицированы (с точностью до изометрии) только в размерностях 2 и 3; в частности, двумерная некомпактная е. п. ф., отличная от E^2, гомеоморфна цилиндру, либо листу Мёбиуса. Любая некомпактная е. п. ф. допускает действительную аналитич. ретракцию на компактное вполне геодезич. плоское подмногообразие; класс фундаментальных групп некомпактных е. п. ф. совпадает с классом фундаментальных групп компактных е. п. ф.

Исследование двумерных г. п. ф. по существу началось в 1888, когда А. Пуанкаре (H. Poincaré, [1]), изучая дискретные группы дробно-линейных преобразований верхней полуплоскости $\mathrm{Im}(z)>0$ комплексной плоскости — *фуксовы группы*, заметил, что их можно трактовать как группы движений плоскости Лобачевского Λ^2. Пусть $\mathscr{L}$ — группа движений Λ^2, сохраняющих ориентацию; $A_1, \ldots, A_{4m}$, $m \geqslant 2$,— выпуклый $4m$-угольник в Λ^2 с попарно конгруэнтными геодезич. сторонами

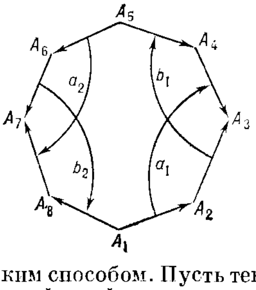
$$A_{4i-3}A_{4i-2} = A_{4i-1}A_{4i}, \quad A_{4i-2}A_{4i-1} = A_{4i}A_{4i+1},$$

где $i=1, \ldots, m$, $A_{4m+1}=A_1$, сумма углов к-рого 2π. Элементы a_i и b_i из $\mathscr{L}$ переводят $A_{4i-3}A_{4i-2}$ в

$$A_{4i}A_{4i-1} \text{ и } A_{4i-2}A_{4i-1} \text{ в } A_{4i-1}A_{4i}$$

соответственно (на рис. показан случай $m=2$). Тогда подгруппа $\Gamma \subset \mathscr{L}$, порожденная элементами a_i, b_i, действует на Λ^2 без неподвижных точек, а заданный $4m$-угольник служит фундаментальной областью этой группы; при этом Γ имеет единственное определяющее соотношение

$$\prod_{i=1}^{m} [a_i, b_i] = 1.$$



Факторпространство Λ^2/Γ является ориентируемой компактной г. п. ф. рода m, и каждая двумерная ориентируемая компактная г. п. ф. может быть получена таким способом. Пусть теперь Γ — абстрактная группа, изоморфная фундаментальной группе ориентируемой замкнутой поверхности рода m. Тогда существует непрерывное отображение $\varphi: \Gamma \times R^{6m-6} \to \mathscr{L}$, удовлетворяющее условиям: а) для всех $x \in R^{6m-6}$ отображение $\varphi_x: g \to \varphi(g, x)$ является мономорфизмом Γ в $\mathscr{L}$; б) подгруппы $\Gamma_x = \varphi_x(\Gamma)$ и $\Gamma_{x'} = \varphi_{x'}(\Gamma)$ сопряжены в $\mathscr{L}$ тогда и только тогда, когда $x = x'$; в) если дискретная подгруппа $\Gamma' \subset \mathscr{L}$ изоморфна Γ, то она сопряжена с Γ_x для нек-рого $x \in R^{6m-6}$. Таким образом, семейство неизоморфных компактных г. п. ф. размерности 2 рода m зависит от $6m-6$ действительных параметров. Двумерная компактная г. п. ф. естественным образом наделяется структурой римановой поверхности, и только что сформулированное утверждение первоначально было доказано средствами теории униформизации; геометрич. доказательство было дано в [7]. Указанные результаты обобщаются на некомпактные г. п. ф., гомеоморфные сфере с конечным числом ручек и дырок, а также на неориентируемые г. п. ф. размерности 2. В противоположность двумерному случаю не существует непрерывных семейств неизометричных компактных г. п. ф. размерности больше 2. А именно, компактные г. п. ф. размерности $n \geqslant 3$, имеющие изоморфные фундаментальные группы, изометричны. Других общих результатов, непосредственно относящихся к классификации n-мерных г. п. ф., в настоящее время (1983) нет; примеры г. п. ф. размерности $n \geqslant 3$ приведены в [6], [8].

Кроме римановых П. ф. изучались их обобщения: псевдоримановы, аффинные и комплексные П. ф. и П. ф. симметрич. пространств (см., напр., [9]).

Лит.: [1] Пуанкаре А., Избр. труды, т. 3, М., 1974; [2] Threlfall W., Seifert H., «Math. Ann.», 1930, Bd 104, S. 1—70; [3] Nowacki W., «Comment. math. helv.», 1934, v. 7, p. 81—93; [4] Vincent G., там же; 1947, v. 20, p. 117—71; [5] Вольф Дж., Пространства постоянной кривизны, пер. с англ., М., 1982; [6] Винберг Э. Б., «Матем. сб.», 1969, т. 78, № 4, с. 633—39; [7] Натанзон С. М., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 4, с. 145—60; [8] Millson J. J., «Ann. Math.», 1976, v. 104, p. 235—47; [9] Borel A., «Topology», 1963, № 2, p. 111—22. *Н. Р. Камышанский.*

ПРОСТРАНСТВО — логически мыслимая форма (или структура), служащая средой, в к-рой осуществляются другие формы и те или иные конструкции. Напр., в элементарной геометрии плоскость или пространство служат средой, где строятся разнообразные фигуры. В большинстве случаев в П. фиксируются отношения, сходные по формальным свойствам с обычными пространственными отношениями (расстояние между точками, равенство фигур и др.), так что о таких П. можно сказать, что они представляют логически мыслимые пространственно-подобные формы. Первым и важнейшим математич. П. является трехмерное *евклидово пространство*, представляющее приближенный абстрактный образ реального П. Общее понятие «П.» в математике сложилось в результате обобщения и видоизменения понятий геометрии евклидова П. Первые П., отличные от трехмерного евклидова, были введены в 1-й пол. 19 в. Это были *Лобачевского пространство* и евклидово П. любого числа измерений (см. *Многомерная геометрия*). Общее понятие о математич. П. как «многократной протяженности» было выдвинуто в 1854 Б. Риманом (B. Riemann); оно обобщалось, уточнялось и конкретизировалось в разных направлениях: таковы, напр., *риманово пространство*, *финслерово пространство*, *векторное пространство*, *гильбертово пространство*, *метрическое пространство*, *топологическое пространство*. В современной математике П. определяют как множество каких-либо объектов, к-рые наз. его точками; ими могут быть геометрич. фигуры, функции, состояния физич. системы и т. д. Рассматривая их множество как П., отвлекаются от всяких их свойств и учитывают только те свойства их совокупности, к-рые определяются принятыми во внимание или введенными по определению отношениями. Эти отношения между точками и теми или иными фигурами, т. е. множествами точек, определяют «геометрию» П. При аксиоматич. ее построении основные свойства этих отношений выражаются в соответствующих аксиомах.

Примерами П. могут служить: 1) метрич. П., в к-рых определено расстояние между точками; напр., П. непрерывных функций на к.-л. отрезке $[a, b]$, где точками служат функции $f(x)$, непрерывные на $[a, b]$, а расстояние между $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определяется как максимум модуля их разности:

$$r = \max | f_1(x) - f_2(x) |.$$

2) «П. событий», играющее важную роль в геометрич. интерпретации теории относительности. Каждое событие характеризуется положением — координатами x, y, z и временем t, поэтому множество всевозможных событий оказывается четырехмерным П., где «точка» — событие определяется 4 координатами x, y, z, t. 3) Фазовые П., рассматриваемые в теоретич. физике и механике. Фазовое П. физич. системы — это совокупность всех ее возможных состояний, к-рые рассматриваются при этом как точки этого П. *А. Д. Александров.*

***H*-ПРОСТРАНСТВО** — топологическое пространство с умножением, обладающим двусторонней гомотопич. единицей. Подробнее, пунктированное топологич. пространство (X, e), для к-рого задано непрерывное отображение $m: X \times X \to X$, наз. H-пространством, если $m(e, e) = e$ и отображение $X \to X$, $x \to m(x, e)$ и $x \to m(e, x)$ гомотопны rel (e, e) тождественному отображению. Отмеченная точка e наз. гомотопической единицей H-П. X. Иногда термин «H-П.» употребляется в более узком смысле, при к-ром требуется, чтобы отображение $m: X \times X \to X$ было гомотопически ассоциативным, т. е. чтобы отображения

$$m \circ (m \times id), \ m \circ (id \times m) : X \times X \times X \longrightarrow X$$

были гомотопны rel (e, e, e) между собой. Иногда требуется также существование гомотопически обратных элементов. Это значит, что должно быть задано отображение $\mu: (X, e) \to (X, e)$, для к-рого отображения

$$X \longrightarrow X, \ x \longrightarrow m(x, \mu(x)), \ x \longrightarrow m(\mu(x), x)$$

гомотопны постоянному отображению $X \to e$. Напр., для любого пунктированного топологич. пространства Y *петель пространство* ΩY является гомотопически ассоциативным H-П. с гомотопически обратными элементами, а $\Omega^2 Y = \Omega(\Omega Y)$ является также и коммутативным H-П., то есть таким, что отображения

$$X \times X \longrightarrow X, \ (x, y) \longrightarrow m(x, y), \ (x, y) \longrightarrow m(y, x)$$

гомотопны. Группы когомологий H-П. образуют *Хопфа алгебру*.

Лит.: [1] Бордман Дж., Фогт Р., Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах, пер. с англ., М., 1977. *А. Ф. Харшиладзе.*

***K*-ПРОСТРАНСТВО**, Канторовича пространство,— порядково полное векторное пространство, т. е. векторное *полуупорядоченное пространство*, в к-ром всякое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань. Открыто Л. В. Канторовичем [1].

Лит.: [1] Канторович Л. В., «Матем. сб.», 1937, т. 2, с. 121—68. *М. И. Войцеховский.*

ПРОСТРАНСТВО НАД АЛГЕБРОЙ — пространство, обладающее *дифференциально-геометрической структурой*, точки к-рого могут быть снабжены координатами из нек-рой алгебры. В большинстве случаев алгебра предполагается ассоциативной с единицей, иногда — альтернативной с единицей (см. *Ассоциативные кольца и алгебры*, *Альтернативные кольца и алгебры*).

Для построения широкого класса П. н. а. можно исходить из понятия унитарного модуля над алгеброй, определение к-рого получается из определения векторного пространства над телом путем замены тела на ассоциативную алгебру с единицей (см. [1], [3]). В результате присоединения к элементам модуля, называемым векторами, новых элементов, называемых точками, связанных с векторами теми же аксиомами, что и точки аффинного пространства с его векторами, получается аффинное пространство над ассоциативной алгеброй с единицей. Аффинные преобразования в аффинном пространстве над алгеброй имеют в координатах вид

$$x^{i}=\sum\nolimits_{j=1}^{n} A_{j}^{i} f\left(x^{j}\right)+a^{i},$$

где $f(x)$ — непрерывный автоморфизм алгебры. n-мерное аффинное пространство над алгеброй, имеющей ранг r над нек-рым полем, допускает естественную модель (представление) в nr-мерном аффинном пространстве над тем же полем. В этой модели каждая точка аффинного пространства над алгеброй изображается точкой nr-мерного аффинного пространства над рассматриваемым полем, координатами к-рой являются коэффициенты разложений координат точек пространства над алгеброй по базисным элементам алгебры. В случае, когда базисные элементы ε_A, $A=1, \ldots, r$, алгебры связаны между собой структурными уравнениями

$$\varepsilon_{A} \varepsilon_{B}=\gamma_{A B}^{C} \varepsilon_{C},$$

где γ_{AB}^{C} — структурные константы алгебры, каждому базисному элементу ε_A соответствует в модели линейное преобразование с матрицей

$$\left\|\begin{array}{ccc}\gamma_{A} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \gamma_{A}\end{array}\right\|, \qquad (*)$$

где по диагонали стоят n одинаковых r-мерных блоков $\gamma_A=\|\gamma_{AB}^{C}\|$. В аффинных пространствах над алгебрами можно задать эрмитову метрику (евклидову и псевдоевклидову), а в случае коммутативных алгебр и квадратичную (евклидову и псевдоевклидову) метрику. Для этого в унитарном модуле определяется скалярное произведение векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, в первом случае обладающее свойством

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})^{I},$$

где I — инволютивный антиавтоморфизм (инволюция) в алгебре, а во втором случае — свойством

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}).$$

Скалярный квадрат вектора $\overline{AB}$ определяет метрич. инварианты пары точек A и B; движения евклидовых и псевдоевклидовых пространств — аффинные преобразования, сохраняющие скалярное произведение векторов. При замене в определении эллиптических и гиперболических П. н. а. скалярного произведения векторов скалярным произведением векторов $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, для к-рого $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=-(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^{I}$ или $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=-(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, получается эрмитово, или квадратичное симплектическое, П. н. а.

Многообразие одномерных подмодулей $(n+1)$-мерного унитарного модуля над алгеброй K наз. n-мерным проективным пространством над алгеброй K; точками этого пространства наз. одномерные подмодули, а координаты векторов этих подмодулей наз. проективными координатами точек. В проективном П. н. а. определяются так же, как в проективных пространствах над полями, *коллинеации* и *корреляции*. В проективных координатах коллинеации имеют вид

$$x^{\prime i}=\sum\nolimits_{j=1}^{n+1} A_{j}^{i} f\left(x^{j}\right),$$

где $f(x)$ — непрерывный автоморфизм алгебры, а корреляции имеют вид

$$lu_i=\sum_{j=1}^{n} f(x^j)\,A_{ij},$$

где $f(x)$ — непрерывный антиавтоморфизм алгебры, а u_i — проективные координаты гиперплоскости. Введение скалярного произведения векторов в унитарном модуле позволяет определить в проективном пространстве, построенном с помощью этого модуля, эрмитовы или, в случае коммутативной алгебры, квадратичные эллиптические и гиперболич. метрики. Метрич. инварианты точек этих пространств определяются скалярными произведениями векторов x и y соответствующих подмодулей с помощью двойного отношения

$$W=(x,\ x)^{-1}(x,\ y)(y,\ y)^{-1}(y,\ x).$$

В том случае, когда W — действительное число, инвариант ω, для к-рого $W=\cos^2\omega$, наз. расстоянием между соответствующими точками (см. [2]).

Проективные, эллиптические, гиперболические и симплектич. пространства над действительными простыми алгебрами (напр., алгебрами действительных, комплексных и кватернионных матриц) обладают тем свойством, что их фундаментальные группы являются простыми группами Ли бесконечных серий. Евклидовы, псевдоевклидовы и квазиэллиптические, квазигиперболические и квазисимплектич. пространства над теми же алгебрами обладают тем свойством, что их фундаментальные группы являются квазипростыми группами Ли тех же серий (см. [2]); тем же свойством обладают проективные, эллиптические, гиперболические и симплектич. пространства над полупростыми алгебрами, к к-рым относится алгебра дуальных чисел.

Несколько сложнее определяются проективные и эрмитовы (эллиптические и гиперболические) плоскости над альтернативными алгебрами. Фундаментальные группы этих плоскостей являются простыми или квазипростыми группами Ли нек-рых особых классов.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [3] Benz W., Vorlesungen über Geometrie der Algebren, B., 1973.

Б. А. Розенфельд, А. П. Широков.

ПРОСТРАНСТВО ОТОБРАЖЕНИЙ топологическое — множество F отображений множества X в топологич. пространство Y с какой-нибудь естественной топологией T на F. При фиксированных множестве X и пространстве Y получаются различные П. о. в зависимости от того, какие отображения $X\to Y$ включаются в F и какая естественная топология берется на F. Выбор F связан с наличием на X и Y дополнительных структур и спецификой рассматриваемой ситуации. Так, в качестве F могут фигурировать: множество всех непрерывных отображений множества X в пространство Y, множество всех отображений множества X в пространство Y, множество всех непрерывных линейных отображений топологического векторного пространства X в топологическое векторное пространство Y, множество всех непрерывных гомоморфизмов топологич. группы X в топологич. группу Y, множество всех гладких отображений отрезка в прямую и т. д.

Важность рассмотрения П. о. в определенной мере вызвана тем, что отображения представляют собой наиболее общий способ сравнения математич. объектов.

Естественные топологии (на множестве F) обычно определяются по следующей схеме. В F фиксируется семейство S подмножеств, и *предбаза* топологии T на F составляется из множеств вида

$$V(A,\ V)=\{f\in F;\ f(A)\subset V\},$$

где $A\in S$ и V — любое открытое множество в F. Если S — семейство всех конечных (или одноточечных) подмножеств множества X, то T наз. **топологией поточечной сходимости** на X. Если S состоит из всех компактных подмножеств топологич. пространства X, то T наз. **компактно открытой топологией**. Если $X \in S$, то T наз. **топологией равномерной сходимости** (на X). Впрочем, всякую топологию T на F, получаемую по этой схеме, наз. топологией равномерной сходимости на элементах семейства S.

В зависимости от области математики те или иные П. о. оказываются особенно важными. К числу центральных объектов функционального анализа относятся банаховы пространства непрерывных функций на компактах в **топологии нормы**, т. е. топологии равномерной сходимости, и в **слабой топологии**, к-рая описывается в терминах поточечной сходимости. В теории гомотопий важную роль играет пространство путей в топологич. пространстве, т. е. пространство непрерывных отображений действительного отрезка в это пространство. Гомотопии одного отображения в другое представляются путем в пространстве отображений. П. о. сфер в сферы возникает при определении гомотопических и когомотопических групп.

Особенно естественной на множестве всех отображений одного K-пространства в другое оказывается компактно открытая топология. Преимуществом топологии равномерной сходимости (на всем пространстве) является ее метризуемость. Эта топология — сильнейшая в большом классе естественных топологий на П. о. Но обладает важными преимуществами и топология поточечной сходимости — слабейшая в том же круге топологий. Во-первых, эта топология обладает наибольшим запасом компактов, как слабейшая, а компактность является одним из наиболее полезных свойств множества функций. Во-вторых, имеет место фундаментальный результат Дз. Нагаты (J. Nagata), к-рым изучение любых *тихоновских пространств* ставится в прямую связь с исследованием топологич. колец. А именно, тихоновские пространства X и Y гомеоморфны в том и только в том случае, если топологически изоморфны топологич. кольца $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ непрерывных функций на X и Y, взятые в топологии поточечной сходимости.

Рассмотрение топологич. свойств П. о. полезно при доказательстве теорем о существовании отображений с тем или иным свойством. Полнота метрич. пространства непрерывных действительных функций на компакте через принцип сжатых отображений применяется для доказательства фундаментальной теоремы о существовании решения дифференциального уравнения в известных предположениях. Следствием полноты метрич. пространства функций является *Бэра свойство*. На этой основе доказывается, напр., существование непрерывной нигде не дифференцируемой функции на отрезке. Свойство Бэра П. о. играет центральную роль при доказательстве теорем *общего положения*, при доказательстве известной теоремы о вложимости каждого n-мерного компакта со счетной базой в $(2n+1)$-мерное евклидово пространство, и т. п.

Влияние пространств действительных функций на общую топологию проявилось в следующей задаче общего характера: как связаны свойства пространств X и Y, если пространства непрерывных действительных функций над ними (в топологии поточечной сходимости, в компактно открытой топологии) гомеоморфны (линейно гомеоморфны). Известно, напр., что линейные гомеоморфизмы сохраняют компактность и размерность.

Существенное значение имеет наследование двойственности между свойствами топологич. пространства и топологич. свойствами пространства функций над ним в топологии поточечной сходимости. Примером полезного результата в этой области может служить теорема: любая конечная степень пространства линделёфова в том и только в том случае, если пространство функций над ним имеет счетную тесноту. Этот результат применяется, в частности, при исследовании строения компактов Эберлейна — компактов, лежащих в банаховых пространствах, наделенных слабой топологией.

Лит.: [1] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1981. *А. В. Архангельский.*

ПРОСТРАНСТВО С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ, G-пространство,— пара объектов (E, G), из к-рых первый есть векторное пространство E над полем комплексных чисел, а второй есть билинейная (точнее, полуторалинейная) форма G над E; эта форма наз. также G-метрикой. Если G — положительно определенная (т. н. дефинитная) форма, то G есть скалярное произведение в E, и с помощью G можно канонич. способом (см., напр., *Гильбертово пространство с индефинитной метрикой*) ввести норму и расстояние (т. е. обычную метрику) для элементов из E. В случае общей полуторалинейной формы нет норм или метрик, канонически связанных с G, и термин «G-метрика» лишь напоминает о тесной связи дефинитных полуторалинейных форм с нек-рыми метриками в векторных пространствах.

Теория конечномерных пространств с индефинитной метрикой, наз. чаще билинейно метрич. пространствами или пространствами с билинейной метрикой, разработана еще Г. Фробениусом и излагается в курсах линейной алгебры (см. [1]).

Основной целью общей теории П. с и. м. является выделение и исследование сравнительно простых, но важных для приложений классов *несамосопряженных операторов* в гильбертовом пространстве. П. с и. м. впервые введены Л. С. Понтрягиным [2] (подробнее см. *Понтрягина пространство*).

Теория П. с и. м. развивается по двум направлениям — геометрия этих пространств и линейные операторы в них.

Геометрия общих П. с и. м. в основном исследует: а) связь G-метрики с различными топологиями на E; б) классификацию векторных подпространств (линеалов) в E относительно G-метрики (особенно т. н. дефинитных подпространств; см. ниже); в) свойства G-проектирования; г) базисы G-пространств.

В случае эрмитовой G-метрики ($G^{\text{Э}}$-метрики), т. е. такой, что $G(x, y)=\overline{G(y, x)}$ для всех $x, y\in E$, важнейшими понятиями и результатами геометрии П. с и. м. являются следующие. Пусть каждому вектору $y\in E$ поставлен в соответствие линейный функционал $G_y : x\to G(x, y)$, $x\in E$. Топология τ на E наз. подчиняющей G-метрику, если функционал G_y непрерывен в τ для всех $y\in E$; топология τ наз. согласующейся с G-метрикой, если она подчиняет G и каждый τ-непрерывный функционал имеет вид G_y, $y\in E$. В пространстве E с индефинитной метрикой можно задать не более одной топологии Фреше, подчиняющей G, и, однако, не каждая G-метрика допускает такую топологию (см. [4]). Если подчиняющая G-метрику топология является предгильбертовой топологией на E и задается в E скалярным произведением $H(\cdot, \cdot)$, то форма H наз. эрмитово неотрицательной мажорантой формы G; в этом случае

$$|G(x, y)|^2\leqslant CH(x, x)H(y, y),\ C=\text{const},\ x, y\subset E.$$

После пополнения по H-норме получается гильбертово пространство с индефинитной метрикой $(\tilde{E}, \tilde{G})$, где $\tilde{G}$ — продолжение G по непрерывности на все пространство $\tilde{E}$. При этом метрика $\tilde{G}$ может оказаться вырожденной, даже если G — невырожденная метрика. Этого вырождения не происходит, если метрика G невырождена и наибольшая из размерностей $\varkappa$ положительных подпространств в E конечна. В последнем случае получается пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$.

Подпространство L в пространстве (E, G) с индефинитной метрикой наз. положительным подпространством, отрицательным подпространством (общее название — дефинитным подпространством) или нейтральным подпространством, в зависимости от того, будет ли $G(x, x)>0$, $G(x, x)<0$ или $G(x, x)=0$ для любого $x \in L$; подпространство максимально положительно, если оно положительно и не может быть расширено с сохранением этого свойства. Всякое подпространство одного из названных типов содержится в максимальном подпространстве того же типа.

Важную роль в классификации подпространств в пространствах с индефинитной метрикой играют понятия канонического разложения и G-ортогонального проектирования.

Вектор $x \in E$ наз. G-ортогональным к подпространству $L \subset E$ (= изотропным подпространством относительно L), если $G(x, y)=0$ для любого $y \in L$. Подпространство L наз. вырожденным, если оно содержит хотя бы один ненулевой вектор, изотропный относительно L. Если L — подпространство в пространстве E с индефинитной метрикой, то $L'=\{y : G(x, y)=0, \forall x \in L\}$— его G-ортогональное дополнение. Всегда $L''=L^\tau$, где τ — любая топология, согласующаяся с G. G-ортогональное дополнение L' вырожденного векторного подпространства L является вырожденным векторным подпространством, замкнутым относительно любой топологии τ, согласующейся с G, а $L \cap L^\perp$ есть векторное подпространство изотропных элементов. Подпространство L наз. проекционно полным, если каждый вектор $y \in E$ имеет G-проекцию на L, т. е. существует такое $y_0 \in L$, что $G(x, y-y_0)=0$ для каждого $x \in L$. Единственность G-проекции на L равносильна невырожденности подпространства L, а ее существование зависит от непрерывности функционала G_y в топологиях на L, согласующихся с G. Если M и N являются G-ортогональными подпространствами и $M+N=E$, то M и N проекционно полны; если L — проекционно полное подпространство, то $L+L'=E$, причем сумма есть прямая сумма, если E — невырожденное пространство с индефинитной метрикой.

Пусть L — дефинитное подпространство в пространстве с индефинитной метрикой E; оно наз. регулярным, если каждый функционал G_y, $y \in E$, непрерывен на L в норме $\|x\|_G=|G(x, x)|^{1/2}$. В противном случае оно наз. сингулярным. Всякое невырожденное бесконечномерное пространство с индефинитной метрикой содержит сингулярные подпространства. Дефинитное подпространство L проекционно полно в том и только в том случае, если оно регулярно и если для любого $y \in E$ найдется такой вектор $x \in L$, что

$$\|x\|_G^2=\|G_y\|_G^2=G(x, y).$$

Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой изучались в основном в гильбертовых пространствах с индефинитной метрикой; имеется обзор банаховых аналогов (см. [8]).

Как и в случае гильбертовых пространств с индефинитной метрикой, важным инструментом изучения геометрии П. с и. м. и линейных операторов в пространствах (E, G), наделенных нек-рой топологией, согласованной с G, являются так наз. G-ортонормированные базисы в E, т. е. такие базисы $\{e_n\}$ топологического векторного пространства E, что $(Ge_k, e_n)=\pm\delta_{kn}$; k, $n=1, 2, \ldots$ (см. [4]).

Лит.: [1] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 3 изд., М., 1970; [2] Понтрягин Л. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1944, т. 8, с. 243—80; [3] Иохвидов И. С., Крейн М. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1956, т. 5, с. 367—432; [4] Гинзбург Ю. П., Иохвидов И. С., «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, № 4, с. 3—56; [5] Крейн М. Г., в кн.: Вторая летняя матем. школа, ч. 1, К., 1965, с. 15—92; [6] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 4, с. 43—92; [7] Надь К., Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1969; [8] Иохвидов И. С., «Изв. АН Молд. ССР», 1968, № 1, с. 60—80. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.*

ПРОСТРАНСТВО С МЕРОЙ (X, A, μ) — *измеримое пространство* (X, A) с заданной на A *мерой* μ (т. е. счетно аддитивной функцией со значениями в $[0, \infty]$, для к-рой $\mu(\varnothing)=0$; последнее свойство следует из аддитивности, если мера конечна, т. е. не принимает значения ∞, и даже если имеется хоть одно $Y\in A$ с $\mu Y<\infty$). Запись (X, A, μ) часто сокращают до (X, μ) и говорят, что μ есть мера на X; иногда эту запись сокращают даже до X. Основной случай — когда A является σ-алгеброй и X можно представить в виде $\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$ с $X_n\in A$ и $\mu X_n<\infty$; меру в этом случае наз. (вполне) σ-конечной (а если $\mu X<\infty$, то (вполне) конечной). Такова, напр., мера Лебега на $\mathbb{R}$ (см. *Лебега пространство*). Однако иногда встречаются и не σ-конечные меры, как, напр., k-мерная *Хаусдорфа мера* на $\mathbb{R}^n$ при $k<n$. Встречаются также модификации, когда μ принимает значения в $(-\infty, \infty]$, комплексные или векторные значения, а также когда μ всего лишь конечно аддитивна.

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, ч. 1 — Общая теория, пер. с англ., М., 1962. *Д. В. Аносов.*

ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ — термин, обозначающий геометрич. конструкцию, к-рая описывает пространственные и временны́е отношения в тех физич. теориях, в к-рых эти отношения рассматриваются как взаимозависящие (эти теории принято наз. релятивистскими). Впервые понятие П.-в. возникло при формулировке и систематизации основных положений теории относительности. П.-в. этой теории является четырехмерным псевдоевклидовым пространством $E^4_{(1, 3)}$ с линейным элементом

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2,$$

где x, y, z — пространственные координаты, а t — временна́я координата, c — скорость света. Эта система координат называется в физике *галилеевой системой координат* и соответствует *инерциальной системе отсчета*. Переход между различными галилеевыми системами координат, соответствующий рассмотрению инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга, осуществляется с помощью *Лоренца преобразований*. То, что значение временно́й координаты в новой системе координат оказывается при этом выраженным как через временну́ю, так и через пространственные координаты старой системы координат, отражает взаимозависимость пространственных и временны́х отношений в специальной теории относительности. П.-в. специальной теории относительности принято называть также П.-в. Минковского, лоренцевым П.-в.

В общей теории относительности в качестве П.-в. используются различные четырехмерные псевдоримановы пространства сигнатуры (1, 3). Отличие метрики этого П.-в. от плоской метрики П.-в. специальной теории относительности описывает в общей теории относительности гравитационное поле (см. *Гравитация*). В свою очередь метрика П.-в. связана с распределением и свойствами негравитационных полей и различных видов с помощью *Эйнштейна уравнений*.

Выработка концепции П.-в. сыграла важную роль в преодолении метафизич. подхода к пространству как абсолютному вместилищу тел и к времени как абсолютной длительности, не связанной с реальными физич. процессами.

В дальнейшем концепция П.-в. в той или иной форме входит в структуру других физич. теорий, рассматривающих релятивистские эффекты (релятивистской квантовой механики, квантовой теории поля и др.). В общей теории относительности были изучены многие типы П.-в., являющиеся решениями уравнений Эйнштейна.

Качественное различие между пространственными и временными отношениями с точки зрения релятивистской физики находит свое отражение в наличии в П.-в. векторов различной природы — пространственно- и времениподобных векторов, образующих в касательных пространствах конусы. Соответственно, метрика П.-в. оказывается индефинитной, пространственно- и времениподобные векторы имеют разные знаки скалярного квадрата. Границу между конусами пространственно- и времениподобных векторов образует изотропный конус, *изотропные векторы* к-рого имеют нулевой скалярный квадрат и соответствуют движению света и других частиц с нулевой массой покоя.

Многие специфич. эффекты теории относительности связаны именно с индефинитностью метрики П.-в. и с наличием структуры изотропных конусов на П.-в. Напр., лоренцево замедление времени есть следствие обратного неравенства треугольника в пространстве с индефинитной метрикой, согласно к-рому в двумерном псевдоевклидовом пространстве наклонная всегда короче своей проекции.

Во многих случаях оказывается полезным в различной степени отвлекаться от конкретного строения метрики П.-в. и рассматривать лишь свойства структуры изотропных конусов на П.-в., то есть рассматривать различные т. н. общие пространства кинематич. типа, или времениподобные пространства.

При ретроспективном анализе предшествующих физич. теорий с точки зрения теории относительности были построены различные типы П.-в., к-рые можно условно поставить в соответствие ньютоновской механике (*галилеево пространство*) и даже физич. представлениям Аристотеля (см. [5]). Эти П.-в. являются различными пространствами с вырожденным изотропным (световым) конусом (напр., полуримановым пространством). Именно вырождение изотропного конуса позволяет рассматривать эти пространства как предельные случаи П.-в. теории относительности и сопоставлять их тем теориям, исходной внутренней структуре к-рых концепция П.-в. была чужда.

Лит.: [1] Эйнштейн А., Собр. науч. трудов, т. 1—4, М., 1965—67; [2] Александров А. Д., «Вопросы философии», 1959, № 1, с. 67—84; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973 (Теоретич. физика, т. 2); [4] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [5] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972. *Д. Д. Соколов.*

ПРОТИВОПОЛОЖНАЯ ТЕОРЕМА — теорема, получающаяся путем замены условия и заключения данной исходной теоремы их отрицаниями.

ПРОТИВОРЕЧИВЫЙ КЛАСС — класс K формул языка узкого исчисления предикатов (УИП) такой, что существует такая формула φ, что средствами УИП из K выводимо как φ, так и $\neg\varphi$ (отрицание φ). Другими словами, если к аксиомам УИП добавить все формулы из K в качестве новых аксиом, то в полученном исчислении будет выводима как формула φ, так и формула $\neg\varphi$. *В. Н. Гришин.*

ПРОТИВОРЕЧИЕ — формула φ языка узкого исчисления предикатов (УИП) такая, что во всех моделях этого языка она ложна. Формула φ является П. тогда и только тогда, когда $\neg\varphi$ выводимо в УИП.

В. Н. Гришин.

ПРОТИВОРЕЧИЯ ЗАКОН — логический закон, утверждающий, что никакое высказывание не может быть истинным одновременно со своим отрицанием. В языке исчисления высказываний П. з. выражается формулой

$$\neg(A \,\&\, \neg A).$$

Эта формула выводима как в классическом, так и в интуиционистском исчислении высказываний.

В. Н. Гришин.

ПРОЦЕДУРА — 1) Последовательность действий, выполняемая закономерно, согласно точному предписанию; *алгоритм.*

2) П.— особым образом оформленная *программа*, решающая задачу, частную по отношению к другой, более широкой задаче; фундаментальная конструкция *алгоритмических языков.*

П. является главным средством преодоления сложности *программирования* путем систематич. разделения задачи на части. Различают два способа выделения П. при программировании: нисходящий и восходящий. При нисходящем способе П. возникает при однократном разбиении задачи на малое число стандартно сопрягаемых подзадач; тем самым П. идентифицируется до того, как будет построена ее программа. При восходящем способе П. заготавливается впрок, с тем чтобы в дальнейшем быть использованной при решении более широкой задачи как элементарное действие.

Программа, образующая П., обычно содержит свободные переменные, называемые формальными параметрами П. При обращении к выполнению П. формальным параметрам придаются их значения, называемые фактич. параметрами. Описание П. обычно состоит из четырех частей: тела П., т. е. собственно программы, образующей П., имени П., списка формальных параметров и атрибутов — перечня свойств П. Обычно атрибуты характеризуют множества, к-рым принадлежат значения формальных параметров и результатов П. Простейшим видом П. являются процедуры-функции. Для них формальные параметры являются аргументами функции, а обращение к П.-функции, имеющее вид имени П., за к-рым стоит в скобках список фактич. параметров, означает «команду» вычисления значения функции, соответствующего этим параметрам.

А. П. Ершов.

ПРЮФЕРА ПОВЕРХНОСТЬ — пример двумерного действительного аналитич. многообразия, не имеющего счетного базиса открытых множеств; приведен в работе Т. Радо [1]. Имеется обобщение П. п. на случай любой четной размерности (см. [2]). Однако всякая риманова поверхность имеет счетный базис открытых множеств (теорема Радо).

Лит.: [1] Radó T., «Acta Szeged», 1925, v. 2, p. 101—21; [2] Calabi E., Rosenlicht M., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 4, p. 335—40; [3] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [4] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955.

Е. Д. Соломенцев.

ПРЯМАЯ — одно из основных геометрич. понятий. П. обычно косвенным образом определяется аксиомами геометрии; напр., евклидова П.— аксиомами инцидентности, порядка, конгруэнтности, непрерывности. П. наз. проективной, аффинной, гиперболической и т. д. в зависимости от плоскости, в к-рую она вложена. П. можно изучать по ее преобразованиям, индуцируемыми коллинеациями плоскости. Так, напр., группа алгебраич. автоморфизмов действительной проективной П. изоморфна группе перемещений действительной плоскости Лобачевского. Топологически все П. одной плоскости эквивалентны. Так, эллиптическая и действительная проективная П. топологически эквивалентны окружности евклидовой плоскости, а комплексная проективная П.— двумерной сфере евклидова пространства. П. наз. непрерывной, дискретной или конечной, если она инцидентна со множеством точек мощности континуума, счетным или конечным множеством соответственно.

В плоскости над произвольным полем под П. понимают алгебраич. линию 1-го порядка. В прямоугольной системе координат (x, y) евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ П. задается линейным уравнением

$$Ax+By+C=0,$$

коэффициенты A, B определяют координаты нормального вектора этой прямой.

Прямой (A, B) аффинного пространства над полем k (по Вейлю) наз. множество таких точек M, что $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$, где $t\in k$.

В. В. Афанасьев, Л. А. Сидоров.

ПРЯМАЯ СУММА — конструкция, широко используемая в теориях таких математич. структур, категории к-рых близки к *абелевым категориям*; в неабелевом случае конструкция прямой суммы обычно наз. дискретным прямым произведением. Пусть $\mathfrak{U}$ — нек-рый класс однотипных алгебраич. систем, содержащих одноэлементную (нулевую) подсистему. Прямой суммой или (дискретным) прямым произведением систем X_i, $i\in I$, из класса $\mathfrak{U}$ наз. подсистема *прямого произведения* $X=\prod_{i\in I}X_i$, состоящая из таких функций $f: I\to X$, все значения к-рых, кроме конечного числа, принадлежат соответствующим нулевым подсистемам. П. с. обозначается одним из следующих способов:

$$\prod\nolimits^{\otimes}_{i\in I}X_i,\quad \prod\nolimits^{\oplus}_{i\in I}X_i,\quad \sum\nolimits^{\cdot}_{i\in I}X_i.$$

Для конечного числа слагаемых используются также обозначения

$$X_1\dot{+}\ldots\dot{+}X_n,\quad X_1\oplus\ldots\oplus X_n.$$

Непосредственно из определений следует совпадение П. с. и прямого произведения в случае конечности числа слагаемых.

Для каждого слагаемого П. с. $X=\prod^{\oplus}_{i\in I}X_i$ существует канонич. вложение $q_i: X_i\to X$, к-рое элементу $x\in X_i$ сопоставляет функцию $q_i(x): I\to X$, принимающую значение x при значении аргумента i и равную нулю в остальных случаях. Следовательно, можно считать, что П. с. содержит свои слагаемые. В случае Ω-групп (в частности, в случае групп, абелевых групп, векторных пространств, колец) можно дать «внутреннее» определение П. с. Ω-группа G является П. с. своих Ω-подгрупп G_i, $i\in I$, если выполнены следующие условия: а) G порождается G_i, $i\in I$; б) каждая Ω-подгруппа G_i является идеалом в G; в) пересечение G_i с Ω-подгруппой, порожденной остальными идеалами, является нулевой подгруппой для каждого i.

Всякое векторное пространство есть П. с. одномерных подпространств. Всякая свободная абелева группа является П. с. бесконечных циклич. групп. Всякая конечная абелева группа есть П. с. примарных циклич. групп. Всякое ассоциативное кольцо с единицей, удовлетворяющее условию минимальности для идеалов, есть П. с. конечного числа полных колец линейных преобразований подходящих конечномерных векторных пространств.

В теории групп, решеток и категорий глубокое развитие получила проблема изоморфизма прямых разложений, начало к-рой было положено теоремой Ремака — Шмидта о центральном изоморфизме прямых разложений групп, обладающих главным рядом (см. *Крулля — Ремака — Шмидта теорема*).

В теории категорий иногда П. с. наз. понятие, двойственное понятию произведения, т. е. *копроизведение* объектов категории. *М. Ш. Цаленко.*

0-ПРЯМОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ полугрупп с нулем — полугруппа, полученная из данного семейства $\{S_\alpha\}$ полугрупп с нулем, попарно пересекающихся лишь по этому нулю, заданием на объединении $\bigcup S_\alpha$ операции умножения, совпадающей с исходной операцией на каждой полугруппе S_α и такой, что $S_\alpha S_\beta = 0$ для любых различных α, β. 0-П. о. наз. также ортогональной суммой. Описание ряда типов полугрупп устанавливает возможность их разложения в 0-П. о. тех или иных известных полугрупп (см., напр., *Максимальный идеал*, *Минимальный идеал*, *Регулярная полугруппа*).

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 2, М., 1972.

Л. Н. Шеврин.

ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ — одна из основных общематематич. конструкций, идея к-рой принадлежит Декарту; поэтому П. п. наз. также декартовым произведением. П. п., или просто произведением, двух непустых множеств X и Y наз. множество $X \times Y$, состоящее из всех упорядоченных пар вида (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, \ y \in Y\}.$$

Если одно из множеств X или Y пусто, то произведение пусто. Множество $X \times Y$ можно отождествить с множеством функций, определенных на двухэлементном множестве $\{1, 2\}$ и принимающих значения в множестве X при значении аргумента, равном 1, и в множестве Y при значении аргумента, равном 2. Это отождествление позволяет распространить определение П. п. на случай любого количества множителей. Пусть I — нек-рое множество индексов и пусть X_i — произвольное семейство множеств, заиндексированных элементами множества I. П. п. семейства множеств X_i, $i \in I$, наз. множество таких функций $f: I \to X$, где $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, что $f(i) \in X_i$ для каждого $i \in I$. Обычно П. п. обозначается $\prod_{i \in I} X_i$; для конечного множества индексов $I = \{1, \ldots, n\}$ используются также обозначения $\prod_{i=1}^{n} X_i$ или $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Если I состоит из одного элемента 1, то $\prod_{i=1} X_1 = X_1$. Иногда П. п. конечного числа множителей определяется индуктивно:

$$\prod_{i=1} X_1 = X_1, \ \prod_{i=1}^{2} X_i = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_2\},$$

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = \prod_{i=1}^{n-1} X_k \times X_n.$$

Значение конструкции П. п. определяется прежде всего тем, что в нем естественно вводится дополнительная структура, если все множители являются однотипными математич. структурами. Напр., пусть X_i, $i \in I$,— однотипные алгебраич. системы, т. е. множества с общей сигнатурой конечноместных предикатов и операций. Тогда произведение $X = \prod_{i \in I} X_i$ превращается в алгебраич. систему с той же сигнатурой: для функций $f_1, \ldots, f_n : I \to X$ и n-арной операции ω действие функции $f_1 \ldots f_n \omega$ на элемент i определяется равенством

$$f_1 \ldots f_n \omega (i) = f_1(i) \ldots f_n(i) \omega;$$

значение предиката $P(f_1, \ldots, f_n)$ истинно, если для любого $i \in I$ истинно значение $P(f_1(i), \ldots, f_n(i))$. При этом выполнение во всех X_i определенных тождеств влечет за собой их выполнение в произведении. Поэтому П. п. полугрупп, групп, колец, векторных пространств и т. п. снова являются полугруппами, группами, кольцами, векторными пространствами соответственно.

Для любого множителя П. п. $X=\prod_{i\in I}X_i$ существует естественная проекция $p_i: X\to X_i$, определяемая равенством $fp_i=f(i)$. Множество X и семейство проекций p_i, $i\in I$, обладают следующим универсальным свойством: для любого семейства отображений $g_i: Y\to X_i$ существует такое однозначно определенное отображение $h: Y\to X$, что $g_i=hp_i$ для каждого $i\in I$. Это свойство сохраняется в случае, когда все X_i — однотипные алгебраич. системы, и позволяет определить подходящую топологич. структуру П. п. топологич. пространств. Сформулированное свойство лежит в основе определения *произведения* объектов категории.

Многие задачи математики связаны с описанием математич. объектов, неразложимых в П. п., и с выяснением условий, при к-рых множители произведения определены однозначно с точностью до изоморфизма. Классич. результатами здесь являются теорема о строении конечно порожденных модулей над кольцом главных идеалов и теорема Ремака — Шмидта о центральном изоморфизме прямых разложений групп с главным рядом.

П. п. иногда наз. полным прямым произведением в отличие от дискретного прямого произведения (или *прямой суммы*), к-рое определяется в тех случаях, когда дополнительная структура в множителях позволяет выделить одноэлементные подструктуры (напр., единичные подгруппы, нулевые подпространства и т. п.). Как правило, П. п. конечного числа множителей совпадает с дискретным произведением.

М. Ш. Цаленко.

ПРЯМОЙ ПЕРЕСЧЕТ — пересчет элементов нек-рого множества натуральных чисел в порядке их возрастания. Точнее, П. п. множества A натуральных чисел есть строго возрастающая функция натурального аргумента, область значений к-рой совпадает с A. В теории алгоритмов рекурсивность и скорость возрастания П. п. множества являются его важными характеристиками. Напр., общерекурсивность (примитивная рекурсивность) П. п. бесконечного множества эквивалентна разрешимости (примитивно рекурсивной разрешимости) этого множества. Множества натуральных чисел, П. п. к-рых не мажорируются никакой общерекурсивной функцией, наз. гипериммунными, они играют существенную роль в теории *табличной сводимости*.

Лит.: [1] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [2] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

С. Н. Артемов.

ПРЯМОУГОЛЬНИК — четырехугольник, у к-рого все углы прямые. П. является параллелограммом.

ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ФОРМУЛА — формула вычисления интеграла по конечному промежутку $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong h\sum_{k=1}^{N} f(\alpha+(k-1)h), \qquad (*)$$

где $h=(b-a)/N$ и $\alpha\in[a, a+h]$. Алгебраич. степень точности равна 1 при $\alpha=a+h/2$ и равна 0 в остальных случаях.

Квадратурная формула (*) точна для тригонометрич. функций

$$\cos\frac{2\pi}{b-a}kx,\ \sin\frac{2\pi}{b-a}kx,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

В случае $b-a=2\pi$ квадратурная формула (*) точна для всех тригонометрич. полиномов порядка не выше $N-1$, более того, ее тригонометрич. степень точности равна $N-1$. Никакая другая квадратурная формула с

N действительными узлами не может иметь тригонометрич. степень точности, большую чем $N-1$, так что П. ф. при $b-a=2\pi$ обладает наивысшей тригонометрич. степенью точности.

Пусть $R(f, \alpha)$ — погрешность П. ф., то есть разность между левой и правой частями приближенного равенства (*). Если подинтегральная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то при $\alpha=$ $=a+h/2$ справедливо представление

$$R\left(f,\ a+\frac{h}{2}\right)=\frac{b-a}{24}\,h^2 f''(\xi),$$

где ξ — нек-рая точка промежутка $[a, b]$. Если функция $f(x)$ — периодическая с периодом $b-a$ и имеет непрерывную производную порядка $2k$ (k — натуральное число) на всей действительной оси, то при любом $\alpha \in [a, a+h]$

$$R(f, \alpha)=-(b-a)\,B_{2k}\,\frac{h^{2k}}{(2k)!}\,f^{(2k)}(\eta),$$

где η — точка промежутка $[a, b]$ и B_{2k} — число Бернулли.

И. П. Мысовских.

ПРЯМЫХ МЕТОД — метод численного решения дифференциальных уравнений с частными производными (см. [1] — [3]). Применим для нелинейных уравнений эллиптического [4], гиперболического [5] и параболического [6] типов любых порядков и систем уравнений. П. м. позволяет проводить численные расчеты в областях с криволинейными границами [7]. П. м. используется для решения разнообразных задач механики [8].

В П. м. производится аппроксимация операции дифференцирования по нек-рым направлениям, что позволяет понизить размерность задачи и заменить решение исходной системы дифференциальных уравнений с частными производными расчетом аппроксимирующей ее системы меньшего порядка.

С помощью П. м. решен ряд задач газовой динамики [9]. При этом задача интегрирования исходной системы дифференциальных уравнений с частными производными сводится к расчету аппроксимирующей ее системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В П. м. область интегрирования разбивается поперек ударного слоя рядом прямых лучей на полосы. Замыкающий луч расположен в сверхзвуковой области. Лучи располагаются соответственно узлам многочлена Чебышева или равномерно. Газодинамич. функции аппроксимируются кусочно линейно вдоль каждой полосы либо полиномиально с узлами интерполяции на всех лучах. Получаемая аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрируется вдоль каждого луча от ударной волны к телу. В отличие от *интегральных соотношений метода* не составляются интегральные соотношения и не выделяется минимальная область влияния затупления, что приводит к снижению точности, но упрощает вид аппроксимирующей системы (см. [10]).

П. м. проведены расчеты двумерного обтекания ряда тел вращения совершенным [11], равновесным [12] и неравновесным [13] газом. П. м. решена задача сверхзвукового обтекания сферы горючей смесью с использованием модели детонационной волны [14], ударной волны и фронта пламени [15] и др. С применением тригонометрич. аппроксимаций по меридиональному углу П. м. распространен на пространственно-трехмерный случай (см. [16], [17]), в том числе для неравновесного обтекания затупления [18].

Лит.: [1] Rothe E. H., «Math. Ann.», 1930, Bd 102, S. 650—70; [2] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С., «Бюлл. МГУ. Секц. А», 1937, т. 1, в. 6, с. 1—26; [3] Дородницын А. А., в кн.: Конференция «Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения», М., 1956; [4] Костюкович Е. Х., «Докл. АН СССР», 1958, т. 118, № 3, с. 433—35; [5] Лебедев В. И., «Вест. МГУ», 1955, № 10, с. 47—57; [6] Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1958, т. 22, № 5, с. 667—704; [7] Будак Б. М., Горбунов А. Д., «Докл. АН СССР», 1958, т. 118, № 5, с. 858—61; [8] Алихашкин Я. И., «Вычислит. матем.», 1957, № 1, с. 136—52; [9] Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П., «Изв. АН СССР. Механ. и машиностр.», 1964, № 4, с. 9—28; [10] Белоцерковский О. М., Чушкин П. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 5, с. 731—59; [11] Росляков Г. С., Теленин Г. Ф., в кн.: Сб. работ ВЦ Моск. ун-та, 1968, № 11, с. 93—112; [12] Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П., «Докл. АН СССР», 1964, т. 159, № 1, с. 39—42; [13] Стулов В. П., в кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, в. 5, М., 1974, с. 140—227; [14] Гилинский С. М., Запрянов З. Д., Черный Г. Г., «Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа», 1966, № 5, с. 8—13; [15] Гилинский С. М., Черный Г. Г., там же, 1968, № 1, с. 20—32; [16] Миносцев В. Б., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П., «Докл. АН СССР», 1968, т. 179, № 2, с. 304—07; [17] Базжин А. П., Челышева И. Ф., «Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа», 1967, № 3, с. 119—23; [18] Семенихина О. Н., Шкадова В. П., там же, 1973, № 2, с. 99—103.

Ю. М. Давыдов.

ПСЕВДОБАЗА топологического пространства X — семейство открытых в X множеств такое, что каждая точка пространства X является пересечением всех содержащих ее элементов этого семейства. П. существует только в пространствах, все одноточечные подмножества к-рых замкнуты (т. е. в T_1-пространствах). Если T_1-пространство с базой $\mathcal{B}$ наделить другой более сильной топологией, то $\mathcal{B}$ уже не будет базой нового топологич. пространства, но останется его П. В частности, счетную П. имеет дискретное пространство мощности континуум, в к-ром счетной базы нет. Однако для бикомпактов (т. е. бикомпактных хаусдорфовых пространств) из наличия счетной П. следует существование счетной базы.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

ПСЕВДОБУЛЕВА АЛГЕБРА — решетка $L=(L, \leqslant)$, содержащая наименьший элемент 0 и такая, что для любых ее элементов a и b во множестве $\{x \in L : a \wedge x \leqslant b\}$ существует наибольший элемент $a \supset b$, где $a \wedge x$ — наибольшая нижняя грань для a и x. Элемент $a \supset b$ наз. псевдодополнением a относительно b, или импликацией от a к b. Всякая П. а. является *дистрибутивной решеткой* с наибольшим элементом 1 (таковым будет любой элемент вида $a \supset a$).

П. а. служат алгебраич. моделями *интуиционистского исчисления высказываний* Гейтинга и характеризуют его аналогично тому, как *булевы алгебры* характеризуют классич. исчисление высказываний. П. а. наз. также алгебрами Гейтинга.

Решетки с относительным псевдодополнением рассматривал еще в 1919 Т. Сколем [1], правда без связи с логикой. Впервые такая связь появилась при рассмотрении решеток, двойственных П. а. (т. е. решеток, получающихся из П. а. обращением отношения $\leqslant$; см. [2]). Такие решетки были названы алгебрами Брауэра. Позднее алгебрами Брауэра стали называть и П. а.

Класс П. а., рассматриваемых как *универсальные алгебры* $(L; 0, \wedge, \vee, \supset)$ с константой 0 и двуместными операциями $\wedge$, $\vee$, $\supset$, может быть задан с помощью нек-рой системы тождеств.

Конгруэнция $R \subseteq L \times L$ универсальной алгебры $(L; 0, \wedge, \vee, \supset)$, являющейся П. а., полностью определяется классом эквивалентности, содержащим 1, т. е. множеством

$$\nabla = \{x \in L : \langle x, 1\rangle \in R\} \tag{1}$$

по формуле

$$\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow (x \supset y \in \nabla \text{ и } y \supset x \in \nabla). \tag{2}$$

Множество (1) является решеточным фильтром, т. е. удовлетворяет условиям

$$(x \in \nabla \text{ и } x \leqslant y) \Rightarrow y \in \nabla \text{ и } (x \in \nabla \text{ и } y \in \nabla) \Rightarrow x \wedge y \in \nabla.$$

Наоборот, всякий непустой решеточный фильтр ∇ произвольной П. а. L определяет по формуле (2) конгруэнцию на алгебре $(L;\, 0,\, \wedge,\, \vee,\, \supset)$, класс эквивалентности единицы к-рой совпадает с исходным фильтром ∇.

В П. а. $(L, \leqslant)$ выполняется также бесконечный дистрибутивный закон

$$a \wedge \sup X = \sup \{a \wedge x : x \in X\} \qquad (3)$$

для любого $a \in L$ и любого множества $X \subseteq L$, имеющего в L наименьшую верхнюю грань $\sup X$. Если решетка $(L, \leqslant)$ полна, т. е. $\sup X$ существует для любого $X \subseteq L$, то, наоборот, из того, что в ней справедливо тождество (3), вытекает, что она является П. а. Операция $\supset$ определяется равенством

$$a \supset b = \sup \{x \in L : a \wedge x \leqslant b\}.$$

Полные П. а. (т. е. полные решетки, удовлетворяющие тождеству (3)) рассматривают как алгебры $(L;\, 0,\, \wedge,\, \sup)$ с константой 0, двуместной операцией $\wedge : L \times L \to L$ и «бесконечноместной» операцией $\sup : \{X : X \subseteq L\} \to L$. Этот подход определяет для полных П. а. смысл таких понятий, как гомоморфизм, конгруэнция, подалгебра. Так, для конгруэнции $R \subseteq L \times L$ должно выполняться условие: если $X = \{x_i : i \in I\}$ и $Y = \{y_i : i \in I\}$ — два подмножества в L таких, что для всякого $i \in I$ имеет место $\langle x_i, y_i \rangle \in R$, то $\langle \sup X, \sup Y \rangle \in R$. Класс полных П. а., рассматриваемых как алгебры $(L;\, 0,\, \wedge,\, \sup)$, может быть задан нек-рой системой тождеств, содержащих операции $0,\, \wedge,\, \sup$. Поэтому он замкнут относительно подалгебр, факторалгебр и прямых произведений семейств алгебр. В классе полных П. а. существуют свободные алгебры с любым множеством образующих.

Если $J : L \to L$ — мультипликативный оператор замыкания на полной П. а. $\boldsymbol{L} = (L, \leqslant)$, т. е. такая функция, что в L тождественно выполняются условия

$$x \leqslant J(x) = J(J(x)) \quad \text{и} \quad J(x \wedge y) = J(x) \wedge J(y),$$

то отношение

$$R_J = \{\langle x, y \rangle \in L \times L : J(x) = J(y)\} \qquad (4)$$

является конгруэнцией на алгебре $\boldsymbol{A}(L;\, 0,\, \wedge,\, \sup)$, а множество $JL = \{x \in L : J(x) = x\}$ с индуцированным из $\boldsymbol{L}$ порядком $\leqslant|_{JL}$ — полной П. а. $(JL;\, \leqslant|_{JL})$, изоморфной факторалгебре $\boldsymbol{A}/R_J$. Наоборот, произвольная конгруэнция R на $\boldsymbol{A}$ определяет по формуле

$$J_R(x) = \sup \{y \in L : \langle y, x \rangle \in R\} \qquad (5)$$

мультипликативный оператор замыкания $J_R : L \to L$. Отображения $J \mapsto R_J$ и $R \mapsto J_R$, определяемые формулами (4) и (5), взаимнообратны.

Примеры П. а. 1) Множество $\{X : X \subseteq U\}$, упорядоченное по включению $\subseteq$, является полной П. а. Его подалгебрами будут топологии на U и только они.

2) Если функция $I : L \to L$ на полной П. а. $(L, \leqslant)$ тождественно удовлетворяет условиям

$$I(I(x)) = I(x) \leqslant x, \quad I(x \wedge y) = I(x) \wedge I(y), \qquad (6)$$

то множество $IL = \{x \in L : Ix = x\}$ с индуцированным отношением порядка образует подалгебру алгебры $(L;\, 0,\, \wedge,\, \sup)$. Всякую подалгебру $A \subseteq L$ этой алгебры можно получить указанным способом из единственной функции I, удовлетворяющей условиям (6). Она определяется равенством

$$I(x) = \sup \{a \in A : a \leqslant x\}.$$

Функция I, удовлетворяющая условиям (6), наз. оператором взятия внутренности.

3) Если определить на множестве Φ всех формул языка интуиционистского исчисления высказываний

отношение $x \leqslant y$ так, что $A \leqslant B$ тогда и только тогда, когда формула $A \supset B$ выводима в этом исчислении и факторизовать это множество по отношению эквивалентности $x \leqslant y \& y \leqslant x$, то получится свободная П. а.

Лит.: [1] Skolem T., Selected works in logic, Oslo, 1970, p. 67—101; [2] McKinsey J. C. C., Tarski A., «Ann. Math.», 1946, v. 47, p. 122—62; [3] Расёва Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972; [4] Драгалин А. Г., Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979; [5] Applications of sheaves. Proc. ... of sheaf theory to logic, algebra and analysis, B.—N. Y., 1979.

В. Н. Гришин.

ПСЕВДОВЕКТОР — то же, что *осевой вектор.*

ПСЕВДОВЫПУКЛОСТЬ И ПСЕВДОВОГНУТОСТЬ — свойства областей в комплексных пространствах, а также комплексных пространств и функций на них, аналогичные свойствам выпуклости и вогнутости областей и функций в пространстве $\mathbb{R}^n$. Вещественная функция φ класса C^2 на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^n$ наз. p-псевдовыпуклой (или p-выпуклой), если эрмитова форма

$$H(\varphi)=\sum_{j,\,k} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\,\partial \bar{z}_k} u_j \bar{u}_k$$

имеет в каждой точке области U не менее чем $n-p+1$ неотрицательных собственных значений. В случае, когда $H(\varphi)$ имеет не менее чем $n-p+1$ положительных собственных значений, говорят, что φ сильно (или строго) p-псевдовыпукла. В частности, (сильно) 1-псевдовыпуклые функции — это (строго) *плюрисубгармонические функции* класса C^2. Функция на аналитич. множестве $X \subset U$ наз. (сильно) p-выпуклой, если она является ограничением сильно p-псевдовыпуклой функции на U. Наконец, (сильно) p-выпуклая функция на произвольном комплексном пространстве X — это непрерывная функция на X, к-рая в окрестности любой точки представляется (сильно) p-выпуклой функцией в соответствующей локальной модели (см. *Аналитическое пространство*).

Комплексное пространство X наз. $(p,\ q)$-выпукло-вогнутым, если существуют непрерывная функция $\varphi: X \to \mathbb{R}$ и такие d_0, c_0, где $-\infty \leqslant d_0 \leqslant c_0 \leqslant \infty$, что для любых $c \geqslant c_0$ и $d \leqslant d_0$ множество

$$X_{c,\,d}=\{x \in X \mid d < \varphi(x) < c\}$$

относительно компактно в X, а φ сильно p-выпукла на $X_{\infty,\,c_0}$ и сильно q-выпукла на $X_{d_0,\,-\infty}$. Если $d_0=-\infty$ или $c_0=\infty$, то пространство X наз. сильно p-псевдовыпуклым или сильно q-вогнутым соответственно. Если же $d_0=c_0=-\infty$, то X наз. p-полным.

Примеры. 1) Открытое множество X с гладкой границей ∂X в комплексном многообразии M наз. строго p-псевдовыпуклым (строго p-псевдовогнутым), если всякая точка $x_0 \in \partial X$ обладает окрестностью U, в к-рой существует такая сильно p-выпуклая функция φ, что $X \cap U=\{x \in U \mid \varphi(x) < 0\}$ (соответственно $X \cap U=\{x \in U \mid \varphi(x) > 0\}$). Всякое строго p-псевдовыпуклое (строго p-псевдовогнутое) относительно компактное открытое множество является сильно p-выпуклым (сильно p-вогнутым) многообразием. Если нек-рые компоненты границы ∂X удовлетворяют условию p-псевдовыпуклости, а другие — условию q-псевдовогнутости, то получаются примеры $(p,\ q)$-выпукло-вогнутых многообразий.

2) Компактные комплексные пространства естественно считать 0-выпуклыми.

3) Класс 1-полных пространств совпадает с классом *Штейна пространств.*

4) Класс сильно 1-выпуклых пространств совпадает с классом пространств, получающихся из пространств Штейна путем собственной модификации в конечном множестве точек.

5) Пусть X — компактное комплексное многообразие размерности n, S — его замкнутое подмногообразие, все компоненты к-рого имеют размерность q. Тогда $X\setminus S$ является сильно $(q+1)$-вогнутым, а если нормальное расслоение над S положительно — сильно $(n-q)$-выпуклым пространством.

6) Если S — замкнутое подмногообразие коразмерности p в многообразии Штейна X, то $X\setminus S$ p-полно.

7) Голоморфное векторное расслоение E ранга r над многообразием X наз. p-положительным (q-отрицательным), если на E существует такая послойная эрмитова метрика h, что функция $\chi(v)=-h(v, v)$ на E является сильно $(p+r)$-выпуклой (соответственно $-\chi$ является сильно q-выпуклой) вне нулевого сечения (в случаях $p=1$ и $q=1$ получают понятия *положительного расслоения* и *отрицательного расслоения*). Если X компактно, то пространство p-положительного расслоения E является сильно $(p+r)$-вогнутым, а пространство q-отрицательного расслоения — сильно q-выпуклым. Пространство голоморфного векторного расслоения над p-полным пространством всегда p-полно.

Для (p, q)-выпукло-вогнутых пространств доказаны теоремы о конечномерности и отделимости нек-рых пространств когомологий со значениями в когерентных аналитич. пучках (см. *Конечности теоремы* в теории аналитических пространств). Аналогичные теоремы конечности доказаны также и для сильно (p, q)-выпукло-вогнутых отображений (см. [1], [2]). Пространство X является сильно 1-выпуклым тогда и только тогда, когда $\dim H^r(X, F)<\infty$ для всех r и любого когерентного аналитич. пучка F на X. Если X p-полно, то $H^r(X, F)=0$ для всех $r\geqslant p$ и любого когерентного аналитич. пучка F на X.

Группы гомологий p-выпуклых и p-полных пространств обладают следующими свойствами. Если X есть n-мерное приведенное сильно p-выпуклое (p-полное) комплексное пространство, то $\dim H_r(X, \mathbb{C})<\infty$ (соответственно $H_r(X, \mathbb{C})=0$) для $r\geqslant n+p$. Для сильно 1-выпуклых пространств известно также, что группы $H_r(X, \mathbb{Z})$ конечно порождены при $r\geqslant n+1$, а для p-полных многообразий, — что $H_r(X, \mathbb{Z})=0$ для $r\geqslant n+p$ и что группа $H_{n+p-1}(X, \mathbb{Z})$ свободна.

Комплексное пространство X наз. псевдовогнутым, если в X существует относительно компактное открытое множество U, пересекающее каждую неприводимую компоненту пространства X и удовлетворяющее следующему условию: любая точка $x_0\in\partial U$ обладает такой окрестностью V в X, что для любых точек $x\in V$, достаточно близких к x_0,

$$|f(x)|\leqslant \sup_{y\in V\cap U}|f(y)|$$

для всех голоморфных функций f в V. Если X есть n-мерное многообразие, $n\geqslant 2$, то достаточно, чтобы множество U было сильно $(n-1)$-псевдовогнутым в X. Любое компактное пространство псевдовогнуто. Для псевдовогнутых пространств X доказаны следующие теоремы конечности: пространство голоморфных сечений любого голоморфного векторного расслоения над X конечномерно; если X связно, то все голоморфные функции на X постоянны; поле мероморфных функций на X есть поле алгебраич. функций, степень трансцендентности к-рого не превосходит $\dim X$. Последняя теорема имеет важные приложения к *автоморфным функциям*, основанные на том, что пространство D/Γ, где Γ — собственно разрывная группа автоморфизмов ограниченной области D в $\mathbb{C}^n$, во многих случаях оказывается псевдовогнутым (в этом случае говорят, что Γ — псевдовогнутая группа). Напр., псевдовогнутыми являются арифметич. подгруппы групп автоморфизмов ограниченных симметрич. областей.

Лит.: [1] Ermine J. L., «Ann. Sc. norm. sup. Pisa. Cl. sci», 1979, v. 6, № 1, p. 1—18; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 93—171.

А. Л. Онищик.

ПСЕВДОГАЛИЛЕЕВО ПРОСТРАНСТВО — проективное n-пространство с выделенной бесконечно удаленной $(n-1)$-плоскостью T_0 аффинного n-пространства, в к-рой, в свою очередь, выделена бесконечно удаленная $(n-2)$-плоскость T_1 псевдоевклидова пространства ${}^lR_{n-1}$, а в $(n-2)$-плоскости T_1 выделена $(n-3)$-квадрика Q_2, являющаяся абсолютом гиперболического $(n-1)$-пространства индекса l. Совокупность плоскостей T_0, T_1 и квадрики Q_2 образует абсолют (базис) П. п., обозначаемого ${}^l\Gamma_n$. Напр., 3-пространство ${}^1\Gamma_3$ имеет своим абсолютом 2-плоскость T_0, прямую T_1 в T_0 и пару действительных точек Q_2 на прямой T_1. П. п. можно определить как аффинное n-пространство, в бесконечно удаленной плоскости к-рого при дополнении до проективного n-пространства определена геометрия псевдоевклидова $(n-1)$-пространства индекса l.

Расстояние между точками определяется аналогично определению расстояния в *галилеевом пространстве*.

Движениями П. п. ${}^l\Gamma_n$ являются его коллинеации, переводящие абсолют в себя. Движения образуют группу, являющуюся группой Ли.

Пространство, абсолют к-рого двойствен абсолюту П. п. ${}^l\Gamma_n$, наз. *копсевдогалилеевым пространством*. *Флаговое пространство* — предельный случай П. п. ${}^l\Gamma_n$.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

ПСЕВДОГРУППА преобразований дифференцируемого многообразия M — семейство диффеоморфизмов открытых подмножеств многообразия M в M, замкнутое относительно композиции отображений, перехода к обратному отображению, а также сужения и склейки отображений. Точнее, псевдогруппа преобразований (п. п.) Γ многообразия M состоит из локальных преобразований, т. е. пар вида $p=(D_p, \bar{p})$, где D_p — открытое подмножество в M, а $\bar{p}$ — диффеоморфизм $D_p \to M$, причем предполагается, что 1) $p, q \in \Gamma \Rightarrow p\circ q=(\bar{q}^{-1}(D_p \cap \cap \bar{q}(D_q)), \ \overline{p\circ q}) \in \Gamma$, 2) $p \in \Gamma \Rightarrow p^{-1}=(\bar{p}(D_p), \ \bar{p}^{-1}) \in \Gamma$, 3) $(M, \mathrm{id}) \in \Gamma$, 4) если $\bar{p}$ — диффеоморфизм открытого подмножества $D \subset M$ в M и $D=\bigcup_\alpha D_\alpha$, где D_α — открытые подмножества в M, то $(D, \bar{p}) \in \Gamma \Leftrightarrow (D_\alpha, \bar{p}|_{D_\alpha}) \in \Gamma$ для любого α. Видоизменяя должным образом условия 1)—4), можно определить п. п. произвольного топологич. пространства (см. [7]) или даже произвольного множества. Так же, как группа преобразований, п. п. определяет на M отношение эквивалентности; классы эквивалентности наз. ее орбитами. П. п. Γ многообразия M наз. транзитивной, если M — ее единственная орбита, и наз. примитивной, если в M нет нетривиальных гладких Γ-инвариантных слоений (в противном случае п. п. наз. импримитивной).

П. п. Γ дифференцируемого многообразия M наз. п. п. Ли, определяемой системой S дифференциальных уравнений в частных производных, если Γ состоит из тех и только тех локальных преобразований многообразия M, к-рые удовлетворяют системе S. Напр., П. конформных преобразований плоскости — это п. п. Ли, определяемая уравнениями Коши — Римана. Порядком п. п. Ли наз. минимальный порядок определяющей ее системы дифференциальных уравнений.

Примеры п. п. Ли. 1) П. всех голоморфных локальных преобразований n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. 2) П. всех голоморфных локальных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$ с постоянным якобианом. 3) П. всех голоморфных локальных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$ с якобианом, равным 1. 4) Гамильтонова псевдогруппа, состоящая из всех голоморфных локальных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$ (n четно), сохраняющих дифференциальную 2-форму

$$\omega = dz^1 \wedge dz^2 + dz^3 \wedge dz^4 + \ldots + dz^{n-1} \wedge dz^n.$$

5) П. всех голоморфных локальных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$, сохраняющих форму ω с точностью до постоянного множителя. 6) Контактная псевдогруппа, состоящая из всех голоморфных локальных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$ (при $n=2m+1$, $m \geqslant 1$), сохраняющих с точностью до (функционального) множителя дифференциальную 1-форму

$$dz^n + \sum_{i=1}^{m} (z^i \, dz^{m+i} - z^{m+i} \, dz^i).$$

7) Вещественные аналоги комплексных п. п. из примеров 1) — 6). Порядки п. п. Ли из примеров 1), 3) — 6) равны 1, а в примере 2) порядок равен 2.

Любая группа Ли G преобразований многообразия M определяет п. п. $\Gamma(G)$, состоящую из ограничений преобразований из G на открытые подмножества многообразия M. П. п. вида $\Gamma(G)$ наз. глобализуемыми. Так, П. локальных конформных преобразований сферы S^n глобализуема при $n>2$ и не глобализуема при $n=2$.

П. п. Ли Γ наз. п. п. конечного типа, если найдется такое натуральное число d, что любое локальное преобразование $p \in \Gamma$ однозначно определяется своей d-струей в нек-рой точке $x \in D_p$; наименьшее такое число d наз. степенью, или типом, п. п. Γ; если же такого d не существует, то Γ наз. п. п. бесконечного типа. П. п. в примерах 1)— 6) — примитивные п. п. Ли бесконечного типа.

Пусть Γ — транзитивная п. п. Ли n-мерного дифференцируемого многообразия M и $G^r(\Gamma)$ — совокупность всех r-струй локальных преобразований из Γ, сохраняющих точку $O \in M$, т. е. таких $p \in \Gamma$, что $O \in D_p$ и $\bar{p}(O) = O$. Множество $G^r(\Gamma)$, снабженное естественной структурой группы Ли, наз. группой изотропии r-го порядка п. п. Γ (группа $G^1(\Gamma)$ наз. также линейной группой изотропии п. п. Γ). Алгебра Ли $\mathfrak{g}^r(\Gamma)$ группы $G^r(\Gamma)$ естественным образом вкладывается в алгебру Ли r-струй векторных полей на M в точке O. Если Γ — п. п. Ли первого порядка, то ядро $G^{(r)}(\Gamma)$ естественного гомоморфизма $G^{r+1}(\Gamma) \to G^r(\Gamma)$ при любом $r \geqslant 1$ зависит только от линейной группы изотропии $G^1(\Gamma)$ и наз. ее r-м продолжением. П. п. Ли Γ первого порядка тогда и только тогда является п. п. конечного типа d, когда

$$\dim G^{(d-1)}(\Gamma) \neq 0 \quad \text{и} \quad \dim G^{(d)}(\Gamma) = 0.$$

Если при этом линейная группа изотропии $G^1(\Gamma)$ неприводима, то $d \leqslant 2$ (см. [5]). Для того чтобы п. п. Ли Γ первого порядка была п. п. конечного типа, необходимо, а в комплексном случае и достаточно, чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}^1(\Gamma)$ не содержала эндоморфизмов ранга 1 (см. [10]). Такие линейные алгебры Ли наз. эллиптическими.

Для п. п. Ли Γ первого порядка в терминах ее линейной алгебры изотропии вычислены алгебры Ли всех продолжений $G^{(r)}(\Gamma)$, $r \geqslant 1$. А именно, алгебра Ли $\mathfrak{g}^{(r)}(\Gamma)$ группы $G^{(r)}(\Gamma)$ состоит из $(r+1)$-струй векторных полей на M в точке O, имеющих в нек-рой локальной системе координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ вид

$$\sum v^i_{i_0 i_1 \ldots i_r} x^{i_0} x^{i_1} \ldots x^{i_r} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

где $v^i_{i_0 i_1 \ldots i_r}$ — произвольный тензор, симметричный по нижним индексам и удовлетворяющий условию: при любых фиксированных $i_1, i_2, \ldots, i_r$ матрица

$$\left\| v^i_{j, i_1, i_2, \ldots, i_r} \right\|_{i, j=1, 2, \ldots, n}$$

содержится в алгебре Ли $\mathfrak{g}^1(\Gamma)$, отнесенной к системе координат (x^i).

Пусть M — n-мерное дифференцируемое многообразие над полем $K=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Всякая транзитивная п. п. Ли Γ порядка k многообразия M совпадает с П. всех локальных автоморфизмов нек-рой $G^k(\Gamma)$-структуры (см. *G-структура*) порядка k на M (первая основная теорема Картана). Классификация всех примитивных п. п. Ли бесконечного типа впервые была получена Э. Картаном [2]. Согласно его теореме всякая примитивная п. п. Ли бесконечного типа, состоящая из голоморфных локальных преобразований, локально изоморфна одной из п. п. примеров 1)—6). Эта теорема неоднократно передоказывалась; ее современные доказательства получаются чисто алгебраич. средствами. При этом локальное изучение транзитивной п. п. Ли Γ сводится к изучению нек-рой фильтрованной алгебры Ли (см. [9]). Классификация таких фильтрованных алгебр Ли может быть проведена на основе классификации простых градуированных алгебр Ли (см. [3]). Классификация примитивных п. п. Ли получена также и в вещественном случае, причем условие аналитичности действия п. п. заменено более слабым условием бесконечной дифференцируемости (см. [8], [9]).

Построены нек-рые абстрактные модели транзитивных п. п. Ли, к-рые призваны играть в теории п. п. бесконечного типа такую же роль, какую в конечномерном случае играют абстрактные группы Ли (см. [6], [9]).

Лит.: [1] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [2] Cartan É., Oeuvres complètes, v. 2, P., 1953, p. 571—714 857—925; 1335—84; [3] Guillemin V., «J. Diff. Geom.», 1970, v. 4, № 3, p. 257—82; [4] Kobayashi S., Transformation groups in differential geometry, B.— [u. a.], 1972; [5] Kobayashi S., Nagano T., «J. Math. and Mech.», 1964, v. 13, № 5, p. 875—907; 1965, v. 14, p. 679—706; [6] Kuranishi M., «Nagoya Math. J.», 1959, v. 15, p. 225—60; 1961, v. 19, p. 55—91; [7] Libermann P., «Bull. Soc. math. France», 1959, t. 87, № 4, p. 409—25; [8] Shnider S., «J. Diff. Geom.», 1970, v. 4, № 1, p. 81—89; [9] Singer I. M., Sternberg S., «J. d'Analyse math.», 1965, t. 15, p. 1—114; [10] Wilson R. L., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1971, v. 29, № 2, p. 243—49.

Э. Б. Винберг.

ПСЕВДОГРУППОВАЯ СТРУКТУРА на многообразии M — максимальный атлас A гладких локальных диффеоморфизмов многообразия M на фиксированное многообразие V, все функции перехода между к-рыми принадлежат данной псевдогруппе Γ локальных преобразований многообразия V. Псевдогруппа Γ наз. определяющей псевдогруппой, а многообразие V — модельным пространством. П. с. с определяющей псевдогруппой Γ наз. также Γ-структурой. Более подробно, множество A V-значных карт многообразия M (т. е. диффеоморфизмов $\varphi: U \to V$ открытых подмножеств $U \subset M$ на открытые подмножества $\varphi(U) \subset V$) называется П. с., если а) любая точка $x \in M$ принадлежит области определения нек-рой карты φ из A; б) для любых карт $\varphi: U \to V$, $\psi: W \to V$ из A функция перехода $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap W) \to \psi(U \cap W)$ является локальным преобразованием данной псевдогруппы Γ; в) множество A является максимальным множеством карт, удовлетворяющих условию 2).

Примеры П. с. 1) Псевдогруппа Γ преобразований многообразия V задает П. с. (V, Γ) на V, картами к-рой служат локальные преобразования из Γ. Она наз. стандартной плоской Γ-структурой. 2) Пусть $V=K^n$ есть n-векторное пространство над $K=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или левый модуль над телом кватернионов $K=\mathbb{H}$, а Γ — псевдогруппа локальных преобразований V, главные линейные части к-рых принадлежат группе $GL(n, K)$. Соответствующая Γ-структура на многообразии M есть структура гладкого многообразия при $K=\mathbb{R}$, комплексного аналитич. многообразия при $K=\mathbb{C}$ и специального кватернионного многообразия при $K=\mathbb{H}$. 3) Пусть Γ — псевдогруппа локальных преобразований векторного пространства V, сохраняющих данный тензор S. Задание Γ-структуры равносильно заданию интегрируемого поля тензоров типа S на многообразии M. Напр., если S — невырожденная кососимметричная 2-форма, то Γ-структура есть симплектич. структура. 4) Пусть Γ — псевдогруппа локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$, сохраняющих с точностью до функционального множителя дифференциальную 1-форму

$$dx^0+\sum_{i=1}^{n} x^{2i-1}\,dx^{2i}.$$

Тогда Γ-структура есть контактная структура. 5) Пусть $V=G/H$ — однородное пространство группы Ли G, а Γ — псевдогруппа локальных преобразований V, продолжающихся до преобразований из группы G. Тогда Γ-структура наз. П. с., определяемой однородным пространством V. Примерами таких структур являются структура пространства постоянной кривизны (в частности, локально евклидова пространства), плоские конформные и проективные структуры.

Пусть Γ — транзитивная псевдогруппа Ли преобразований пространства $V=\mathbb{R}^n$ порядка l; Γ-структура A на многообразии M определяет главное подрасслоение $\pi_k: B^k \to M$ расслоения кореперов любого порядка k на M, состоящее из k-струй карт из A:

$$B^k=\left\{j_x^k\varphi \mid \varphi \in A,\ \varphi(x)=0\right\},\ \pi_k(j_x^k\varphi)=x.$$

Структурной группой расслоения π_k является группа изотропии k-го порядка $G^k(\Gamma)$ псевдогруппы Γ, к-рая действует на B^k по формуле

$$j_0^k(a)\, j_x^k\varphi=j_x^k(a\circ\varphi).$$

Расслоение π_k наз. k-м *структурным расслоением* или $G^k(\Gamma)$-*структурой*, определяемой П. с. A. Расслоение π_l, где l — порядок псевдогруппы Γ, в свою очередь, однозначно определяет П. с. A как множество карт $\varphi: U \to V$, для к-рых

$$j_x^l(a\circ\varphi)\in B^l, \text{ если } a\in\Gamma,\ a\circ\varphi(x)=0.$$

Геометрия расслоения π_k характеризуется наличием канонической $G^k(\Gamma)$-эквивариантной горизонтальной относительно проекции $B^k \to B^{k-1}$ 1-формы $\theta^k: TB^k \to V+\mathfrak{g}^k(\Gamma)$ со значением в пространстве $V+\mathfrak{g}^k(\Gamma)$, где $\mathfrak{g}^k(\Gamma)$ — алгебра Ли группы изотропии $G^k(\Gamma)$. Она задается формулой

$$\theta_{b^k}^k(\dot{b}^k)=\frac{d}{dt}\, j_0^{k-1}(\varphi_t\circ\varphi_0^{-1})|_{t=0},$$

где

$$b^k=j_{x_0}^k(\varphi_0),\ \dot{b}^k=\frac{d}{dt}\, j_{x_t}^k(\varphi_t),$$

$$\varphi_t\in A,\ \varphi_t(x_t)=0,\ t\in[0,\ \varepsilon],$$

и удовлетворяет нек-рому структурному уравнению Маурера — Картана. Алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов Γ-структуры может быть охарактеризована как алгебра Ли векторных полей на B^l, сохраняющих каноническую 1-форму θ^l.

Основной проблемой теории П. с. является проблема описания П. с. на многообразии с определяющей псевдогруппой Γ с точностью до эквивалентности. Две П. с. на многообразии наз. *эквивалентными*, если одна из них может быть переведена в другую диффеоморфизмом многообразия.

Пусть Γ — глобализуемая транзитивная псевдогруппа преобразований односвязного многообразия V. Любое односвязное многообразие M с Г-структурой A допускает отображение $\rho : M \to V$, называемое разверткой Картана, к-рое локально является изоморфизмом Г-структур. Если Г-структура A обладает нек-рым условием полноты, в частности, если многообразие M компактно, то отображение ρ является изоморфизмом Г-структур и все Г-структуры рассматриваемого типа являются формами стандартной Г-структуры V, т. е. получаются из V факторизацией по свободно действующей дискретной группе автоморфизмов (V, Γ). Так обстоит дело, напр., с (псевдо)римановыми структурами постоянной кривизны и с конформно плоскими структурами на компактных многообразиях M^n, $n>2$.

Важное место в теории П. с. занимает теория деформаций, первоначально развитая для комплексной структуры. В ней изучается вопрос об описании нетривиальных деформаций Г-структуры A, т. е. семейств A_t Г-структур, содержащих данную Г-структуру и гладко зависящих от параметров t по модулю тривиальных деформаций. Пространство формальных инфинитезимальных нетривиальных деформаций данной Г-структуры описывается как пространство $H^1(M, \Theta)$ одномерных когомологий многообразия M с коэффициентами в пучке ростков Θ инфинитезимальных автоморфизмов Г-структуры A. Тривиальность этого пространства влечет жесткость Г-структуры. Тривиальность двумерных когомологий: $H^2(M, \Theta)=0$ позволяет при нек-рых условиях доказать существование нетривиальных деформаций Г-структуры, соответствующих данной инфинитезимальной деформации из $H^1(M, \Theta)$.

Лит.: [1] Картан Э., Геометрия римановых пространств, пер. с франц., М.— Л., 1936; [2] Guillemin V., Sternberg S., Deformation theory of pseudogroup structures, Providence, 1966 («Mem. Amer. Math. Soc.», № 64); [3] Pollack A. S., «J. Diff. Geom.», 1974, v. 9, № 3, p. 355—90; [4] Griffiths P. A., «Math. Ann.», 1964, Bd 155, H. 4, S. 292—315; 1965, Bd 158, H. 5, S. 326—351; [5] Pommarel J. F., «Ann. Inst. H. Poincaré, n. Sér.», 1973, v. 18, p. 285—352; [6] Berard Bergery L., Bourguignon J. P., Lafontaine J., «Proc. Symp. Pure Math.», 1975, v. 27, p. 3—32; [7] Spencer D. C., «Ann. Math.», 1962, v. 76, № 2, p. 306—398; № 3, p. 399—445.

Д. В. Алексеевский.

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — оператор, действующий в функциональных пространствах на дифференцируемом многообразии и локально по определенным правилам записываемый с помощью нек-рой функции, обычно наз. символом П. о., и удовлетворяющей оценкам производных определенного типа, аналогичных оценкам производных полиномов, являющихся символами дифференциальных операторов.

Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, $C_0^\infty(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, принадлежащим Ω. Простейший П. о. в Ω — это оператор $P : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$, задаваемый формулой

$$Pu(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}p(x, \xi)\hat{u}(\xi)d\xi, \qquad (1)$$

где $u\in C_0^\infty(\Omega)$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $d\xi$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $x\cdot\xi$ — обычное скалярное произведение векторов x и ξ, $\hat{u}(\xi)$ — преобразование Фурье функции u, то есть

$$\hat{u}(\xi)=\int e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,dx$$

(интеграл здесь и выше берется по $\mathbb{R}^n$), $p(x, \xi)$ — гладкая функция на $\Omega\times\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая нек-рым условиям и называемая символом П. о. P. Оператор P вида (1) обозначается также $p(x, D)$ или $p(x, D_x)$. Если

$$p(x, \xi)=\sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant m} p_\alpha(x)\,\xi^\alpha$$

— многочлен от ξ с коэффициентами $p_\alpha\in C^\infty(\Omega)$ (здесь α — мультииндекс, т. е. $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j\geqslant 0$,

α_j — целые, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n})$, то $p(x, D)$ совпадает с *дифференциальным оператором*, получаемым, если в выражение для $p(x, \xi)$ вместо ξ подставить вектор $D=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$.

Часто используется класс символов $p(x, \xi)\in C^\infty(\Omega\times\times\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi)|\leqslant C_{\alpha, \beta, \mathscr{K}}(1+|\xi|)^{m-\rho(\alpha)+\delta(\beta)}, \quad (2)$$
$$x\in\mathscr{K}, \ \xi\in\mathbb{R}^n,$$

где α, β — мультииндексы, $\partial_x=\frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_\xi=\frac{\partial}{\partial \xi}$, $\mathscr{K}$ — компакт в Ω. Этот класс обозначается $S^m_{\rho, \delta}$ (или $S^m_{\rho, \delta}(\Omega\times\mathbb{R}^n)$).

Обычно предполагается, что $0\leqslant\rho\leqslant 1$, $0\leqslant\delta\leqslant 1$. Через $L^m_{\rho, \delta}$ (или $L^m_{\rho, \delta}(\Omega)$) обозначается класс операторов (также называемых П. о. в Ω) вида $p(x, D)+K$, где $p\in S^m_{\rho, \delta}$, а K — интегральный оператор с бесконечно дифференцируемым ядром, т. е. оператор вида

$$Ku(x)=\int K(x, y)\,u(y)\,dy,$$

где $K(x, y)\in C^\infty(\Omega\times\Omega)$. Функцию $p(x, \xi)$ по-прежнему наз. символом П. о. $p(x, D)+K$, хотя теперь она определена уже не однозначно, а с точностью до символов, принадлежащих $S^{-\infty}=\bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m_{1, 0}$. Оператор $A\in L^m_{\rho, \delta}$ наз. П. о. п о р я д к а н е в ы ш е m и т и п а ρ, δ. Описанный выше дифференциальный оператор принадлежит классу $L^m_{1, 0}$. Наименьшее возможное значение m часто наз. п о р я д к о м П. о. Классы $S^m_{\rho, \delta}$, $L^m_{\rho, \delta}$ часто наз. к л а с с а м и Х ё р м а н д е р а.

Можно задавать П. о. в Ω с помощью двойных символов, т. е. в виде

$$Pu=(2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x, y, \xi)\,u(y)\,dy d\xi. \quad (3)$$

При $a(x, y, \xi)=p(x, \xi)$ эта формула переходит в (1). Обычно предполагается, что $a(x, y, \xi)\in S^m_{\rho, \delta}(\Omega\times\Omega\times\times\mathbb{R}^n)$, то есть

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^{\beta'}\partial_y^{\beta''}a(x, y, \xi)|\leqslant$$
$$\leqslant C_{\alpha, \beta', \beta'', \mathscr{K}}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta'+\beta''|}, \quad x, y\in\mathscr{K} \quad (4)$$

где $\mathscr{K}$ — компакт в Ω. Если $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$, то построенный класс операторов вида (3) (со всевозможными функциями $a\in S^m_{\rho, \delta}$) совпадает с классом $L^m_{\rho, \delta}(\Omega)$. При этом символ $p(x, \xi)$ (определенный с точностью до символов из $S^{-\infty}$) имеет следующее асимптотич. разложение:

$$p(x, \xi)\sim\sum\nolimits_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x, y, \xi)\Big|_{y=x},$$

где $\alpha!=\alpha_1!\ldots\alpha_n!$ и суммирование ведется по всем мультииндексам. Эта запись означает, что разность между $p(x, \xi)$ и частью суммы, взятой по тем α, для к-рых $|\alpha|\leqslant N$, является символом, принадлежащим $S^{m-(\rho-\delta)N}_{\rho, \delta}$, т. е. символом, порядок к-рого не выше наибольшего из порядков оставшихся членов.

П. о. P продолжается по непрерывности или с помощью двойственности до оператора $P: \mathscr{E}'(\Omega)\to D'(\Omega)$, где $D'(\Omega)$ и $\mathscr{E}'(\Omega)$ — пространства обобщенных функций и обобщенных функций с компактным носителем в Ω соответственно. Если $\delta<1$, то при этом П. о. обладает следующим свойством п с е в д о л о к а л ь н о с т и: если $u\in\mathscr{E}'(\Omega)\cap C^\infty(\Omega')$, где $\Omega'\subset\Omega$, то $Pu\in C^\infty(\Omega')$. Другая формулировка свойства псевдолокальности: ядро $K(x, y)$ (в смысле Шварца) оператора P бесконечно дифференцируемо по x, y при $x\neq y$.

К л а с с и ч е с к и й П. о. порядка m в Ω — П. о. $P\in L^m_{1,0}$, символ к-рого $p(x, \xi)$ допускает асимптотич.

разложение

$$p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \chi(\xi) p_{m-j}(x, \xi),$$

где $\chi(\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi)=1$ при $|\xi| \geqslant 1$, $\chi(\xi)=0$ при $|\xi| \leqslant 1/2$, $p_{m-j}(x, \xi) \in C^{\infty}(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0))$ и положительно однородна по ξ порядка $m-j$

$$p_{m-j}(x, t\xi)=t^{m-j} p_{m-j}(x, \xi),\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus Q.$$

Примером классического П. о. является дифференциальный оператор (с гладкими коэффициентами). Функция $p_m(x, \xi)$ наз. главным символом классического П. о.

П. о. в Ω наз. собственным (или П. о. с собственным носителем, или П. о. с компактным носителем), если проекции носителя его ядра при проектировании $\Omega \times \Omega$ на каждый сомножитель являются собственными отображениями. Собственный П. о. P отображает $C_0^{\infty}(\Omega)$ в $C_0^{\infty}(\Omega)$ и продолжается по непрерывности до отображений $C^{\infty}(\Omega) \rightarrow C^{\infty}(\Omega)$, $\mathscr{E}'(\Omega) \rightarrow \mathscr{E}'(\Omega)$ и $D'(\Omega) \rightarrow D'(\Omega)$, он может быть записан в виде (1) с символом $p(x, \xi)= =e^{-ix \cdot \xi} P(e^{ix \cdot \xi})$, где экспонента в скобках рассматривается как функция от x, а ξ является параметром.

Пусть A, B — два П. о. в Ω, из к-рых один является собственным. Тогда имеет смысл их произведение (композиция) $C=AB$. Важную роль в теории П. о. играет теорема о композиции: если $A \in L_{\rho, \delta}^{m_1}$, $B \in L_{\rho, \delta}^{m_2}$, $0 \leqslant \delta \leqslant \rho \leqslant 1$, то $C=AB \in L_{\rho, \delta}^{m_1+m_2}$. Если при этом $\delta<\rho$, $c(x, \xi)$, $a(x, \xi)$, $b(x, \xi)$ — символы операторов C, A, B, то

$$c(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}\left[\partial_{\xi}^{\alpha} a(x, \xi)\right]\left[D_x^{\alpha} b(x, \xi)\right].$$

В частности, если A, B — классические П. о. порядков m_1, m_2, то C — классический П. о. порядка m_1+m_2 с главным символом $c_{m_1+m_2}(x, \xi)=a_{m_1}(x, \xi) b_{m_2}(x, \xi)$, где $a_{m_1}(x, \xi)$, $b_{m_2}(x, \xi)$ — главные символы операторов A и B.

Если $P \in L_{\rho, \delta}^m$, $0 \leqslant \delta \leqslant \rho \leqslant 1$, то существует и единствен сопряженный П. о. $P^* \in L_{\rho, \delta}^m$, для к-рого $(Pu, v)=(u, P^* v)$, $u, v \in C_0^{\infty}(\Omega)$, где $(u, v)=\int u(x)\overline{v(x)}dx$ — скалярное произведение u и v в $L_2(\Omega)$. Если при этом $\delta<\rho$ и $p^*(x, \xi)$ — символ П. о. P^*, а $p(x, \xi)$ — символ P, то

$$p^*(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\alpha} \overline{p(x, \xi)}.$$

Таким образом, собственные П. о. при $\delta \leqslant \rho$ образуют алгебру с инволюцией, задаваемой переходом к сопряженному оператору. Произвольные П. о. образуют модуль над этой алгеброй.

Теорема об ограниченности П. о. классов Хёрмандера в L_2-нормах в наиболее точной форме состоит в следующем (см. [8]): пусть $\Omega=\mathbb{R}^n$, оператор P имеет вид (3) с двойным символом $a(x, y, \xi)$, удовлетворяющим оценкам (4), где числа m, ρ, δ удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \delta \leqslant 1,\ m \leqslant 0,\ \rho-\delta-\frac{m}{n} \geqslant 0; \qquad (5)$$

тогда оператор P продолжается до ограниченного оператора $P: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$. В частности, при услови (5) ограничены в $L_2(\mathbb{R}^n)$ П. о. вида (1) с символами, удовлетворяющими оценкам (2) равномерно по x (т. е. с постоянными $C_{\alpha, \beta, \mathscr{K}}=C_{\alpha, \beta}$, не зависящими от $\mathscr{K}$). Отсюда следует, напр., ограниченность в $L_2(\mathbb{R}^n)$ операторов $P \in L_{\rho, \delta}^0$, если $0 \leqslant \delta \leqslant \rho<1$ и ядро оператора P имеет компактный носитель (или оценки символа опять-таки равномерны по x). При $\rho<\delta$ или при $\delta=1$ операторы такого вида уже не обязательно ограничены. Аналогично, в общей ситуации невыполнение одного из двух последних условий (5) уже дает класс П. о., содержащий неограниченные операторы.

В терминах оценок символа можно дать условия ограниченности П. о. в L_p-нормах, а также в гёльдеровых и в жевреевских нормах (см. [8]).

Если в $\mathbb{R}^n$ дан оператор $P=p(x, D)$, где $P\in S^m_{\rho,\delta}$, $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$, причем оценки (2) равномерны по $x\in\mathbb{R}^n$, то этот оператор продолжается до ограниченного оператора $P: H^s(\mathbb{R}^n)\to H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$, $s\in\mathbb{R}$, где $H^t(\mathbb{R}^n)$ означает обычное пространство Соболева на $\mathbb{R}^n$ (иногда обозначаемое также $W^t_2(\mathbb{R}^n)$).

Класс П. о. $L^m_{\rho,\delta}$ при $1-\rho\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$ в естественном смысле инвариантен относительно диффеоморфизмов так же, как и его подкласс классических П. о. Это позволяет определить класс П. о. $L^m_{\rho,\delta}(X)$ и классические П. о. на произвольном гладком многообразии X. Формула замены переменной в символе при диффеоморфизме $\varkappa:\Omega\to\Omega_1$, где Ω, Ω_1 — области в X, имеет вид

$$a_1(y, \eta)|_{y=\varkappa(x)}\sim\sum\nolimits_\alpha\frac{1}{\alpha!}a^{(\downarrow\alpha)}(x^t, \varkappa'(x)\eta)\times$$
$$\times D^\alpha_z e^{i\varkappa''_x(z)\cdot\eta}|_{z=x},$$

где $a(x, \xi)$ — символ оператора $A\in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, $a_1(y, \eta)$ — символ оператора $A_1\in L^m_{\rho,\delta}(\Omega_1)$, заданного формулой $A_1u=[A(u\circ\varkappa)]\circ\varkappa^{-1}$, т. е. полученного из A заменой переменных $\varkappa$; $\varkappa'(x)$ обозначает якобиан отображения $\varkappa$, ${}^t\varkappa'(x)$ — транспонированная матрица,

$$a^{(\alpha)}(x, \xi)=\partial^\alpha_\xi a(x, \xi), \varkappa''_x(z)=\varkappa(z)-\varkappa(x)-\varkappa'(x)(z-x).$$

В частности, отсюда следует, что главный символ классического П. о. на многообразии X является корректно определенной функцией на кокасательном расслоении T^*X.

Если X — компактное многообразие (без края), то П. о. на X образуют алгебру с инволюцией, если вводить инволюцию с помощью скалярного произведения, задаваемого гладкой положительной плотностью. Оператор $A\in L^0_{\rho,\delta}(X)$ ограничен в $L_2(X)$, а если $A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$, где $m<0$, то такой П. о. компактен в $L_2(X)$. Для классических П. о. A порядка 0 на X

$$\inf\|A+K\|=\sup_{(x,\xi)\in T^*X}|a_0(x, \xi)|,$$

где $a_0(x, \xi)$ — главный символ оператора A, а K пробегает множество всех компактных операторов в $L_2(X)$. Оператор $A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$ непрерывно отображает $H^s(X)$ в $H^{s-m}(X)$ при любом $s\in\mathbb{R}$.

Параметриксом П. о. A наз. такой П. о. B, что $I-AB$ и $I-BA$ — П. о. порядка $-\infty$, т. е. интегральные операторы с гладким ядром. Пусть $A\in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$, $a(x, \xi)$ — символ оператора A. Достаточным условием существования параметрикса оператора A является выполнение оценок:

$$\left.\begin{array}{c}|a(x, \xi)|\geqslant\varepsilon|\xi|^{m_0},\ |\xi|\geqslant R,\ \varepsilon>0,\ m_0\in\mathbb{R};\\ |a^{-1}(x, \xi)\,\partial^\alpha_\xi\,\partial^\beta_x a(x, \xi)|\leqslant\\ \leqslant c_{\alpha,\beta,K}|\xi|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\ |\xi|\geqslant R,\ x\in K.\end{array}\right\}\quad(6)$$

В этом случае существует параметрикс $B\in L^{-m_0}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Простейшим следствием существования параметрикса является гипоэллиптичность оператора A: если $Au\in C^\infty(\Omega')$, где $\Omega'\subset\Omega$, то $u\in C^\infty(\Omega')$. Иными словами, sing supp Au=sing supp u. Верен также следующий более точный факт (**теорема регулярности**): если $Au\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega')$, то $u\in H^{s+m_0}_{\mathrm{loc}}(\Omega')$. Имеет место и микролокальная теорема регулярности: $WF(Au) = WF(u)$, где $WF(u)$ означает волновой фронт обобщенной функции u.

Условия (6) при $1-\rho\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$ инвариантны относительно диффеоморфизмов. Поэтому имеет смысл соответствующий класс операторов на многообразии X. Если X — компактное многообразие, то такой оператор A фредгольмов в $C^\infty(X)$, т. е. имеет в $C^\infty(X)$ конечномерные ядро и коядро, а также замкнутый образ.

Классический П. о. A порядка m с главным символом $a_m(x, \xi)$ наз. эллиптическим, если $a_m(x, \xi)\neq 0$ при $\xi\neq 0$. Такой оператор удовлетворяет условиям (6) с $m_0=m$ и имеет параметрикс, также являющийся классическим П. о. порядка $-m$. На компактном многообразии X такой П. о. задает фредгольмов оператор

$$A: H^s(X) \longrightarrow H^{s-m}(X),\quad s\in\mathbb{R}.$$

Все эти определения и факты переносятся на П. о., действующие в вектор-функциях или, более общо, в сечениях векторных расслоений. Для эллиптич. оператора на компактном многообразии X индекс задаваемого им отображения $A: H^s(X) \to H^{s-m}(X)$ на соболевских классах сечений не зависит от $s\in\mathbb{R}$ и может быть явно вычислен (см. *Индекса формулы*).

Роль П. о. состоит в том, что имеется ряд операций, выводящих за класс дифференциальных операторов, но сохраняющих класс П. о. Напр., резольвента и комплексные степени эллиптического дифференциального оператора на компактном многообразии являются классическими П. о., они возникают при сведении на границу эллиптической граничной задачи (см., напр., [7], [8] и предпоследнюю статью в [1]).

Существуют разные варианты теории П. о., приспособленные к решению различных задач анализа и математич. физики. Часто возникают П. о. с параметром, необходимые, напр., для изучения резольвенты и асимптотики собственных значений. Важную роль играют различные варианты теории П. о. на $\mathbb{R}^n$, учитывающие эффекты, связанные с описанием поведения функции на бесконечности, и частично инспирированные математич. вопросами квантовой механики, возникающими при изучении квантования классич. систем (см. [5], [1]). В теории локальной разрешимости уравнений с частными производными и в спектральной теории полезны П. о., поведение к-рых описывается с помощью весовых функций, заменяющих $|\xi|$ в оценках типа (2) (см. [8], [14]). Построена алгебра П. о. на многообразии с краем, содержащая, в частности, параметрикс эллиптической граничной задачи (см. [3], [13]).

Частным случаем П. о. являются многомерные сингулярные интегральные и интегро-дифференциальные операторы, изучение которых подготовило появление теории П. о. (см. [10]).

Теория П. о. служит основой для изучения *интегральных операторов* Фурье (см. [7], [10]), играющих ту же роль в теории гиперболич. уравнений, что и П. о. в теории эллиптич. уравнений.

Лит.: [1] Псевдодифференциальные операторы, пер. с англ., М., 1967; [2] Агранович М. С., Вишик М. И., Псевдодифференциальные операторы, М., 1968; [3] Эскин Г. И., Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, М., 1973; [4] Грушин В. В., Псевдодифференциальные операторы, М., 1975; [5] Шубин М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978; [6] Friedrichs K. O., Pseudo-differential operators, N. Y., 1970; [7] Treves F., Introduction to pseudo-differential and Fourier integral operators, v. 1—2, N. Y., 1980; [8] Taylor M., Pseudo-differential operators, B.— [u. a.], 1974; [9] Kumano-go H., Pseudo-differential operators, Camb., 1981; [10] Duistermaat J., Fourier integral operators, N. Y., 1973; [11] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976; [12] Агранович М. С., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 5, с. 3—120; [13] Boutet de Monvel L., «Acta math.», 1971, v. 126, p. 11—51; [14] Hörmander L., «Comm. Pure Appl. Math.», 1979, v. 32, № 3, p. 359—443.

М. А. Шубин.

ПСЕВДОДУГА — наследственно неразложимый содержащий более одной точки *змеевидный континуум*. Таков, напр., *Кнастера континуум*. *М. И. Войцеховский.*

ПСЕВДОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — действительное аффинное пространство, в к-ром каждым двум векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ поставлено в соответствие определенное число, называемое скалярным произведением $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

1) Скалярное произведение коммутативно:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a});$$

2) скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов:

$$(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c});$$

3) числовой множитель можно вынести за знак скалярного произведения:

$$(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b});$$

4) существуют такие n векторов $\boldsymbol{a}_i$, что

$$(\boldsymbol{a}_c, \boldsymbol{a}_c) > 0,\ c \leqslant l;\ (\boldsymbol{a}_d, \boldsymbol{a}_d) < 0,\ d > l;$$
$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0,\ i \neq j.$$

Число n наз. размерностью П. п., l — индексом, пара чисел (l, p), $p = n-l$, — сигнатурой. П. п. обозначается $E_{(l,\ p)}$ (или ${}^lE_n$). Пространство $E_{(1,\ 3)}$ наз. *Минковского пространством*. В пространстве $E_{(l,\ p)}$ во всякой системе n векторов $\boldsymbol{b}_i$, для к-рых $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) \neq 0$ и $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = 0$ при $i \neq j$, число векторов $\boldsymbol{b}_i$, для к-рых $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) > 0$, равно l, а число векторов $\boldsymbol{b}_i$, для к-рых $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) < 0$, равно $n-l$ (закон инерции квадратичной формы).

Модуль $|\boldsymbol{a}|$ вектора $\boldsymbol{a}$ П. п. может быть определен как неотрицательный корень $\sqrt{|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})|}$. Векторы, скалярные квадраты к-рых равны 1 и -1, наз. соответственно единичными и мнимоединичными векторами. Векторы $\boldsymbol{x}$, для к-рых $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, обладают нулевым модулем и наз. изотропными векторами; направления изотропных векторов — изотропными направлениями.

В П. п. имеются три вида прямых: евклидовы, направляющий вектор к-рых имеет положительный скалярный квадрат ($(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) > 0$), псевдоевклидовы $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) < 0$ и изотропные ($(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$). Совокупность всех изотропных прямых, проходящих через нек-рую точку, наз. изотропным конусом.

В П. п. имеется несколько видов плоскостей: евклидовы плоскости E^2, псевдоевклидовы плоскости $E_{(1;\ 1)}$ и плоскости, содержащие изотропные векторы,— т. н. полуевклидовы плоскости сигнатуры (0,1) и (1,0) и дефекта 1 (см. *Полуевклидово пространство*) и изотропные плоскости, все векторы к-рых изотропны.

За расстояние между точками $A(\boldsymbol{x})$ и $B(\boldsymbol{x})$ принимается модуль вектора $\overline{AB}$, и оно может быть вычислено следующим образом:

$$\overline{AB}^2 = |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2 = |(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}),\ (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})|.$$

П. п. не является метрич. пространством, т. к. в нем не выполняется неравенство треугольника. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ принадлежат евклидовой плоскости (или псевдоевклидовой плоскости индекса 0), то для них выполняется неравенство треугольника, а если они принадлежат псевдоевклидовой плоскости индекса 1, то для них выполняется т. н. обратное неравенство треугольника:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \geqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|.$$

В П. п. имеются три вида сфер: сферы с положительным квадратом радиуса: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \rho^2$, сферы с отрицательным квадратом радиуса: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -\sigma^2$ и сферы нулевого радиуса: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, совпадающие с изотропным конусом.

Движения П. п. являются аффинными преобразованиями и могут быть записаны в виде

$$x' = Ux + a.$$

Оператор U удовлетворяет условию $|Ux| = |x|$, т. е. сохраняет расстояние между точками. Движения П. п. образуют группу по умножению; она зависит от $n(n+1)/2$ независимых параметров. Движения П. п. наз. движениями 1-го или 2-го рода, если они являются аффинными преобразованиями соответствующего рода.

Антидвижением П. п. называют геометрич. преобразование, при к-ром всякий вектор a переходит в вектор a' такой, что $(a, a) = -(a', a')$.

В П. п. можно ввести основные операции векторной и тензорной алгебры. Основные дифференциально-геометрич. понятия строятся в соответствии с правилами геометрии псевдоримановых пространств. Метрич. тензор П. п. имеет вид (в галилеевой системе координат)

$$g_{ij} = \left\| \begin{matrix} \left.\begin{matrix} 1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & 1 \end{matrix}\right\} l & 0 \\ 0 & \left.\begin{matrix} -1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & -1 \end{matrix}\right\} p \end{matrix} \right\|.$$

П. п. является плоским, т. е. его *Римана тензор* равен нулю. Если тензор Римана псевдориманова пространства равен нулю тождественно, то оно является **локально псевдоевклидовым пространством**.

Подмногообразия П. п. могут нести различные метрики: положительно или отрицательно определенную риманову метрику, псевдориманову метрику и вырожденную метрику (см. *Индефинитная метрика*). Так, напр., сферы П. п. несут (вообще говоря, индефинитную) метрику постоянной кривизны. В $E_{(1, n-1)}$ сфера с положительным квадратом радиуса является $(n-1)$-мерным пространством, изометричным пространству Лобачевского.

П. п. $E_{(l, p)}$ $(l+p=n)$ и евклидово пространство E^n можно рассматривать как подпространства комплексного пространства с формой $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dz_i^2$. Если x^j — координаты П. п., y^j — действительного евклидова пространства, z^j — комплексного евклидова пространства, то уравнения подпространств имеют вид

$$x^j = \operatorname{Re} z^j,\ 0 < j \leqslant l;\quad x^j = \operatorname{Im} z^j,\ l < j \leqslant n,\quad y^j = \operatorname{Re} z^j.$$

Метрику П. п. можно формально получить из метрики евклидова пространства заменой $x^j = iy^j$, $l < j \leqslant n$.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, М., 1970; [2] Розенфельд Б. А., Многомерные пространства, М., 1966; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973.

Д. Д. Соколов.

ПСЕВДОКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — *вполне регулярное пространство* X такое, что всякая действительная функция, определенная и непрерывная на X, ограничена. В классе нормальных пространств объемы понятий счетной компактности и псевдокомпактности совпадают. *М. И. Войцеховский.*

ПСЕВДОКОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — *биголоморфное отображение* области D пространства $\mathbb{C}^n$ на область $D' \subset \mathbb{C}^n$ при $n > 1$. Название связано с тем, что при $n > 1$ это отображение не является, вообще говоря, *конформным отображением*. *Е. Д. Соломенцев.*

ПСЕВДОМЕТРИКА на множестве X — неотрицательная действительная функция ρ, определенная на множестве всех пар элементов множества X

(т. е. на $X \times X$) и подчиненная следующим трем ограничениям, наз. аксиомами псевдометрики: а) если $x=y$, то $\rho(x, y)=0$; б) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$; в) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y)+\rho(y, z)$, где x, y, z — любые элементы множества X.

Не требуется, чтобы из $\rho(x, y)=0$ следовало, что $x=y$. По псевдометрике ρ на множестве X определяется топология на X: точка x принадлежит замыканию множества $A \subset X$, если $\rho(x, A)=0$, где

$$\rho(x, A)=\inf\{\rho(x, y): y \in A\}.$$

Эта топология вполне регулярна, но не обязательно хаусдорфова: одноточечные множества могут быть незамкнуты. Каждая вполне регулярная топология может быть задана семейством П. как структурное объединение отвечающих этим П. топологий. Аналогично, семейства П. могут служить для определения, описания и исследования равномерных структур.

Лит.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981. *А. В. Архангельский.*

ПСЕВДОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — множество X, наделенное *псевдометрикой*. Каждое П. м. нормально и удовлетворяет первой аксиоме счетности. Вторая аксиома счетности выполняется в том и только в том случае, когда X — сепарабельное пространство.

М. И. Войцеховский.

ПСЕВДОМНОГООБРАЗИЕ n-мерное замкнутое (соответственно, с краем) — конечное симплициальное разбиение со следующими свойствами. а) Неразветвленность: каждый $(n-1)$-мерный симплекс является гранью ровно двух (соответственно, одного или двух) n-мерных симплексов; б) сильная связность: любые два n-мерных симплекса можно соединить «цепочкой» n-мерных симплексов, в к-рой каждые два соседние симплекса имеют общую $(n-1)$-мерную грань; в) размерностная однородность: каждый симплекс является гранью нек-рого n-мерного симплекса. Если нек-рая *триангуляция* топологич. пространства является П., то и любая его триангуляция является П., поэтому можно говорить о свойстве топологич. пространства быть (или не быть) П.

Примеры П.: триангулируемые связные компактные гомологич. многообразия над $\mathbb{Z}$; комплексные алгебраич. многообразия (даже с особенностями); *Тома пространства* векторных расслоений над триангулируемыми компактными многообразиями. Наглядно П. можно считать комбинаторной реализацией общей идеи многообразия с особенностями, образующими множество коразмерности два. Для П. имеют смысл понятия ориентируемости, ориентации и степени отображения, причем при комбинаторном подходе П. образуют естественную область определения этих понятий (тем более что формально определение П. проще, чем определение комбинаторного многообразия). Циклы в многообразиях можно в нек-ром смысле реализовать посредством П. (см. *Стинрода задача*).

Лит.: [1] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.— Л., 1938; [2] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971. *Д. В. Аносов.*

ПСЕВДОНОРМИРОВАНИЕ — обобщение понятия мультипликативного *нормирования*, заключающееся в ослаблении одной из аксиом: вместо условия $w(a, b)=w(a)\, w(b)$ требуется только $w(a, b) \leqslant w(a)\, w(b)$. Пример П.: в кольце всех непрерывных действительных функций $f(x)$, определенных на отрезке $[0,1]$, П., не являющееся нормированием, определяется формулой

$$(f)=\max_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Всякая действительная конечномерная алгебра может быть псевдонормирована.

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973. *О. А. Иванова.*

ПСЕВДООТКРЫТОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение $f: X \to Y$ такое, что для всякой точки $y \in Y$ и любой окрестности U множества $f^{-1}y$ в X непременно $y \in \operatorname{Int} fU$ (здесь $\operatorname{Int} fU$ — множество всех внутренних точек fU относительно Y).

М. И. Войцеховский.

ПСЕВДОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ с периодами $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r$ — функция $f(t, u_1, \ldots, u_r)$ от $r+1$ переменных, удовлетворяющая условиям:

$$f(t, u_1, \ldots, u_i+\omega_i, \ldots, u_r) = f(t, u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_r), \quad i=1, \ldots, r;$$

$$f(t+\omega_0, u_1, \ldots, u_r) = f(t, u_1+\omega_0, \ldots, u_r+\omega_0).$$

Пример: если $f_0(t)$ и $f_1(t)$ — непрерывные периодич. функции с периодами ω_0 и ω_1 соответственно, причем отношение ω_0/ω_1 иррационально, то $f(t, u_1) = f_0(t) + f_1(t+u_1)$ является П. ф.

П. ф. связана с *квазипериодической функцией* и определяется по ней единственным образом: функция $F(t)$ квазипериодична с периодами $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r$ тогда и только тогда, когда существует такая непрерывная П. ф. $f(t, u_1, \ldots, u_r)$ с периодами $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r$, что $F(t) = f(t, 0, \ldots, 0)$.

Ю. В. Комленко.

ПСЕВДОРИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ — совокупность геометрич. свойств поверхностей и кривых в *псевдоримановом пространстве* ${}^lV_n$. Эти свойства вытекают из свойств псевдоримановой метрики этого пространства, к-рая является знаконеопределенной квадратичной формой индекса l:

$$ds^2 = g_{ij}(X)\, dx^i\, dx^j.$$

Длина дуги кривой l выражается формулой

$$s = \int_l \sqrt{g_{ij}\, dx^i\, dx^j},$$

она может быть действительной, чисто мнимой или нулем (изотропная кривая). Геодезич. линии в ${}^lV_n$ даже в малых своих частях теряют экстремальные свойства, оставаясь линиями стационарной длины. Длина дуги l может быть больше или меньше длины геодезич. отрезка, соединяющего концы дуги l. Если рассматривается пространство ${}^{n-1}V_n$, то отрезок геодезической AB действительной длины дает длиннейшее расстояние между точками A, B (в предположении, что эту дугу геодезической можно вложить в полугеодезическую координатную систему в виде координатной линии и что для сравнения берутся гладкие кривые действительной длины из области, где определена эта координатная система). В случае, когда рассматривается псевдориманово пространство ${}^{n-1}R_n$, можно всякую прямую действительной длины принять за ось x^n ортонормированной координатной системы, в к-рой скалярный квадрат вектора x имеет вид

$$x = -\sum_{i=1}^{n-1} x^{i^2} + x^{n^2}.$$

Здесь любой прямолинейный отрезок действительной длины (вдоль оси x^n) будет служить длиннейшим расстоянием между точками, являющимися его концами. В случае пространства ${}^1V_n$ (или ${}^1R_n$) отрезок геодезич. линии мнимой длины будет служить длиннейшим расстоянием по сравнению со всевозможными гладкими кривыми мнимой длины, концы к-рых совпадают с концами геодезич. отрезка.

На основе псевдоримановой метрики развертывается дифференциальная геометрия поверхностей и кривых в псевдоримановом пространстве, определяются кривизны кривых и поверхностей и т. д.

П. г. возникает также на поверхностях в гиперболич. пространствах. Простейшим случаем П. г. является геометрия *псевдоевклидова пространства* ${}^{l}R_n$ и, в частности, геометрия *Минковского пространства.*

Лит. см. при ст. *Псевдориманово пространство.*

Л. А. Сидоров.

ПСЕВДОРИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство аффинной связности (без кручения), касательное пространство в каждой точке к-рого является *псевдоевклидовым пространством.*

Пусть A_n есть n-пространство аффинной связности (без кручения) и ${}^{l}R_n$ — касательное псевдоевклидово пространство в каждой точке пространства A_n, в этом случае П. п. обозначается ${}^{l}V_n$. Как и в собственном римановом пространстве, метрич. тензор пространства ${}^{l}V_n$ является невырожденным и абсолютно постоянным, а метрич. форма пространства ${}^{l}V_n$ является квадратичной формой индекса l:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \quad i, \ j = 1, \ \ldots, \ n,$$

$g_{ij}(X)$ — метрич. тензор ${}^{l}V_n$, $\det\|g_{ij}\| \neq 0$. Пространство ${}^{l}V_n$ можно определить как n-мерное многообразие, в к-ром задана инвариантная дифференциальная квадратичная форма индекса l.

Простейшим примером П. п. является пространство ${}^{l}R_n$.

П. п. ${}^{l}V_n$ наз. приводимым, если в окрестности каждой его точки существует такая система координат $(x^1, \ldots, x^n)$, что все координаты x^i можно разделить на группы x^{i_α} такие, что $g_{i_\alpha j_\alpha} \neq 0$ лишь для тех индексов i_α, j_α, к-рые принадлежат одной группе, а $g_{i_\alpha j_\alpha}$ являются функциями только координат этой группы.

В П. п. определяется кривизна пространства в двумерном направлении, она может быть истолкована как кривизна геодезической (неизотропной) 2-поверхности, проведенной в данной точке в данном двумерном направлении. Если значение кривизны в каждой точке одно и то же по всем двумерным направлениям, то оно является постоянным во всех точках (теорема Шура) и П. п. наз. в этом случае П. п. постоянной кривизны. Примером П. п. постоянной отрицательной кривизны является гиперболич. пространство ${}^{l}S_n$ отрицательной кривизны — оно является П. п. ${}^{n-l}V_n$; пространство ${}^{l}R_n$ есть П. п. нулевой кривизны.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [2] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [3] Эйнштейн А., Собр. науч. трудов, т. 1, М., 1965.

Л. А. Сидоров.

ПСЕВДОСКАЛЯР — величина, не изменяющаяся при переносе и повороте координатных осей, но изменяющая свой знак при замене направления каждой оси на противоположное. Примером П. может служить смешанное произведение трех векторов и скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, где $\boldsymbol{a}$ — *осевой вектор*, $\boldsymbol{b}$ — обычный (полярный) вектор.

БСЭ-3.

ПСЕВДОСКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, косое произведение, $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$ ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — произведение их модулей на синус угла φ положительного (против часовой стрелки) вращения от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \varphi.$$

Если $\boldsymbol{a} = 0$ и (или) $\boldsymbol{b} = 0$, то П. п. полагают равным нулю.

См. *Векторная алгебра.*

А. Б. Иванов.

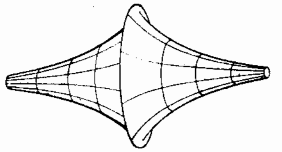
ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА — см. *Случайные и псевдослучайные числа.*

ПСЕВДОСФЕРА — поверхность постоянной отрицательной кривизны, образованная вращением трактрисы вокруг ее асимптоты (см. рис.). Линейный элемент в полугеодезич. координатах имеет вид (линия $u = 0$ — геодезическая):

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a}\, dv^2, \quad a = \text{const};$$

в изотермич. координатах:

$$ds^2 = a^2 \frac{dx^2+dy^2}{y^2}, \ a = \text{const}.$$



Всякая поверхность постоянной отрицательной кривизны наложима на П. Внутренняя геометрия П. локально совпадает с геометрией Лобачевского (см. *Бельтрами интерпретация*).

Лит.: [1] Выгодский М. Я., Дифференциальная геометрия, М.— Л., 1949; [2] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2, М.— Л., 1948. *А. Б. Иванов.*

ПСЕВДОТЕНЗОР — тензор, рассматриваемый с точностью до произвольного функционального множителя.

ПСЕВДОХАРАКТЕР множества A в топологическом пространстве X — наименьший из всех бесконечных кардиналов τ таких, что существует семейство мощности τ открытых в X множеств, пересечение к-рых есть A. Обозначается обычно $\psi(A, X)$. Псевдохарактер $\psi(A, X)$ определен для всех подмножеств A пространства X в том и только в том случае, если в X все одноточечные подмножества замкнуты. Под псевдохарактером $\psi(x, X)$ точки $x \in X$ в топологич. пространстве X понимается псевдохарактер $\psi(\{x\}, X)$ множества $\{x\}$ в X.

Псевдохарактер $\psi(X)$ топологич. пространства X — наименьший бесконечный кардинал τ такой, что каждая точка является пересечением семейства мощности $\leqslant\tau$ открытых в X множеств. Пространства счетного П.— те, в к-рых каждая точка имеет тип G_δ. Каждое топологич. пространство можно представить как образ при непрерывном открытом отображении нек-рого паракомпактного хаусдорфова пространства счетного П. Для бикомпактных хаусдорфовых пространств счетность П. равносильна первой аксиоме счетности. Вообще, П. замкнутого множества A в бикомпактном хаусдорфовом пространстве X равен мощности некоторой *определяющей системы окрестностей* множества A в X.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Архангельский А. В., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 3, с. 127—46. *А. В. Архангельский.*

ПСЕВДОЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл вида

$$\int R\left(z, \sqrt{f(z)}\right) dz,$$

где R — рациональная функция двух аргументов, $f(z)$ — многочлен 3-й или 4-й степени без кратных корней, к-рый может быть выражен элементарно, т. е. через алгебраич. функции от z и логарифмы от таких функций. Напр.,

$$\int \frac{z^3\, dz}{\sqrt{z^4-1}}$$

есть П. и. См. *Эллиптический интеграл.* *Е. Д. Соломенцев.*

ПСИ-ФУНКЦИЯ, ψ-функция Гаусса, дигамма-функция,— первая производная от логарифма *гамма-функции.*

ПТОЛЕМЕЯ ТЕОРЕМА: во всяком выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин его противоположных сторон. Названа по имени Клавдия Птолемея (2 в.), к-рый использовал ее для вывода нек-рых соотношений в тригонометрии. *П. С. Моденов.*

ПУАНКАРЕ ГИПОТЕЗА — утверждение, приписываемое А. Пуанкаре (H. Poincaré) и гласящее: любое замкнутое односвязное трехмерное многообразие гомеоморфно трехмерной сфере. Естественным обобщением является следующее утверждение (обобщенная гипотеза Пуанкаре): любое замкнутое

n-мерное многообразие, гомотопически эквивалентное n-мерной сфере S^n, гомеоморфно ей; в настоящее время (1983) доказана для всех n, кроме $n=3$ (при $n=4$ — лишь для гладких многообразий). *Ю. Б. Рудяк.*

ПУАНКАРЕ ГРУППА — группа движений пространства Минковского. П. г. является полупрямым произведением группы преобразований Лоренца и группы четырехмерных сдвигов (трансляций). П. г. названо по имени А. Пуанкаре (H. Poincaré), который впервые (1905) установил, что преобразования Лоренца образуют группу. *А. Б. Иванов.*

ПУАНКАРЕ ДВОЙСТВЕННОСТЬ — изоморфизм p-мерных групп (модулей) гомологий n-мерного многообразия M (в том числе обобщенного) с коэффициентами в локально постоянной системе $\mathcal{G}$ групп (модулей), изоморфных G, $(n-p)$-мерным когомологиям M с коэффициентами в ориентирующем пучке $\mathcal{H}_n(\mathcal{G})$ над M (слой этого пучка в точке $x\in M$ совпадает с локальной группой гомологий $H_n^x=H_n(M, M\setminus x; \mathcal{G})$). При этом обычные гомологии $H_p^c(M; \mathcal{G})$ изоморфны когомологиям $H_c^q(M; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$, $q=n-p$, с компактными носителями (когомологиям «второго рода»), в то время как гомологии «второго рода» $H_p(M; \mathcal{G})$ (определяемые «бесконечными» цепями) изоморфны обычным когомологиям $H^q(M; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$. В более общем виде имеют место изоморфизмы $H_p^\Phi(M; \mathcal{G})=H_\Phi^q(M; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$, где Φ — любое семейство носителей.

Аналогичные отождествления имеются также для гомологий и когомологий подмножеств $A\subset M$ и пар (M, A) (**двойственность Пуанкаре — Лефшеца**). Именно, пусть A — открытое или замкнутое подпространство в M и $B=M\setminus A$. Пусть Φ/B — семейство всех тех множеств из Φ, к-рые содержатся в B, и пусть $\Phi\cap A$ — семейство множеств вида $F\cap A$, $F\subset\Phi$. Тогда точная последовательность гомологий пары (M, B)

$$\ldots H_p^{\Phi/B}(B; \mathcal{G})\longrightarrow H_p^\Phi(M; \mathcal{G})\longrightarrow H_p^\Phi(M; B; \mathcal{G})\longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_{p-1}^{\Phi/B}(B; \mathcal{G})\longrightarrow\ldots \qquad (*)$$

совпадает с когомологич. последовательностью пары (M, A)

$$\ldots\longrightarrow H_\Phi^q(M, A; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))\longrightarrow H_\Phi^q(M; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))\longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_{\Phi\cap A}^q(A; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))\longrightarrow H_\Phi^{q+1}(M; A; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))\longrightarrow\ldots.$$

Группы $H_p^{\Phi/B}(B; \mathcal{G})=H_p^{\Phi/B}(M; \mathcal{G})$ совпадают с $H_p^c(B; \mathcal{G})$ в случае, когда $\Phi=c$, и с $H_p(B; \mathcal{G})$ в случае, когда Φ — семейство Ψ всех замкнутых в M множеств, а множество B замкнуто (в этом случае символ Φ в первой последовательности может быть опущен, причем имеет место изоморфизм $H_p(M, B; \mathcal{G})=H_p(A; \mathcal{G})$). В случае, когда $\Phi=\Psi$, а B открыто, символ Φ можно опустить лишь во втором и третьем членах гомологич. последовательности, т. к. гомологии $H_p^{\Phi/B}(B; \mathcal{G})$ зависят не только от топологич. пространства B, но и от вложения $B\subset M$.

В случае, когда $\Phi=\Psi$, этот символ (вместе с $\Phi\cap A$) может быть опущен в когомологич. последовательности пары (M, A). Если A замкнуто, то

$$H_\Phi^q(M, A; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))=H_{\Phi/B}^q(M; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))=$$
$$=H_{\Phi/B}^q(B; \mathcal{H}_n(\mathcal{G})),$$

при $\Phi=\Psi$ возникающие когомологии B зависят не только от B, но и от вложения $B\subset M$. Если $\Phi=c$ и A замкнуто, то $\Phi\cap A$ можно заменить на c, и в этом случае также $H_c^q(M; A; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))=H_c^q(B; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$ — когомологии «второго рода» пространства B. Если $\Phi = c$, но A открыто, то когомологии $H^q_{c \cap A}(A; \mathscr{H}_n(\mathscr{G}))$ отличаются от $H^q_c(A; \mathscr{H}_n(\mathscr{G}))$ (и зависят от вложения $A \subset M$).

Двойственность Пуанкаре — Лефшеца легко может быть применена для описания двойственности между гомологиями и когомологиями многообразия с краем. Полезно иметь в виду, что если все отличные от нуля слои пучка $\mathscr{H}_n(R)$ изоморфны основному кольцу R, то $\mathscr{H}_n(\mathscr{G}) = \mathscr{H}_n(R) \otimes_R \mathscr{G}$.

В случае, когда пучок $\mathscr{H}_n(R)$ локально постоянен, существует единственный с точностью до изоморфизма локально постоянный пучок $\mathscr{L}(R)$, для к-рого $\mathscr{L}(R) \otimes_R \mathscr{H}_n(R) = R$. Поэтому если в гомологич. последовательности (*) вместо $\mathscr{G}$ использовать пучок коэффициентов $\mathscr{L}(R) \otimes_R \mathscr{G}$, то в когомологич. последовательности станет (вместо $\mathscr{H}_n(\mathscr{G})$) фигурировать пучок $\mathscr{G}$. Таким образом, наперед заданные коэффициенты в изоморфизмах двойственности могут фигурировать как в гомологиях, так и в когомологиях.

Наиболее естественное доказательство П. д. получается средствами теории пучков. П. д. в топологии — частный случай соотношений двойственности типа Пуанкаре, справедливых для производных функторов в гомологич. алгебре (другой частный случай — двойственность типа Пуанкаре для гомологий и когомологий групп).

Лит.: [1] Скляренко Е. Г., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 6, с. 90—118; [2] его же, «Матем. заметки», 1980, т. 28, № 5, с. 769—76; [3] Масси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981. *Е. Г. Скляренко.*

ПУАНКАРЕ ДИВИЗОР — дивизор, заданный естественной поляризацией на якобиане алгебраич. кривой. Форма пересечений одномерных циклов гомологий алгебраич. кривой X индуцирует унимодулярную кососимметрич. форму на решетке периодов. В соответствии с определением поляризованного абелева многообразия эта форма определяет главную поляризацию на якобиане кривой $I(X)$. Поэтому эффективный дивизор $\Theta \subset \subset I(X)$, заданный этой поляризацией, определен однозначно с точностью до сдвига на элемент $x \in I(X)$. Геометрия П. д. Θ отражает геометрию алгебраич. кривой X. В частности, размерность множества особых точек П. д. $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{sing} \Theta \geqslant g-4$, где g — род кривой X (см. [1]).

Лит.: [1] Andreotti A., Mayer A., «Ann. Sc. norm. sup. Pisa», 1967, v. 21, № 2, p. 189—238. *Вик. С. Куликов.*

ПУАНКАРЕ ЗАДАЧА: найти гармоническую в конечной односвязной области S^+ функцию по условию на границе L области:

$$A(s)\frac{du}{dn} + B(s)\frac{du}{ds} + c(s)u = f(s),$$

где $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$, $f(s)$ — заданные на L действительные функции, s — дуговая абсцисса, n — нормаль к L. К этой задаче пришел А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1910), разрабатывая математич. теорию приливов, и дал (неполное) решение задачи в случае, когда $A(s)=1$, $c(s)=0$, контур L и функции $B(s)$, $f(s)$ — аналитические.

См. также *Граничные задачи теории аналитических функций.* *А. Б. Иванов.*

ПУАНКАРЕ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — модель, реализующая геометрию плоскости Лобачевского (гиперболич. геометрию) на плоскости комплексного переменного. В П. и. с круговым абсолютом каждая точка единичного круга $E = \{z : |z| < 1\}$ в плоскости z наз. гиперболической точкой, а сам круг — гиперболической плоскостью. Дуги окружностей (и диаметр) в E, ортогональные к граничной окружности $\Omega = \{z : |z| = 1\}$, наз. гиперболическими прямыми. Каждая точка Ω наз. идеальной точкой. Гиперболич. прямые с общей гиперболич. точкой наз. пересекающимися прямыми; с общей идеальной точкой — параллельными прямыми; прямые, к-рые не пересекаются и не параллельны, — гиперпараллельными (расходящимися) прямыми. Так, напр., на рис. 1 изображены две прямые, проходящие через точку z_1, параллельно прямой z_2z_3.

В П. и. в полуплоскости $H=\{z=x+iy|y>0\}$ каждая точка верхней полуплоскости наз. гиперболической точкой, а сама полуплоскость — гиперболической плоскостью. Полуокружности и полупрямые, ортогональные действительной оси, наз. гиперболическими прямыми. Множеством идеальных точек (абсолютом) является действительная ось и бесконечно удаленная точка

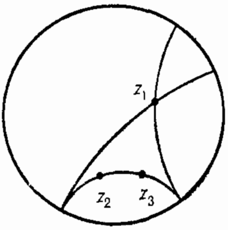


Рис. 1.

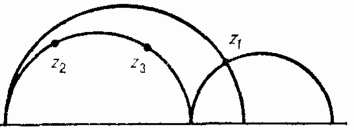


Рис. 2.

плоскости z. Аналогично П. и. с круговым абсолютом определяются параллельные, пересекающиеся и расходящиеся прямые. Так, напр., на рис. 2 изображены две прямые, проходящие через точку z_1 параллельно прямой $z_2\ z_3$.

Движения описываются конформными преобразованиями, переводящими абсолют в себя. Расстояния определяются с помощью двойного отношения четырех точек

$$\rho(z_1,\ z_2)=k\ln(z_1,\ z_2,\ z_1^*,\ z_2^*),$$

где z_1^* — идеальная точка полупрямой, исходящей из z_1 и проходящей через z_2; z_2^* — идеальная точка полупрямой, исходящей из z_2 и проходящей через z_1; k — произвольное положительное постоянное;

$$(z_1,\ z_2,\ z_1^*,\ z_2^*)=\frac{z_1^*-z_1}{z_1^*-z_2}:\frac{z_2^*-z_1}{z_2^*-z_2}.$$

Величины углов в П. и. совпадают с величинами углов в геометрии Лобачевского.

П. и. предложена А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1882).

Лит.: [1] Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, пер. с нем., т. 2, М.— Л., 1934; [2] Каган В. Ф., Лобачевский и его геометрия, М., 1955; [3] Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 3 изд., М.— Л., 1981; [4] Пуанкаре А., Избранные труды, [пер. с франц.], М., 1974; [5] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [6] Sansone G., Gerretsen J., Lectures on the theory of functions of a complex variable, [v.] 2, Geometric theory, Groningen, 1969.

А. Б. Иванов.

ПУАНКАРЕ КОМПЛЕКС — обобщение понятия многообразия; пространство, группы гомологий к-рого устроены в нек-ром смысле так же, как группы гомологий замкнутого ориентируемого многообразия. А. Пуанкаре (H. Poincaré) обнаружил, что группы гомологий многообразия удовлетворяют нек-рому соотношению (изоморфному *Пуанкаре двойственности*). П. к. представляет собой пространство, где аксиоматизирован этот изоморфизм (см. также *Пуанкаре пространство*).

Алгебраический комплекс Пуанкаре — цепной комплекс с формальной двойственностью Пуанкаре — аналог прежнего.

Пусть $C=\{C_i\}$ — пополненный цепной комплекс с $C_i=0$ при $i>0$ такой, что его группы гомологий конечно порождены. Пусть, кроме того, комплекс C снабжен такой (цепной) диагональю Δ: $C\to C\otimes C$, что $(\varepsilon\otimes 1)\Delta=$

$=(1\otimes\varepsilon)\Delta$, где $\varepsilon: C\to\mathbb{Z}$ — пополнение (и C отождествляется с $C\otimes\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}\otimes C$). Наличие диагонали позволяет определить спаривание

$$H^k(C)\otimes H_n(C)\longrightarrow H_{n-k}(C),\ x\otimes y\longrightarrow x\cap y.$$

Комплекс C наз. **геометрическим**, если задана цепная гомотопия между Δ и $T\Delta$, где $T: C\otimes C\to C\otimes\otimes C$ — перестановка сомножителей $T(a\otimes b)=b\otimes a$.

Геометрич. цепной комплекс наз. алгебраическим П. к. формальной размерности n, если существует такой элемент бесконечного порядка $\mu\in H_n(C)$, что для любого k гомоморфизм $\cap\mu: H^k(C)\to H_{n-k}(C)$ есть изоморфизм.

Примерами алгебраич. П. к. являются комплекс сингулярных цепей ориентируемого замкнутого многообразия или, более общо, П. к., определенный выше, с подходящими условиями конечности. Можно определить также **цепные пары Пуанкаре** — алгебраич. аналоги пар Пуанкаре (X, A). Рассматриваются также П. к. (и цепные пары Пуанкаре) модулей над подходящими кольцами. *Ю. Б. Рудяк.*

ПУАНКАРЕ ПРОСТРАНСТВО — 1) П. п. формальной размерности n — топологическое пространство X, где задан элемент $\mu\in H_n(X)=\mathbb{Z}$, что гомоморфизм $\cap\mu: H^k(X)\to H_{n-k}(X)$ вида $x\to x\cap\mu$ является изоморфизмом для любого k (здесь $\cap$ — операция Уитни умножения, высечение). При этом $\cap\mu$ наз. **изоморфизмом двойственности Пуанкаре** и элемент μ порождает группу $H_n(X)=\mathbb{Z}$. Любое замкнутое ориентируемое n-мерное связное топологич. многообразие является П. п. формальной размерности n; в качестве μ берется ориентация (фундаментальный класс) многообразия.

Пусть X — конечное клеточное пространство, вложенное в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ большой размерности N, и U — замкнутая регулярная окрестность этого вложения, а ∂U — ее край. Стандартное отображение $p: \partial U\to X$ превращается (по Серру) в расслоение. Теорема: пространство X является П. п. формальной размерности n тогда и только тогда, когда слой этого расслоения гомотопически эквивалентен сфере S^{N-n-1}. Возникающее над П. п. X описанное расслоение (слой к-рого — сфера) единственно с точностью до стационарной эквивалентности и наз. **сферическим нормальным расслоением**, или **расслоением Спивака**, П. п. X. При этом конус проекции $p: \partial U\to X$ есть *Тома пространство* нормального сферич. расслоения над X.

Если ограничиться лишь гомологиями с коэффициентами в нек-ром поле F, то получится т. н. **пространство Пуанкаре над** F.

Рассматриваются также **пары Пуанкаре** (X, A) (обобщение понятия многообразия с краем), где для нек-рой образующей $\mu\in H_n(X, A)=\mathbb{Z}$ и любого k имеется изоморфизм двойственности Пуанкаре:

$$\cap\mu: H^k(X)\longrightarrow H_{n-k}(X, A).$$

П. п. естественным образом возникают в задачах существования и классификации структур на многообразиях. Содержательна также задача сглаживания (триангуляции) П. п., то есть отыскания гладкого (кусочно линейного) замкнутого многообразия, гомотопически эквивалентного данному П. п.

2) П. п. n-**мерное** — замкнутое n-мерное многообразие M, *гомологий группы* $H_i(M)$ к-рого изоморфны группам гомологий $H_i(S^n)$ n-мерной сферы S^n; другое название — **гомологическая сфера**.

Односвязное П. п. гомотопически эквивалентно сфере (см. *Гомотопический тип*). Для группы π, реализуемой как *фундаментальная группа* нек-рого П. п., имеют место равенства $H_1(\pi)=H_2(\pi)=0$, где $H_i(\pi)$ — группы гомологий группы π. Обратно, для любого $n\geqslant 5$ и любой конечно представимой группы π с $H_1(\pi)=H_2(\pi)=0$ существует n-мерное П. п. M с $\pi_1(M)\pi$.

Для $n=3,4$ этих условий недостаточно для реализации группы π в виде $\pi=\pi_1(M)$. Так, напр., фундаментальная группа любого трехмерного П. п. допускает копредставление с одинаковым числом образующих и соотношений. Единственная конечная группа, реализуемая как фундаментальная группа трехмерного П. п., есть бинарная группа икосаэдра $\langle x, y : x^2=y^5=1\rangle$, являющаяся фундаментальной группой *додекаэдра пространства* — исторически первого примера П. п.

Лит.: [1] Браудер В., Перестройки односвязных многообразий, пер. с англ., М., 1983. *Ю. Б. Рудяк.*

ПУАНКАРЕ СФЕРА — сфера в пространстве $\mathbb{R}^3$ с отождествленными диаметрально противоположными точками. П. с. диффеоморфна проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$; она была введена А. Пуанкаре (Н. Poincaré, см. [1]) для исследования поведения на бесконечности фазовых траекторий двумерной автономной системы

$$\dot{x}=P(x, y),\ \dot{y}=Q(x, y) \tag{1}$$

в случае, когда P и Q — многочлены. П. с. обычно изображают так, чтобы она касалась плоскости (x, y); при проектировании из центра П. с. взаимно однозначно отображается на $\mathbb{R}P^2$, причем паре диаметрально противоположных точек экватора отвечает бесконечно удаленная точка. Соответственно, фазовые траектории системы (1) отображаются на кривые на сфере.

Эквивалентный метод исследования системы (1) — применение преобразований Пуанкаре:

$$\text{а) } x=\frac{1}{z},\quad y=\frac{u}{z} \text{ и б) } x=\frac{v}{z},\quad y=\frac{1}{z}.$$

Первое (соответственно второе) из них пригодно вне сектора, содержащего ось y (ось x). Напр., преобразование а) приводит систему (1) к виду

$$\frac{du}{d\tau}=P^*(u, z),\quad \frac{dz}{d\tau}=Q^*(u, z), \tag{1'}$$

где $dt=z^n d\tau$ и n — наибольшая из степеней P, Q; особые точки системы (1′) наз. бесконечно удаленными особыми точками системы (1). Если многочлены P, Q взаимно просты, то многочлены P^*, Q^* также взаимно просты и система (1) имеет конечное число бесконечно удаленных особых точек.

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М., 1947; [2] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [3] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961.

М. В. Федорюк.

ПУАНКАРЕ ТЕОРЕМА: пусть на гладком замкнутом двумерном римановом многообразии V определено векторное поле X, имеющее конечное число изолированных особых точек $A_1, \ldots, A_k$.
Тогда

$$\sum j(X, A_i)=\chi(V);$$

здесь $j(X, A_i)$ — индекс точки A_i относительно X (см. *Особой точки индекс*), χ — *Эйлерова характеристика* V. Установлена А. Пуанкаре (Н. Poincaré, 1881).

М. И. Войцеховский.

ПУАНКАРЕ ТЕОРЕМА в теории устойчивости — см. *Устойчивость по Пуассону*.

ПУАНКАРЕ ТЕОРЕМА ВОЗВРАЩЕНИЯ — одна из основных теорем общей теории динамич. систем с инвариантной мерой.

Пусть движение системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1, \ldots, x_n),\ i=1, \ldots, n, \tag{1}$$

где однозначные функции $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (MX_i)}{\partial x_i} = 0, \quad M > 0,$$

так что уравнения (1) допускают положительный интегральный инвариант

$$\int_V M\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{2}$$

Предполагается также, что если изображающая точка P с координатами $x_1, \ldots, x_n$ в начальный момент времени t_0 находится внутри нек-рой области V конечного объема, то она будет оставаться неопределенно долго внутри этой области, и что

$$\int_V M\, dx_1 \ldots dx_n < \infty.$$

П. т. в.: если рассматривается область U_0, содержащаяся в V, то можно выбрать бесконечным числом способов начальное положение точки P таким образом, чтобы эта точка пересекла область U_0 бесконечно много раз. Если этот выбор начального положения делается наудачу внутри U_0, то вероятность того, что точка P не пересечет область U_0 бесконечное число раз, будет бесконечно мала.

Другими словами, если начальные условия не являются исключительными в указанном смысле, то точка P пройдет бесконечно много раз сколь угодно близко от своего начального положения.

Движение, при к-ром система бесконечное число раз возвращается в окрестность начального состояния, А. Пуанкаре (H. Poincaré) назвал устойчивым в смысле Пуассона. П. т. в. была впервые установлена А. Пуанкаре (см. [1], [2]), а его доказательство было улучшено К. Каратеодори [3].

Введя в метрич. пространстве R с помощью четырех аксиом абстрактное понятие меры μA любого множества $A \subset R$ и рассматривая динамич. систему $f(p, t)$ ($p = P$ для $t = 0$), заданную в R, К. Каратеодори назвал меру μ инвариантной относительно системы $f(p, t)$, если для любого μ-измеримого множества A имеет место равенство

$$\mu f(A, t) = \mu A, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Инвариантная мера представляет собой естественное обобщение интегрального инварианта (2) для дифференциальных уравнений (1). Предположив меру всего пространства R конечной, К. Каратеодори доказал, что:

1) если $\mu A = m > 0$, то найдутся значения t, $|t| \geqslant 1$, такие, что $\mu[A \cdot f(A, t)] > 0$, где $A \cdot f(A, t)$ — множество точек, принадлежащих одновременно множествам A и $f(A, t)$;

2) если в пространстве R со счетной базой $\mu R = 1$ для инвариантной меры μ, то почти все точки $p \in R$ (в смысле меры μ) устойчивы по Пуассону.

А. Я. Хинчин [5] уточнил часть 1) этой теоремы, доказав, что для всякого измеримого множества E, $\mu E = m > 0$, и любого t, $-\infty < t < +\infty$, неравенство

$$\mu(t) = \mu(E \cdot f(E, t)) > \lambda m^2$$

выполняется для относительно плотного множества значений t на оси $-\infty < t < +\infty$ (при любом $\lambda < 1$).

Н. Г. Четаев (см. [6], [7]) обобщил П. т. в. на случай, когда функции X_i в (1) зависят также от времени t периодически. Именно, пусть а) действительным состояниям системы отвечают лишь действительные значения переменных; б) функции X_i в дифференциальных уравнениях движения (1) суть периодические относительно t с одним общим им всем периодом τ; в) в своем движении точка P не выйдет из нек-рой замкнутой области R, если ее начальное положение P_0 находится где-либо внутри определенной области r_0; г) mes $W_k \geqslant$ $\geqslant a$ mes W_0, где mes $W_k = \int_{W_k} dx_1 \ldots dx_n$ обозначает меру множества W_k (объем в смысле Лебега), к-рое заполняют в момент $t = t_0 + k\tau$ движущиеся точки, вышедшие в t_0 из W_0; k — нек-рое целое число, постоянная a предполагается не бесконечно малой. Тогда почти всюду (кроме, быть может, множества точек меры нуль) в области r_0 траектории имеют устойчивость в смысле Пуассона.

Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов [8] для весьма широкого класса динамич. систем дали построение меры, инвариантной относительно данной динамич. системы (см. также [4]).

Лит.: [1] Poincaré H., «Acta math.», 1890, v. 13, p. 1—270; [2] его же, Избр. тр., пер. с франц., М., 1972; [3] Carathéodory C., «Sitz. Pres. Acad. Wiss. Berlin», 1919, S. 580; [4] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [5] Хинчин А. Я., «Comp. math.», 1934, v. 1, p. 177—79; [6] Четаев Н. Г., «С. r. Acad. sci.», 1928, t. 187, p. 637—38; [7] его же, «Уч. зап. Казанск. ун-та», 1929, т. 89, кн. 2, с. 199—201; [8] Крылов Н. Н., Боголюбов Н. Н., «Ann. Math.», 1937, v. 38, № 1, p. 65—113. *В. В. Румянцев.*

ПУАНКАРЕ ТЕОРЕМА ПОСЛЕДНЯЯ: пусть K — кольцо на плоскости, ограниченное окружностями с радиусами $r = a$ и $r = b$, и дано отображение его в себя (θ — полярный угол)

$$\tilde{r} = \varphi(r, \theta), \ \tilde{\theta} = \psi(r, \theta),$$

удовлетворяющее условиям: 1) отображение сохраняет площадь, 2) каждая граничная окружность переходит в себя $\varphi(a, \theta) = a$, $\varphi(b, \theta) = b$, 3) точки с $r = a$ передвигаются против часовой стрелки, а точки с $r = b$ — по часовой стрелке, то есть $\psi(a, \theta) > \theta$, $\psi(b, \theta) < \theta$. Тогда это отображение имеет две неподвижные точки. Вместо сохранения площади, более общо, можно потребовать, чтобы никакая подобласть не преобразовывалась в свою (собственную) часть.

Эта теорема высказана А. Пуанкаре [1] в 1912 в связи с нек-рыми задачами небесной механики; доказана им в ряде частных случаев, однако общего доказательства этой теоремы он не получил. Работа была послана А. Пуанкаре в итальянский журнал (см. [1]) за две недели до смерти, причем автор в сопроводительном письме редактору выразил уверенность в справедливости теоремы в общем случае.

Полное доказательство дал через полгода Дж. Биркгоф [2].

Лит.: [1] Poincaré H., «Rend. circ. mat. Palermo», 1912, v. 33, p. 375—407; [2] Birkhoff G., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1913, v. 14, p. 14—22; [3] Парс Л. А., Аналитическая динамика, пер. с англ., М., 1971. *М. И. Войцеховский.*

ПУАНКАРЕ УРАВНЕНИЯ — общие уравнения механики голономных систем, представимые с помощью нек-рой группы Ли бесконечно малых преобразований.

Пусть x_i, $i = 1, \ldots, n$, — переменные, определяющие положение голономной механич. системы, стесненной идеальными связями, зависящими явно от времени. Если система имеет k степеней свободы, то существует интранзитивная группа бесконечно малых преобразований

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \xi_0^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \ X_\alpha = \sum\nolimits_{j=1}^{n} \xi_\alpha^j \frac{\partial}{\partial x_j},$$
$$\alpha = 1, \ \ldots, \ k,$$

позволяющая перевести систему в момент времени t из положения x_i в бесконечно близкие действительное положение $x_i + dx_i$ и возможное положение $x_i + \delta x_i$ бесконечно малыми преобразованиями группы $\left(X_0 + \right.$ $\left. + \sum_{\alpha=1}^{k} \eta_\alpha X_\alpha\right) dt$ и подгруппы $\sum_{\alpha=1}^{k} \omega_i X_i$ соответственно. Здесь ω_α и η_α — независимые переменные, определяющие соответственно возможные и действительные перемещения системы,— связаны уравнениями

$$\delta\eta_i = \frac{d\omega_i}{dt} - \sum\nolimits_{\alpha,\ \beta=1}^{k} c_{\alpha\beta i}\omega_\alpha\eta_\beta,\ i=1,\ \ldots,\ k,$$

если группа возможных перемещений X_α определена своими структурными постоянными $c_{\alpha\beta i}$:

$$(X_\alpha X_\beta) = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = \sum\nolimits_{i=1}^{k} c_{\alpha\beta i} X_i,$$
$$\alpha,\ \beta=1,\ \ldots,\ k,$$

а оператор X_0 перестановочен с группой возможных перемещений

$$(X_0 X_\alpha) = 0,\ \alpha=1,\ \ldots,\ k.$$

Эти условия далее предполагаются выполненными.

П. у. имеют вид обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\eta_j} = \sum\nolimits_{\alpha,\ \beta=1}^{k} c_{\alpha j\beta}\eta_\alpha\frac{\partial L}{\partial\eta_\beta} + X_j L, \tag{1}$$

где

$$j=1,\ \ldots,\ k,$$
$$L(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_k) = T + U$$

— функция Лагранжа, $T(t,\ x,\ \eta)$ — кинетич. энергия, $U(t,\ x)$ — силовая функция.

Уравнения (1) были получены впервые А. Пуанкаре (см. [1]) для случая транзитивной группы возможных перемещений, когда связи не зависят явно от времени, и применены (см. [2]) для исследования движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Н. Г. Четаев (см. [3]) обобщил П. у. на случай интразитивной группы перемещений, когда связи зависят явно от времени, и разработал их теорию (см. [3]—[5]), а также преобразовал к более простому канонич. виду (см. *Четаева уравнения*). В частности, им был дан (см. [5]) метод построения группы возможных и действительных перемещений, когда голономные связи заданы в дифференциальной форме, и введено важное понятие циклич. перемещения.

Перемещения X_r, $r=s+1,\ \ldots,\ k$, наз. **циклическими**, если они удовлетворяют условиям:

1) $X_r L = 0$,

2) $(X_r X_\beta) = 0$, $r=s+1,\ \ldots,\ k$, $\beta=1,\ \ldots,\ k$.

Согласно 2) циклич. перемещения X_r образуют абелеву подгруппу группы возможных перемещений, перестановочную со всеми операторами X_β. Для циклич. перемещений существуют первые интегралы П. у.

$$\frac{\partial L}{\partial\eta_r} = a_r = \mathrm{const},\ r=s+1,\ \ldots,\ k.$$

Из этих соотношений переменные η_r можно выразить через постоянные a_r и переменные t, x_i, $\eta_1,\ \ldots,\ \eta_s$ и ввести **функцию Рауса**

$$R(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_s;\ a_{s+1},\ \ldots,\ a_k) =$$
$$= L - \sum\nolimits_{r=s+1}^{k}\frac{\partial L}{\partial\eta_r}\eta_r.$$

Тогда для нециклич. перемещений П. у. принимают вид уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial\eta_j} = \sum c_{\alpha j\beta}\eta_\alpha\frac{\partial R}{\partial\eta_\beta} + \sum c_{\alpha j\gamma}\eta_\alpha a_\gamma + X_j R, \tag{2}$$
$$\alpha,\ j,\ \beta=1,\ \ldots,\ s;\ \gamma=s+1,\ \ldots,\ k.$$

После интегрирования уравнений (2) значения η_r определяются равенствами

$$\eta_r = -\frac{\partial R}{\partial a_r},\ r=s+1,\ \ldots,\ k.$$

Если дополнительно выполняются равенства $c_{\alpha j\gamma}=0$, $\alpha, j=1, \ldots, s$; $\gamma=s+1, \ldots, k$, т. е. если нециклич. перемещения X_β, $\beta=1, \ldots, k$, представляют собой подгруппу группы возможных перемещений, то по отношению к этой подгруппе рассматриваемая механич. система образует как бы самостоятельную голономную систему с s степенями свободы, описываемую уравнениями (1) при $\alpha, j, \beta=1, \ldots, s$, где роль функции L играет функция R.

П. у. содержит как частные случаи: *Лагранжа уравнения*, когда группа преобразований, увеличивающая одну из переменных на бесконечно малую постоянную, приводится к группе перестановочных между собой преобразований; *Эйлера уравнения* вращения твердого тела, когда роль η_i играют проекции p, q, r мгновенной угловой скорости.

Лит.: [1] Poincaré H., «C. r. Acad. sci.», 1901, t. 132, p. 369—71; [2] его же, «Bull. Astron.», 1910, t. 27, p. 321—56; [3] Четаев Н. Г., «Докл. АН СССР», 1928, № 7, с. 103—04; [4] его же, «C. r. Acad. sci.», 1927, t. 185, p. 1577—78; [5] его же, «Прикл. матем. и механ.», 1941, т. 5, № 2, с. 253—62.

В. В. Румянцев.

ПУАНКАРЕ — БЕНДИКСОНА ТЕОРИЯ — раздел качественной теории дифференциальных уравнений и теории динамич. систем, относящийся к предельному (при $t\to\pm\infty$) поведению траекторий автономных систем двух дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\dot{x}_i=f_i(x_1, x_2),\quad i=1,\ 2 \qquad (*)$$

(условия, обеспечивающие существование и единственность решений, подразумеваются выполненными). В наиболее важном случае, когда в ограниченной части плоскости система имеет только конечное число *равновесия положений*, основной результат А. Пуанкаре (H. Poincaré, см. [1]) и И. Бендиксона (I. Bendixson, см. [2]) состоит в том, что любая ограниченная полутраектория (положительная или отрицательная) либо стремится к положению равновесия, либо навивается (наподобие спирали) на *предельный цикл*, либо аналогичным образом навивается на замкнутую *сепаратрису* или «сепаратрисный контур», состоящий из нескольких сепаратрис, «соединяющих» нек-рые положения равновесия, либо сама является положением равновесия или замкнутой траекторией. Наиболее часто используемое следствие: если полутраектория не выходит из нек-рой компактной области, не содержащей положения равновесия, то в этой области имеется замкнутая траектория. Для тех случаев, когда положений равновесия бесконечное число или когда полутраектория не является ограниченной, тоже имеется достаточно полное, хотя и более сложное описание (см. [4]). Наконец, можно рассматривать *непрерывный поток* на плоскости, не предполагая, что он задается дифференциальными уравнениями (*), ибо при этом все еще возможно использовать основные «технические» предпосылки П.- Б. т.: *Жордана теорему* и *последования отображение* для локальных сечений, гомеоморфных отрезку (существование их доказано в [7], см. также [8]).

К П.— Б. т. примыкают: открытая А. Пуанкаре связь между вращением векторного поля на границе области и индексами положений равновесия внутри нее (см. *Особой точки индекс*); результаты И. Бендиксона и Л. Брауэра (L. Brouwer) о возможных типах поведения траекторий возле положений равновесия (см. [2]—[5]); результаты, уточняющие роль «особых траекторий» — положений равновесия, предельных циклов и сепаратрис — в «качественной картине», возникающей на фазовой плоскости (см. [6]).

Хотя общая теория дает исчерпывающую информацию о вариантах поведения фазовых траекторий, возможных для систем (*), это не отвечает на вопрос, какой вариант реализуется для той или иной конкретной системы. Решению подобных вопросов (обычно не для отдельной системы, а для нек-рого класса систем) посвящено большое количество работ, в к-рых, как правило, существенно используется общая теория, но к-рые никоим образом не сводятся к ее автоматич. применению.

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М., 1947; [2] Бендиксон И., «Успехи матем. наук», 1941, в. 9, с. 191—211; [3] Brouwer L. E., «Verhandel. Konikl. nederl. akad. wet. Afd. natuurkunde. I. reeks», 1909, v. 11, p. 850—58; 1910, v. 12, p. 716—34; 1910, v. 13, № 1, p. 171—86; [4] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М., 1949; [5] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [6] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [7] Whitney H., «Ann. Math.», 1933, v. 34, № 2, p. 244—70; [8] Немыцкий В. В., «Вестн. Моск. ун-та», 1948, № 10, с. 49—61. *Д. В. Аносов.*

ПУАНКАРЕ — БЕРТРАНА ФОРМУЛА — формула перестановки порядка интегрирования в повторных несобственных интегралах в смысле главного значения по Коши.

Пусть Г — простая замкнутая или разомкнутая гладкая линия на комплексной плоскости; $\varphi(t, t_1)$—определенная на Г (вообще говоря, комплекснозначная) функция, удовлетворяющая равномерно условию Гёльдера по t, t_1; t_0 — фиксированная точка на Г, отличная от концов, если Г разомкнута. Тогда имеет место П.— Б. ф.

$$\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}\int_\Gamma \frac{\varphi(t, t_1)}{t_1-t}\,dt_1 = \\ = -\pi^2\varphi(t_0, t_0)+\int_\Gamma dt_1\int_\Gamma \frac{\varphi(t, t_1)}{(t-t_0)(t_1-t)}\,dt. \qquad (1)$$

Формула справедлива и при более общих предположениях относительно линии Г и функции φ (см. [4]). Если $\varphi(t, t_1)=\alpha(t)\,\beta(t_1)$, где $\alpha\in L_p$, $\beta\in L_{p'}$, $p>1$, $p'=p/(p-1)$, то равенство (1) справедливо для почти всех $t_0\in\Gamma$ (см. [5], [6]). Если линия Г замкнута и функция φ зависит от одного аргумента, то равенство (1) принимает вид

$$\frac{1}{(\pi i)^2}\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}\int_\Gamma \frac{\varphi(t_1)}{t_1-t}\,dt_1=\varphi(t_0) \qquad (2)$$

и имеет место для всех или почти всех $t_0\in\Gamma$ в зависимости от того, удовлетворяет φ условию Гёльдера или $\varphi\in L_p$, $p>1$. Равенство (2) также наз. П.— Б. ф.

Построены аналоги формулы (1) в случае кратных интегралов (см. [8]—[11]).

Формула (1) при определенных условиях была получена Г. Харди (см. [7]) ранее А. Пуанкаре (см. [1]) и Ж. Бертрана (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Poincaré H., Leçons de mécanique céleste, t. 3, P., 1910; [2] Bertrand G., «C. r. Acad. sci.», 1921, t. 172, p. 1458—61; [3] его же, «Ann. sci. École norm. supér.», 1923, t. 40, p. 151—258; [4] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [5] Хведелидзе Б. В., «Сообщ. АН Груз. ССР», 1947, т. 8, № 5, с. 283—90; [6] его же, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 7, М., 1975, с. 5—162; [7] Hardy G. H., «Proc. London Math. Soc.», 1909, v. 7, № 2, p. 181—208; [8] Tricomi F., «Math. Z.», 1928, Bd 27, S. 87—133; [9] Giraud G., «C. r. Acad. sci.», 1936, t. 202, № 26, p. 2124—26; [10] его же, «Ann. sci. École norm. supér.», 1934, t. 51, f. 3—4, p. 251—372; [11] Михлин С. Г., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 3, с. 29—112; [12] его же, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962.
Б. В. Хведелидзе.

ПУАССОНА ИНТЕГРАЛ — интегральное представление решения *Дирихле задачи* для *Лапласа уравнения* в простейших областях. Так, П. и. для шара $B_n(0, R)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, радиуса R с центром в начале координат имеет вид

$$u(x)=\int_{S_n(0,\ R)} f(y)\,PB_n(x, y)\,dS_n(y), \qquad (1)$$

где $f(y)$ — данная непрерывная функция на сфере $S_n(0, R)$ радиуса R,

$$PB_n(x, y)=\frac{1}{\sigma_n}\,\frac{R^{n-2}(R^2-|x|^2)}{|x-y|^n}$$

— **ядро Пуассона для шара**, $\sigma_n = n\pi^{n/2}R^{n-1}/\Gamma(n/2+1)$ площадь сферы $S_n(0, R)$, dS_n — элемент площади $S_n(0, R)$.

С. Пуассон [1] пришел к формуле (1) в случае $n=2$ как к интегральной форме записи суммы тригонометрич. ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)\,r^k,$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(y)=f(e^{i\varphi})$, (r, θ) и $(1, \varphi)$ — полярные координаты соответственно точек $x=re^{i\theta}$ и $y=e^{i\varphi}$, когда ядро Пуассона имеет вид

$$PB_2(x, y)=PB_2(re^{i\theta}, e^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} \qquad (2)$$

(о применениях П. и. в теории тригонометрич. рядов см. [3], а также *Абеля — Пуассона метод суммирования*).

П. и. для полупространства

$$R_+^n=\{x=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n:\ x_n>0\}$$

имеет вид

$$u(x)=\int_{R_0^n} f(y)\,PR_+^n(x, y)\,dR_0^n(y), \qquad (3)$$

где

$$R_0^n=\{y=(y_1, \ldots, y_n)\in\mathbb{R}^n:\ y_n=0\},$$

dR_0^n — элемент площади R_0^n, $f(y)$ — ограниченная непрерывная функция на R_0^n,

$$PR_+^n(x, y)=\frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{n\pi^{n/2}}\,\frac{x_n}{|x-y|^n}$$

— **ядро Пуассона для полупространства**. Формулы (1) и (3) суть частные случаи формулы Грина

$$u(x)=\int_{\Gamma} f(y)\,\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y}\,d\Gamma(y), \qquad (4)$$

дающей решение задачи Дирихле для областей $D\subset\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ при помощи производной $dG(x, y)/dn_y$ функции Грина $G(x, y)$ по направлению внутренней нормали к Γ в точке $y\in\Gamma$. Иногда формулу (4) также наз. П. и.

Основные свойства П. и.: 1) $u(x)$ есть гармонич. функция координат точки x; 2) П. и. дает решение задачи Дирихле с граничными данными $f(y)$ в классе (ограниченных) гармонич. функций, т. е. функция $u(x)$, продолженная на границу области значениями $f(y)$, непрерывна в замкнутой области. На этих свойствах основаны применения П. и. в классической математич. физике (см. [4]).

П. и., понимаемый в смысле Лебега, от суммируемой функции $f(y)$, напр. на $S_n(0, R)$, наз. **интегралом Пуассона — Лебега**; интеграл вида

$$u(x)=\int_{S_n(0,\ R)} PB_n(x, y)\,d\mu(y) \qquad (5)$$

по произвольной конечной борелевской мере μ, сосредоточенной на $S_n(0, R)$, наз. **интегралом Пуассона — Стилтьеса**. Класс A гармонич. функций $u(x)$, представимых интегралом (5), характеризуется тем, что любая функция $u(x)\in A$ есть разность двух неотрицательных гармонич. функций в $B_n(0, R)$. Класс функций, представимых интегралом Пуассона — Лебега, есть правильный подкласс класса A, содержащий, в свою очередь, все ограниченные гармонич. функции в $B_n(0, R)$. Для почти всех точек $y\in S_n(0, R)$ по мере Лебега на $S_n(0, R)$ интеграл Пуассона — Стилтьеса (5) имеет угловые граничные значения, совпадающие со значением производной $\mu'(y)$ меры μ по мере Лебега. Теория интегралов Пуассона — Стилтьеса и Пуассона — Лебега строится и для случая полупространства (см. [5]).

Большую роль в теории аналитич. функций многих комплексных переменных и в ее применениях к квантовой теории поля играют различные модификации П. и. Напр., **ядро Пуассона для поликруга**

$$U^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, \ j = 1, \ldots, n\}$$

комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ получается при перемножении ядер (2):

$$PU^n(z, \zeta) = \prod_{j=1}^n PB_2(z_j, \zeta_j).$$

Соответствующий П. и.

$$u(z) = \int_{T^n} f(\zeta)\, PU^n(z, \zeta)\, dT^n(\zeta)$$

по остову поликруга $T^n = \{\zeta = (\zeta, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n : |\zeta_j| = 1, j = 1, \ldots, n\}$ дает кратногармонич. функцию $u(z)$, $z \in U^n$, принимающую на остове T^n непрерывные значения $f(\zeta)$. Рассматриваются также обобщения в виде интегралов Пуассона — Лебега и Пуассона — Стилтьеса (см. [6]).

В квантовой теории поля применяются П. и. для трубчатых областей T^C комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ над выпуклым открытым острым конусом C в пространстве $\mathbb{R}^n$ (с вершиной в начале координат) вида

$$T^C = \mathbb{R}^n + iC = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n :$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in C\}.$$

П. и. для полуплоскости вида (3) при $n=2$ есть частный случай таких П. и. для трубчатых областей. П. и. для ограниченных симметрич. областей пространства $\mathbb{C}^n$ представляется так же, как П. и. для трубчатой области в пространстве матриц. Понимая плотность П. и. f как обобщенную функцию, а сам П. и. — как свертку f с ядром Пуассона, приходят к важному понятию П. и. от обобщенных функций определенных классов (см. [7]—[9]).

Лит.: [1] Poisson S. D., «J. École polytechn.», 1820, t. 11, p. 295—341; 1823, t. 12, p. 404—509; [2] Schwarz H. A., «Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zürich», 1870, Bd 15, S. 113—28; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [4] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [5] Соломенцев Е. Д., Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964, с. 83—100; [6] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974; [7] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976; [8] Хуа Ло-кен, Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, пер. с кит., М., 1959; [9] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974. *Е. Д. Соломенцев.*

ПУАССОНА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — то же, что *Абеля — Пуассона метод суммирования.*

ПУАССОНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(x-t)^2}\, d\alpha(t), \qquad (*)$$

где $\alpha(t)$ — функция ограниченного изменения в каждом конечном интервале, а также преобразование

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{1+(x-t)^2}\, dt,$$

вытекающее из (*), если $\alpha(t)$ — абсолютно непрерывная функция. Пусть

$$\hat{g}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u^{-2}\, [g(x+u) - 2g(x) + g(x-u)]\, du$$

и

$$T_t g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} g^{(2k)}(x) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \hat{g}^{(2k)}(x).$$

Имеют место следующие формулы обращения для П. и.:

$$\frac{\alpha(x+0)+\alpha(x-0)}{2}-\frac{\alpha(+0)+\alpha(-0)}{2}=$$
$$=\lim_{t\to 1-0}\int_0^x T_t f(u)\,du$$

при всех x и

$$\varphi(x)=\lim_{t\to 1-0} T_t f(x)$$

для почти всех x.

Пусть C — выпуклый открытый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле и C^* — сопряженный конус, т. е.

$$C^*=\{\xi:\xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n\geq 0,\ \forall x\in C\}.$$

Функция

$$\mathcal{K}_C(z)=\int_{C^*} e^{i(z_1\xi_1+\ldots+z_n\xi_n)}d\xi$$

наз. **ядром Коши** трубчатой области $T^C=\{z=x+iy;\ x\in\mathbb{R}^n,\ y\in C\}$ П. п. (обобщенной) функции f наз. свертка

$$f*\mathcal{P}_C(x,\ y),\ (x,\ y)\in T^C,$$

где

$$\mathcal{P}_C(x,\ y)=\frac{|K_C(x+iy)|^2}{(2\pi)^n K_C(iy)}$$

— ядро Пуассона трубчатой области T^C (см. [2]).

Лит.: [1] Pollard H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 78, № 2, p. 541—50; [2] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

ПУАССОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k=0,1,2,\ldots$, с вероятностями

$$\mathsf{P}\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

где $\lambda>0$ — параметр. Производящая функция и характеристич. функция П. р. определяются соответственно равенствами

$$\varphi(z)=e^{\lambda(z-1)} \text{ и } f(t)=\exp[\lambda(e^{it}-1)].$$

Математич. ожидание, дисперсия и все семиинварианты более высокого порядка равны λ. Функция распределения П. р.

$$F(x)=\sum_{i=0}^{[x]} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

в точках $k=0,1,2,\ldots$ выражается формулой

$$F(k)=\frac{1}{k!}\int_\lambda^\infty y^k e^{-y}\,dy=1-S_{k+1}(\lambda),$$

где $S_{k+1}(\lambda)$ — значение в точке λ функции *гамма-распределения* с параметром $k+1$ (или формулой $F(k)=1-H_{2k+2}(2\lambda)$, где $H_{2k+2}(2\lambda)$ — значение в точке 2λ функции *«хи-квадрат» распределения* с $2k+2$ степенями свободы), откуда, в частности, следует соотношение

$$\mathsf{P}\{X=k\}=S_k(\lambda)-S_{k+1}(\lambda).$$

Сумма независимых случайных величин $X_1,\ldots,X_n$, имеющих П. р. с параметрами $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, подчиняется П. р. с параметром $\lambda_1+\ldots+\lambda_n$.

Обратно, если сумма X_1+X_2 двух независимых случайных величин X_1 и X_2 имеет П. р., то каждая случайная величина X_1 и X_2 подчинена П. р. Имеются общие необходимые и достаточные условия сходимости распределения сумм независимых случайных величин к П. р. При $\lambda\to\infty$ случайная величина $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ имеет в пределе стандартное нормальное распределение.

П. р. было впервые получено С. Пуассоном (S. Poisson, 1837) при выводе приближенной формулы для биномиального распределения в условиях, когда n (число испытаний) велико, а p (вероятность успеха) мало. См. *Пуассона теорема* 2). П. р. с хорошим приближением описывает многие физич. явления (см. [2], т. I, гл. 6). П. р. является предельным для многих дискретных распределений, таких как, напр., *гипергеометрическое распределение*, *отрицательное биномиальное распределение*, *Пойа распределение*, для распределений, возникающих в задачах о размещении частиц по ячейкам при определенном изменении их параметров. В вероятностных моделях П. р. играет большую роль как точное распределение вероятностей. Природа П. р. как точного распределения вероятностей наиболее полно раскрывается в теории случайных процессов (см. *Пуассоновский процесс*), где П. р. появляется как распределение числа $X(t)$ нек-рых случайных событий, происходящих в течение фиксированного интервала времени t:

$$\mathsf{P}\{X(t)=k\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

(параметр λ — среднее число событий в единицу времени), или, более общо, как распределение случайного числа точек в нек-рой фиксированной области евклидова пространства (параметр распределения пропорционален объему области).

Наряду с П. р., как оно определено выше, рассматривают и так наз. обобщенное или сложное П. р. Так называют распределение вероятностей суммы $X_1+X_2+\ldots+X_\nu$ случайного числа ν одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ (при этом $\nu, X_1, X_2, \ldots$ считают взаимно независимыми, и ν — распределенным по П. р. с параметром λ). Характеристич. функция $\varphi(t)$ обобщенного П. р. равна

$$\varphi(t)=\exp\{\lambda(\psi(t)-1)\},$$

где $\psi(t)$ — характеристич. функция X_ν. Напр., отрицательное биномиальное распределение с параметрами n и p является обобщенным П. р., так как для него можно положить

$$\psi(t)=\frac{1}{\lambda}\log\frac{1}{1-qe^{it}},\quad \lambda=\log\frac{1}{p},\quad q=1-p.$$

Обобщенные П. р. безгранично делимы и каждое безгранично делимое распределение является пределом обобщенных П. р. (может быть «сдвинутых», т. е. с характеристич. функциями вида $\exp(\lambda_n(\psi_n(t)-1-ita_n))$. Вместе с тем все безгранично делимые распределения (и только они) могут быть получены как пределы распределений сумм вида $h_{n1}X_{n1}+\ldots+h_{nk_n}X_{nk_n}-A_n$, где $(X_{n1}, \ldots, X_{nk_n})$ образуют схему серий независимых случайных величин с П. р., $h_{nk_n}>0$ и A_n — действительные числа.

Лит.: [1] Poisson S. D., Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités, P., 1837; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [4] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972.

А. В. Прохоров.

ПУАССОНА СКОБКИ — дифференциальное выражение

$$(u, v)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}-\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right),\qquad (1)$$

зависящее от двух функций $u(q, p)$ и $v(q, p)$ $2n$ переменных $q=(q_1, \ldots, q_n)$, $p=(p_1, \ldots, p_n)$. Введены С. Пуассоном [1]. П. с. — частный случай *Якоби скобок*. П. с. есть билинейная форма от функций u, v, причем

$$(u, v)=-(v, u),$$

и имеет место тождество Якоби (см. [2])

$$(u,\ (v,\ w))+(v,\ (w,\ u))+(w,\ (u,\ v))=0.$$

П. с. применяются в теории дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка и являются удобным математич. аппаратом в аналитич. механике (см. [3]—[5]). Напр., если q, p — канонич. переменные и дано преобразование

$$Q=Q\ (q,\ p),\quad P=P\ (q,\ p), \tag{2}$$

где $Q=(Q_1,\ \ldots,\ Q_n)$, $P=(P_1,\ \ldots,\ P_n)$ и $(n\times n)$-матрицы

$$(P,\ P),\ (Q,\ Q),\ (Q,\ P) \tag{3}$$

составлены из элементов $(P_i,\ P_j)$, $(Q_i,\ Q_j)$, $(Q_i,\ P_j)$ соответственно, то (2) является канонич. преобразованием тогда и только тогда, когда первые две матрицы в (3) нулевые, а третья — единичная.

П. с., вычисленные для случая, когда в (1) u и v замещены какой-либо парой координатных функций от q, p, наз. фундаментальными скобками.

Лит.: [1] Poisson S., «J. École polytechn.», 1809, t. 8, p. 266—344; [2] Jacobi C., «J. reine und angew. Math.», 1862, Bd 60, S. 1—181; [3] Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, пер. с англ., М.— Л., 1937; [4] Лурье А. И., Аналитическая механика, М., 1961; [5] Голдстейн Г., Классическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *А. П. Солдатов.*

ПУАССОНА ТЕОРЕМА — 1) П. т.— предельная теорема теории вероятностей, являющаяся частным случаем *больших чисел закона*. П. т. обобщает *Бернулли теорему* на случай независимых испытаний, вероятность появления в к-рых нек-рого события зависит от номера испытаний (т. н. схема Пуассона). Формулировка П. т. такова: если в последовательности независимых испытаний событие A наступает с вероятностями p_k, зависящими от номера испытания k, $k=1,\ 2,\ \ldots$, μ_n/n — частота A в первых n испытаниях, то при любом $\varepsilon>0$ вероятность неравенства

$$\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{p_1+\ldots+p_n}{n}\right|\leqslant\varepsilon$$

будет стремиться к 1 при $n\to\infty$. Теорема Бернулли следует из П. т. при $p_1=\ldots=p_n$. П. т. была установлена С. Пуассоном [1]. Доказательство П. т. было получено С. Пуассоном из варианта *Лапласа теоремы*. Простое доказательство П. т. было дано П. Л. Чебышевым (1846), к-рому также принадлежит первая общая форма закона больших чисел, включающая П. т. в качестве частного случая.

2) П. т.— предельная теорема теории вероятностей о сходимости *биномиального распределения* к *Пуассона распределению*: если $P_n(m)$ — вероятность того, что в n испытаниях Бернулли нек-рое событие A наступает ровно m раз, причем и вероятность A в каждом испытании равна p, то при больших значениях n и $1/p$ вероятность $P_n\ (m)$ близка к

$$e^{-np}\frac{(np)^m}{m!}.$$

Величина $\lambda=np$ равна среднему значению числа наступлений A в n испытаниях, а последовательность значений $e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^m}{m!}$, $m=0,1,\ 2,\ \ldots$, $\lambda>0$, образует распределение Пуассона. П. т. была установлена С. Пуассоном [1] для схемы испытаний, более общей, чем схема Бернулли, когда вероятности наступления события A могут меняться от испытания к испытанию так, что $p_n\to 0$ при $n\to\infty$. Строгое доказательство П. т. в этом случае основано на рассмотрении схемы серий случайных величин такой, что в n-й серии случайные величины независимы и принимают значения 1 и 0 с вероятностями и p_n $1-p_n$ соответственно. Более удобна форма П. т.

в виде неравенства: если $\lambda=p_1+\ldots+p_n$, $\delta=p_1^2+\ldots+p_n^2$, то при $n\geqslant 2$

$$\left|P_n(m)-e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\right|\leqslant 2\delta.$$

Это неравенство указывает ошибку при замене $P_n(m)$ величиной $e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$. Если $p_1=\ldots=p_n=\lambda/n$, то $\delta=\lambda^2/n$. П. т. и теорема Лапласа дают исчерпывающее представление об асимптотич. поведении биномиального распределения.

Последующие обобщения П. т. создавались в двух основных направлениях. С одной стороны, появились уточнения П. т., основанные на асимптотич. разложениях, с другой — были установлены общие условия сходимости сумм независимых случайных величин к распределению Пуассона.

Лит.: [1] Poisson S.-D., Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile..., P., 1837; [2] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [3] Боровков А. А., Теория вероятностей, М., 1976.

А. В. Прохоров.

ПУАССОНА УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными, к-рому удовлетворяет *объемный потенциал* внутри областей, занятых создающими этот потенциал массами. Для *ньютонова потенциала* в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, и *логарифмического потенциала* в $\mathbb{R}^2$ П. у. имеет вид

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=-\sigma(S^n)\,\rho(x_1,\ldots,x_n),$$

где $\rho=\rho(x_1,\ldots,x_n)$ — плотность распределения масс, $\sigma(S^n)=n\pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$ — площадь единичной сферы S^n в $\mathbb{R}^n$, $\Gamma(n/2+1)$ — значение гамма-функции.

П. у. является основным примером неоднородного уравнения эллиптич. типа. П. у. впервые рассмотрено С. Пуассоном (S. Poisson, 1812).

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [2] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

ПУАССОНА УРАВНЕНИЕ; численные методы решения — методы, заменяющие исходную краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta u(x)\equiv\sum_{r=1}^{d}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_r^2}=f(x),\ x\equiv(x_1,x_2,\ldots,x_d)\quad(1)$$

системой из N линейных алгебраич. уравнений

$$L_N(u_N)=f_N,\quad(2)$$

решение к-рой $u_N\equiv(u_1,u_2,\ldots,u_N)$ позволяет построить нек-рую аппроксимацию $p_N u_N$ для решения исходной задачи, $N\to\infty$.

В зависимости от способа сравнения решений исходной задачи (1) и дискретной задачи (2) определяются такие важнейшие понятия, как погрешность численного метода и оценка погрешности (точности). Другими характеристиками численных методов служат алгебраич. свойства систем (2) (дискретных аналогов краевых задач), связанные с устойчивостью их решений (корректностью дискретных задач) и возможностью отыскания точных или приближенных решений (2) теми или иными прямыми или итерационными методами при выполнении соответствующей вычислительной работы и соответствующих требованиях на объем используемой памяти ЭВМ (см. *Минимизация вычислительной работы*).

Важность численного решения краевых задач для П. у. определяется не только тем, что эти задачи часто возникают в разнообразных областях науки и техники, но и тем, что они нередко служат и средством решения более общих краевых задач как для уравнений и систем уравнений эллиптич. типа, так и различных нестационарных систем. Основными численными методами для решения рассматриваемых краевых задач являются проекционные методы и разностные методы.

П р о е к ц и о н н ы е м е т о д ы включают в себя ряд методов: вариационные, наименьших квадратов, Галеркина, проекционно-разностные, проекционно-сеточные, конечных элементов. Для всех них характерно сведение исходной краевой задачи к операторному уравнению

$$L(u) = f \tag{3}$$

(оператор L действует, напр., из гильбертова пространства H в H) с последующим выбором конечномерных подпространств H_N и F_N ($N \to \infty$); сама задача (3) в этих методах заменяется задачей нахождения $\hat{u}_N \in H_N$ такой, что для любого $v \in F_N$

$$(L\hat{u}_N - f, v)_H = 0.$$

Тогда при заданных базисах в H_N и F_N система (2) является системой относительно коэффициентов разложения $\hat{u}_N$ по базису H_N и за $p_N u_N$ можно принять саму функцию $\hat{u}_N$; погрешность метода естественно определить как $\|u - \hat{u}_N\|_H$. В наиболее важных случаях H является нек-рым подпространством пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$, $H_N = F_N$, и если $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_N(x)$ — базис H_N, то система (2) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_{\Omega} \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i(x)\, dx = \\ = \int_{\Omega} f(x) \psi_i(x)\, dx, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4}$$

Погрешность метода при этом определяется расстоянием в H от решения исходной задачи до подпространства H_N (см. [1], [5]—[9]). В современных вариантах проекционных методов подпространства H_N стремятся выбирать так, чтобы функции $\psi_i(x)$ имели локальные носители и в каждом уравнении (4) лишь конечное число коэффициентов было отлично от нуля. Методы такого типа и наз. п р о е к ц и о н н о - с е т о ч н ы м и м е т о д а м и (проекционно-разностными, вариационно-разностными, конечных элементов) (см. [1], [4], [7]—[9], [11]). Наибольшим достоинством этих методов является их применимость при достаточно сложной геометрии области Ω, в к-рой рассматривается краевая задача. К проекционным методам примыкает и относительно редко применяемый *коллокаций метод*.

Р а з н о с т н ы е (к о н е ч н о р а з н о с т н ы е) м е т о д ы используют аппроксимацию исходной области Ω нек-рой сеточной областью Ω_N, содержащей N узлов сетки, и обычно приводят к системе (2) на основе аппроксимации П. у. и соответствующих граничных условий их разностными (сеточными) аналогами, использующими лишь значения функции в выбранных узлах (см. [1]). Погрешность метода обычно получается сравнением вектора u_N и вектора, получаемого сужением искомого решения на множество рассматриваемых узлов. Корректность и аппроксимация могут изучаться при различных выборах норм, в частности возможно использование принципа максимума; сходимость получается как следствие корректности и аппроксимации (см. [1]—[4]).

Системы (2) могут выводиться и на основе нек-рых дискретных аналогов соответствующих вариационных задач и на основе аппроксимации нек-рых интегральных соотношений (см. [1], [2], [4], [10]); такие подходы несколько сближают эти варианты разностных методов с проекционно-разностными.

М е т о д ы р е ш е н и я с и с т е м с е т о ч н ы х у р а в н е н и й (2) наиболее интенсивно изучались для простейших разностных аналогов на параллелепипедной сетке (см. [1], [9], [11]—[19]). В случае двух переменных и области Ω на плоскости, являющейся прямоугольником, часто применяются для ряда граничных условий прямые методы, позволяющие найти решение (2) при затрате $O(N\ln N)$ арифметич. действий. Это — метод разделения переменных, использующий дискретное преобразование Фурье, и метод редукции (см. [12], [13]); известны и методы с оценкой $O(N)$ действий (см. [14]). При $d\geqslant 2$ и наличии разделения переменных (Ω в этом случае — параллелепипед) решение (2) с точностью $\varepsilon>0$ можно найти при затрате $O(N\ln N|\ln\varepsilon|)$ действий с помощью итерационного метода переменных направлений (см. [1], [12]); итерационные методы с факторизуемыми операторами (метод последовательной сверхрелаксации с симметризацией, неполной матричной факторизации, попеременно-треугольный) позволяют найти решение (2) с точностью ε при затрате $O(N^{1+1/2d}|\ln\varepsilon|)$ действий (см. [12], [15]) для довольно общих ситуаций.

В случае односвязных и многосвязных областей Ω на плоскости, составленных из конечного числа прямоугольников, решение системы (2) с точностью ε может быть найдено при затрате $O(N\ln N+N^{3/4}|\ln\varepsilon|\ \ln N)$ действий на основе разрезов Ω на прямоугольники (см. [15], [16]). Похожая асимптотика для дискретных аналогов задачи Дирихле в случае некоторых областей получена с помощью метода емкостей (см. [17]) и фиктивных неизвестных (см. [18]). Для ряда систем (2), являющихся проекционно-разностными аналогами исходных задач, затраты типа $O(N\ln N|\ln\varepsilon|)$, а иногда и $O(N\ln N)$ (при $\varepsilon\asymp N^{-\alpha}$, $\alpha>0$) достигаются с помощью итерационных методов, использующих эквивалентность операторов по спектру (см. [11], [17], [19]). Использование последовательностей сеток в ряде случаев позволяет получить итерационные методы, дающие решение (2) с точностью $\varepsilon\asymp N^{-\alpha}$, $\alpha>0$, при асимптотически минимальных затратах вычислительной работы (число действий есть $O(N)$) (см., напр., [1], [9], [11], [19]).

Лит.: [1] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977; [2] Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973; [3] Марчук Г. И., Шайдуров В. В., Повышение точности решений разностных схем, М., 1979; [4] Самарский А. А., Андреев В. Б., Разностные методы для эллиптических уравнений, М., 1976; [5] Михлин С. Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966; [6] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [7] Обэн Ж. П., Приближенное решение эллиптических краевых задач, пер. с англ., М., 1977; [8] Стренг Г., Фикс Дж., Теория метода конечных элементов, пер. с англ., М., 1977; [9] Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А., Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, ч. 1—2, Вильнюс, 1973—74 (Дифференциальные уравнения и их применение, в. 5, 8); [10] Самарский А. А., Фрязинов И. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 6, с. 167—97; [11] Дьяконов Е. Г., в кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике, Новосиб., 1978, с. 149—64; [12] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [13] Barker R. J., в кн.: Mathematical models and numerical methods, Warsz., 1978, p. 255—68 (Banach center publications, v. 3); [14] Bank R. E., Rose D. J., «SIAM J. Numer. Anal.», 1975, v. 12, № 4, p. 529—40; [15] Кузнецов Ю. А., в кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике, Новосиб., 1978, с. 178—212; [16] Дьяконов Е. Г., в кн.: Численные методы в математической физике, Новосиб., 1979, с. 45—68; [17] Астраханцев Г. П., в кн.: Разностные и вариационно-разностные методы, Новосиб., 1977, с. 63—72; [18] Капорин И. Е., Николаев Е. С., «Дифференциальные уравнения», 1980, т. 16, № 7, с. 1211—25; [19] Корнеев В. Г., Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности, Л., 1977. *Е. Г. Дьяконов.*

ПУАССОНА ФОРМУЛА — 1) То же, что *Пуассона интеграл.*

2) Формула, дающая интегральное представление решения задачи Коши для волнового уравнения в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\,\Delta u=0,\ t>0,\ M=(x,\ y,\ z),$$
$$-\infty<x,\ y,\ z<+\infty,$$
$$u(M,\ 0)=\varphi(M),\ \frac{\partial u(M,\ 0)}{\partial t}=\psi(M)$$

и имеющая вид

$$u(M, t) = \frac{\partial}{\partial t}\{t\Gamma_{at}(\varphi)\} + t\Gamma_{at}(\psi), \qquad (1)$$

где

$$\Gamma_{at}(\varphi) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_{at}} \varphi(P)\, d\Omega$$

— среднее значение функции φ на сфере S_{at} в пространстве (x, y, z) радиуса at с центром в точке M, $d\Omega$ — элемент площади единичной сферы. В случае неоднородного волнового уравнения в формуле (1) добавляется третье слагаемое (см. [2]).

Из формулы (1) *спуска методом* получаются формулы решения задачи Коши для случая двух (Пуассона формула) и одного (Д'Аламбера формула) пространственного переменного (см. [2]). См. также *Кирхгофа формула*.

3) Иногда П. ф. наз. интегральное представление решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0,\ t > 0,\ M = (x, y, z),$$
$$-\infty < x, y, z < +\infty,$$
$$u(M, 0) = \varphi(M),$$

имеющее вид

$$u(M, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a^2 t})^3}\int_{\mathbb{R}_3} \varphi(P)\, e^{-\frac{|MP|^2}{4a^2 t}}\, d\sigma(P). \qquad (2)$$

Формула (2) непосредственно обобщается на любое число пространственных переменных $n \geqslant 1$.

Лит.: [1] Poisson S. D., «Mém. Acad. sci.», 1818, t. 3, p. 121—76; [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981. *Е. Д. Соломенцев.*

ПУАССОНА ФОРМУЛА СУММИРОВАНИЯ — формула

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(2k\pi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

П. ф. с. имеет место, если, напр., функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$, имеет ограниченное изменение и $2g(x) = g(x+0) + g(x-0)$. П. ф. с. записывается также в виде

$$\sqrt{a}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(ak) = \sqrt{b}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi(bk),$$

где a и b — любые два положительных числа, удовлетворяющие условию $ab = 2\pi$, а $\chi(u)$ есть преобразование Фурье функции g:

$$\chi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-iux}\, dx.$$

Лит.: [1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965; [2] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.— Л., 1948. *И. И. Волков.*

ПУАССОНОВСКИЙ ПОТОК — то же, что *пуассоновский процесс*. Этот термин используют, как правило, в теории массового обслуживания.

ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс $X(t)$ с независимыми приращениями $X(t_2) - X(t_1)$, $t_2 > t_1$, имеющими *Пуассона распределение*. В однородном П. п. для любых $t_2 > t_1$

$$\mathsf{P}\{X(t_2) - X(t_1) = k\} = \frac{\lambda^k (t_2 - t_1)^k}{k!}\, e^{-\lambda(t_2 - t_1)},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Коэффициент $\lambda > 0$ наз. интенсивностью пуассоновского процесса $X(t)$. Траектории П. п. $X(t)$ представляют собой ступенчатые функции со скачками размера 1. Моменты скачков $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ образуют *простейший поток*, описывающий поток требований во многих системах массового обслуживания. Распределения случайных величин $\tau_n - \tau_{n-1}$ независимы при $n=1,2,\ldots$ и имеют показательную плотность $\lambda e^{-\lambda t}$, $t \geqslant 0$.

Одним из свойств П. п. является следующее: условное распределение моментов скачков $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < t$ при $X(t) - X(0) = n$ совпадает с распределением вариационного ряда независимой выборки объема n с равномерным распределением на $[0, t]$. С другой стороны, если $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$ — описанный выше вариационный ряд, то при $n \to \infty$, $t \to \infty$, с $n/t \to \lambda$ получают в пределе распределение скачков П. п.

В неоднородном П. п. интенсивность $\lambda(t)$ зависит от времени t и распределение $X(t_2) - X(t_1)$ определяется формулой

$$\mathsf{P}\{X(t_2) - X(t_1) = k\} = \frac{\left[\int_{t_1}^{t_2} \lambda(u)\,du\right]^k}{k!} e^{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(u)\,du}.$$

При определенных условиях П. п. может быть показан как предел суммы неограниченно возрастающего числа независимых «редких» потоков довольно общего вида. О нек-рых поучительных парадоксах, связанных с П. п., см. [3], т. 2, гл. 1.

Лит.: [1] Боровков А. А., Теория вероятностей, М., 1976; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, 2 изд., пер. с англ., т. 1—2, М., 1967.

Б. А. Севастьянов.

ПУЛЬВЕРИЗАЦИЯ на дифференцируемом многообразии M — векторное поле W на касательном пространстве TM, имеющее в терминах локальных координат $(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$ на TM, естественным образом связанных с локальными координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ на M, компоненты $(v^1, \ldots, v^n, f^1, \ldots, f^n)$, где $f^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$ — функции класса C^1, причем при фиксированных $x^1, \ldots, x^n$ они являются положительно однородными функциями от $v^1, \ldots, v^n$ степени 2 (эти свойства W не зависят от конкретного выбора локальных координат). Определяемая этим полем система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i, \quad \frac{dv^i}{dt} = f^i(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

эквивалентна системе дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = f^i(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n),$$

поэтому П. описывает (причем инвариантным образом, т. е. не зависящим от системы координат) систему таких уравнений на M.

Важнейший случай П.— когда f^i суть многочлены 2-й степени от v^i:

$$f^i = \sum \Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)\, v^j v^k, \quad \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}. \qquad (*)$$

В этом случае Γ^i_{jk} задают на M *аффинную связность* с нулевым тензором кручения. Обратно, для всякой аффинной связности уравнения геодезич. линий задаются нек-рой П. с f^i вида (*) (причем при переходе от связности к пульверизации Γ^i_{jk} симметризуются по нижним индексам). Если поле W — класса C^2, то f^i обязаны иметь вид (*). В общем случае W, каким бы гладким оно ни было вне нулевого сечения расслоения TM, не обязано быть полем класса C^2 возле этого сечения. В такой ситуации иногда говорят об обобщенной П., оставляя термин «П.» только для специального случая (*). Дифференциальные уравнения для геодезических в финслеровой геометрии приводят к обобщенной П.

Можно дать определение П. в инвариантных терминах, пригодное и для банаховых многообразий (см. [1]).

Лит.: [1] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967. *Д. В. Аносов.*

ПУНКТИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X с отмеченной точкой x_0 в нем; пунктированный объект категории топологич. пространств. *М. И. Войцеховский.*

ПУНКТИРОВАННЫЙ ОБЪЕКТ категории C, обладающей финальным объектом,— пара (X, x_0), где $X \in ObC$, x_0 — морфизм финального объекта в X. Важнейший пример: пунктированное топологич. пространство, т. е. пара (X, x_0), где X — топологич. пространство, $x_0 \in X$ — точка, называемая отмеченной. Пунктированные топологич. пространства образуют категорию, морфизмами в к-рой являются отображения, переводящие отмеченную точку в отмеченную. *А. Ф. Харшиладзе.*

ПУНКТИФОРМНЫЙ НАРОСТ — нарост топологич. пространства X в его бикомпактном расширении Y такой, что всякий связный бикомпакт в $Y \setminus X$ состоит из одной точки. *М. И. Войцеховский.*

ПУСТОЕ МНОЖЕСТВО — множество, не содержащее элементов. Обозначения: $\varnothing$, Λ. Иначе, $\varnothing = \{x : x \neq x\}$, при этом вместо $x \neq x$ в этом определении можно было бы использовать любое всегда ложное утверждение. П. м. является подмножеством любого множества. *М. И. Войцеховский.*

ПУСТЫХ ЯЩИКОВ КРИТЕРИЙ — статистический критерий проверки гипотезы H_0 о принадлежности независимой выборки фиксированному распределению. Подробнее, пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимая выборка, взятая из непрерывного распределения $F(x)$. Точки $z_0 = -\infty < z_1 < z_2 < \ldots < z_{N-1} < z_n = \infty$ выбираются так, чтобы $F(z_k) - F(z_{k-1}) = 1/N$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Критерий строится на основе статистики μ_0, равной числу полуинтервалов $(z_{k-1}, z_k]$, в к-рые не попало ни одного наблюдения x_i. Этот критерий имеет следующий вид: если $\mu_0 \leqslant C$, то гипотеза H_0 принимается; если $\mu_0 > C$, то гипотеза H_0 отвергается. Константа C выбирается из условия, что ошибка 1-го рода, т. е. вероятность отвергнуть гипотезу H_0 если она верна, равна заданному значению. Вычисление константы C и расчет мощности П. я. к. при больших n и N производится с помощью предельных теорем в случайных размещениях.

Лит.: [1] Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Случайные размещения, М., 1976. *Б. А. Севастьянов.*

ПУТЕЙ ПРОСТРАНСТВО — пространство E расслоения (E, p, X), называемое расслоением путей, где X — линейно связное пространство с отмеченной точкой *, E — множество *путей* в X, начинающихся в *, p — отображение, сопоставляющее каждому пути его концевую точку; при этом E рассматривается в компактно открытой топологии. Слоем этого расслоения (являющегося *Серра расслоением*) является *петель пространство* ΩX — множество всех *петель* пространства X в точке *. П. п. стягивается по себе в точку, так что гомотопич. группы $\pi_n(E) = 0$, и гомотопич. последовательность расслоения путей вырождается в т. н. изоморфизмы Гуревича:

$$\pi_n(\Omega X) \approx \pi_{n+1}(X).$$

М. И. Войцеховский.

ПУТЬ — непрерывное отображение f отрезка $[0, 1]$ в топологич. пространство X. Точки $f(0)$ и $f(1)$ наз. начальной и концевой точками пути f. П., определенный по f формулой $t \to f(1-t)$, $t \in [0, 1]$, наз. путем, обратным f, и обозначается f^{-1}. П., определяемый по путям f_1 и f_2 с $f_1(1) = f_2(0)$ формулой

$$t \longrightarrow \begin{cases} f(2t), & t \leqslant 1/2, \\ f(2t-1), & t \geqslant 1/2, \end{cases}$$

наз. произведением путей f_1 и f_2 и обозначается $f_1 f_2$. Совокупность всех П. линейно связного пространства X с отмеченной точкой *, начинающихся в ней, образует *путей пространство*. *М. И. Войцеховский.*

ПУЧКОВ ТЕОРИЯ — специальный математич. аппарат, обеспечивающий единый подход для установления связи между локальными и глобальными свойствами топологич. пространств (в частности, геометрич. объектов) и являющийся мощным средством исследования многих задач в современной алгебре, геометрии, топологии и анализе.

На топологич. пространстве X задан предпучок F, если каждому открытому подмножеству $U \subset X$ сопоставлена абелева группа (кольцо, модуль над кольцом и т. п.) $F(U)$ и всякой паре открытых множеств $V \subset U$ — гомоморфизм $F_V^U: F(U) \to F(V)$ такой, что F_U^U — тождественный изоморфизм и $F_W^U = F_W^V F_V^U$ для каждой тройки $W \subset V \subset U$. Другими словами, предпучок — контравариантный функтор из категории открытых подмножеств X и их вложений в категорию групп (колец и т. п.) и их гомоморфизмов. Отображения F_V^U, наз. гомоморфизмами ограничения (напр., если $F(U)$ — функции какого-либо типа, F_V^U — ограничения их на меньшее подмножество). На множестве $\mathcal{F} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$, где $\mathcal{F}_x$ — прямой предел $\lim_{x \in U} F(U)$, следующим образом определена топология: для всякого $U \subset X$ и любого $\sigma \in F(U)$ в $\mathcal{F}$ объявляется открытым множество S, состоящее из тех точек $\mathcal{F}_x$, $x \in U$, к-рые служат образами σ при определении $\mathcal{F}_x$. В этой топологии слои $\mathcal{F}_x$ дискретны и замкнуты в $\mathcal{F}$, определяемые прямыми пределами послойные алгебраич. операции на $\mathcal{F}$ непрерывны, а естественная проекция $p: \mathcal{F} \to X$, при к-рой $\mathcal{F}_x = p^{-1}(x)$, является локальным гомеоморфизмом. Пространство $\mathcal{F}$ вместе с послойными алгебраич. операциями и проекцией p наз. пучком абелевых групп (колец и т. п.) над X, определяемым предпучком F.

Всякое непрерывное отображение $s: U \to \mathcal{F}$, для к-рого $x = ps(x)$, наз. сечением $\mathcal{F}$ над U. Сечение $\mathcal{F}$ над X, определяемое всеми нулями в $\mathcal{F}_x$, наз. нулевым. Если нек-рое сечение s равно нулю в точке x, то s совпадает с нулевым сечением в нек-рой окрестности x, поэтому множество тех точек, в к-рых s отлично от нуля (носитель сечения s), замкнуто в U.

Пусть $\Gamma(U, \mathcal{F})$ (соответственно $F_\Phi(X, \mathcal{F})$, где Φ — нек-рое семейство замкнутых множеств в X, в частности $\Gamma_c(X; \mathcal{F})$) — группа (кольцо, модуль и т. п.) всех сечений над U (соответственно сечений над X с носителями из Φ, в частности сечений с компактными носителями). Соответствие $U \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ является предпучком над X, к-рый наз. предпучком сечений пучка $\mathcal{F}$. Используемое при определении топологии на $\mathcal{F}$ соответствие $\sigma \to s$ определяет также гомоморфизмы $F(U) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$, коммутирующие с ограничениями на $V \subset U$, т. е. гомоморфизм предпучков. Этот гомоморфизм является изоморфизмом при условии, что исходный предпучок F удовлетворяет требованиям: а) если $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$ и $\sigma, \sigma' \in F(U)$, то $\sigma = \sigma'$, если равны ограничения σ, σ' на все U_λ; б) если $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$, а $\sigma_\lambda \in F(U_\lambda)$ — такой набор элементов, что ограничения σ_λ, σ_μ на $U_\lambda \cap \cap U_\mu$ совпадают, то существует $\sigma \in F(U)$, ограничения к-рого на каждое U_λ совпадают с σ_λ. Понятие предпучка, удовлетворяющего этим требованиям, эквивалентно понятию порожденного им пучка, поэтому такие предпучки также нередко наз. пучками.

Пучок вида $X \times G$, где G — нек-рая группа, наз. постоянным и обозначается через G. Локально постоянным наз. пучок, постоянный в достаточно малых окрестностях $x \in X$. Топология таких пучков отделима, если X — отделимое пространство.

В более типичных ситуациях топология $\mathcal{F}$ может быть неотделимой, даже если отделимо X (таков, напр., пучок ростков непрерывных (или дифференцируемых) функций, порожденный предпучком F, где $F(U)$ — непрерывные (дифференцируемые) функции на U; однако пучок ростков аналитич. функций на *многообразии* отделим).

Всякий гомоморфизм предпучков $F \to F'$ приводит к отображению соответствующих пучков $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, к-рое является локальным гомеоморфизмом и гомоморфно отображает слои в слои; такое отображение пучков наз. гомоморфизмом пучков. Стандартным образом определяются моно- и эпиморфизмы. При любом гомоморфизме $f: \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ образ $f(\mathcal{F}')$ есть открытая часть $\mathcal{F}$, замкнутая по отношению к послойным алгебраич. операциям. Всякая часть $\mathcal{F}$, удовлетворяющая этим требованиям, наз. подпучком в $\mathcal{F}$. Факторпучок пучка $\mathcal{F}$ по подпучку $\mathcal{F}'$ определяется как пучок $\mathcal{F}''$, порожденный предпучком $U \to \Gamma(U, \mathcal{F})/\Gamma(U, \mathcal{F}')$; при этом имеется эпиморфизм $\mathcal{F} \to \mathcal{F}''$, причем $\mathcal{F}''_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x$. Для всякого открытого $U \subset X$ через $\mathcal{F}_U$ обозначается подпучок в $\mathcal{F}$, являющийся объединением $p^{-1}(U)$ с нулевым сечением $\mathcal{F}$ над X, а через $\mathcal{F}_{X \setminus U}$ — соответствующий факторпучок (ограничение к-рого на $X \setminus U$ совпадает с ограничением $\mathcal{F}$).

Возможность употреблять по отношению к пучкам над X такие привычные термины, как гомоморфизм, ядро, образ, подпучок, факторпучок и т. д., вкладывая в эти понятия такой же смысл, как в алгебре, позволяет рассматривать их с категорной точки зрения и применять в П. т. конструкции *гомологической алгебры*. Возникающие над X категории пучков родственны таким классическим, как категория абелевых групп или категория модулей; в частности, для пучков определяются прямые суммы, бесконечные прямые произведения, индуктивные пределы и др. понятия.

Аппарат П. т. проник в разнообразные области математики благодаря тому, что определены естественные когомологии $H^*(X, \mathcal{F})$ пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$, причем без каких-либо ограничений на X (что существенно, напр., в алгебраич. геометрии, где возникающие пространства, как правило, неотделимы), и что другие когомологии (в тех или иных конкретных условиях) сводятся к пучковым по крайней мере в тех ситуациях, где их применение оправдано.

Для определения $H^*(X, \mathcal{F})$ сначала строится каноническая резольвента

$$C^*(\mathcal{F}): 0 \to \mathcal{F} \to C^0(\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{F}) \to \ldots,$$

где $C^0(\mathcal{F})$ — пучок, определяемый предпучком F, для к-рого $F(U)$ — группа всех (включая разрывные) сечений $\mathcal{F}$ над U, при этом $\Gamma(U, C^0(\mathcal{F})) = F(U)$, $C^1(\mathcal{F}) = C^0(C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F})$, ..., $C^{p+1}(\mathcal{F}) = C^0(C^p(\mathcal{F})/\mathrm{Im}\, C^{p-1}(\mathcal{F}))$, ... По определению, $H^p(X, \mathcal{F}) = H^p(\Gamma(X, C^*(\mathcal{F}))$ ($H^p_\Phi(X, \mathcal{F})$ получаются заменой символа Γ на Γ_Φ)). При этом сам пучок $\mathcal{F}$ удаляется из $C^*(\mathcal{F})$, так что $H^0_\Phi(X, \mathcal{F}) = \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F})$ (для классич. когомологий $H^0(X, G)$ — группа локально постоянных функций на X со значениями в G). Резольвента $C^*(\mathcal{F})$ — точный ковариантный функтор от $\mathcal{F}$: точной тройке «коэффициентов» $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ отвечает точная тройка резольвент. Функтор Γ_Φ оказывается точным на членах C^p, $p \geqslant 0$, резольвент, поэтому указанным коэффициентам отвечает точная последовательность когомологий

$$\ldots \to H^{p-1}_\Phi(X, \mathcal{F}'') \to H^p_\Phi(X, \mathcal{F}') \to$$
$$\to H^p_\Phi(X, \mathcal{F}) \to H^p_\Phi(X, \mathcal{F}'') \to \ldots,$$

начинающаяся с $0 \to \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}') \to \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}) \to \ldots$. Когомологич. последовательность пары (X, A) отвечает тройке $0 \to \mathcal{F}_{X \setminus A} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_A \to 0$ (A — замкнутое множество).

Когомологии $H^*_\Phi(X, \mathcal{F})$ обладают следующим свойством «универсальности», раскрывающим их значение: для любой другой резольвенты $\mathcal{L}^*$ (т. е. начинающейся с $\mathcal{F}$ точной последовательности пучков $\mathcal{L}^q$) имеется естественный гомоморфизм «сравнения» $H^p(\Gamma_\Phi(X, \mathcal{L}^*)) \to H^p_\Phi(X, \mathcal{F})$, для описания к-рого в терминах $H^p_\Phi(X, \mathcal{L}^q)$ применяются спектральные последовательности. Важен случай, когда пучки резольвенты Ф-ацикличны, т. е. когда $H^p_\Phi(X, \mathcal{L}^q)=0$ при $p \geqslant 1$: в этом случае указанный гомоморфизм есть изоморфизм. Основными примерами ацикличных пучков являются вялые пучки (для всех $U \subset X$ отображения $\Gamma(X, \mathcal{L}) \to \Gamma(U, \mathcal{L})$ эпиморфны) и мягкие пучки (любое сечение над замкнутым множеством продолжается до сечения над всем X). Канонич. резольвента состоит из вялых пучков. Если X — паракомпактное пространство, то всякий вялый пучок является также и мягким.

Свойство универсальности позволяет сравнивать с пучковыми (а следовательно, и между собой) когомологии, возникающие в более конкретных ситуациях, определять для них те естественные границы, в к-рых их применение эффективно, а также применять методы П. т. для решения конкретных задач. Напр., когомологии Александрова — Чеха можно определить с помощью коцепей, получающихся из коцепей специально подобранной системы открытых покрытий переходом к прямому пределу. Эти коцепи оказываются сечениями пучков ростков коцепей (определяемых аналогично пучкам ростков функций), составляющих резольвенту группы (или даже пучка) коэффициентов, к-рая оказывается мягкой, если пространство паракомпактно. Таким образом, для паракомпактных пространств когомологии Александрова — Чеха совпадают с пучковыми. Аналогичный вывод имеет место для пространств Зариского (в частности, для алгебраич. многообразий). Сечениями пучков резольвенты оказываются и коцепи Александера — Спеньера, причем резольвента состоит из мягких пучков, если X паракомпактно, в частности, в этом случае когомологии Александера — Спеньера и Александрова — Чеха естественно изоморфны. В случае сингулярных когомологий отождествление коцепей, совпадающих друг с другом на сингулярных симплексах мелкости (произвольных) открытых покрытий, приводит к т. н. локализованным коцепям (дающим те же когомологии), к-рые являются сечениями пучков, определяемых предпучками обычных сингулярных коцепей. Пучки оказываются мягкими, если X паракомпактно (а если X наследственно паракомпактно, то даже вялыми), но образуют резольвенту при дополнительном требовании, чтобы X было слабо локально стягиваемым (в каждой окрестности U каждой точки $x \in X$ найдется меньшая окрестность, стягиваемая в точку внутри U). Классич. примером является теорема де Рама: когомологии комплекса дифференциальных форм дифференцируемого многообразия совпадают с обычными когомологиями с коэффициентами в поле $\mathbb{R}$ действительных чисел (пучки ростков дифференциальных форм являются мягкими и образуют резольвенту $\mathbb{R}$: вблизи каждой точки каждая замкнутая дифференциальная форма является точной).

Имеются также резольвенты, отвечающие любым открытым или локально конечным замкнутым покрытиям и позволяющие сравнивать когомологии X с когомологиями покрытий (спектральные последовательности покрытий). В частности, изоморфизм обеспечивается условием $H^q=0$ при $q \geqslant 1$ для всех элементов покрытия и их конечных пересечений (теорема Лере). Переход к прямому пределу по открытым покрытиям дает изоморфизм когомологий Александрова — Чеха $\check{H}^*$ с пучковыми и для непаракомпактных X при условии, что в X имеется достаточно много мелких открытых множеств U, для к-рых $\check{H}^q(U, \mathcal{F})=0$ при $q \geqslant 1$ (теорема Картана). Это означает, что применяемые в алгебраич. геометрии когомологии $\check{H}^*$ с коэффициентами в когерентных пучках также изоморфны стандартным пучковым когомологиям H^*.

Общие конструкции, обеспечивающие гомоморфизм сравнения, позволяют также сравнивать когомологии $H^p(X, \mathcal{H}^q)$ с $H^*(\Gamma(X, \mathcal{L}^*))$ [аналогично $H^p_\Phi(X, \mathcal{H}^q)$ с $H^*(\Gamma_\Phi(X, \mathcal{L}^*))$] в случае, когда $\mathcal{L}^*$ — любой дифференциальный пучок (т. е. пучок, в к-ром для любого q композиция $\mathcal{L}^q \to \mathcal{L}^{q+2}$ равна нулю) с ацикличными $\mathcal{L}^q$, где $\mathcal{H}^q$ — производные пучки от $\mathcal{L}^*$ (являющиеся факторпучками ядер по образам в каждой размерности q). Соответствующие этому спектральные последовательности имеют много различных применений. При этом, если $\mathcal{H}^q=0$ при $q \geqslant 1$, то $H^*(\Gamma(X, \mathcal{L}^*))=H^*(X, \mathcal{H}^0)$. Напр., если в качестве $\mathcal{L}^*$ взять пучок цепей $\mathcal{C}_*$ (оператор границы понижает размерность на единицу, $\Gamma(U, \mathcal{C}_*)$ — цепи пары $(X, X\setminus U)$, слои $\mathcal{H}^x_q=\varinjlim_{x\in U} H_q(X, X\setminus U)=H_q(X, X\setminus x))$, то получается зависимость гомологий $H^\Phi_*(X, G)$ от всевозможных $H^p_\Phi(X, \mathcal{H}_q)$. На многообразии $\mathcal{H}_q=0$ при $q<n=\dim X$ и $H^\Phi_p(X, G)=H^{n-p}_\Phi(X, \mathcal{H}_n)$, т. е. имеет место *Пуанкаре двойственность*. Если A — открытое или замкнутое подмножество локально компактного X, то гомологии A определяются теми сечениями $\mathcal{C}_*$, носители к-рых содержатся в A, а гомологии пары (X, A) — сечениями ограничения $\mathcal{C}_*$ на $X\setminus A$. Наоборот (и это — тоже одно из проявлений двойственности Пуанкаре), если $\mathcal{C}^*$ — любая вялая резольвента для когомологий, то ограничение $\mathcal{C}^*$ на $X\setminus A$ определяет когомологии $X\setminus A$, а сечения $\mathcal{C}^*$ с носителями в A — когомологии пары $(X, X\setminus A)$. Пучки $\mathcal{C}_*$ вялые, и в случае многообразия гомологич. последовательность пары (X, A) совпадает с точностью до обратной нумерации с когомологич. последовательностью пары $(X, X\setminus A)$. Это означает, что двойственности в многообразиях, подобные *Лефшеца двойственности* $H_p(X, U, G)=H^{n-p}(X\setminus U, \mathcal{H}_n)$, являются частными случаями двойственности Пуанкаре. Оказывается, что соотношения двойственности, не укладывающиеся в эту схему, являются следствиями двойственности Пуанкаре и ацикличности многообразия в нек-рых размерностях.

Такая же ситуация возникает в случае непрерывного отображения $f: X \to Y$. Резольвента для когомологий X определяет на Y нек-рый дифференциальный пучок $\mathcal{L}^*$, для к-рого слои $\mathcal{H}^q_y$ суть прямые пределы когомологий $H^q(f^{-1}(U), \mathcal{F})$ по окрестностям U точек y (а для замкнутых отображений $\mathcal{H}^q_y=H^q(f^{-1}(y), \mathcal{F})$), причем $H^*(X, \mathcal{F})=H^*(\Gamma(Y, \mathcal{L}^*))$. Возникающая зависимость $H^*(X, \mathcal{F})$ от $H^p(Y, \mathcal{H}^q)$ описывается спектральной последовательностью Лере отображения f (частным случаем к-рой является спектральная последовательность *Серра расслоения*). Обращение в нуль $\mathcal{H}^q$ отвечает ацикличным отображениям, обеспечивая изоморфизмы когомологий X и Y с соответствующими коэффициентами (теорема Вьеториса и ее обобщения). Упоминавшиеся выше общие конструкции дают также спектральную последовательность отображения, учитывающую (наряду с их когомологич. структурой) степень несвязности прообразов точек, к-рая особенно эффективна для нульмерных или конечнократных отображений (в случае накрытий она превращается в спектральную последовательность Картана). Имеются также специальные спектральные последовательности в категориях G-пространств (пространств, на к-рых определено действие группы G).

В пучковых когомологиях естественным образом определяется мультипликативная структура. Существование специальных вялых резольвент, отображения внутри к-рых определяются нек-рой полусимплициальной структурой, позволяет дать явные формулы для умножения коцепей, аналогичные обычным. Одновременно это дает возможность определить в П. т. и др. когомологич. операции.

Аппарат П. т. находит много применений всюду, где существенно использование абстрактных гомологич. методов: в топологии (гомологич. и когомологич. размерность, локальные гомологии и двойственность, структура различных классов непрерывных отображений, в том числе вложений на плотные подмножества, в частности бикомпактификаций, и т. п.), в теории аналитич. многообразий [гомологии и когомологии с коэффициентами в когерентных аналитич. пучках и их приложения, когомологии и аналитические дифференциальные формы, гомологии и аналитич. потоки (аналог теоремы де Рама и т. п.)], а также в абстрактной алгебраич. геометрии (когомологии аффинных, проективных и полных алгебраич. многообразий с коэффициентами в когерентных алгебраич. пучках, алгебраич. двойственность Серра, алгебраическая (комбинаторная) размерность и др.).

Нек-рые основные идеи П. т. и спектральных последовательностей появились в работе Ж. Лере (J. Leray, 1945 и позже) в связи с изучением гомологич. свойств непрерывных отображений локально компактных пространств, к-рым было дано также определение когомологий (с компактными носителями) с коэффициентами в пучке. Довольно полное изложение теории пучков с применением резольвент было дано позже А. Картаном (H. Cartan). Большое влияние на развитие П. т. оказали данное А. Вейлем (A. Weil, 1947) доказательство теоремы де Рама и работы Ж. П. Серра (J.-P. Serre, нач. 50-х гг.) по алгебраич. многообразиям. Когомологии с коэффициентами в пучке определялись первоначально способом Александрова — Чеха. Завершенный вид П. т. приобрела в конце 50-х гг. в работах А. Гротендика (A. Grothendieck) и Р. Годмана (R. Godement), в к-рых была достигнута максимальная общность, а методы значительно упрощены. В частности, было показано, что в категории пучков над X имеется образующая (т. е. пучок J, допускающий ненулевые гомоморфизмы в любой ненулевой пучок; для пучков абелевых групп $J=\sum_{U\subset X}\mathbb{Z}_U$), так что каждый пучок вкладывается в инъективный (т е о р е м а Г р о т е н д и к а). В этом состоит причина формальной аналогии между теорией когомологий с коэффициентами в пучках и теорией производных от функторов в категории модулей: в категории пучков над X «достаточно» инъективных объектов (хотя, как правило, мало проективных), и поэтому можно свободно применять все соответствующие средства гомологич. алгебры, в частности определять когомологии $H^*_\Phi(X, \mathcal{F})$ (без каких-либо ограничений на X) как производные точного слева функтора $\Gamma_\Phi(X, \mathcal{F})$ (и даже как $\mathrm{Ext}^*(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F})$). Это же проливает свет и на общую природу, напр., таких понятий, как когомологич. размерность (над $\mathbb{Z}$) пространства, алгебраич. размерность многообразия и глобальная размерность кольца. А. Гротендиком дано описание спектральной последовательности для функтора $E\times t$, необходимой в алгебраич. геометрии. Более простой способ конструирования инъективных пучков был найден Р. Годеманом. Он показал также, что для построения теории когомологий вполне достаточно пользоваться предложенной им канонической вялой резольвентой, к-рая с точки зрения гомологич. алгебры оказывается просто одной из ацикличных резольвент пучка. Р. Годеман первым стал применять вялые и мягкие пучки, оказывающиеся ацикличными в том же смысле (мягкие ацикличны лишь при условии паракомпактности X, чем объясняется их использование преимущественно в топологии).

Лит.: [1] Bredon G. E., Sheaf theory, N. Y., 1967; [2] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [3] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [4] Swan R., The theory of sheaves, Chi.— L., 1964.

Е. Г. Скляренко.

ПУЧОК — 1) П. — *предпучок* F такой, что для всякого объединения $U=\cup_\lambda U_\lambda$ открытых подмножеств U_λ топологич. пространства X выполнены следующие условия: 1) если ограничения на каждое U_λ элементов s и s' из $F(U)$ совпадают, то $s'=s''$; 2) если $s_\lambda \in F(U_\lambda)$ таковы, что для любой пары индексов λ, μ ограничения s_λ и s_μ на $U_\lambda \cap U_\mu$ совпадают, то существует элемент $s \in F(U)$, ограничения к-рого на все U_λ совпадают с s_λ. Всякий П. на X изоморфен П. *ростков* непрерывных сечений некоторого накрывающего пространства $p: E \to X$ над X, к-рое определяется однозначно с точностью до изоморфизма (под накрывающим пространством понимается непрерывное отображение E на X, являющееся локальным гомеоморфизмом), поэтому под П. обычно понимается также и само накрывающее отображение $p: E \to X$ (см. *Пучков теория*).

Е. Г. Скляренко.

2) П. — однопараметрическое семейство линий на плоскости или поверхностей в пространстве, линейно зависящее от параметра. Пусть F_1 и F_2 — функции двух переменных, непропорциональные друг другу. Семейство линий на плоскости, определяемых уравнением

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$$

при всевозможных значениях параметров λ_1 и λ_2 (кроме $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$), представляет собой П. (фактически П. зависит от одного параметра $\lambda_1:\lambda_2$). Аналогично записывается уравнение П. поверхностей в пространстве. Два уравнения $F_1=0$, $F_2=0$ дают два элемента П. (две линии или две поверхности), к-рые определяют весь П. Каждые два элемента П. пересекаются по одному и тому же множеству точек — н о с и т е л ю. Носитель П. может содержать как действительные, так и мнимые точки. Если исходные кривые П. являются алгебраич. кривыми порядков m и n, то носитель состоит из mn точек (действительных или мнимых, собственных или несобственных).

П у ч о к п р я м ы х — множество всех прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих через фиксированную точку (с о б с т в е н н ы й П.) или параллельных фиксированной прямой (н е с о б с т в е н н ы й П.). Уравнение П. прямых имеет вид

$$\lambda_1 (A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2 (A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

П у ч о к п л о с к о с т е й — множество всех плоскостей, проходящих через фиксированную прямую (с о б с т в е н н ы й П.) или параллельных нек-рой фиксированной плоскости (н е с о б с т в е н н ы й П.). Уравнение П. плоскостей имеет вид

$$\lambda_1 (A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2 (A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

П у ч о к о к р у ж н о с т е й — однопараметрическое семейство окружностей, линейно зависящее от параметра. П. окружностей содержит окружности и одну прямую. Носителем (с о б с т в е н н о г о) П. окружностей являются две круговые точки и две собственные точки a и b. Если $a \neq b$, то П. окружностей можно определить как множество окружностей (считая прямые окружностями бесконечного радиуса), проходящих через точки a и b; если $a=b$, нужно дополнительно требовать, чтобы окружности касались друг друга в точке a. Если a и b действительные и различные, П.

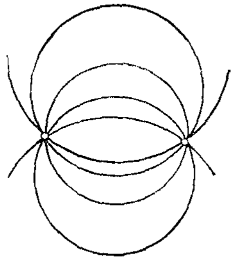


Рис. 1.

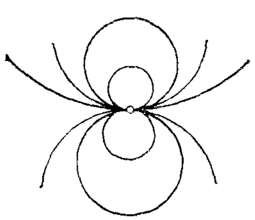


Рис. 2.

окружностей наз. эллиптическим (рис. 1), если *совпавшие* (*действительные*) — параболическим (рис. 2), если мнимые (различные) — гиперболическим (рис. 3). Несобственным П. окружностей наз. совокупность концентрических окружностей (рис. 4).

У каждого собственного П. окружностей существует так наз. *радикальная ось* — прямая, каждая точка к-рой

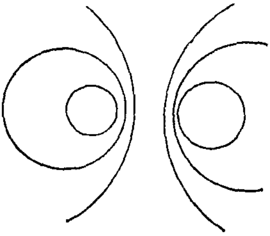


Рис. 3.

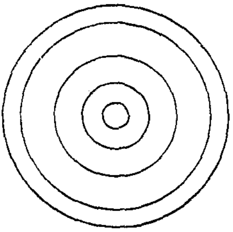


Рис. 4.

имеет одинаковую степень точки (различную для различных точек) относительно всех окружностей П. Радикальная ось эллиптического П. проходит через общие точки окружностей; параболического — является их общей касательной; гиперболического — линией центров двух окружностей, *ортогональных ко всем окружностям* П. Центры окружностей П. лежат на прямой, перпендикулярной радикальной оси. Точка пересечения *линии центров П. и его радикальной оси наз.* центром П. Степень центра П. относительно любой окружности П. одинакова и наз. степенью П. Если ось абсцисс является линией центров окружностей П., а ось ординат — радикальной осью П., то уравнение произвольной окружности П. имеет вид

$$x^2+y^2-2xt+p=0,$$

где t — параметр, определяющий данную окружность, p — степень П. Для эллиптического П. $p<0$, для параболического П. $p=0$, для гиперболического $p>0$ (степень несобственного П. можно считать бесконечной).

Окружности, ортогональные всем окружностям данного П., сами образуют П.; про этот П. говорят, что он сопряжен с данным. Эллиптический П. сопряжен с гиперболическим, параболический — с параболическим.

Любой П. окружностей является пересечением двух *связок* окружностей.

Пучок сфер — однопараметрическое семейство сфер, линейно зависящее от параметра. Любые две сферы П. пересекаются по нек-рой окружности действительного, нулевого или мнимого радиуса. В первом случае П. сфер наз. *эллиптическим*, он состоит из всех сфер, проходящих через данную окружность; во втором — *параболическим*, П. состоит из всех сфер, касающихся друг друга в общей точке; в третьем — *гиперболическим*, П. состоит из всех сфер, ортогональных к нек-рым трем данным сферам, пересекающимся в двух точках. У П. сфер имеется так наз. *радикальная плоскость*, каждая точка к-рой имеет одинаковую степень (различную для разных точек) относительно сфер П.; центры всех сфер П. лежат на одной прямой, перпендикулярной радикальной плоскости.

П. сфер является пересечением трех сетей сфер, центры к-рых не лежат на одной прямой.

В проективной геометрии *алгебраическим пучком прямых* наз. множество всех прямых проективной плоскости, координаты u_1, u_2, u_3 к-рых удовлетворяют уравнению

$$F(u_1, u_2, u_3)=0,$$

где $F(u_1, u_2, u_3)$ — не равный тождественно нулю многочлен, однородный относительно переменных u_1, u_2, u_3; степень многочлена F наз. *степенью* (или *порядком*) П. прямых. Алгебраический П. прямых *первого порядка* задается уравнением

$$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0$$

и представляет собой множество всех прямых, проходящих через точку с координатами (a_1, a_2, a_3).

Алгебраический П. прямых *второго порядка* задается уравнением

$$f_{11}u_1^2+f_{22}u_2^2+f_{33}u_3^2+2f_{12}u_1u_2+2f_{13}u_1u_3+$$
$$+2f_{23}u_2u_3=0, \quad f_{ij}=f_{ji}, \ i, \ j=1, 2, 3,$$

где f_{ij} — действительные числа, среди к-рых по крайней мере одно отлично от нуля. Если дискриминант $\delta=$ $=|f_{ij}|$, $i=1, 2, 3$, отличен от нуля, П. прямых второго порядка наз. *невырожденным*, если $\delta=0$ — *вырожденным*. Каждый невырожденный П. второго порядка является множеством касательных к невырожденной линии второго порядка; каждая невырожденная линия второго порядка является огибающей нек-рого невырожденного П. второго порядка.

Лит.: [1] Постников М. М., Аналитическая геометрия, М., 1973. *А. Б. Иванов.*

ПФАФФА ПРОБЛЕМА — проблема описания интегральных многообразий максимальной размерности для системы *Пфаффа уравнений*

$$\theta^\alpha=0, \quad \alpha=1, \ldots, q, \tag{*}$$

задаваемой набором из q дифференциальных 1-форм в нек-рой области $M\subset\mathbb{R}^n$ (или на нек-ром многообразии), линейно независимых в каждой точке. Подмногообразие $N\subset M$ наз. *интегральным многообразием* системы (*), если ограничение форм θ^α на N тождественно равно нулю. П. п. была поставлена И. Пфаффом (J. Pfaff, 1814).

С геометрич. точки зрения система (*) определяет $(n-q)$-мерное распределение (*Пфаффа структуру*) в M, т. е. поле

$$x\longmapsto P_x=\{y\in\mathbb{R}^n \mid \theta_x^\alpha(y)=0\}, \quad x\in M,$$

$(n-q)$-мерных подпространств, а П. п. состоит в описании подмногообразий максимальной возможной размерности, касающихся этого поля. Важность П. п. определяется тем, что интегрирование произвольного уравнения с частными производными может быть сведено к (соответствующим образом уточненной) П. п. Напр., интегрирование уравнения 1-го порядка

$$F(x^i, u, \partial u/\partial x^i)=0$$

сводится к П. п. для уравнения Пфаффа $\theta \equiv du - p_i dx^i = 0$ на многообразии (вообще говоря, с особенностями), задаваемом в пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ уравнением

$$F(x^i, u, p_i) = 0.$$

Вполне интегрируемая система Пфаффа (а также одно уравнение Пфаффа постоянного класса) локально может быть приведена к простому канонич. виду. В этих случаях решение П. п. сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем случае (в классе гладких функций) П. п. не решена (1983). В аналитич. случае П. п. была решена Э. Картаном (E. Cartan) в его теории систем в инволюции. Формулировка основной теоремы Картана основана на понятии регулярного интегрального элемента. k-мерное подпространство E_k касательного пространства T_xM наз. k-мерным интегральным элементом системы (*), если

$$\theta^\alpha(E_k) = 0,\ d\theta^\alpha(E_k \wedge E_k) = 0,\ \alpha = 1, \ldots, q.$$

Подпространство $S(E_k)$ кокасательного пространства T_x^*M, порожденное 1-формами $\theta^\alpha|_x$, $E_k \rfloor d\theta^\alpha|_x$, где $\rfloor$ — операция внутреннего умножения, наз. полярной системой интегрального элемента E_k. Интегральный элемент E_k наз. регулярным, если существует такой флаг $E_k \supset E_{k+1} \supset \ldots \supset E_1 \supset 0$, для к-рого

$$\dim E_i = i, \quad \dim S(E_i) = \max \dim S(E_i'),$$

где максимум берется по всем i-мерным интегральным элементам E_i', содержащим E_{i-1}. Теорема Картана утверждает следующее: пусть N есть k-мерное интегральное многообразие системы Пфаффа с аналитич. коэффициентами и для нек-рого $x \in N$ касательное пространство T_xN является регулярным интегральным элементом. Тогда для любого интегрального элемента $E_{k+1} \supset T_xN$ размерности $k+1$ существует в нек-рой окрестности точки x интегральное многообразие $\tilde{N}$, локально содержащее N, для к-рого $E_{k+1} = T_x\tilde{N}$. Теорема Картана была обобщена на произвольные дифференциальные системы, задаваемые идеалами в алгебре дифференциальных форм на многообразии (теорема Картана — Кэлера).

Лит.: [1] Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, пер. с франц., М., 1962; [2] его же, Интегральные инварианты, пер. с франц., М.— Л., 1940; [3] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.— Л., 1947; [4] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970.
Д. В. Алексеевский.

ПФАФФА СИСТЕМА — система *Пфаффа уравнений* (см. также *Пфаффа структура*).

ПФАФФА СТРУКТУРА, распределение,— векторное подрасслоение $\pi: P \to M$ касательного расслоения $TM \to M$ многообразия M. Размерность p слоев $P_x = \pi^{-1}(x)$ наз. размерностью П. с. π, а число $q = n - p$ (где $n = \dim M$) — рангом, или коразмерностью. П. с. размерности p можно рассматривать как поле p-мерных подпространств $x \mapsto P_x$ на многообразии M.

Обычно П. с. задают системой *Пфаффа уравнений* $\theta^1 = \ldots = \theta^q = 0$ или, двойственным образом, указанием векторных полей, значения к-рых в произвольной точке $x \in M$ образуют базис подпространства P_x.

Подмногообразие $N \subset M$ наз. интегральным многообразием П. с., если $T_xN \subset P_x$ для всех $x \in N$. П. с. наз. вполне интегрируемой, если через каждую точку $x \in M$ проходит p-мерное интегральное многообразие или, что эквивалентно, если локально она может быть задана системой уравнений Пфаффа $dy^1 = \ldots = dy^q = 0$, где $y^1, \ldots, y^n$ — нек-рые локальные координаты в M. Это понятие соответствует понятию вполне интегрируемой системы уравнений Пфаффа. Пусть $\Gamma(\pi)$ — пространство сечений расслоения $\pi: P \to M$, а $L(\pi)$ — пространство дифференциальных 1-форм, обращающихся в нуль на P. Согласно теореме Фробениуса, П. с. π вполне интегрируема тогда и только тогда, когда пространство $\Gamma(\pi)$ является подалгеброй алгебры Ли $D(M)$ векторных полей на M или, что эквивалентно, если идеал, порожденный пространством $L(\pi)$ в алгебре $\Omega(M)$ дифференциальных форм, замкнут относительно оператора внешнего дифференцирования.

Пусть $A(\pi)$ — алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов П. с. π, т. е. множество векторных полей $X \in \Gamma(\pi)$, для к-рых $[X, \Gamma(\pi)] \subset \Gamma(\pi)$. Алгебра $A(\pi)$ есть подалгебра алгебры Ли $D(M)$ и одновременно модуль над кольцом $F(M)$ гладких функций на M. Фактормодуль $\Gamma(\pi)/A(\pi)$ характеризует степень неинтегрируемости П. с.

П. с. π наз. регулярной, если размерность пространства $A_p(\pi) = \{X_p, X \in A(\pi)\}$ не зависит от $p \in M$. В этом случае $A(\pi)$ есть пространство сечений вполне интегрируемой П. с. $\pi': P' = \bigcup_{p \in M} A_p(\pi) \to M$, к-рая наз. характеристической системой П. с. π. Ранг структуры π' наз. классом П. с. π, он равен наименьшему возможному числу координат локальной системы координат, через к-рые выражаются все 1-формы из $L(\pi)$. Класс регулярной П. с. ранга 1 (т. е. поля гиперплоскостей) нечетен и образует полную систему локальных инвариантов: локально в нек-рой системе координат y^i П. с. класса $2k+1$ задается уравнением Пфаффа

$$dy^1 + y^2\,dy^3 + \ldots + y^{2k}\,dy^{2k+1} = 0.$$

Другим важным локальным инвариантом П. с. является ее род, указывающий размерность максимальных интегральных неособых многообразий (см. *Пфаффа проблема*). Полная система локальных инвариантов П. с. размерности p при $1 < p < n-1$ неизвестна.

П. с. можно рассматривать как G-структуру бесконечного типа, где G — группа линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, оставляющих инвариантной p-мерную координатную плоскость. Ее структурная функция 1-го порядка соответствует $F(M)$-билинейному отображению $c: \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \to D(M)/\Gamma(\pi)$, к-рое определяется коммутированием векторных полей. Пространство $A(\pi)$ совпадает с ядром векторнозначной билинейной формы c.

Лит. см. при ст. *Пфаффа проблема*. *Д. В. Алексеевский.*

ПФАФФА УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$\omega \equiv a_1(x)\,dx_1 + \ \ldots \ + a_n(x)\,dx_n = 0,\ n \geqslant 3, \qquad (1)$$

где $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, ω — дифференциальная 1-форма, функции $a_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, действительнозначны. Пусть $a_j(x) \in C^1(D)$ и векторное поле $a(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$ не имеет критич. точек в области D.

Многообразие $M^k \subset \mathbb{R}^n$ размерности $k \geqslant 1$ и класса C^1 наз. интегральным многообразием П. у. (1), если $\omega \equiv 0$ на M^k. П. у. наз. вполне интегрируемым, если через каждую точку области D проходит интегральное многообразие максимально возможной размерности $n-1$ и притом только одно.

Теорема Фробениуса: для того чтобы П. у. (1) было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно выполнение условия

$$d\omega \wedge \omega \equiv 0. \qquad (2)$$

В этом случае интегрирование П. у. сводится к интегрированию семейства систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В трехмерном евклидовом пространстве П. у. имеет вид

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \qquad (3)$$

где P, Q, R — функции от x, y, z, а условие (2) полной интегрируемости принимает вид

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0 \qquad (4)$$

или

$$(\operatorname{rot} F,\ F)=0,\ \text{где}\quad F=(P,\ Q,\ R).$$

В этом случае существуют гладкие функции μ, U $(\mu\neq 0)$ такие, что

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz\equiv\mu\,dU,$$

и интегральные поверхности П. у. (3) задаются уравнениями $U(x,\ y,\ z)=\text{const}$. Если F есть нек-рое силовое поле, то поле $\mu^{-1}F$ имеет потенциальную функцию, равную U. Если П. у. (3) не вполне интегрируемо, то оно не имеет интегральных поверхностей, но может иметь интегральные кривые. Если заданы произвольные функции $x=x(t)$, $y=y(t)$, то (3) будет обыкновенным дифференциальным уравнением для z и кривая $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ будет интегральной.

Постановка задачи об исследовании уравнения (1) для произвольного $n\geqslant 3$ и о приведении дифференциальной 1-формы ω к канонич. виду принадлежит И. Пфаффу [1]. Условие (4) впервые было получено Л. Эйлером в 1755 (см. [2] гл. IX).

Локально любое П. у. с помощью гладкой замены переменных приводится к виду

$$dy_0-\sum\nolimits_{j=1}^{p} z_j\,dy_j=0, \qquad (5)$$

где $y_0,\ldots,y_p$, $z_1,\ldots,z_p$ — новые независимые переменные ($2p+1\leqslant n$, $p\geqslant 0$). Число $2p+1$ наз. **классом** П. у.; здесь p — наибольшее число такое, что дифференциальная форма $\omega\wedge d\omega\wedge\ \ldots\ \wedge d\omega$ степени $2p+1$ не равна тождественно нулю. При $p=0$ П. у. вполне интегрируемо. Функции $y_0(x),\ldots,y_p(x)$ наз. **первыми интегралами** П. у. (5), а его интегральные многообразия максимально возможной размерности $n-p-1$ задаются уравнениями

$$y_0(x)=c_0,\ \ldots,\ y_p(x)=c_p.$$

Системой Пфаффа наз. система уравнений вида

$$\omega_1=0,\ \ldots,\ \omega_k=0,\quad k<n, \qquad (6)$$

где $x\in D\subset\mathbb{R}^n$, ω_j — дифференциальные 1-формы:

$$\omega_j=\sum\nolimits_{k=1}^{n}\omega_{jk}(x)\,dx_k,\ j=1,\ \ldots,\ k.$$

Ранг r матрицы $\|\omega_{jk}(x)\|$ наз. **рангом системы Пфаффа** в точке x. Система Пфаффа наз. **вполне интегрируемой**, если через каждую точку $x\in U$ проходит интегральное многообразие максимально возможной размерности $n-r$ и притом только одно.

Теорема Фробениуса: для того чтобы система **Пфаффа** (6) была вполне интегрируемой, необходимо и достаточно выполнение условий

$$d\omega_j\wedge\omega_1\wedge\ \ldots\ \wedge\omega_k=0,\quad j=1,\ \ldots,\ k.$$

Задача об интегрировании любой конечной нелинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными эквивалентна задаче об интегрировании нек-рой системы Пфаффа (см. [6]).

Получен ряд результатов по аналитич. теории систем Пфаффа. Рассматривалась вполне интегрируемая система Пфаффа

$$dy=x^{-p}f\,dx+z^{-q}g\,dz$$

из m уравнений, где p, q — положительные целые числа, а вектор-функции $f(x,\ y,\ z)$, $g(x,\ y,\ z)$ голоморфны в точке $x=0$, $y=0$, $z=0$; указаны достаточные условия существования голоморфного в начале координат решения (см. [7]), приведены обобщения на большее число независимых переменных.

Лит.: [1] Pfaff J. F., «Berl. Abh.», 1814—1815, S. 76—135; [2] Эйлер Л., Дифференциальное исчисление, пер. с лат., М.— Л., 1949; [3] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970; [4] Богданов Ю. С., Лекции по дифференциальным уравнениям, Минск, 1977; [5] Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, пер. с франц., М., 1962; [6] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.— Л., 1947; [7] Equations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champ complexe, B., 1979. *М. В. Федорюк.*

ПФАФФА ФОРМА — *дифференциальная форма* степени 1.

ПФАФФИАН знакопеременной матрицы X — многочлен $\mathrm{Pf}X$ от элементов матрицы X, квадрат к-рого равен $\det X$. Точнее, если $X=\|x_{ij}\|$ — знакопеременная (т. е. удовлетворяющая условиям $x_{ij}=-x_{ji}$, $x_{ii}=0$) матрица порядка $2n$ над коммутативно-ассоциативным кольцом A с единицей, то $\mathrm{Pf}X$ есть элемент кольца A, вычисляемый по формуле

$$\mathrm{Pf}\,X=\sum_s \varepsilon(s)\,x_{i_1j_1}\ldots x_{i_nj_n},$$

где суммирование ведется по всевозможным разбиениям s множества $\{1, \ldots, 2n\}$ на непересекающиеся пары $\{i_\alpha, j_\alpha\}$, причем считается, что $i_\alpha<j_\alpha$, $\alpha=1, \ldots, n$, а $\varepsilon(s)$ — знак подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 2 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ i_1 j_1 & \ldots & i_n & j_n \end{pmatrix}.$$

П. обладает следующими свойствами:

1) $\mathrm{Pf}\,(C^TXC)=(\det C)\,(\mathrm{Pf}\,X)$

для любой матрицы C порядка $2n$;

2) $(\mathrm{Pf}\,X)^2=\det X$;

3) если E — свободный A-модуль с базисом $e_1, \ldots, e_{2n}$ и

$$u=\sum_{i<j} x_{ij}e_i\wedge e_j\in\Lambda^2A,$$

то

$$\overset{n}{\Lambda}u=n!\;(\mathrm{Pf}\,X)\,e_1\wedge\ldots\wedge e_{2n}.$$

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966. *А. Л. Онищик.*

ПЬЕРПОНТА ВАРИАЦИЯ — одна из числовых характеристик функции нескольких переменных, к-рую можно рассматривать как многомерный аналог *вариации функции* одного переменного. Пусть функция $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$, $n=2,3, \ldots$, задана на n-мерном параллелепипеде

$$D_n=[a_1, b_1]\times\ldots\times[a_n, b_n]$$

и Π_k^m, $k=1, \ldots, n$,— разбиение отрезка $[a_k, b_k]$ на m, $m=1, 2, \ldots$, равных между собой отрезков точками

$$a_k=a_k^0<a_k^1<\ldots<a_k^m=b_k$$

$$\left(a_k^s-a_k^{s-1}=(b_k-a_k)/m,\ s=1, \ldots, m\right).$$

Эти разбиения порождают разбиение

$$\Pi^m=\Pi_1^m\times\ldots\times\Pi_n^m$$

параллелепипеда D_n на m^n параллелепипедов d_1, d_2, ..., d_{m^n} с ребрами, параллельными координатным осям.

Пусть

$$\Omega(f,\ \Pi^m)=\sum_{j=1}^{m^n}\omega(f,\ d_j),$$

где $\omega(f, d_j)$ — колебание функции $f(x)$ на d_j. Тогда

$$P(f,\ D_n)\overset{\mathrm{def}}{=}\sup_m\sup_{\Pi^m}\frac{1}{m^{n-1}}\,\Omega(f,\ \Pi^m).$$

Если $P(f, D_n) < \infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную (конечную) П. в. на D_n, а класс всех таких функций обозначается через $P(D_n)$. Это определение предложил Дж. Пьерпонт [1]. Класс $P(D_n)$ содержит в себе класс $A(D_n)$ функций, имеющих ограниченную *Арцела вариацию* на D_n.

Лит.: [1] Pierpont J., Lectures on the theory of functions of real variables, v. 1, N. Y., 1959; [2] Hahn H., Theorie der reellen Funktionen, Bd 1, B., 1921. *Б. И. Голубов.*

ПЭЛИ — ВИНЕРА ТЕОРЕМА: функция $f \in L^2(-\infty, +\infty)$ тогда и только тогда обращается в нуль почти всюду вне отрезка $[-A, A]$, когда ее преобразование Фурье

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ixy}\, dx, \quad y \in \mathbb{R},$$

удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(y)|^2\, dy < \infty$$

и является ограничением на действительную прямую нек-рой целой аналитич. функции $F(z)$ комплексного переменного z, причем $|F(z)| \leqslant e^{A|z|}$ для всех $z \in \mathbb{C}$ (см. [1]). Аналогом П.— В. т. наз. описание образа нек-рого пространства функций или обобщенных функций на локально компактной группе при *Фурье преобразовании* или другом инъективном интегральном преобразовании; чаще всего аналогом П.— В. т. наз. описание образа пространства $C_0^\infty(G)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций или пространства $S(G)$ быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на локально компактной группе G при преобразовании Фурье на группе G. Такие аналоги известны, в частности, для абелевых локально компактных групп, для нек-рых связных групп Ли, для нек-рых подалгебр алгебры $C_0^\infty(G)$ на вещественных полупростых группах Ли, а также для нек-рых других интегральных преобразований.

Лит.: [1] Винер Н., Пэли Р., Преобразование Фурье в комплексной области, пер. с англ., М., 1964; [2] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976; [3] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я., Интегральная геометрия и некоторые связанные с ней вопросы теории представлений, М., 1962; [4] Желобенко Д. П., Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли, М., 1974; [5] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975. *А. И. Штерн.*

ПЮИЗЁ РЯД — см. *Ветвления точка.*

ПЯТЫЙ ПОСТУЛАТ, аксиома параллельности Евклида,— через точку P вне прямой AA' в плоскости, проходящей через P и AA', можно провести лишь одну прямую, не пересекающую AA'. В «Началах» Евклида П. п. был приведен в следующей эквивалентной формулировке: «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых» (см. [1]). У комментаторов Евклида возник взгляд, что это предложение можно доказать, опираясь на остальные аксиомы. Попытки доказательств возникли еще в Древней Греции. Эти попытки продолжались на Средневековом Востоке, а затем в Западной Европе. Если не говорить о прямых логич. ошибках, то обычно неявно (а иногда и с отчетливым пониманием) вводилось предположение, не выводимое из остальных аксиом, к-рое оказывалось таким образом эквивалентным П. п. Напр., расстояние между параллелями ограничено, пространство допускает «простое» (поступательное) движение (все траектории — прямые линии), две сближающиеся прямые всегда пересекаются, существуют подобные не равные фигуры, сумма углов треугольника равна двум прямым и др. Дж. Саккери (G. Saccheri, 1733) рассматривал четырехугольник с прямыми углами при основании и равными боковыми сторонами. Ранее такой четырехугольник рассмотрел Омар Хайям (11—12 вв.). Из трех возможных гипотез об остальных двух равных углах (они тупые, они острые, они прямые) он стремился отвергнуть две первые, т. к. из третьей вытекал П. п. Дж. Саккери удалось привести к противоречию следствия из первой гипотезы, но он совершил логич. ошибку в опровержении гипотезы острого угла. И. Ламберт (J. Lambert, 1766, опубл. 1786) при аналогичном подходе опровергнул гипотезу острого угла, тоже совершив при этом серьезную ошибку. Он высказал предположение, что такая геометрия осуществляется на мнимой сфере. А. Лежандр (A. Legendre, 1800) в первых изданиях учебника «Элементы геометрии» исходил из суммы S углов треугольника. Опровергнув гипотезу

$S > 2d$, он допустил ошибку при выводе следствий из гипотезы $S < 2d$, а именно, он неявно ввел аксиому, что для любой точки внутри острого угла существует прямая, проходящая через эту точку и пересекающая обе стороны угла. Решение проблемы П. п. (точнее ее снятие) было получено путем создания Н. И. Лобачевским (1826) геометрии, отрицающей П. п. Из непротиворечивости *Лобачевского геометрии* следует независимость П. п. от др. аксиом евклидовой геометрии.

Лит.: [1] Начала Евклида, пер. с греч., т. 1—3, М.—Л., 1948—50; [2] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.—Л., 1949; [3] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971; [4] Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского..., М., 1956; [5] Розенфельд Б. А., История неевклидовой геометрии, М., 1976.

Б. Л. Лаптев.

РААБЕ ПРИЗНАК сходимости числовых рядов: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если при достаточно больших n выполняется неравенство

$$R_n \equiv n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - r\right) \geqslant r, \text{ где } r > 1;$$

если $R_n \leqslant 1$, начиная с нек-рого номера n, то ряд расходится.

Установлен Й. Раабе (J. Raabe). *Е. Г. Соболевская.*

РАВЕНСТВА АКСИОМЫ — аксиомы, регулирующие употребление отношения равенства в математич. доказательствах. Аксиомы эти утверждают рефлексивность отношения равенства и возможность замены равного равным. Символически Р. а. записываются так:

$$x = x,$$

$$x = y \wedge \varphi(y/v) \Rightarrow \varphi(x/v),$$

$$x = y \Rightarrow t(y/v) = t(x/v),$$

где φ — произвольная формула, а t — произвольный терм рассматриваемого языка; x, y, v — переменные, имеющие одну и ту же непустую область изменения; выражения вида $\varphi(x/v)$ и $t(x/v)$ обозначают результат замены всех свободных вхождений переменной v в формуле φ или терме t на x.

С помощью Р. а. можно доказать симметричность и транзитивность отношения равенства. Для этого в качестве φ надо взять формулу $y=v$ в первом случае и формулу $v=z$ во втором.

Если формулы и термы рассматриваемого языка строятся из атомарных формул и термов с помощью логич. связок и суперпозиций, то приведенные Р. а. можно вывести из их частных случаев, когда в качестве φ и t берутся атомарные формулы и термы. Символически:

$$x_i = y_i \wedge P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \Rightarrow P(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n),$$

$$x_i = y_i \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n),$$

где P и f суть n-местные предикатный и функциональный символы. *В. Н. Гришин.*

РАВНОВЕЛИКИЕ И РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ ФИГУРЫ — две фигуры в $\mathbb{R}^2$, имеющие равные площади и соответственно два многоугольника M_1 и M_2 такие, что их можно разрезать на многоугольники так, что части, составляющие M_1, соответственно конгруэнтны частям, составляющим M_2.

Для $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, равновеликость означает равенство объемов; равносоставленность многогранников определяется аналогично с $\mathbb{R}^2$. Эти понятия обобщаются также на неевклидовы геометрии.

Площадь (многоугольника) есть функция $s(M)$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

(α) $s(M) \geqslant 0$ для любого многоугольника M;

(β) если M есть объединение многоугольников $M_1, \ldots, M_k$, попарно не имеющих общих точек, то

$$s(M) = s(M_1) + \ldots + s(M_k);$$

(γ) если M_1 и M_2 конгруэнтны, то $s(M_1) = s(M_2)$;

(δ) площадь квадрата, стороной которого является единица длины, равна 1.

С помощью этих аксиом определяется площадь прямоугольника.

Теорема. Если два многоугольника равносоставлены, то они равновелики.

На этой теореме основан **метод разбиения**, известный еще Евклиду: для вычисления площади многоугольника пытаются разбить его на конечное число частей, из к-рых можно составить фигуру известной площади. Напр., параллелограмм равносоставлен с прямоугольником, имеющим то же основание и ту же

Рис. 1.

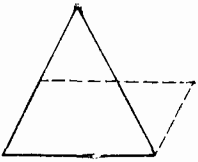


Рис. 2.

высоту (см. рис. 1); треугольник равносоставлен с параллелограммом, имеющим то же основание и вдвое меньшую высоту (см. рис. 2). Таким образом, вся теория площадей многоугольников может быть построена на основе теоремы о площади прямоугольника.

Существует и другой способ вычисления площадей, основанный на аксиомах (β) и (γ),— **метод дополнения**. Два многоугольника наз. **равнодополняемыми**, если их можно дополнить соответственно конгруэнтными частями так, чтобы получились конгруэнтные многоугольники. Напр., параллелограмм и прямоугольник с одинаковыми основаниями и одинаковыми высотами равнодополняемы (см. рис. 3) и потому равновелики.

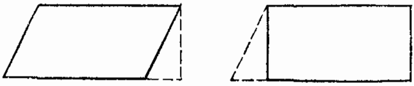


Рис. 3.

В евклидовой плоскости два многоугольника в том и только в том случае равновелики, если они равносоставлены (а также если они равнодополняемы). Аналогичная теорема справедлива в плоскости Лобачевского и в эллиптической плоскости. Напротив, в неархимедовой геометрии эквивалентны лишь равновеликость и равнодополняемость; равновеликость же им не эквивалентна.

Теория объемов в $\mathbb{R}^3$ базируется на аксиомах (α), (β), (γ), (δ), аналогичных аксиомам площади. Однако для вычисления объема тетраэдра со времен Евклида используется предельный переход («чертова лестница»), а в современных учебниках — интеграл, определение к-рого также связано с предельным переходом. Обоснование использования «лишнего» (по сравнению с планиметрией) предельного перехода, доказательство того, что методами разбиения и дополнения невозможно вычислить объем произвольного тетраэдра, составили третью проблему Гильберта. В 1900 М. Ден (M. Dehn) решил третью проблему, доказав, что правильный тетраэдр и равновеликий ему куб не равносоставлены. Для равносоставленности двух равновеликих многогранников M_1 и M_2 в $\mathbb{R}^3$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого инварианта Дена $f(M)$ (нек-рой функции от длин ребер и величин соответствующих двугранных углов, см. [2]) выполнялось равенство $f(M_1)=f(M_2)$.

Имеются многомерные обобщения инвариантов Дена, с помощью к-рых сформулировано необходимое условие равносоставленности и доказано, что при $n \geqslant 3$ правильный n-мерный симплекс не равносоставлен с равновеликим ему кубом. В $\mathbb{R}^4$ необходимое условие равносоставленности является также и достаточным.

Пусть G — нек-рая группа движений плоскости. Два многоугольника M_1 и M_2 наз. G-конгруэнтными, если существует такое движение $g \in G$, что $g(M_1)=M_2$. Два многоугольника M_1 и M_2 наз. G-равносоставленными, если их можно разрезать на части таким образом, что части, составляющие M_1, соответственно конгруэнтны частям, составляющим M_2. Аналогично определяется G-равносоставленность многогранников.

Пусть S — группа движений, состоящая из всех параллельных переносов и центральных симметрий. Понятия равносоставленности и S-равносоставленности в $\mathbb{R}^2$ эквивалентны. В частности, равновеликие многоугольники можно разбить на части таким образом, что соответствующие их части не только конгруэнтны, но и имеют соответственно параллельные стороны.

Равносоставленность в том и только в том случае эквивалентна G-равносоставленности, если $G \supset S$ в случае $\mathbb{R}^2$ и $G \subset D_0$ в случае $\mathbb{R}^3$, где D_0 — группа всех движений, сохраняющих ориентацию.

Ниже приводится определение флаговых инвариантов, позволяющих дать необходимое и достаточное условие T-равносоставленности, где T — группа всех параллельных переносов. Пусть $\mathbb{R}^{n-1}, \ldots, \mathbb{R}^i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, — такая последовательность подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, что $\mathbb{R}^{n-1} \supset \ldots \supset \mathbb{R}^i$ (верхний индекс означает размерность). Пусть, далее, для каждого $j=i+1, \ldots, n$ фиксировано одно из двух полупространств, на к-рое $\mathbb{R}^j$ разбивается подпространством $\mathbb{R}^{j-1}$; это полупространство наз. «положительным» и обозначено через P^j. Последовательность $\Phi=(P^n, \ldots, P^{i+1})$ наз. флагом порядка i в $\mathbb{R}^n$. Пусть, наконец, $Q=(M^{n-1}, \ldots, M^i)$ — такая последовательность граней многогранника $M^n \subset \mathbb{R}^n$, что $M^{n-1} \supset \ldots \supset M^i$. Если $M^j \| \mathbb{R}^j$ для всех $j=i, \ldots, n-1$, то полагают

$$H_\Phi(Q)=\varepsilon_{n-1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_i \, |M^i| ,$$

где $|M^i|$ есть i-мерный объем грани M^i, а $\varepsilon_j=\pm 1$ в зависимости от того, примыкает ли M^{j+1} к M^j с положительной стороны или нет. Если же $M^j \nparallel \mathbb{R}^j$ хотя бы для одного j, то $H_\Phi(Q)=0$; $H_\Phi(M^n)$ — сумма $\sum H_\Phi(Q)$ по всем последовательностям Q, составленным из граней многогранника M^n.

Два равновеликих многогранника в том и только в том случае T-равносоставлены, если для каждого флангового инварианта H_Φ его значения на этих многогранниках одинаковы.

Многогранник $M^n \subset \mathbb{R}^n$ наз. k-кратной суммой Минковского, если существуют такие многогранники $N_1, \ldots, N_k$ (положительных размерностей), несущие плоскости к-рых порождают разложение пространства $\mathbb{R}^n$ в такую прямую сумму, что $M^n=N_1+\ldots+N_k$ (в смысле векторной суммы множеств). Многогранник называется принадлежащим классу $\mathfrak{Z}_k$, если M^n можно разбить на конечное число многогранников, каждый из к-рых T-равносоставлен с многогранником, представляющимся в виде k-кратной суммы Минковского.

Многогранник $M^n \in \mathfrak{Z}_k$ в том и только в том случае, если $H_\Phi(M^n)=0$ для всех флаговых инвариантов H_Φ порядков, меньших k.

Пусть Г — группа, состоящая из всех гомотетий с положительными коэффициентами и параллельных переносов. В $\mathbb{R}^n$ любые два многогранника Г-равносоставлены. Рис. 4 иллюстрирует Г-равносоставленность треугольника и прямоугольника (одинаковыми цифрами обозначены Г-конгруэнтные многоугольники).

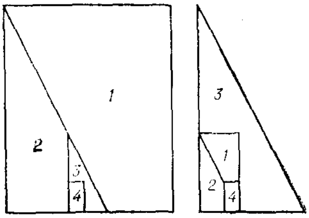


Рис. 4.

Пусть при гомотетии с коэффициентом $\lambda > 0$ объем n-мерного многогранника увеличивается в λ^n раз. Если принять это утверждение как аксиому, то объем любого многогранника может быть найден методом разбиения.

Пусть группа движений G в n-мерном евклидовом, гиперболическом или эллиптич. пространстве почти транзитивна (т. е. орбита точки всюду плотна); два многогранника в этом пространстве тогда и только тогда G-равнодополняемы, когда они G-равносоставлены.

Лит.: [1] Проблемы Гильберта, М., 1969; [2] Болтянский В. Г., Равновеликие и равносоставленные фигуры, М., 1956; [3] его же, Третья проблема Гильберта, М., 1977; [4] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., 1966; [5] Jessen B., Thorup A., «Math. Scand.», 1978, v. 43, fasc. 2, p. 211—40.

В. Г. Болтянский.

РАВНОВЕСИЯ ПОЛОЖЕНИЕ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (*)$$

— точка $\xi \in \mathbb{R}^n$ такая, что $x=\xi$ является (постоянным по времени) решением системы (*); Р. п. наз. также и само это решение. Точка $\xi \in \mathbb{R}^n$ есть Р. п. системы (*) тогда и только тогда, когда

$$f(t, \xi)=0 \text{ при всех } t.$$

Пусть $x=\varphi(t)$ — произвольное решение системы (*). Замена переменных $x=\varphi(t)+y$ переводит это решение в Р. п. $y=0$ системы

$$\dot{y}=F(t, y), \quad F(t, y) \equiv f(t, \varphi(t)+y)-f(t, \varphi(t)).$$

Поэтому, напр., в теории устойчивости без ограничения общности можно считать, что речь всегда идет об исследовании устойчивости Р. п. в начале координат $\mathbb{R}^n$.

Р. п. $x=0$ неавтономной системы (*) часто наз. тривиальным, или нулевым, решением, а термин Р. п. предпочитают использовать в теории автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и в теории динамич. систем. Здесь употребляется много синонимов этого термина: особая точка, неподвижная точка, стационарная точка, точка покоя, состояние равновесия.

Н. Х. Розов.

РАВНОВЕСИЯ СООТНОШЕНИЕ — соотношение, выражающее связь между ростом функции $f(z)$, мероморфной при $|z| < R \leqslant \infty$, и ее распределением значений (см. *Распределения значений теория*). Каждая мероморфная функция $f(z)$ обладает следующим свойством равновесия: сумма ее считающей функции $N(r, a, f)$, характеризующей плотность распределения a-точек $f(z)$, и функции приближения $m(r, a, f)$, характеризующей скорость среднего приближения $f(z)$ к данному числу a, остается инвариантной для различных значений a. Наиболее эффективным Р. с. становится при использовании сферич. метрики.

Пусть

$$[a, b] = \frac{|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2} \cdot \sqrt{1+|b|^2}}$$

означает сферич. расстояние между двумя числами a и b и пусть для каждого комплексного числа a

$$\mathring{m}(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{[f(re^{i\theta}), a]} d\theta - \alpha(a, f),$$

где

$$\alpha(a, f) = \lim_{z \to 0} \ln \frac{|z|^n}{[f(z), a]},$$

а $n = n(0, a, f)$ означает кратность a-точки $f(z)$ при $z=0$. При $r \to R$ функция $\mathring{m}(r, a, f)$ отличается от неванлинновской функции приближения $m(r, a, f)$ на ограниченное слагаемое. Поэтому на окружности $|z|=r<R$ функция $\mathring{m}(r, a, f)$ по-прежнему характеризует среднюю скорость приближения $f(z)$ к числу a. Имеет место следующее утверждение. Для каждого значения r, $0 \leqslant \leqslant r < R$, любого комплексного числа a из расширенной комплексной плоскости и для произвольной мероморфной при $|z| < R \leqslant \infty$ функции $f(z)$ выполняется равенство (соотношение равновесия):

$$\mathring{m}(r, a, f) + N(r, a, f) = \mathring{m}(r, \infty, f) + N(r, \infty, f),$$

где

$$N(r, a, f) = \int_0^r [n(t, a, f) - n(0, a, f)] \frac{dt}{t} + \\ + n(0, a, f) \ln r,$$

а $n(t, a, f)$ означает число a-точек $f(z)$, попавших в круг $\{z : |z| \leqslant t\}$.

После основополагающих работ Р. Неванлинны [1] Р. с. были перенесены на p-мерные целые кривые (см. [3]) и на голоморфные отображения (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Nevanlinna R., Analytic functions, N. Y.—B., 1970; [2] Виттих Г., Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, пер. с нем., М., 1960; [3] Weyl H., Meromorphic functions and analytic curves, Princeton, 1943; [4] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [5] Гриффитс Ф., Кинг Дж., Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий, [пер. с англ.], М., 1976. *В. П. Петренко.*

РАВНОМЕРНАЯ АЛГЕБРА — замкнутая относительно равномерной сходимости подалгебра A алгебры $C(X)$ всех непрерывных комплексных функций на компакте X, содержащая все функции-константы и разделяющая точки компакта X. Последнее условие означает, что для каждой пары x, y различных точек из X в алгебре A имеется функция f, для к-рой $f(x) \neq f(y)$. Р. а. обычно снабжают sup-нормой:

$$\|f\| = \sup_X |f(x)|.$$

При этом $\|f^2\| = \|f\|^2$. Каждая банахова алгебра с единицей (даже без предположения коммутативности), норма в к-рой подчинена последнему условию, изоморфна нек-рой Р. а.

Р. а. составляют важный подкласс класса *коммутативных банаховых алгебр* над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Каждой точке $x \in X$ отвечает гомоморфизм $\varphi_x : A \to \mathbb{C}$, действующий по правилу $\varphi_x(f) = f(x)$. Поэтому X естественно топологически вкладывается в пространство максимальных идеалов алгебры A и при соответствующем отождествлении поглощает границу Шилова. При изучении Р. а. важную роль играют точки пика (т. е. такие точки из X, в к-рых достигается строгий максимум модуля хотя бы для одного элемента из A), мультипликативные вероятностные меры на X (т. е. представляющие меры гомоморфизмов из A в $\mathbb{C}$) и ортогональные к A меры на X. Многие конкретные результаты, относящиеся к Р. а., касаются связей между этими объектами.

Р. а. наз. симметричной, если вместе с каждой функцией к алгебре принадлежит и комплексно сопряженная ей функция. Согласно теореме Стоуна — Вейерштрасса, каждая симметричная Р. а. на компакте X совпадает с $C(X)$. Полярный класс составляют т. н. антисимметричные Р. а., вовсе не содержащие действительных функций, кроме констант. Типичный пример — алгебра всех функций, аналитических в открытом единичном диске комплексной плоскости и непрерывных в его замыкании (диск-алгебра). Теорема Шилова — Бишопа: *каждая Р. а. определенным способом может быть «склеена» из антисимметричных.* Известны и более тонкие классификационные теоремы. Вместе с тем произвольные Р. а. не сводятся к алгебрам аналитич. функций типа диск-алгебра. Напр., можно сконструировать такую Р. а. на одномерном компакте, который совпадает с ее пространством максимальных идеалов, что все точки компакта являются точками пика и одновременно среди элементов алгебры только тождественный нуль может принимать нулевое значение на непустом открытом подмножестве.

Лит.: [1] Гамелин Т., Равномерные алгебры, пер. с англ., М., 1973. *Е. А. Горин.*

РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ — свойство функции (отображения) $f: X \to Y$, где X и Y — метрич. пространства, означающее, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x_1, x_2) < \delta$, выполняется неравенство $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Если отображение $f: X \to Y$ непрерывно на X и X — компакт, то f равномерно непрерывно на X. Композиция равномерно непрерывных отображений равномерно непрерывна.

Р. н. отображений встречается и в теории топологич. групп. Напр., отображение $f: X_0 \to Y$, где $X_0 \subset X$, X и Y — топологич. группы, наз. равномерно непрерывным, если для любой окрестности U_y единицы группы Y существует такая окрестность U_x единицы группы X, что для любых элементов $x_1 \in X_0$, $x_2 \in X_0$, удовлетворяющих условию $x_1 x_2^{-1} \in U_x$ (соответственно $x_1^{-1} x_2 \in U_y$), выполняется включение $f(x_1)[f(x_2)]^{-1} \in U_y$ (соответственно $[f(x_1)]^{-1} f(x_2) \in U_y$).

Понятие Р. н. обобщается на отображения *равномерных пространств.*

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Келли Дж. Л., Общая топология, 2 изд., пер. с англ., М., 1981; [4] Бурбаки Н., Общая топология, пер. с франц., М., 1968. *Л. Д. Кудрявцев.*

РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ сверху (снизу) — свойство семейства действительных функций $f_\alpha: X \to \mathbb{R}$, где $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ — нек-рое множество индексов, X — произвольное множество, означающее, что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство $f_\alpha(x) \leqslant c$ (соответственно $f_\alpha(x) \geqslant -c$).

Семейство функций $f_\alpha: X \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, наз. равномерно ограниченным, если оно равномерно ограничено как сверху, так и снизу.

Понятие Р. о. семейства функций обобщается на случай отображений в нормированные и полунормированные пространства: семейство отображений $f_\alpha: X \to Y$, где $\alpha \in \mathfrak{A}$, X — произвольное множество, а Y — полунормированное пространство с полунормой (нормой) $\|\cdot\|_Y$, наз. равномерно ограниченным, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство $\|f_\alpha(x)\|_Y \leqslant$ $\leqslant c$. Если в пространстве $\{X \to Y\}$ ограниченных отображений $f: X \to Y$ ввести полунорму (норму) по формуле

$$\| f \|_{\{X \to Y\}} = \sup_{x \in X} \| f(x) \|_Y,$$

то Р. о. множества функций $f_\alpha: X \to Y$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, означает ограниченность этого множества в пространстве $\{X \to Y\}$ с полунормой $\|\cdot\|_{\{X \to Y\}}$.

Понятие Р. о. снизу и сверху обобщается на случай отображений $f: X \to Y$ в упорядоченные в том или ином смысле множества Y. *Л. Д. Кудрявцев.*

РАВНОМЕРНАЯ ПОДГРУППА локально компактной топологической группы G — такая замкнутая подгруппа $H \subset G$, что факторпространство G/H компактно. С понятием Р. п. близко связано понятие квазиравномерной подгруппы в G, т. е. такой замкнутой подгруппы H в G, для к-рой на G/H существует G-инвариантная мера μ с $\mu(G/H) < \infty$. Напр., подгруппа $SL_2(\mathbb{Z})$ группы $SL_2(\mathbb{R})$ квазиравномерна, но не равномерна в ней. С другой стороны, подгруппа T всех верхнетреугольных матриц из $SL_2(\mathbb{R})$ — Р. п. в $SL_2(\mathbb{R})$, не являющаяся квазиравномерной (на факторпространстве $SL_2(\mathbb{R})/T$ нет $SL_2(\mathbb{R})$-инвариантных мер). Однако всякая связная квазиравномерная подгруппа в группе Ли G является Р. п. (см. [1]), а всякая дискретная Р. п. в G квазиравномерна [2]. (О дискретных Р. п. в группах Ли см. *Дискретная подгруппа*.) Если G — связная группа Ли и H — Р. п. в G, то нормализатор $N_G(H^0)$ в G связной компоненты единицы H^0 группы H содержит максимальную связную треугольную подгруппу группы G (см. [3]). Алгебраич. подгруппа H связной алгебраической комплексной линейной группы Ли G тогда и только тогда является Р. п., когда H — параболич. подгруппа в G. Описаны все связные Р. п. в полупростых группах Ли (см. [4]). Недискретная Р. п. H связной полупростой группы Ли G обладает свойством сильной жесткости (см. [5]), к-рое состоит в том, что в G имеется конечное число таких подгрупп H_i, $i=1, \ldots, m$, что любая подгруппа $H' \subset G$, изоморфная H, сопряжена одной из подгрупп H_i. Важные примеры равномерных и квазиравномерных подгрупп строятся следующим образом. Пусть G — линейная алгебраич. группа, определенная над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, G_A — ее группа аделей и $G_{\mathbb{Q}} \subset G_A$ — подгруппа главных аделей. Тогда $G_{\mathbb{Q}}$ — дискретная подгруппа в G_A, причем $G_{\mathbb{Q}}$ является Р. п. в G_A тогда и только тогда, когда 1) у группы G нет нетривиальных рациональных характеров, определенных над полем $\mathbb{Q}$, и 2) все унипотентные элементы группы $G_{\mathbb{Q}}$ принадлежат ее радикалу (см. [6], [7]). В частности, если G — унипотентная алгебраич. группа, определенная над $\mathbb{Q}$, то $G_{\mathbb{Q}}$ есть Р. п. в G_A. Условие 1) является необходимым и достаточным для квазиравномерности $G_{\mathbb{Q}}$ в G_A.

Лит.: [1] Mostow G. D., «Ann. Math.», 1962, v. 75, № 1, p. 17—37; [2] Рагунатан М., Дискретные подгруппы групп Ли, пер. с англ., М., 1977; [3] Онищик А. Л., «Матем. сб.», 1966, т. 71, № 4, с. 483—94; [4] его же, там же, 1967, т. 74, № 3, с. 398—416; [5] Goto M., Wang H.-C., «Math. Ann.», 1972, Bd 198, H. 4, S. 259—86; [6] Борель А., «Математика», 1964, т. 8, № 2, с. 73—75; [7] Mostow G. D., Tamagawa T., «Ann. Math.», 1962, v. 76, № 3, p. 446—63.

В. Л. Попов.

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ последовательности функций (отображений) — свойство последовательности $f_n: X \to Y$, где X — произвольное множество, Y — метрич. пространство, $n = 1, 2, \ldots$, к функции (отображению) $f: X \to Y$, означающее, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$

Это условие равносильно тому, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}\rho(f_n(x),\ f(x))=0.$$

Чтобы последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходилась на множестве X к функции f, необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая числовая последовательность $\{\alpha_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, и существовал такой номер n_0, что для всех $n>n_0$ и всех $x\in X$ выполнялось неравенство

$$\rho(f_n(x),\ f(x))\leqslant\alpha_n.$$

Пример. Последовательность $f_n(x)=x^n$, $n=1,2,\ldots$, равномерно сходится на любом отрезке $[0,\ a]$, $0<a<1$ и не сходится равномерно на отрезке $[0,\ 1]$.

Необходимое и достаточное условие Р. с. последовательности функций без использования понятия предельной функции дает *Коши критерий* равномерной сходимости.

Свойства равномерно сходящихся последовательностей.

1. Если Y — линейное нормированное пространство и последовательности отображений $f_n: X\to Y$ и $g_n: X\to Y$, $n=1,\ 2,\ldots$, равномерно сходятся на множестве X, то при любых $\lambda\in\mathbb{C}$ и $\mu\in\mathbb{C}$ последовательность $\{\lambda f_n+\mu g_n\}$ также равномерно сходится на X.

2. Если Y — линейное нормированное кольцо, последовательность отображений $f_n: X\to Y$, $n=1,\ 2,\ldots$, равномерно сходится на множестве X и $g: X\to Y$ — ограниченное отображение, то последовательность $\{gf_n\}$ также равномерно сходится на X.

3. Если X — топологич. пространство, Y — метрич. пространство и последовательность непрерывных в точке $x_0\in X$ отображений $f_n: X\to Y$ равномерно на множестве X сходится к отображению $f: X\to Y$, то это отображение также непрерывно в точке x_0, то есть

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x).$$

Условие равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ на X является в этом утверждении существенным в том смысле, что существуют даже последовательности числовых непрерывных на отрезке функций, сходящиеся во всех его точках к функции, не являющейся непрерывной на рассматриваемом отрезке. Примером такой последовательности является $f_n(x)=x^n$, $n=1,\ 2,\ldots$, на отрезке $[0,\ 1]$. Р. с. последовательности непрерывных функций не есть необходимое условие непрерывности предельной функции. Однако если множество X — компакт, Y — множество действительных чисел $\mathbb{R}$, последовательность непрерывных функций $f_n: X\to\mathbb{R}$ во всех точках $x\in X$ одновременно возрастает или убывает и имеет конечный предел,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),$$

то для того, чтобы функция f была непрерывной на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n\}$ сходилась равномерно на этом множестве. Необходимые и одновременно достаточные условия для непрерывности предела последовательности непрерывных функций в общем случае даются в терминах *квазиравномерной сходимости* последовательности.

4. Если последовательность интегрируемых по Риману (по Лебегу) функций $f_n:[a,\ b]\to\mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$, равномерно на отрезке $[a,\ b]$, сходится к функции $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$, то эта функция также интегрируема по Риману (соответственно по Лебегу), и для любого $x\in[a,\ b]$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^x\lim_{n\to\infty}f_n(t)\,dt,\quad(*)$$

и сходимость последовательности $\left\{\int_a^x f_n(t)dt\right\}$ на отрезке $[a, b]$ к функции $\int_a^x f(t)dt$ равномерна. Формула (*) обобщается на случай *Стилтьеса интеграла*. Если же последовательность интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций f_n, $n=1, 2, \ldots$, просто сходится в каждой точке этого отрезка к интегрируемой же на нем функции f, то формула (*) может не иметь места.

5. Если последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $f_n: [a, b] \to \mathbb{R}$, $n=1, 2, \ldots$, сходится в нек-рой точке $x_0 \in [a, b]$, а последовательность их производных $\left\{\frac{df_n}{dx}\right\}$ равномерно сходится на $[a, b]$, то последовательность $\{f_n\}$ также равномерно сходится на отрезке $[a, b]$, ее предел является непрерывно дифференцируемой на этом отрезке функцией и

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{df_n(x)}{dx}, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Пусть X — произвольное множество, а Y — метрич. пространство. Семейство функций (отображений) $f_\alpha: X \to Y$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — топологич. пространство, наз. равномерно сходящимся при $\alpha \to \alpha_0 \in \mathfrak{A}$ к функции (отображению) $f: X \to Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(\alpha_0)$ точки α_0, что для всех $\alpha \in U(\alpha_0)$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f_\alpha(x)) < \varepsilon.$$

Для равномерно сходящихся семейств функций имеют место свойства, аналогичные указанным выше свойствам Р. с. последовательностей функций.

Понятие Р. с. отображений обобщается на случай, когда Y — равномерное пространство, в частности, когда Y — топологич. группа.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981.

Л. Д. Кудрявцев.

РАВНОМЕРНАЯ ТОПОЛОГИЯ — топология, порожденная равномерной структурой. Подробнее, пусть X — множество, наделенное равномерной структурой (т. е. *равномерное пространство*) U, и пусть для каждого $x \in X$ через $B(x)$ обозначено множество подмножеств $V(x)$ множеств X, где V пробегает все окружения U. Тогда в X существует и притом только одна топология, для к-рой $B(x)$ является *фильтром* окрестностей точки x при любой $x \in X$. Топология наз. равномеризуемой, если существует равномерная структура, ее порождающая. Не всякое топологич. пространство равномеризуемо: таковы, напр., не регулярные пространства. *М. И. Войцеховский.*

РАВНОМЕРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ — *устойчивость по Ляпунову*, равномерная относительно начального момента. Решение $x_0(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \; x \in \mathbb{R}^n,$$

наз. равномерно устойчивым, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого $t_0 \in \mathbb{R}^+$ и всякого решения $x(t)$ той же системы, удовлетворяющих неравенству

$$|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta,$$

выполнено неравенство

$$|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$$

для всех $t \geqslant t_0$.

Устойчивая по Ляпунову неподвижная точка автономной системы дифференциальных уравнений $\dot{x}=f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, равномерно устойчива, но устойчивое по Ляпунову решение, вообще говоря, может не быть равномерно устойчивым. Напр., решение $x(t)=0$, $t \in \mathbb{R}^+$, уравнения

$$\dot{x}=[\sin \ln (1+t)-\alpha] x \qquad (1)$$

при каждом $\alpha \in (1/\sqrt{2}, 1)$ устойчиво, но не равномерно устойчиво.

Пусть дана линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(t) x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

где $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $\mathbb{R}^+ \rightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Для того чтобы решение $x=0$ системы (2) было равномерно устойчивым, необходимо, чтобы верхний *особый показатель* $\Omega^0(A)$ системы (2) был меньше или равен нулю. Напр., в случае уравнения (1) верхний особый показатель $\Omega^0(A)=1-\alpha$, а *Ляпунова характеристический показатель* $\lambda_1(A)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\alpha$. Для существования $\delta>0$ такого, чтобы решение $x=0$ всякой системы

$$\dot{x}=A(t) x+g(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

удовлетворяющей условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши и условию

$$|g(t, x)|<\delta \cdot|x|,$$

было равномерно устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы верхний особый показатель $\Omega^0(A)$ системы (2) был меньше нуля.

Лит.: [1] Персидский К., «Матем. сб.», 1933, т. 40, № 3, с. 284—93; [2] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [3] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970.

В. М. Миллионщиков.

РАВНОМЕРНО НАИБОЛЕЕ МОЩНЫЙ КРИТЕРИЙ — статистический критерий с заданным уровнем значимости для проверки сложной гипотезы H_0 против сложной альтернативы H_1, мощность к-рого не меньше мощности любого другого статистич. критерия, предназначенного для проверки H_0 против H_1 и имеющего тот же уровень значимости.

Пусть проверяется сложная гипотеза $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ против сложной альтернативы $H_1: \theta \in \Theta_1=\Theta \setminus \Theta_0$ и пусть задана верхняя грань α, $0<\alpha<1$, вероятностей ошибок 1-го рода, к-рые можно совершить, отклоняя проверяемую гипотезу H_0 с помощью статистич. критерия, когда она в действительности верна (число α наз. **уровнем значимости критерия**, а про сам критерий говорят, что он имеет уровень α). Таким образом, ограничение на вероятности ошибок 1-го рода сужает множество всех статистич. критериев, предназначенных для проверки H_0 против H_1, до класса критериев уровня α. В терминах функции мощности $\beta(\theta)$, $\theta \in \Theta=\Theta_0 \cup \Theta_1$, статистич. критерия фиксирование уровня значимости α означает, что

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta)=\alpha.$$

Если в классе всех статистич. критериев уровня α, предназначенных для проверки H_0 против H_1, существует такой, что его функция мощности $\beta^*(\theta)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta^*(\theta)=\alpha, \quad \beta^*(\theta) \geqslant \beta(\theta), \quad \theta \in \Theta_1,$$

где $\beta(\theta)$ — функция мощности любого другого критерия из этого же класса, то такой критерий наз. равномерно наиболее мощным критерием уровня α для проверки H_0 против H_1. Р. н. м.к. является наилучшим критерием, если сравнение критериев производят в терминах мощности критериев.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИЙСЯ РЯД — функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad x \in X, \tag{1}$$

с (вообще говоря) комплексными членами, сходящийся на множестве X, и такой, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon,$$

где

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$$

и

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x).$$

Иными словами, последовательность частичных сумм $s_n(x)$ является равномерно сходящейся последовательностью. Определение Р. с. р. равносильно выполнению условия

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in X} |r_n(x)| = 0,$$

что означает равномерную сходимость к нулю на множестве X последовательности остатков

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n(x), \; n = 1, 2, \ldots,$$

ряда (1).

Пример. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

равномерно сходится на каждом конечном круге комплексной плоскости и не сходится равномерно на всем множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Условие равномерной сходимости ряда (1) на множестве X без использования понятия суммы ряда дает *Коши критерий* равномерной сходимости ряда. Достаточное условие равномерной сходимости ряда дается *Вейерштрасса признаком*.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ наз. правильно сходящимся на множестве X, если существует такой числовой ряд $\sum \alpha_n$, $\alpha_n \geqslant 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|a_n(x)| \leqslant \alpha_n,$$

т. е. если ряд (1) удовлетворяет условиям признака Вейерштрасса равномерной сходимости рядов. В силу этого признака правильно сходящийся на множестве X ряд равномерно сходится на этом множестве. Обратное, вообще говоря, неверно; однако во всяком равномерно сходящемся на множестве X ряде можно так объединить следующие друг за другом его члены в конечные группы, что получившийся при этом ряд будет уже правильно сходиться на множестве X.

Имеются признаки равномерной сходимости ряда, аналогичные признакам Дирихле и Абеля для сходимости числового ряда. Эти признаки равномерной сходимости ряда впервые встречаются в работах Г. Харди (G. Hardy). Если в ряде

$$\sum a_n(x)\, b_n(x) \tag{2}$$

функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, определенные на множестве X, таковы, что последовательность $\{a_n(x)\}$

монотонна при каждом $x \in X$ и равномерно стремится к нулю на X, а последовательность частичных сумм $\{B_n(x)\}$ ряда $\sum b_n(x)$ равномерно ограничена на множестве X, то ряд (2) равномерно сходится на этом множестве.

Если последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно ограничена на множестве X и монотонна при каждом фиксированном $x \in X$, а ряд $\sum b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X, то ряд (2) также равномерно сходится на X.

Свойства равномерно сходящихся рядов. Если ряды $\sum a_n(x)$ и $\sum b_n(x)$ равномерно сходятся на множестве X, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\mu \in \mathbb{C}$, то ряд

$$\sum \lambda a_n(x) + \mu b_n(x)$$

также равномерно сходится на множестве X.

Если ряд $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на множестве X, а $b(x)$ — ограниченная на этом множестве функция, то ряд $\sum b(x) a_n(x)$ также равномерно сходится на X.

Непрерывность суммы ряда. Для изучения свойств суммы функционального ряда является полезным понятие «точки равномерной сходимости ряда». Пусть X — топологич. пространство и ряд (1) сходится на X. Точка $x_0 \in X$ наз. точкой равномерной сходимости ряда (1), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0 и такой номер x_{n_ε}, что для всех $x \in U$ и всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$.

Если множество X — компакт, то, для того чтобы ряд (1) равномерно сходился на X, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка $x \in X$ являлась точкой его равномерной сходимости.

Если X — топологич. пространство, ряд (1) сходится на X, x_0 — точка равномерной сходимости ряда (1) и существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to x_0} a_n(x) = c_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то числовой ряд $\sum c_n$ сходится, сумма $s(x)$ ряда (1) имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} s(x) = \lim_{x \to x_0} \sum a_n(x) = \sum \lim_{x \to x_0} a_n(x) = \sum c_n, \quad (3)$$

т. е. при сделанных предположениях в ряде (1) возможен почленный переход к пределу в смысле формулы (3). Отсюда следует, что если ряд (1) сходится на X, его члены непрерывны в точке равномерной сходимости $x_0 \in X$, то его сумма также непрерывна в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} s(x) = \sum \lim_{x \to x_0} a_n(x) = \sum a_n(x_0) = s(x_0).$$

Поэтому если ряд непрерывных функций сходится равномерно на топологич. пространстве, то его сумма непрерывна на этом пространстве. В случае, когда пространство X является компактом и члены ряда (1) неотрицательны на X, то равномерная сходимость ряда (1) является и необходимым условием для непрерывности на X суммы ряда (1) (см. *Дини теорема*).

В общем случае необходимым и достаточным условием для непрерывности суммы сходящегося на топологич. пространстве X ряда (1), члены к-рого непрерывны на X, является *квазиравномерная сходимость* последовательности его частичных сумм $s_n(x)$ к его сумме $s(x)$ (теорема Арцела — Александрова).

Ответ на вопрос о существовании точек равномерной сходимости у сходящихся рядов, непрерывных на отрезке функций, дает теорема Осгуда — Гобсона: если ряд (1) сходится в каждой точке отрезка $[a, b]$ и члены $a_n(x)$ этого ряда непрерывны на $[a, b]$, то на отрезке $[a, b]$ существует всюду плотное множество точек равномерной сходимости ряда (1). Отсюда следует, что сумма всякого ряда непрерывных функций, сходящегося на нек-ром отрезке, непрерывна на всюду плотном множестве этого отрезка. Вместе с тем существует и сходящийся во всех точках отрезка ряд непрерывных функций такой, что точки, в к-рых он сходится не равномерно, образуют всюду плотное множество рассматриваемого отрезка.

Почленное интегрирование равномерно сходящихся рядов. Пусть $X=[a, b]$. Если члены ряда

$$\sum a_n(x), \; x \in [a, b], \tag{4}$$

интегрируемы по Риману (по Лебегу) на отрезке $[a, b]$, а ряд (4) равномерно сходится на этом отрезке, то его сумма $s(x)$ также интегрируема по Риману (по Лебегу) на $[a, b]$ и для любого $x \in [a, b]$ имеет место равенство

$$\int_a^x s(t)\,dt = \int_a^x \left[\sum a_n(t)\right] dt = \sum \int_a^x a_n(t)\,dt, \tag{5}$$

причем ряд, стоящий в правой части равенства, сходится равномерно на отрезке $[a, b]$.

В этой теореме нельзя заменить условие равномерной сходимости ряда (4) просто условием его сходимости на отрезке $[a, b]$, так как существуют сходящиеся на отрезке ряды даже непрерывных функций с непрерывной суммой, для к-рых неверна формула (5). Вместе с тем существуют различные ее обобщения. Ниже приведен результат для интеграла Стилтьеса.

Если $g(x)$ — возрастающая на отрезке $[a, b]$ функция, $a_n(x)$ — интегрируемы по Стилтьесу относительно функции $g(x)$, ряд (4) сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, то сумма $s(x)$ ряда (4) также интегрируема по Стилтьесу относительно функции $g(x)$,

$$\int_a^x s(t)\,dg(t) = \sum \int_a^x a_n(t)\,dg(t),$$

и ряд, стоящий в правой части равенства, сходится равномерно на отрезке $[a, b]$.

Обобщается формула (5) и на функции многих переменных.

Условия почленного дифференцирования рядов в терминах равномерной сходимости. Если члены ряда (4) непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, ряд (4) сходится в нек-рой точке этого отрезка, а ряд, составленный из производных членов ряда (4), равномерно сходится на $[a, b]$, то сам ряд (4) также равномерно сходится на отрезке $[a, b]$, а его сумма $s(x)$ непрерывно дифференцируема на нем и

$$\frac{d}{dx} s(x) = \frac{d}{dx} \sum a_n(x) = \sum \frac{d}{dx} a_n(x). \tag{6}$$

В этой теореме условие равномерной сходимости ряда, получающегося из данного почленным дифференцированием, нельзя заменить просто условием его сходимости на отрезке $[a, b]$, так как существуют равномерно сходящиеся на отрезке ряды непрерывно дифференцируемых функций, для к-рых ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием, сходятся на отрезке, однако сумма исходного ряда либо недифференцируема на всем рассматриваемом отрезке, либо дифференцируема, но ее производная не равна сумме ряда из производных.

Таким образом, наличие свойства равномерной сходимости у рядов, так же как и свойства абсолютной сходимости (см. *Абсолютно сходящийся ряд*), позволяет перенести на эти ряды нек-рые правила действия с конечными суммами: равномерная сходимость — возможность почленно переходить к пределу, почленно интегрировать и дифференцировать ряды (см. формулы (3) — (6)), а абсолютная сходимость — возможность переставлять члены ряда в любом порядке без изменения его суммы и перемножать ряды почленно.

Свойства абсолютной и равномерной сходимости функциональных рядов независимы друг от друга. Так, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

поскольку все его члены не отрицательны, абсолютно сходится на всей числовой оси, но заведомо точка $x=0$ не является его точкой равномерной сходимости, т. к. его сумма

$$s(x) = \begin{cases} 1+x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x=0 \end{cases}$$

разрывна в этой точке.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$$

равномерно сходится на всей действительности оси, но не сходится абсолютно ни в какой ее точке.

Лит. см. при ст. *Ряд*. *Л. Д. Кудрявцев.*

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ — то же, что *чебышевское приближение*.

РАВНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — множество с определенной на нем равномерной структурой. Равномерная структура (равномерность) на множестве X определяется заданием нек-рой системы $\mathfrak{A}$ подмножеств произведения $X \times X$. При этом система $\mathfrak{A}$ должна быть фильтром (т. е. для любых $V_1, V_2 \in \mathfrak{A}$ пересечение $V_1 \cap V_2$ также содержится в $\mathfrak{A}$, и если $W \supset V$, $V \in \mathfrak{A}$, то $W \in \mathfrak{A}$) и должна удовлетворять следующим аксиомам.

U1) Всякое множество $V \in \mathfrak{A}$ содержит диагональ $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$.

U2) Если $V \in \mathfrak{A}$, то $V^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in V\} \in \mathfrak{A}$.

U3) Для любого $V \in \mathfrak{A}$ существует $W \in \mathfrak{A}$ такое, что $W \circ W \subset V$, где $W \circ W = \{(x, y)$: существует такое $z \in X$, что $(x, z) \in W$ и $(z, y) \in W\}$. Элементы $\mathfrak{A}$ наз. окружениями равномерности, определяемой системой $\mathfrak{A}$.

Равномерность на множестве X может быть определена также путем задания на X системы покрытий $\mathfrak{C}$, удовлетворяющей следующим аксиомам.

C1) Если $\alpha \in \mathfrak{C}$ и α вписано в покрытие β, то $\beta \in \mathfrak{C}$.

C2) Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{C}$ существует покрытие $\beta \in \mathfrak{C}$, к-рое звездно вписано в α_1 и в α_2 (т. е. для любой точки $x \in X$ все элементы β, содержащие x, лежат в нек-рых элементах α_1 и α_2). Покрытия, принадлежащие $\mathfrak{C}$, наз. равномерными покрытиями X (относительно равномерности, определяемой системой $\mathfrak{C}$).

Указанные два способа задания равномерной структуры эквивалентны. Напр., если равномерная структура на X задана системой окружений $\mathfrak{A}$, то система $\mathfrak{C}$ равномерных покрытий X может быть построена так. Для всякого $V \in \mathfrak{C}$ семейство $\alpha(V) = \{Y(x) : x \in X\}$ (где $V(x) = \{y : (x, y) \in V\}$) является покрытием X. Покрытие α принадлежит $\mathfrak{C}$ тогда и только тогда, когда существует вписанное в α покрытие вида $\alpha(V)$, $V \in \mathfrak{A}$. Обратно, если $\mathfrak{C}$ — система равномерных покрытий Р. п., систему окружений образуют множества вида $\bigcup \{H \times H : H \in \alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{C}$, и всевозможные множества, их содержащие.

Равномерная структура на X может быть задана также с помощью системы *псевдометрик*. Всякая равномерность на множестве X порождает топологию: $T = \{G \subset X$: для любой точки $x \in G$ существует такое $V \in \mathfrak{A}$, что $V(x) \in G\}$.

Свойства Р. п. являются обобщением равномерных свойств *метрических пространств*. Если (X, ρ) — метрич. пространство, на X возникает равномерность, порожденная метрикой ρ. Систему окружений этой равномерности образуют всевозможные множества, содержащие множества вида $\{(x, y) : \rho(x, y) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. При этом топологии на X, индуцированные метрикой и равномерностью, совпадают. Равномерные структуры, порожденные метриками, наз. метризуемыми.

Р. п. были введены в 1937 А. Вейлем [1] (посредством окружений; определение Р. п. посредством равномерных покрытий было дано в 1940, см. [4]). Однако идея использования многократной звездной вписанности для построения функций появилась ранее у Л. С. Понтрягина (см. [5]) (впоследствии эта идея была использована при доказательстве полной регулярности топологии отделимого Р. п.). Первоначально равномерные структуры использовались как инструмент для изучения (порожденных ими) топологий (подобно тому, как метрика на метризуемом пространстве часто используется для изучения топологич. свойств этого пространства). Однако теория Р. п. имеет и самостоятельное значение, хотя и тесно связана с теорией топологич. пространств.

Отображение $f: X \to Y$ Р. п. X в Р. п. Y наз. равномерно непрерывным, если для любого равномерного покрытия α пространства Y система $f^{-1}\alpha = \{f^{-1}U : U \in \alpha\}$ является равномерным покрытием X. Всякое равномерно непрерывное отображение является непрерывным относительно топологий, порожденных равномерными структурами на X и Y. Если равномерные структуры на X и Y индуцированы метриками, то равномерно непрерывное отображение $f: X \to Y$ оказывается равномерно непрерывным в классич. смысле как отображение метрич. пространств.

Более содержательной является теория Р. п., к-рая удовлетворяет дополнительной аксиоме отделимости:

$$\text{U4)}\ \bigcap_{V \in \mathfrak{A}} V = \Delta$$

(в терминах окружений) или (в терминах равномерных покрытий):

С3) для любых двух точек $x, y \in X$, $x \neq y$, существует такое $\alpha \in \mathfrak{C}$, что никакой элемент α не содержит точки x и y одновременно.

Далее речь будет идти только о Р. п., наделенных отделимой равномерной структурой. Топология, порожденная на X отделимой равномерностью, является вполне регулярной и обратно, всякая вполне регулярная топология на X порождается нек-рой отделимой равномерной структурой. Как правило, существует много различных равномерностей, порождающих одинаковую топологию на X. В частности, метризуемая топология может порождаться неметризуемой отделимой равномерностью.

Р. п. $(X, \mathfrak{A})$ является метризуемым тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ имеют счетную базу. При этом базой равномерности наз. (в терминах окружений) всякая подсистема $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, удовлетворяющая условию: для любого $V \in \mathfrak{A}$ существует такое $W \in \mathfrak{B}$, что $W \subset V$, или (в терминах равномерных покрытий) подсистема $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$ такая, что для любого $\alpha \in \mathfrak{C}$ существует $\beta \in \mathfrak{A}$, к-рое вписано в α. Весом Р. п. $(X, \mathfrak{A})$ наз. наименьшая мощность базы равномерности $\mathfrak{A}$.

Пусть M — подмножество Р. п. $(X, \mathfrak{A})$. Система окружений $\mathfrak{A}_M = \{(M \times M) \cap V : V \in \mathfrak{A}\}$ определяет равномерность на M. Пара $(M, \mathfrak{A}_M)$ наз. подпространством Р. п. $(X, \mathfrak{A})$. Отображение $f: X \to Y$ Р. п. $(X, \mathfrak{A})$ в Р. п. $(Y, \mathfrak{A}')$ наз. равномерным вложением, если f взаимно однозначно, равномерно непрерывно и отображение $f^{-1}: (fX, \mathfrak{A}'_{fX}) \to (X, \mathfrak{A})$ также равномерно непрерывно.

Р. п. X наз. полным, если всякий фильтр Коши в X (т. е. фильтр, содержащий нек-рый элемент всякого равномерного покрытия) имеет точку прикосновения (т. е. точку, лежащую в пересечении замыканий элементов фильтра). Метризуемое Р. п. является полным тогда и только тогда, когда полна метрика, порождающая его равномерность. Любое Р. п. $(X, \mathfrak{A})$ может быть равномерно вложено в качестве всюду плотного подмножества в единственное (с точностью до равномерного изоморфизма) полное Р. п. $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{A}})$, к-рое наз. пополнением $(X, \mathfrak{A})$. Топология пополнения $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{A}})$ Р. п. $(X, \mathfrak{A})$ бикомпактна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ является прекомпактной равномерностью (т. е. такой, что в любое равномерное покрытие можно вписать конечное равномерное покрытие). В этом случае пространство $\tilde{X}$ является бикомпактным расширением X и наз. расширением Самюэля пространства X относительно равномерности $\mathfrak{A}$. Для всякого бикомпактного расширения bX пространства X существует единственная прекомпактная равномерность на X, расширение Самюэля относительно к-рой совпадает с bX. Таким образом, на языке прекомпактных равномерностей описываются все бикомпактные расширения bX. На бикомпактном пространстве существует единственная равномерность (полная и прекомпактная).

Всякая равномерность $\mathfrak{A}$ на множестве X индуцирует близость δ по следующей формуле:

$$A\delta B \Leftrightarrow (A\times B)\cap V \neq \varnothing$$

для любого $V\in\mathfrak{A}$. При этом топологии, порожденные на X равномерностью $\mathfrak{A}$ и близостью δ, совпадают. Любое равномерно непрерывное отображение является близостно непрерывным относительно близостей, порожденных равномерностями. Как правило, существует много различных равномерностей, порождающих на X одну и ту же близость. Тем самым множество равномерностей на X распадается на классы эквивалентности (две равномерности эквивалентны, если индуцированные ими близости совпадают). Каждый класс эквивалентных равномерностей содержит ровно одну прекомпактную равномерность, причем расширения Самюэля относительно этой равномерности совпадают с расширениями Смирнова (см. *Близости пространство*) относительно близости, индуцированной равномерностями этого класса. В множестве равномерностей на X задается естественный частичный порядок: $\mathfrak{A}>\mathfrak{A}'$, если $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}'$. Среди всех равномерностей, порождающих на X фиксированную топологию, есть наибольшая — т. н. универсальная равномерность, к-рая индуцирует на X близость Стоуна — Чеха. Всякая прекомпактная равномерность является наименьшим элементом в классе эквивалентных ей равномерностей. Если $\mathfrak{C}$ — система равномерных покрытий нек-рой равномерности на X, то система равномерных покрытий эквивалентной прекомпактной равномерности состоит из таких покрытий X, в к-рые можно вписать конечные покрытия из $\mathfrak{C}$.

Произведением Р. п. $(X_t, \mathfrak{A}_t)$, $t\in T$, наз. Р. п. $(\Pi X_t,\ \Pi\mathfrak{A}_t)$, где $\Pi\mathfrak{A}_t$ — равномерность на ΠX_t, базу окружений к-рой образуют множества вида

$$\left\{(\{x_t\},\ \{y_t\})\colon \left(x_{t_i},\ y_{t_i}\right)\in V_{t_i},\ i=1,\ \ldots,\ n\right\},$$

$$t_i\in T,\ V_{t_i}\in\mathfrak{A}_{t_i},\ n=1,2,\ \ldots .$$

Топология, индуцированная на ΠX_t равномерностью $\Pi\mathfrak{A}_t$, совпадает с топологией тихоновского произведения пространств X_t. Проекции произведения Р. п. на сомножители равномерно непрерывны. Всякое Р. п. веса τ может быть вложено в произведение τ экземпляров метризуемых Р. п.

Семейство F непрерывных отображений топологич. пространства X в Р. п. $(Y, \mathfrak{A})$ наз. равностепенно **непрерывным** (относительно равномерности $\mathfrak{A}$), если для любой точки $x \in X$ и любого $V \in \mathfrak{A}$ существует окрестность $O_x \ni x$ такая, что $(f(x), f(x')) \in V$ при $x' \in O_x$ и $f \in F$. Имеет место следующее обобщение классич. теоремы Асколи: пусть X есть k-пространство, $(Y, \mathfrak{A})$ — равномерное пространство и Y^X — пространство непрерывных отображений X в Y с компактно открытой топологией. Для того чтобы замкнутое подмножество $F \subset Y^X$ было бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы F было равностепенно непрерывно относительно равномерности $\mathfrak{A}$ и все множества $\{f(x): f \in F\}$, $x \in X$, имели бикомпактные замыкания в Y (k-пространства — это хаусдорфовы пространства, являющиеся факторным образом локально компактных пространств; класс k-пространств содержит все хаусдорфовы пространства с первой аксиомой счетности и все хаусдорфовы локально бикомпактные пространства).

Топология метризуемого Р. п. паракомпактна в силу теоремы Стоуна. Однако решается отрицательно проблема Исбелла о равномерной паракомпактности метризуемых Р. п. Построен пример метризуемого Р. п., имеющего равномерное покрытие.

В теории размерности Р. п. основными являются равномерные размерностные инварианты $\delta \mathrm{d}$ и $\Delta \mathrm{d}$, определяемые аналогично топологич. размерности dim ($\delta \mathrm{d}$ — при помощи конечных равномерных покрытий, а $\Delta \mathrm{d}$ — при помощи всех равномерных покрытий), и равномерная индуктивная размерность $\delta \mathrm{Ind}$. Размерность $\delta \mathrm{Ind}$ определяется по аналогии с большой индуктивной размерностью Ind индукцией по размерности близостных перегородок между далекими (в смысле близости, порожденной равномерностью) множествами. При этом множество H наз. **близостной перегородкой** между A и B (где $A \,\delta\, B$), если для любой δ-окрестности U множества H такой, что $U \cap (A \cup B) \neq \varnothing$, имеет место $X \setminus U = A' \cup B'$, где $A' \bar{\delta} B'$, $A \subset A'$, $B \subset B'$ (U наз. δ-окрестностью H, если $H \;\bar{\delta}\, (X \setminus U)$. Таким образом, размерность $\delta \mathrm{Ind}$ (равно как и $\delta \mathrm{d}$) является не только равномерным, но и близостным инвариантом. Размерность $\delta \mathrm{d}$ Р. п. (X, U) совпадает с обычной размерностью dim расширения Самюэля, построенного по эквивалентной $\mathfrak{A}$ прекомпактной равномерности. Если размерность $\Delta \mathrm{d} X$ конечна, то $\Delta \mathrm{d} X = \delta \mathrm{d} X$. Однако может быть $\delta \mathrm{d} X = 0$, а $\Delta \mathrm{d} X = \infty$. Для метризуемого Р. п. всегда $\delta \mathrm{d} X \leqslant \delta \mathrm{Ind}\, X = \Delta \mathrm{d} X$ (и если $\Delta \mathrm{d} X < \infty$, то $\delta \mathrm{d} X = \delta \mathrm{Ind}\, X = \Delta \mathrm{d} X$). Равенства $\delta \mathrm{d} X = 0$ и $\delta \mathrm{Ind}\, X = 0$ эквивалентны для любого Р. п. Если Р. п. метризуемо, то эквивалентны также равенства $\delta \mathrm{d} X = 0$ и $\Delta \mathrm{d} X = 0$. Если Р. п. X' является всюду плотным подмножеством Р. п. X, то $\delta \mathrm{Ind}\, X' \geqslant \delta \mathrm{Ind}\, X$. Всегда $\delta \mathrm{Ind}\, X \leqslant \mathrm{Ind}\, X$. Для размерности $\delta \mathrm{d}$ имеет место аналог теоремы о перегородках.

Различные обобщения Р. п. получаются путем ослабления аксиом равномерности. Так, в аксиоматике квазиравномерности (см. [8]) исключена аксиома симметрии. При определении обобщенной равномерности (см. [10]) (f-равномерности) вместо равномерных покрытий рассматриваются равномерные семейства подмножеств X, к-рые, вообще говоря, не являются покрытиями (тела этих семейств оказываются всюду плотными в X в топологии, порожденной f-равномерностью). Одно из обобщений равномерности — так наз. **θ-равномерность** — связано с наличием топологии на Р. п. Она определяется семействами θ-покрытий хаусдорфова пространства; θ-покрытиями наз. система η канонических открытых множеств X, удовлетворяющих следующему условию: для любой точки $x \in X$ существуют $V_1, \ldots, V_n \in \eta$ такие, что $x \in \operatorname{int} \bigcup_{i=1}^{n} [V_i]$.

Лит.: [1] Weil A., Sur les espaces à structure uniforme et sur le topologie générale, P., 1937; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., 2 изд., М., 1968; [3] его же, Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь, пер. с франц., М., 1975; [4] Tukey J., Ann. of Math. Studies 2, Princeton, 1940; [5] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [6] Isbell J., Uniform spaces, Providence, 1964; [7] Samuel P., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 64, p. 100—32; [8] Császár A., Foundations of general topology, Oxford—[etc.], 1963; [9] Федорчук В. В., «Докл. АН СССР», 1970, т. 192, № 6, с. 1228—30; [10] Kulpa W., «Colloq. Math.», 1972, v. 25, p. 227—40; [11] Щепин Е. В., «Докл. АН СССР», 1975, т. 222, № 3, с. 541—43. *А. В. Иванов, Н. С. Стрековская.*

РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — общее название класса распределений вероятностей, возникающего при распространении идеи «равновозможности исходов» на непрерывный случай. Подобно нормальному распределению Р. р. появляется в теории вероятностей как точное распределение в одних задачах и как предельное — в других.

Р. р. на отрезке числовой прямой (прямоугольное распределение). Р. р. на каком-либо отрезке $[a, b]$, $a<b$, — это распределений вероятностей, имеющее плотность

$$p(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x\in[a, b], \\ 0, & x\notin[a, b]. \end{cases}$$

Понятие Р. р. на $[a, b]$ соответствует представлению о случайном выборе точки на этом отрезке «наудачу». Математич. ожидание и дисперсия Р. р. равны, соответственно, $(b+a)/2$ и $(b-a)^2/12$. Функция распределения задается формулой

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x\leqslant b, \\ 1, & x>b, \end{cases}$$

а характеристич. функция — формулой

$$\varphi(t)=\frac{1}{it(b-a)}(e^{itb}-e^{ita}).$$

Случайную величину с Р. р. на [0,1] можно построить, исходя из последовательности независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, принимающих значения 0 и 1 с вероятностями $1/2$, полагая

$$X=\sum_{n=1}^{\infty} X_n 2^{-n}$$

(X_n являются цифрами в двоичном разложении X). Случайное число X имеет Р. р. на отрезке [0,1]. Этот факт имеет важные статистич. приложения, см., напр., *Случайные и псевдослучайные числа.*

Если независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют Р. р. на [0,1], то их сумма X_1+X_2 имеет так наз. треугольное распределение на [0,2] с плотностью $u_2(x)=1-|1-x|$ для $x\in[0,2]$ и $u_2(x)=0$ для $x\notin[0,2]$. Сумма трех независимых случайных величин с Р. р. на [0,1] имеет распределение на [0,3] с плотностью

$$u_3(x)=\begin{cases} x^2/2, & 0\leqslant x<1, \\ [x^2-3(x-1)^2]/2, & 1\leqslant x<2, \\ [x^2-3(x-1)^2+3(x-2)^2]/2, & 2\leqslant x<3, \\ 0, & x\notin[0, 3]. \end{cases}$$

В общем случае сумма $X_1+X_2+\ldots+X_n$ независимых величин с Р. р. на [0,1] распределена с плотностью

$$u_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (x-k)_+^{n-1}$$

для $0\leqslant x\leqslant n$ и $u_n(x)=0$ для $x\notin[0, n]$; здесь

$$z_+=\begin{cases} z, & z>0, \\ 0, & z\leqslant 0. \end{cases}$$

Распределение суммы $X_1+\ldots+X_n$, нормированной математич. ожиданием $n/2$ и среднеквадратич. отклонением $\sqrt{n/12}$, с ростом n быстро сближается с нормальным распределением с параметрами 0 и 1 (уже при $n=3$ приближение удовлетворительно для многих практич. целей).

В статистич. приложениях процедура построения случайной величины с заданной функцией распределения $F(x)$ основана на следующем факте. Пусть случайная величина Y распределена равномерно на $[0,1]$ и функция распределения $F(x)$ непрерывна и строго возрастает. Тогда случайная величина $X=F^{-1}(Y)$ имеет функцию распределения $F(x)$ (в общем случае надо заменить в определении X функцию $F^{-1}(y)$ на нек-рый ее аналог, а именно $f(y)=\inf\limits_x \{x: F(x)\leqslant y\leqslant F(x+0)\}$).

Р. р. на отрезке как предельное распределение. Ниже приводятся типичные примеры возникновения Р. р. на $[0,1]$ в качестве предельного.

1) Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие одну и ту же непрерывную функцию распределения. Тогда распределение их суммы S_n, приведенной по mod 1, т. е., иными словами, распределение дробной части $\{S_n\}$ суммы S_n, сходится к равномерному на $[0, 1]$ распределению.

2) Пусть параметры α и β имеют абсолютно непрерывное совместное распределение; тогда при $t\to\infty$ распределение $\{\alpha t+\beta\}$ сходится к равномерному на $[0,1]$.

3) Р. р. встречается как предельное распределение дробных долей нек-рых функций $g(n)$ натурального аргумента n. Напр., при иррациональном α доля тех m, $1\leqslant m\leqslant n$, из n для к-рых

$$0\leqslant a\leqslant \{n\alpha\}\leqslant b\leqslant 1,$$

имеет пределом при $n\to\infty$ величину $b-a$.

Р. р. на подмножествах $\mathbb{R}^k$. Пример Р. р. в прямоугольнике встречается уже в *Бюффона задаче* (см. также *Геометрические вероятности*, *Стохастическая геометрия*). Р. р. на нек-ром ограниченном множестве D в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ определяется как распределение, имеющее плотность

$$p(x_1, \ldots, x_n)=\begin{cases} C\neq 0, & x\in D,\\ 0, & x\notin D,\end{cases}$$

где C обратна k-мерному объему (или лебеговой мере) области D.

Рассматривают также и Р. р. на поверхностях. Так, «случайное направление» (напр., в $\mathbb{R}^3$) определяют вектором, идущим из начала координат в случайную точку поверхности единичной сферы, равномерно распределенную в том смысле, что вероятность ее попадания в какую-либо часть поверхности пропорциональна площади этой части.

Роль Р. р. на алгебраич. группах играет нормированная *Хаара мера*.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967.

А. В. Прохоров.

РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ТОПОЛОГИЯ — топология пространства $\mathcal{F}(X, Y)$ отображений множества X в *равномерное пространство* Y, порожденная равномерной структурой множества $\mathcal{F}(X, Y)$, базой окружений к-рой являются совокупности всех пар $(f, g)\in\mathcal{F}(X, Y)\times\mathcal{F}(X, Y)$ таких, что $(f(x), g(x))\in v$ для любого $x\in X$ и v пробегает базу окружений пространства Y. Сходимость направления $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}\subset\mathcal{F}(X, Y)$ к $f_0\in\mathcal{F}(X, Y)$ в такой топологии наз. сходимостью f_α к f_0, равномерной на множестве X. Если Y полно, то $\mathcal{F}(X, Y)$ — полное пространство в топологии равномерной сходимости. Если X — топологич. пространство и $\mathcal{C}(X, Y)$ — множество всех непрерывных в топологии пространства X отображений X в Y, то $\mathcal{C}(X, Y)$

замкнуто в $\mathscr{F}(X, Y)$ в Р. с. т.; в частности, предел $f_0(x)$ равномерно сходящейся последовательности $f_n(x)$ непрерывных на X отображений есть отображение, также непрерывное на X.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь, пер. с франц., М., 1975; [2] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981. *В. И. Соболев.*

РАВНОСИЛЬНОСТЬ, или эквивалентность, утверждений (формул) A и B — понятие, означающее, что при каждом допустимом наборе значений параметров утверждения A и B оба истинны или оба ложны. Напр., Р. уравнений, неравенств и их систем означает совпадение множеств их решений. Р. формул *высказываний исчисления* есть совпадение задаваемых ими *булевых функций.*

Лит.: [1] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973. *С. Н. Артемов.*

РАВНОСИЛЬНЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ — методы, суммирующие одни и те же последовательности (быть может, к разным пределам); иначе, Р. м. с.— методы суммирования, имеющие одно и то же *суммируемости поле.* Иногда Р. м. с. наз. методы, к-рые имеют одинаковые поля суммируемости и являются совместными методами суммирования. Примерами равносильных и совместных методов суммирования являются *Чезаро метод суммирования* (C, k) и *Рисса метод суммирования* (R, n, k) (при одном и том же $k \geqslant 0$), Чезаро метод суммирования (C, k) и *Гёльдера метод суммирования* (H, k) (при одном и том же целом $k \geqslant 0$). Существуют Р. м. с., не являющиеся совместными.

Иногда рассматривают не полные поля суммируемости, а их подмножества, принадлежащие нек-рому множеству U. Если для двух методов суммирования эти подмножества совпадают, то говорят, что методы суммирования равносильны на множестве U. Методы суммирования действительных последовательностей наз. вполне равносильными, если равенство их полей суммируемости остается справедливым при включении в них последовательностей, суммируемых к $+\infty$ и $-\infty$. Аналогично определяется равносильность методов суммирования для специальных видов суммируемости (абсолютной, сильной и др.).

Матричные методы суммирования, определенные преобразованиями последовательности в последовательность посредством матриц $\|a_{nk}\|$ и $\|b_{nk}\|$, наз. абсолютно равносильными (абсолютно эквивалентными) на множестве U последовательностей $\{s_k\}$, если $\tau_n^{(A)} - \tau_n^{(B)} \to 0$, $n \to \infty$, для любой $\{s_k\} \subset U$, где

$$\tau_n^{(A)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k, \quad \tau_n^{(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} s_k,$$

а ряды в выражениях для $\tau_n^{(A)}$ и $\tau_n^{(B)}$ сходятся для всех n.

Лит.: [1] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [3] Кангро Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70. *И. И. Волков.*

РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ множества функций — понятие, тесно связанное с понятием компактности множества непрерывных функций. Пусть X, Y — компактные метрич. пространства и $C(X, Y)$ — множество непрерывных отображений X в Y. Множество $D \subset C(X, Y)$ наз. равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\rho_X(x_1, x_2) \leqslant \delta$ вытекает $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \varepsilon$ для всех $x_1, x_2 \in X$, $f \in D$. Р. н. D эквивалентна относительной компактности D в $C(X, Y)$, наделенном метрикой

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} \rho_Y(f(x), g(x)),$$

что составляет содержание теоремы Арцела — Асколи. Понятие Р. н. переносится на топологич. пространства.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Эдвардс Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969. *Е. М. Семенов.*

РАВНОСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ — такие сходящиеся или расходящиеся числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, разность к-рых является сходящимся рядом с суммой, равной нулю: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=0$. Если же их разность является лишь сходящимся рядом, то исходные ряды наз. равносходящимися в широком смысле.

Если $a_n=a_n(x)$ и $b_n=b_n(x)$ — функции, напр. $a_n: X \to \mathbb{R}$, $b_n: X \to \mathbb{R}$, где X — произвольное множество, а $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ наз. равномерно равносходящимися (равномерно равносходящимися в широком смысле) на множестве X, если их разность есть ряд, к-рый равномерно сходится на X и его сумма равна нулю (соответственно просто равномерно сходится на X).

Пример. Если две интегрируемые на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции равны на интервале $I\subset[-\pi, \pi]$, то их ряды Фурье — равномерно равносходящиеся на каждом интервале I^*, внутреннем к интервалу I, а сопряженные ряды Фурье — равномерно равносходящиеся на I^* в широком смысле. *Л. Д. Кудрявцев.*

РАДЕМАХЕРА СИСТЕМА — ортонормированная на отрезке $[0,1]$ система $\{r_k(x)\}$. Введена Х. Радемахером [1]. Функции $r_k(x)$ можно определить равенствами

$$r_k(x)=\operatorname{sign}\sin 2^k \pi x, \quad x\in[0, 1], \ k=1, 2, \ldots$$

Другое определение функций Радемахера $r_k(x)$ получается путем рассмотрения двоичных разложений чисел отрезка $[0,1]$: если в двоичном разложении числа x на k-м месте стоит цифра 0, то полагают $r_k(x)=1$, если же на k-м месте стоит 1, то $r_k(x)=-1$; в случае же, когда $x=0$ или число x допускает два разложения, полагают $r_k(x)=0$. Согласно этому определению отрезок $[0,1]$ распадается на 2^k равных подинтервала, в каждом из которых функция $r_k(x)$ принимает попеременно значения $+1$ и -1, а на концах подинтервалов $r_k(x)=0$.

Система $\{r_k(x)\}$ представляет типичный пример стохастически независимых функций и имеет применения как в теории вероятностей, так и в теории ортогональных рядов.

Одно из важных свойств Р. с. устанавливается теоремой Радемахера: если $\sum c_k^2<+\infty$, то ряд $\sum c_k r_k(x)$ сходится почти всюду на $[0,1]$, и теоремой Хинчина — Колмогорова: если $\sum c_k^2=+\infty$, то ряд $\sum c_k r_k(x)$ расходится почти всюду на $[0,1]$.

Так как функции Радемахера в двоично иррациональных точках интервала $[0,1]$ принимают лишь значения ± 1, то рассмотрение ряда $\sum c_n r_n(x)$ означает, что у членов ряда $\sum c_n$ выбирается распределение знаков ± 1, зависящее от точки x. Если $x=0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ — представление числа $x\in[0,1]$ в виде бесконечной двоичной дроби, то при $\alpha_n=0$ перед c_n ставится знак $+$ и при $\alpha_n=1$ ставится знак $-$.

Вышеприведенные теоремы в терминах теории вероятностей означают, что если $\sum c_n^2<+\infty$, то ряд $\sum \pm c_n$ сходится для почти всех распределений знаков (сходится с вероятностью 1), и если $\sum c_n^2=+\infty$, то ряд $\sum \pm c_n$

расходится для почти всех распределений знаков (расходится с вероятностью 1).

Наоборот, ряд теорем теории вероятностей можно сформулировать в терминах функций Радемахера. Напр., теорема Кантелли о том, что при игре «в герб и решетку» со ставкой 1 средний выигрыш с вероятностью 1 стремится к нулю, означает, что почти всюду на [0,1] выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k(x)=0.$$

Лит.: [1] Rademacher H., «Math. Ann.», 1922, Bd 87, S. 112—38; [2] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [3] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963; [4] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963.

А. А. Талалян.

РАДИАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ — значение функции $f(z)$, определенной в единичном круге $D=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ в граничной точке $\zeta=e^{i\theta}$, равное пределу

$$\lim_{r\to 1-0} f\left(re^{i\theta}\right)=f^*\left(e^{i\theta}\right)$$

функции $f(z)$ по множеству точек радиуса $H=\{z=re^{i\theta} : 0<r<1\}$, проведенного в точку ζ. Термин «Р. г. з.» иногда употребляется в обобщенном смысле для функций $f(z)$, заданных в произвольных областях (включая многомерные) D, причем в качестве H берется множество точек нормали (или ее аналога) к границе D, проведенной в граничной точке. Напр., в случае бикруга

$$D=\{(z_1,\ z_2)\in\mathbb{C}^2 : |z_1|<1,\quad |z_2|<1\}$$

под Р. г. з. в точке $\zeta=(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ понимается предел

$$\lim_{r\to 1-0} f\left(re^{i\theta_1},\ re^{i\theta_2}\right)=f^*(\zeta).$$

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950.

Е. Д. Соломенцев.

РАДИАН — угол, соответствующий дуге, длина к-рой равна ее радиусу; содержит приблизительно 57°17′44″, 80625. Р. принимается за единицу измерения углов при т. н. круговом, или радианном, измерении углов. Если круговая мера угла равна a Р., то угол содержит $180°\ a/\pi$ градусов; обратно, угол в $n°$ имеет круговую меру $\pi n°/180°$ Р. *БСЭ-3.*

РАДИКАЛ — 1) Р.— математический знак $\sqrt{\ }$ (измененное латинское r), к-рым обозначают извлечение корня, т. е. решение двучленного алгебраич. уравнения вида $x^n-a=0$. Под символом $\sqrt[n]{a}$ подразумевается один из корней этого уравнения.

Проблема решения алгебраич. уравнений над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел в Р.: выразить корни алгебраич. уравнения (с комплексными коэффициентами) через его коэффициенты с помощью конечного числа действий сложения, вычитания, умножения, деления, возвышения в степень и извлечения корня. Уравнения выше 4-й степени, вообще говоря, нельзя решить в Р. (см. *Галуа теория*).

Знак Р. используется также для обозначения *радикала идеала*.

2) Р. в нек-ром классе алгебраических систем — понятие, связанное с понятием радикального свойства. Первые примеры Р. возникли в теории ассоциативных колец (см. подробнее *Радикалы* колец и алгебр), построение общей теории Р. было начато С. Амицуром (S. Amitsur) и А. Г. Курошем. Теория Р. может быть развита в любой категории алгебраич. систем, обладающей нек-рыми необходимыми свойствами (напр., в категории мультиоператорных групп). Многие вопросы

теории Р. изучаются в рамках теории категорий. См. также *Радикал* группы, *Радикал* в классе полугрупп.

О. А. Иванова.

РАДИКАЛ в классе полугрупп — функция ρ, ставящая в соответствие каждой полугруппе S ее конгруэнцию $\rho(S)$ и обладающая следующими свойствами: 1) если S изоморфна T и $\rho(S)=0$ (через 0 обозначено отношение равенства), то $\rho(T)=0$; 2) если θ — конгруэнция на S и $\rho(S/\theta)=0$, то $\rho(S)\leqslant\theta$; 3) $\rho(S/\rho(S))=0$. При выполнении 1) и 3) свойство 2) равносильно неравенству

$$\sup\{\rho(S),\ \theta\}/\theta\leqslant\rho(S/\theta)$$

для всякой конгруэнции θ на S. Полугруппа S наз. ρ-полупростой, если $\rho(S)=0$. Класс ρ-полупростых полугрупп содержит одноэлементную полугруппу и замкнут относительно изоморфизма и подпрямых произведений. Наоборот, каждый класс полугрупп, обладающий этими свойствами, служит классом ρ-полупростых полугрупп для нек-рого радикала ρ. Если $\rho(S)=S\times S$, то полугруппа S наз. ρ-радикальной. В отличие от колец Р. в полугруппах не определяется соответствующим радикальным классом. Если в определении Р. ограничиться рассмотрением конгруэнций, определяемых идеалами, то возникает другое понятие Р., где соответствующая функция выделяет в каждой полугруппе идеал.

Если $\mathfrak{K}$ — класс полугрупп, замкнутый относительно изоморфизма и содержащий одноэлементную полугруппу, то функция, ставящая в соответствии каждой полугруппе S пересечение всех ее конгруэнций θ таких, что $S/\theta\in\mathfrak{K}$, оказывается Р., напр. $\rho_{\mathfrak{K}}$. Класс $\mathfrak{K}$ совпадает с классом $\rho_{\mathfrak{K}}$-полупростых полугрупп тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подпрямых произведений. В этом случае на $S/\rho_{\mathfrak{K}}(S)$ можно смотреть как на наибольшую факторполугруппу полугруппы S среди лежащих в $\mathfrak{K}$ (ср. *Реплика*).

Пример. Пусть $\mathfrak{K}$ — класс полугрупп, допускающих точное неприводимое представление. Тогда

$$\rho_{\mathfrak{K}}(S)=\{(a,\ b)\mid a,\ b\in S,\ (a,\ b)\in\mu(as)\cap\mu(bs)$$

для всех $s\in S\cup\varnothing\}$, где

$$\mu(a)=\{(x,\ y)\mid x,\ y\in S,\ a^m x=a^n y$$

для некоторых $m,\ n\geqslant 0\}$.

Рассматривались Р., определенные на данном классе полугрупп, замкнутом относительно гомоморфных образов.

С каждым радикалом ρ связан класс левых *полигонов* $\Sigma(\rho)$. Именно, если A — левый S-полигон, то конгруэнция θ на полугруппе S наз. A-аннулирующей, если $(\lambda,\mu)\in\theta$ влечет за собой $\lambda a=\mu a$ для всех $a\in A$. Точная верхняя грань всех A-аннулирующих конгруэнций оказывается A-аннулирующей конгруэнцией и обозначается $\operatorname{Ann} A$. Класс $\Sigma(\rho)$, по определению, состоит из всех таких левых S-полигонов A, что $\rho(S/\operatorname{Ann} A)=0$, причем S пробегает класс всех полугрупп. Если θ — конгруэнция на S, то левый (S/θ)-полигон лежит в $\Sigma(\rho)$ тогда и только тогда, когда он лежит в $\Sigma(\rho)$, будучи рассматриваемым как левый S-полигон. Наоборот, если дан класс Σ левых полигонов, обладающий этим свойством, и $\Sigma(S)$ — класс всех левых S-полигонов, лежащих в Σ, то функция

$$\rho(S)=\begin{cases} S\times S, & \text{если } \Sigma(S) \text{ пусто},\\ \bigcap\limits_{A\in\Sigma(S)}\operatorname{Ann} A & \text{в противном случае}\end{cases}$$

оказывается Р.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 2, М., 1972; [2] Скорняков Л. А., в кн.: Избр. вопросы алгебры и логики, Ново-

сиб., 1973, с. 283—99; [3] Clifford A. H., «Semigroup Forum», 1970, v. 1, № 2, p. 103—27; [4] Roiz E. N., Schein B. M., там же, 1978, v. 16, № 3, p. 299—344. *Л. А. Скорняков.*

РАДИКАЛ группы G — наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая данному радикальному классу групп. Класс групп наз. радикальным, если он замкнут относительно гомоморфных образов, а также относительно «бесконечных расширений», т. е. если классу обязана принадлежать всякая группа, обладающая возрастающим нормальным рядом с факторами из данного класса (см. *Нормальный ряд*). Во всякой группе имеется наибольшая радикальная нормальная подгруппа — радикал. Фактор-группа по Р. является полупростой группой, т. е. имеет единичный радикал.

Примером радикального класса является класс групп, обладающих возрастающим субнормальным рядом с локально нильпотентными факторами. Иногда термин «Р.» используется именно применительно к наибольшей локально нильпотентной нормальной подгруппе (в случае конечных групп — это нильпотентный Р., или подгруппа Фиттинга). Важнейшим Р. в конечных группах является разрешимый Р. (см. *Разрешимая группа*). Конечные группы, имеющие тривиальный разрешимый Р., допускают нек-рое описание в терминах простых групп и их групп автоморфизмов (см. [1]).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *А. Л. Шмелькин.*

В классе групп Ли радикалом наз. наибольшую связную разрешимую нормальную подгруппу. В любой группе Ли G существует радикал R, причем R — замкнутая подгруппа Ли в G. Если H — нормальная подгруппа Ли в G, то группа G/H полупроста (см. *Ли полупростая группа*) тогда и только тогда, когда $H \supseteq R$. Подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, соответствующая Р., совпадает с Р. алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Радикал алгебраической группы — наибольшая связная разрешимая нормальная подгруппа алгебраич. группы G, всегда замкнутая в G. Радикал $R(G)$ линейной алгебраич. группы G совпадает со связной компонентой единицы в пересечении всех *Бореля подгрупп* группы G; он является наименьшей из таких замкнутых нормальных подгрупп H, что группа G/H полупроста (см. *Полупростая алгебраическая группа*). Множество $R(G)_u$ всех унипотентных элементов в $R(G)$ есть связная унипотентная замкнутая нормальная подгруппа в G, являющаяся наибольшей среди всех связных унипотентных нормальных подгрупп. Эта подгруппа наз. унипотентным радикалом группы G и может быть охарактеризована как наименьшая из таких замкнутых нормальных подгрупп H в G, что G/H редуктивна. *А. Л. Онищик.*

РАДИКАЛ ИДЕАЛА A ассоциативно-коммутативного кольца R — множество всех элементов $b \in R$, нек-рая степень к-рых содержится в A. Это множество обозначается $\sqrt{A}$. Оно является идеалом в R, причем $\sqrt{A} \supset A$ и $\sqrt{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$.

Обобщением этого понятия является понятие радикала подмодуля. Пусть M — модуль над R и N — его подмодуль. Радикалом подмодуля N наз. множество всех элементов $a \in R$ таких, что $a^n M \subset N$ для нек-рого целого n (вообще говоря, зависящего от n). Радикал подмодуля будет идеалом в R. *О. А. Иванова.*

РАДИКАЛЫ колец и алгебр — понятие, впервые возникшее в классической структурной теории конечномерных алгебр в нач. 20 в. Под Р. первоначально понимался наибольший нильпотентный идеал конечномерной ассоциативной алгебры. Алгебры с нулевым Р. (называемые полупростыми) получили в классич. теории достаточно полное описание: любая полупростая конечномерная ассоциативная алгебра является прямой суммой простых матричных алгебр над подходящими телами. Впоследствии было обнаружено, что наибольшие нильпотентные идеалы существуют в любых ассоциативных кольцах и алгебрах с условием минимальности для левых (или правых) идеалов, т. е. в любых артиновых кольцах и алгебрах, и описание артиновых полупростых колец и алгебр совпадает с описанием конечномерных полупростых алгебр. В то же время оказалось, что Р., как наибольший нильпотентный либо разрешимый идеал, может быть определен и во многих классах конечномерных неассоциативных алгебр (альтернативных, йордановых, лиевых и др.). При этом, как и в ассоциативном случае, полупростые алгебры оказываются прямыми суммами простых алгебр нек-рого специального вида.

В связи с тем, что в бесконечномерном случае наибольшего нильпотентного идеала может и не существовать, появилось много различных обобщений классического Р.: радикал Бэра, радикал Джекобсона, радикал Левицкого, радикал Кёте и др. Наиболее часто используемый из них — *Джекобсона радикал.* Были введены также Р., в нек-ром смысле противоположные классическому. Так, напр., все к л а с с и ч е с к и п о л у п р о с т ы е к о л ь ц а (т. е. прямые суммы полных матричных колец) радикальны в смысле регулярного радикала Неймана и наследственно идемпотентного радикала Блэра. Построение общей теории Р. было начато в работах С. Амицура [1] и А. Г. Куроша [2].

Общая теория радикалов. Всюду в дальнейшем говорится только об алгебрах (имеются в виду алгебры над произвольным фиксированным ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей); кольца являются частным случаем таких алгебр. Под идеалом алгебры, если это не оговорено специально, понимается двусторонний идеал.

Пусть $\mathfrak{A}$ — нек-рый класс алгебр, замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов, т. е. содержащий вместе со всякой алгеброй любой ее идеал и любой ее гомоморфный образ. И пусть r — нек-рое абстрактное свойство, к-рым может обладать или не обладать алгебра из $\mathfrak{A}$. Алгебра, обладающая свойством r, наз. r-а л г е б р о й. Идеал I алгебры A наз. ее r-и д е а л о м, если I является r-алгеброй. Алгебра наз. r-п о л у п р о с т о й, если она не имеет ненулевых r-идеалов. Говорят, что r является р а д и к а л ь н ы м с в о й с т в о м в классе $\mathfrak{A}$ или что в $\mathfrak{A}$ задан р а д и к а л (в смысле Куроша), если выполняются следующие условия:

(А) гомоморфный образ r-алгебры есть r-алгебра;

(Б) каждая алгебра A класса $\mathfrak{A}$ обладает наибольшим r-идеалом, т. е. идеалом, содержащим любой r-идеал этой алгебры, и этот максимальный r-идеал наз. тогда r-р а д и к а л о м этой алгебры и обозначается $r(A)$;

(В) факторалгебра $A/r(A)$ r-полупроста.

Алгебра, совпадающая со своим Р., наз. р а д и к а л ь н о й. В любом классе алгебр и для любого радикала $\{0\}$ является единственной одновременно радикальной и полупростой алгеброй. Подпрямое произведение любого множества полупростых алгебр само полупросто.

С каждым радикалом r связаны два подкласса алгебр в $\mathfrak{A}$: класс $\mathcal{R}(r)$ всех r-радикальных алгебр и класс $\mathcal{P}(r)$ всех r-полупростых алгебр. По любому из этих классов однозначно находится радикал $r(A)$ для каждой алгебры A из $\mathfrak{A}$, а именно:

$$r(A)=\sum\{I \mid I \text{— идеал в } A,\ I\in\mathcal{R}(r)\};$$

$$r(A)=\bigcap\{I \mid I \text{— идеал в } A,\ A/I\in\mathcal{P}(r)\}.$$

Алгебра r-радикальна тогда и только тогда, когда она не может быть отображена гомоморфно ни на одну ненулевую r-полупростую алгебру.

Известны условия на подклассы алгебр, необходимые и достаточные для того, чтобы эти подклассы служили классами всех радикальных или классами всех полупростых алгебр для каких-либо Р. в $\mathfrak{A}$. Такие подклассы алгебр принято называть соответственно радикальными и полупростыми подклассами.

Частичная упорядоченность радикальных классов по включению индуцирует частичный порядок на классе всех Р. в $\mathfrak{A}$. А именно, считается, что $r_1 \leqslant r_2$, если $\mathcal{R}(r_1)$ содержит $\mathcal{R}(r_2)$ (и в этом случае также $\mathcal{P}(r_1)$ содержит $\mathcal{P}(r_2)$).

Для каждого подкласса M класса $\mathfrak{A}$ нижним радикальным классом $l(M)$, порожденным классом M, наз. наименьший радикальный класс, содержащий M, а соответствующий ему Р. наз. нижним радикалом, определяемым классом M. Верхним радикальным классом $u(M)$, определенным классом M, наз. наибольший радикальный класс, относительно Р. к-рого все алгебры из M полупросты (этот Р. наз. верхним радикалом, определяемым классом M). Для любого класса M нижний радикальный класс $l(M)$ существует. Если $\mathfrak{A}$ — класс ассоциативных алгебр, то верхний Р. для любого подкласса M также всегда существует. В неассоциативном случае верхний Р. может не существовать. Известны достаточные условия на класс M, при к-рых верхний радикал для M существует. Этим условиям, в частности, удовлетворяет всякий класс, содержащий только простые алгебры.

Для любого Р. всякая простая алгебра либо радикальна, либо полупроста. Таким образом, каждому радикалу r соответствует разбиение простых алгебр на два непересекающихся класса: S_1 — класс r-полупростых простых алгебр, или верхний класс, и S_2 класс всех r-радикальных простых алгебр, или нижний класс. Принято говорить, что радикал r соответствует этому разбиению. Обратно, для произвольного разбиения простых алгебр на два непересекающихся класса, один из к-рых S_1 назван верхним, а другой S_2 — нижним, существует радикал, соответствующий данному разбиению. Такими будут верхний радикал r_1, определяемый классом S_1, а также нижний радикал r_2, определяемый классом S_2; радикалы r_1 и r_2 наз. соответственно верхним и нижним радикалами данного разбиения простых алгебр. Для любого радикала r, соответствующего тому же разбиению простых алгебр, $r_1 \geqslant r \geqslant r_2$. В классе всех ассоциативных алгебр для любого разбиения простых алгебр $r_1 > r_2$. Классический Р. в классе конечномерных ассоциативных алгебр над полем соответствует тому разбиению простых алгебр, нижний класс которого пуст, причем является единственным нетривиальным Р., соответствующим этому разбиению.

Наследственные радикалы. Радикал r наз. идеально наследственным радикалом, или кручением, в классе $\mathfrak{A}$, если для всякого идеала I алгебры A этого класса: $r(I) = r(A) \cap I$. Идеально наследственные Р. есть в точности те Р., для к-рых классы $\mathcal{R}(r)$ и $\mathcal{P}(r)$ замкнуты относительно идеалов. Радикал r наз. наследственным, если класс $\mathcal{R}(r)$ замкнут относительно идеалов. В классах ассоциативных, а также альтернативных алгебр каждый наследственный Р. является кручением. Радикал r наз. строго наследственным, если класс $\mathcal{P}(r)$ замкнут относительно подалгебр.

Класс всех кручений является полной дистрибутивной «решеткой» (см. *Дистрибутивная решетка*). Употребление кавычек здесь связано с тем, что совокупность элементов этой «решетки» является не множеством, а классом.

В классе всех кручений выделены два противоположных подкласса: класс **наднильпотентных кручений**, т. е. таких кручений r, что все алгебры с нулевым умножением r-радикальны, и класс **подидемпотентных кручений** — таких кручений r, что все алгебры с нулевым умножением r-полупросты (а все r-радикальные алгебры идемпотентны). Важным частным случаем наднильпотентных Р. являются **специальные радикалы** — такие кручения r, что все r-полупростые алгебры разлагаются в подпрямое произведение первичных r-полупростых алгебр. Существуют наднильпотентные неспециальные Р. (см. [5], [7]).

Радикалы в классе ассоциативных колец. Пусть $\mathfrak{A}$ — класс всех ассоциативных колец. И пусть:

φ — нижний Р., определяемый классом всех простых колец с нулевым умножением;

β (**нижний радикал Бэра**) — нижний Р., определяемый классом всех нильпотентных колец; верхний Р., определяемый классом всех первичных колец; наименьший специальный Р.; равен пересечению простых идеалов кольца;

$\mathscr{L}$ (**радикал Левицкого**) — нижний Р., определяемый классом всех локально нильпотентных колец; равен сумме всех локально нильпотентных идеалов кольца и содержит любой односторонний локально нильпотентный идеал кольца;

$\mathscr{K}$ (**верхний нильрадикал, или радикал Кёте**) — нижний Р., определяемый классом всех нильколец;

$\mathscr{Y}$ (**радикал Джекобсона**) — верхний Р., определяемый классом всех примитивных колец; равен пересечению всех примитивных идеалов кольца, а также пересечению всех модулярных максимальных правых (левых) идеалов, является квазирегулярным идеалом, содержащим все квазирегулярные правые (левые) идеалы;

$\mathscr{T}$ (**радикал Брауна — Маккоя**) — верхний Р., определяемый классом всех простых колец с единицей, совпадает с верхним Р. своего разбиения; равен пересечению всех максимальных модулярных идеалов кольца;

τ — верхний Р., определяемый классом всех матричных колец над телами;

$\mathscr{A}$ (**обобщенный нильрадикал**) — верхний Р., определяемый классом всех колец без делителей нуля;

F — верхний Р., определяемый классом всех полей.

В классе всех ассоциативных колец имеют место строгие неравенства:

$$\varphi < \beta < \mathscr{L} < \mathscr{K} < \mathscr{Y} < \mathscr{T} < \tau < F,$$
$$\mathscr{K} < \mathscr{A} < F.$$

В классе колец с условием минимальности первые семь Р. совпадают и соответствуют классическому Р. Если радикал r индуцирует в классе колец с условием минимальности классический Р., то $\varphi < r < \tau$. Для колец с условием максимальности $\beta = \mathscr{L} = \mathscr{K}$. Для коммутативных колец $\mathscr{Y} = \mathscr{T} = \tau = F$, $\beta = \mathscr{L} = \mathscr{K} = \mathscr{A}$. Радикалы $\beta, \mathscr{L}, \mathscr{K}, \mathscr{Y}, \mathscr{T}, \tau, \mathscr{A}, F$ являются специальными. Радикалы φ, β, $\mathscr{L}$ соответствуют одному и тому же разбиению простых колец, а $\mathscr{Y}, \mathscr{T}, \tau, \mathscr{A}, F$ — другим попарно различным разбиениям.

Лит.: [1] Amitsur S. A., «Amer. J. Math.», 1952, v. 74, p. 774—86; 1954, v. 76, p. 100—36; [2] Курош А. Г., «Матем. сб.», 1953, т. 33, в. 1, с. 13—26; [3] Divinsky N., Rings and radicals, Toronto, 1965; [4] Artin E., Nesbitt C., Thrall R., Rings with minimum condition, Ann Arbor, 1944; [5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969, с. 28—32; [6] Кольца, т. 2, Новосиб., 1973, с. 3—6; [7] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М., Радикалы алгебр и структурная теория, М., 1979; [8] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И., Кольца, близкие к ассоциативным, М., 1978.

В. А. Андрунакиевич.

В классе алгебр Ли обычно радикалом наз. наибольший разрешимый идеал, т. е. разрешимый идеал $\mathfrak{r}$, содержащий все разрешимые идеалы данной алгебры Ли. В конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует также наибольший нильпотентный идеал $\mathfrak{n}$ (называемый иногда **нильрадикалом**), к-рый совпадает с наибольшим идеалом, состоящим из нильпотентных элементов, а также с множеством таких $x \in \mathfrak{g}$, что присоединенный оператор $\mathrm{ad}\,x$ содержится в Р. ассоциативной алгебры линейных преобразований пространства $\mathfrak{g}$, порожденной присоединенной алгеброй Ли $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$. Рассматривается также **нильпотентный радикал** $\mathfrak{s}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это множество таких $x \in \mathfrak{g}$, что $\sigma(x)=0$ для любого неприводимого конечномерного линейного представления σ алгебры $\mathfrak{g}$. Нильпотентный Р. совпадает также с наибольшим из идеалов, представляемых нильпотентными операторами при любом конечномерном линейном представлении алгебры $\mathfrak{g}$. При этом $\mathfrak{r} \supseteq \mathfrak{n} \supseteq \mathfrak{s}$. Если характеристика основного поля равна 0, то $\mathfrak{s}$ — это наименьший из идеалов $\mathfrak{f} \subset \subset \mathfrak{g}$, для к-рых $\mathfrak{g}/\mathfrak{f}$ — редуктивная алгебра Ли. В этом случае нильпотентный Р. связан с радикалом $\mathfrak{r}$, соотношениями

$$\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r};$$

любое дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$ переводит $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{s}$ в $\mathfrak{s}$. Нильрадикал и нильпотентный Р., однако, не являются Р. в смысле общей теории Р. колец и алгебр.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958. *А. Л. Онищик.*

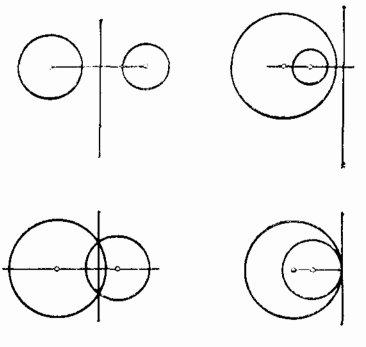
РАДИКАЛЬНАЯ ОСЬ — совокупность точек плоскости, имеющих относительно двух неконцентрич. окружностей

$$x^2+y^2-2a_1x-2b_1y-2c_1=0,$$
$$x^2+y^2-2a_2x-2b_2y-2c_2=0$$

одинаковую *степень точки*. Уравнение Р. о.:

$$(a_2-a_1)\,x+(b_2-b_1)\,y+(c_2-c_1)=0.$$

Р. о. двух непересекающихся окружностей проходит вне окружностей и перпендикулярна прямой, проходящей через их центры (иногда принимают, что Р. о.



концентрич. окружностей является несобственная прямая). Р. о. двух пересекающихся окружностей является прямая, проходящая через точки их пересечения; а Р. о. двух касающихся окружностей — их общая касательная. Для любых трех окружностей с неколлинеарными центрами Р. о. каждой пары окружностей проходят через одну точку (**радикальный центр**).

А. Б. Иванов.

РАДИУС окружности — отрезок, соединяющий точку окружности (или сферы) с центром. Р. наз. также длину этого отрезка. *БСЭ-3.*

РАДИУС-ВЕКТОР точки пространства — вектор, идущий в эту точку из нек-рой заранее фиксированной точки, называемой полюсом. Если в качестве полюса берется начало декартовых координат, то проекции Р.-в. точки M на оси координат (декартовых прямоугольных) совпадают с координатами точки M. *БСЭ-3.*

РАДО КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — квадратурная формула наивысшей алгебраич. степени точности для промежутка $[a, b]=[-1, 1]$ и веса $p(x)=1$ с одним фиксированным узлом — концом промежутка, напр. —1. Р. к. ф. имеет вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \cong Af(-1)+\sum_{j=1}^{n} C_j f(x_j).$$

Узлы x_j — корни ортогонального на $[-1,1]$ с весом $1+x$ многочлена Якоби $P_n^{(0,1)}(x)$, $A=2/(n+1)^2$. Коэффициенты C_j положительны. Алгебраич. степень точности равна $2n$. Существуют таблицы узлов и коэффициентов для Р. к. ф., напр. для $n=1(1)6$ см. [2].

Формула найдена Р. Радо [1].

Лит.: [1] Radau R., «J. math. pures et appl.», 1880, v. 6, p. 283—336; [2] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967. *И. П. Мысовских.*

РАДОНА ИНТЕГРАЛ — интеграл по *Радона мере*. Подробнее, пусть даны σ-алгебра Σ подмножеств множества T и конечная счетно аддитивная функция φ на Σ (мера Радона). Тогда в совокупности всех измеримых функций выделяется класс функций, называемых суммируемыми по функции φ, к-рым сопоставляется нек-рое конечное число, к-рое и наз. интегралом Радона. *М. И. Войцеховский.*

РАДОНА МЕРА, внутренне регулярная мера, — конечная мера μ, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ топологич. пространства X, обладающая следующим свойством. Для любого $\varepsilon>0$ найдется компакт $K=K_\varepsilon\subseteq X$ такой, что $\mu(X\setminus K_\varepsilon)<\varepsilon$. Введена И. Радоном (J. Radon, 1913), исходные построения к-рого относились к мерам на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — борелевской σ-алгебре пространства $\mathbb{R}^n$, $n=1,2,\ldots$. Топологич. пространство X наз. радоновым пространством, если любая конечная мера, определенная на σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$, является Р. м.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер, пер. с франц., М., 1967; [2] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., т. 1, М., 1962. *Р. А. Минлос.*

РАДОНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование функций от нескольких переменных, родственное *Фурье преобразованию*. Введено И. Радоном (см. [1]).

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывная и достаточно быстро убывающая на бесконечности функция от действительных переменных $x_i\in\mathbb{R}^1$, $i=1, 2, \ldots, n$, $n=1, 2, \ldots$

Для любой гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$

$$\Gamma=\{(x_1, \ldots, x_n): \xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n=C\},$$
$$\xi_i\in\mathbb{R}^1,\quad i=1, \ldots, n,$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2>0,\quad C\in\mathbb{R}^1,$$

определяется интеграл

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n, C)=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{1/2}}\int_\Gamma f(x_1, \ldots, x_n)\,dV_\Gamma,$$

где V_Γ — евклидовый $(n-1)$-мерный объем на гиперплоскости Г. Функция

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n, C),\quad (\xi_1, \ldots, \xi_n, C)\in\mathbb{R}^{n+1},$$

наз. преобразованием Радона функции f. Она является однородной функцией своих переменных степени -1:

$$F(\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n; \alpha C) = \frac{1}{|\alpha|} F(\xi_1, \ldots, \xi_n; C)$$

и связана с преобразованием Фурье $\tilde{f}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i \in \mathbb{R}^1$, функции f формулой

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n; C) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n) e^{-i\alpha C} d\alpha.$$

С Р. п. непосредственным образом связана задача, восходящая к И. Радону, о восстановлении функции f по значениям ее интегралов, вычисленных по всем гиперплоскостям пространства $\mathbb{R}^n$ (т. е. задача об обращении Р. п.).

Лит.: [1] Radon J., «Ber. Verh. Sächs. Acad.», 1917, Bd 69, S. 262—77; [2] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я., Интегральная геометрия ..., М., 1962.

Р. А. Минлос.

РАДОНА — НИКОДИМА ТЕОРЕМА: у заряда ν, абсолютно непрерывного относительно нек-рой меры μ, существует плотность $p = \frac{d\nu}{d\mu}$ относительно μ, суммируемая по этой мере. Установлена И. Радоном [1] и О. Никодимом [2]. Точнее, пусть на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{B})$, $\mathfrak{B}$ — нек-рая σ-алгебра подмножеств X, определены заряд ν, т. е. счетно аддитивная действительная или комплексная функция, заданная на $\mathfrak{B}$, и мера μ, причем заряд ν абсолютно непрерывен относительно μ. Тогда существует такая суммируемая по мере μ функция $p(x)$, $x \in X$, что для любого множества $A \in \mathfrak{B}$ имеет место

$$\nu(A) = \int_A p(x)\, d\mu(x).$$

Функция p единственна (с точностью до изменения на множестве нулевой μ-меры) и наз. плотностью заряда ν относительно меры μ. Имеются (см. [3]) обобщения этой теоремы на случай, когда заряд принимает значения из нек-рого векторного пространства.

Лит.: [1] Radon J., «Acad. Wiss.», Wien, 1919, t. 128, S. 1083—1121; [2] Nicodym O., «Fund. math.», 1930, t. 15, p. 131—79; [3] Данфорд Н., Шварц Д., Линейные операторы, ч. 1 — Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [4] Diestel J., Uhl J., Vector measures, Providence, 1977.

Р. А. Минлос.

РАЗБАВЛЕНИЕ РЯДА — включение в ряд между его соседними членами любого конечного числа нулей. Для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \qquad (*)$$

разбавленный ряд имеет вид

$$u_0 + 0 + \ldots + 0 + u_1 + 0 + \ldots + 0 + u_2 + 0 + \ldots \\ \ldots + 0 + u_3 + \ldots.$$

Р. р. не отражается на его сходимости, однако может нарушить суммируемость ряда (суммируемый к числу s каким-либо методом суммирования ряд (*) после разбавления может оказаться вообще не суммируемым этим методом или суммируемым к числу $a \neq s$).

И. И. Волков.

РАЗБИЕНИЕ — 1) Р. — представление заданного множества в виде объединения системы множеств, не имеющих попарно общих точек.

В дискретной геометрии часто рассматривают Р. нек-рого пространства на замкнутые области, к-рые покрывают все пространство и попарно не имеют общих внутренних точек (граничные точки могут быть общими). Напр., если зафиксировать любую точечную решетку евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и сопоставить каждой точке решетки те точки пространства, к-рые удалены от этой точки не более, чем от любой другой точки решетки, то получается т. н. разбиение Дирихле—Вороного. Р. пространства наз. правильным, если для любых его областей D_1 и D_2 существует такое движение M, что $D_2=M(D_1)$ и $P=M(P)$. См. также *Вороного типы решеток*.

В комбинаторной геометрии имеется ряд задач и результатов, относящихся к специальным Р. нек-рых множеств. Примером такой задачи является *Борсука проблема*: можно ли разбить любое множество диаметра d, лежащее в $\mathbb{R}^n$, на $n+1$ таких частей, что каждая из них имеет диаметр $<d$? В $\mathbb{R}^n$ существуют такие ограниченные множества, разбиение к-рых на меньшее число таких частей невозможно. Любое Р. определяет нек-рое *покрытие* и из любого покрытия можно получить нек-рое Р. Разбиения имеют тесную связь с *освещения задачами* и с *Хадвигера гипотезой*.

Лит.: [1] Болтянский В. Г., Солтан П. С., Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Киш., 1978; [2] Грюнбаум Б., Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел, пер. с англ., М., 1971.

П. С. Солтан.

2) Р. пространства X — система $\mathfrak{M}$ его дизъюнктных подмножеств, объединение к-рых есть X. Множество $\mathfrak{M}$ превращается в топологич. пространство, если объявить открытыми в нем множествами всякие множества $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$, прообразы к-рых при естественном отображении $\mu: X\to\mathfrak{M}$ (каждой точке $x\in X$ ставится в соответствие единственное содержащее его множество $M\subset\mathfrak{M}$) являются открытыми множествами в X.

3) Р.— локально конечное покрытие пространства, элементами к-рого являются замкнутые канонич. множества с дизъюнктными открытыми ядрами.

М. И. Войцеховский.

РАЗВЕРТКА — 1) Р.— область на плоскости, изометричная заданной области на развертывающейся поверхности. Пример: Р. боковой поверхности конуса, разрезанного по образующей, есть плоский сектор. Приближенное построение Р. может осуществляться графически, средствами начертательной геометрии.

2) Р. многогранной поверхности — набор многоугольников (граней Р.) с указанием правила склеивания их сторон, порождающий *многогранную метрику*, изометричную внутренней геометрии заданной многогранной поверхности. Грани Р. не обязаны совпадать с истинными гранями поверхности: при наложении на поверхность они могут переламываться.

В. А. Залгаллер.

РАЗВЕРТЫВАЮЩАЯСЯ ПОВЕРХНОСТЬ, торс,— линейчатая поверхность нулевой гауссовой кривизны. Во всех точках одной и той же образующей Р. п. имеет одну и ту же касательную плоскость. Параметр распределения Р. п. равен нулю. Если образующие Р. п. параллельны одной и той же прямой, то она — цилиндр. Если образующие Р. п. проходят через одну точку, то она — конус. В остальных случаях Р. п. образована касательными к нек-рой кривой — ребру возврата Р. п. Для того чтобы кривая на поверхности была ее линией кривизны, необходимо и достаточно, чтобы нормали вдоль этой линии образовывали Р. п.

Р. п.— огибающая однопараметрич. семейства плоскостей (напр., спрямляющая поверхность) и потому локально является изгибанием куска плоскости.

И. Х. Сабитов.

РАЗВЕТВЛЕНИЯ ТОЧКА — то же, что *ветвления точка* аналитич. функции.

РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ МЕТОД — то же, что *Фурье метод*.

РАЗДЕЛИТЕ́ЛЬНАЯ ДИЗЪЮНКЦИЯ — одна из логич. связок. Предложение $A\dot{\vee}B$, получающееся из двух предложений A и B с помощью Р. д. $\dot{\vee}$, считается истинным в случае, если истинно A и ложно B, или в случае, если ложно A и истинно B. В остальных случаях оно считается ложным. Таким образом, Р. д. может быть выражена через обычную (не разделительную) дизъюнкцию по формуле

$$A\dot{\vee}B\leftrightarrow(A\vee B)\,\&\urcorner(A\wedge B).$$

В. Н. Гришин.

РАЗЛИЧАЮЩАЯ, различающая коцепь,— *препятствие* к продолжению гомотопии между отображениями. Пусть X — нек-рое клеточное пространство, Y — односвязное топологич. пространство; пусть, далее, даны два отображения f, g: $X\to Y$ и гомотопия

$$F:X\times 0\cup X^{n-1}\times I\cup X\times 1$$

(где $I=[0, 1]$ и X^n есть n-мерный остов пространства X) между ними на $(n-1)$-мерном остове. Для каждой ориентированной n-мерной клетки e^n пространства X ограничение отображения F на $\partial(\bar{e}\times I)$ задает отображение $S^n\to Y$ (S^n есть n-мерная сфера) и, значит, элемент группы $\pi_n(Y)$. Таким образом возникает коцепь $d^n(f, g)\in C^n(X;\pi_n(Y))$ (более точным было бы обозначение $d^n_F(f, g)$), к-рая и наз. различающей коцепью; коцепь $d^n(f, g)$ является препятствием к продолжению отображения F на $X\times 0\cup X^n\times I\cup X\times\times 1=(X\times I)^{n-1}\cup X\times\{0, 1\}$.

Справедливы следующие утверждения: 1) $d^n(f, g)=0$ тогда и только тогда, когда гомотопия между f и g продолжается на X^n; 2) коцепь

$$d^n(f, g)\in C^n(X\times I,\ X\times\{0, 1\};\ \pi_n(Y))$$

является коциклом; 3) класс когомологий

$$[d^n(f, g)]\in H^n(X\times I,\ X\times\{0, 1\};\ \pi_n(Y))$$

тогда и только тогда равен нулю, когда между f и g имеется гомотопия на X^n, совпадающая с F на X^{n-2}. Без ограничения общности можно считать, что f и g совпадают на X^{n-1} и что $F(x, t)=f(x)=g(x)$ для $x\in\in X^{n-2}$. При этих предположениях справедливы следующие утверждения:

1) $d^n(f, g)=-d^n(g, f)$, в частности $d^n(f, f)=0$;

2) $d^n(f, g)+d^n(g, h)=d^n(f, h)$;

3) для любого отображения $f: X\to Y$ и любой коцепи $d\in C^n(X;\pi_n(Y))$ существует такое отображение g, что $f|_{X^{n-1}}=g|_{X^{n-1}}$ и $d^n(f, g)=d$.

Пусть теперь заданы два отображения f, g: $X^n\to Y$ $f|_{X^{n-1}}=g|_{X^{n-1}}$ и пусть c_f^{n+1} и c_g^{n+1} — препятствия к продолжениям соответствующих отображений. Роль Р. в теории препятствий определяется следующим предложением:

$$c_f^{n+1}-c_g^{n+1}=\delta d^n(f, g).$$

Таким образом, если g продолжается на X^{n+1}, то $[c_f^{n+1}]=0$, а если $[c_f^{n+1}]=0$, то $f|_{X^{n-1}}$ продолжается на X^{n+1}.

Ю. Б. Рудяк.

РАЗЛИЧАЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТ в K-теории — элемент группы $K(X, A)$ (где (X, A) — пара пространств, при этом обычно X считается конечным *клеточным пространством* и A — его клеточным подпространством), строящийся по тройке (ξ, η, ζ), где ξ и η — векторные расслоения одной и той же размерности над X и $\zeta:\xi|_A\to\eta|_A$ — изоморфизм векторных расслоений (здесь $\sigma|_A$ — часть векторного расслоения σ над X, расположенная над подпространством A). Построение Р. э. осуществляется следующим образом. Пусть сначала расслоение η тривиально и фиксирована какая-нибудь тривиализация расслоения η над X. Тогда ζ задает тривиализацию расслоения $\xi|_A$ и, значит, задает элемент группы $\tilde{K}(X/A)=K(X, A)$. Этот элемент не зависит от выбора тривиализации расслоения η над всем X. В общем случае подбирается такое расслоение σ над X, что расслоение $\eta\oplus\sigma$ тривиально и тройке (ξ, η, ζ) сопоставляется тот же элемент, что и тройке ($\xi \oplus \sigma$, $\eta \oplus \sigma$, $\zeta \oplus \mathrm{id}\ \sigma$). *Ю. Б. Рудяк.*

РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ СИСТЕМА для заданного семейства подмножеств $F=\{F_i, i \in I\}$ множества S — множество $R=\{\pi(i), i \in I\}$ при любом взаимно однозначном отображении $\pi: I \to S$, обладающем свойством: $\pi(i) \in F_i$ для любого $i \in I$ (здесь I — произвольное множество индексов). Другое название Р. п. с. R — трансверсаль семейства F. Рассматриваются также частичные трансверсали семейства F — множества вида $\{\pi(i), i \in I_0\}$, где I_0 — подмножество I, π: $I_0 \to S$ — взаимно однозначное отображение.

Р. п. с. применяются как в чисто комбинаторных математич. исследованиях, так и в их приложениях к линейному программированию, математич. экономике и кибернетике. В пределах комбинаторной математики Р. п. с. играют существенную роль в той ее части, к-рая связана с задачами выбора и экстремальными задачами. Они используются, в частности, при изучении латинских прямоугольников, в задаче о назначениях, при исследовании матриц с неотрицательными элементами и с суммами элементов по строкам и столбцам, лежащими в заданных границах.

Критерий существования Р. п. с. для конечного I дается теоремой Холла: пусть на множестве S задано семейство $F=\{F_i, i \in I\}$ из $|I|=n$ элементов, n конечно; для существования Р. п. с. необходимо и достаточно, чтобы $|F_{i_1} \cup F_{i_2} \cup \ldots \cup F_{i_k}| \geqslant k$ для каждого k-подмножества $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq I$ и каждого k, $k=1, 2, \ldots, n$. Теорема Холла представляет собой утверждение, эквивалентное теореме Кёнига (см. *Выбора теоремы*) о матрицах из нулей и единиц. Этот фундаментальный критерий применим также к бесконечному I, когда все F_i, $i \in I$, конечны. Упомянутыми случаями, вообще говоря, исчерпывается, как показывают примеры, область применения критерия Холла, но он послужил отправной точкой для различных критериев в ряде других случаев (см. [3]), напр.: а) когда существует такое подмножество $I_0 \subset I$, что $I - I_0$ конечно, а F_i конечны при всех $i \in I_0$; б) когда I — счетное множество.

Ввиду широкого использования Р. п. с. представляют интерес алгоритмы, разработанные для их практич. нахождения (см. [1]).

Одной из основных задач о Р. п. с. является задача о числе Р. п. с. для конечных семейств, состоящих из конечных множеств; она связана с вычислением *перманента* матрицы, состоящей из нулей и единиц. Для числа Р. п. с. существуют оценки снизу. Пусть семейство F состоит из n подмножеств $F_1, \ldots, F_n$ и пусть они упорядочены по мощности: $m=|F_1| \leqslant |F_2| \leqslant \ldots \leqslant |F_n|$. Тогда если F удовлетворяет критерию Холла, то число Р. п. с. не меньше, чем

$$\prod_{k=1}^{\min(m, n)} (|F_k| - k + 1).$$

Вопросы, связанные с системами представителей, разрабатываются также в рамках теории *матроидов* (иначе — пространств независимости, *комбинаторных геометрий*). Связь теории представителей с матроидами дается теоремой Эдмондса — Фалкерсона: для заданного семейства подмножеств конечного множества совокупность всех частичных трансверсалей есть совокупность независимых подмножеств нек-рого матроида. Матроид, полученный таким образом из семейства F, наз. трансверсальным матроидом для F. Многие матроиды могут быть представлены как трансверсальные для нек-рого семейства подмножеств.

Понятие Р. п. с. обобщается в различных направлениях, напр.: а) ρ-трансверсали для заданного семейства $F=\{F_1, \ldots, F_n\}$ и целочисленного вектора $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ суть множества $\{\pi(1), \ldots, \pi(n)\}$, где $\pi(i)\subseteq F_i$, $i=1, \ldots, n$,— такие попарно различные подмножества S, что $1\leqslant|\pi(i)|\leqslant\rho_i$; б) k-трансверсали для $F=\{F_i, i\in I\}$ и целого числа $k\geqslant 1$ суть подмножества $R=\{\pi(i), i\in I\}$ для отображений $\pi: I\to S$ со свойствами $\pi(i)\in F_i$ и $1\leqslant|\{\pi^{-1}(\pi(i))\}|\leqslant k$, $i\in I$.

Лит.: [1] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [2] Mirsky L., Transversal theory, N. Y.— L., 1971; [3] Тараканов В. Е., в кн.: Вопросы кибернетики, в. 16, М., 1975, с. 110—24. *В. Е. Тараканов.*

РАЗЛОЖЕНИЕ ЕДИНИЦЫ — однопараметрическое семейство $\{E_\lambda\}, -\infty<\lambda<\infty$, проекционных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, такое, что

1) $E_\lambda\leqslant E_\mu$, если $\lambda<\mu$;

2) E_λ сильно непрерывно слева, т. е. $E_{\lambda-0}=E_\lambda$ для любого $\lambda\in(-\infty, \infty)$;

3) $E_\lambda\to 0$ при $\lambda\to-\infty$ и $E_\lambda\to E$ при $\lambda\to\infty$, здесь 0 и E — нулевой и единичный операторы в пространстве $\mathcal{H}$. Условие 2) можно заменить на условие непрерывности справа в каждой точке $\lambda\in(-\infty, \infty)$.

Всякий самосопряженный оператор A, действующий в $\mathcal{H}$, порождает соответствующее ему вполне определенное Р. е. При этом кроме условий 1)—3) выполняются еще условия:

4) если B — ограниченный оператор такой, что $BA=AB$, то $BE_\lambda=E_\lambda B$ для любого λ;

5) если A — ограниченный оператор, m, M — его нижняя и верхняя грани соответственно, то

$$E_\lambda=0,\quad -\infty<\lambda\leqslant m,\quad \text{и}\quad E_\lambda=E\quad \text{при}\quad M<\lambda<\infty.$$

Р. е., порожденное оператором A, полностью определяет спектральные свойства этого оператора, а именно:

(α) точка λ есть регулярная точка оператора A тогда и только тогда, когда она является точкой постоянства, т. е. когда существует $\delta>0$ такое, что $E_\mu=E_\lambda$ для $\mu\in(\lambda-\delta, \lambda+\delta)$;

(β) точка λ_0 есть собственное значение оператора A тогда и только тогда, когда в этой точке E_λ имеет скачок, т. е. $E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0}>0$;

(γ) если $E(\Delta)=E_\mu-E_\lambda$, то $L_{E(\Delta)}=E(\Delta)\mathcal{H}$ есть инвариантное подпространство оператора A.

Поэтому Р. е., порожденное оператором A, наз. также спектральной функцией этого оператора.

Обратно, каждое Р. е. $\{E_\lambda\}$ однозначно определяет самосопряженный оператор A, для к-рого это Р. е. является спектральной функцией. Область определения $D(A)$ оператора A состоит из тех и только тех $x\in\mathcal{H}$, для к-рых

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\langle E_\lambda x, \quad x\rangle<\infty$$

и имеет место представление оператора A в виде операторного интеграла Стилтьеса

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE_\lambda.$$

Лит.: [1] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977. *В. И. Соболев.*

РАЗЛОЖИМАЯ ГРУППА над полем k, расщепимая группа над k, k-разложимая группа,— линейная алгебраич. группа, определенная над k и содержащая разложимую над k *Бореля подгруппу*; при этом связная разрешимая линейная алгебраич. группа B наз. разложимой над k, если она определена над k и обладает таким композиционным рядом $B=B_0\supset B_1\supset B_2\supset\ldots\supset B_t=\{1\}$, что все B_i — связные, определенные над k алгебраич. подгруппы, а каждая из факторгрупп B_i/B_{i+1} изоморфна над k либо одномерному тору $G_m = GL_1$, либо аддитивной одномерной группе G_a. В частности, *алгебраический тор* тогда и только тогда разложим над k, когда он определен над k и изоморфен над k прямому произведению нескольких экземпляров группы G_m. Для связных разрешимых k-разложимых групп справедлива *Бореля теорема* о неподвижной точке. Определенная над k редуктивная линейная алгебраич. группа тогда и только тогда разложима над k, когда она обладает разложимым над k максимальным тором, т. е. когда ее k-ранг совпадает с ее рангом (см. *Ранг алгебраической группы*). Образ k-разложимой группы при любом определенном над k рациональном гомоморфизме является k-разложимой группой. Всякая определенная над k линейная алгебраич. группа G разложима над алгебраич. замыканием поля k; если, кроме того, группа G редуктивна или разрешима и связна, то она разложима над нек-рым конечным расширением поля k. Если поле k совершенно, то связная разрешимая определенная над k линейная алгебраич. группа тогда и только тогда разложима над k, когда она приводится над k к треугольному виду. Если char $k=0$, то определенная над k линейная алгебраич. группа тогда и только тогда разложима над k, когда ее алгебра Ли L является разложимой (или расщепляемой) над k алгеброй Ли; последнее, по определению, означает, что алгебра Ли L обладает расщепляющей подалгеброй Картана, т. е. такой *Картана подалгеброй* $H \subset L$, что все собственные значения каждого оператора $\mathrm{ad}_L h$, $h \in H$, принадлежат полю k.

Если $G_{\mathbb{R}}$ — вещественная группа Ли, совпадающая с группой вещественных точек полупростой $\mathbb{R}$-разложимой алгебраич. группы G, а $G_{\mathbb{C}}$ — комплексификация группы Ли $G_{\mathbb{R}}$, то $G_{\mathbb{R}}$ наз. нормальной вещественной формой комплексной группы Ли $G_{\mathbb{C}}$.

Существуют *квазиразложимые группы* над полем k, не являющиеся Р. г. над k; примером при $k=\mathbb{R}$ может служить группа $SO(3, 1)$.

Лит.: [1] Борель А., *Линейные алгебраические группы*, пер. с англ., М., 1972; [2] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; [3] Мерзляков Ю. И., Рациональные группы, М., 1980; [4] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980. *В. Л. Попов.*

РАЗМАХ выборки — разность

$$w_n = x_{\max} - x_{\min}$$

между наибольшим $x_{\max} = x_n$ и наименьшим $x_{\min} = x_1$ значениями в выборке

$$(x_1, \ldots, x_n), \quad x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n,$$

получающейся с помощью n независимых измерений одной и той же случайной величины X. Пусть $F(x) = \mathsf{P}\{X \leqslant x\}$ — функция распределения случайной величины X. Тогда распределение вероятностей для значений Р. равно

$$\mathsf{P}\{w_n \leqslant t\} = n \int_{-\infty}^{\infty} (F(x+t) - F(x))^{n-1} \, dF(x),$$
$$0 \leqslant t \leqslant \infty.$$

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1960; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968. *Т. Ю. Попова.*

РАЗМЕРНОСТЕЙ АНАЛИЗ — метод установления связи между физич. величинами, существенными для изучаемого явления, основанный на рассмотрении размерностей этих величин. В Р. а. рассматриваются проблемы установления различных систем единиц измерения, вопросы о выборе первичных величин и соответствующих им опытных единиц измерения и связанное с выбором первичных единиц измерения образование вторичных единиц измерения для величин, определяемых через первичные.

В качестве величин, для к-рых выбираются первичные единицы измерения, можно брать различные. В разных областях приложений выгодно и удобно выбирать в качестве первичных единиц измерения свои местные единицы. В связи с этим и с установившимися обычаями на практике были созданы различные системы единиц измерения и возникла задача о переходе (задача пересчета) от одной системы единиц измерения к другой. Распространены многочисленные системы единиц измерения: в числе главных — система СГС, в к-рой первичные сантиметр, грамм-масса и секунда; система МКГСС, в к-рой первичные метр, килограмм-сила и секунда; система СИ, в к-рой первичные метр, килограмм-масса, секунда, ампер, кельвин, кандела. Число первичных единиц измерений в употребляемых или потенциально допустимых системах единиц измерения может быть разным: меньшим трех, равным трем, как в системах СГС и МКГСС, и др. Выражение производной единицы измерения через основные единицы наз. **формулой размерности**, к-рая записывается через символы первичных единиц измерения и имеет вид степенных одночленов. Напр., в системе СГС формулы размерности содержат три аргумента: единицу длины L, единицу времени T и единицу массы M; на основании определения силы через массу и ускорение формула размерности силы K имеет вид

$$K=\frac{ML}{T^2}=MLT^{-2}. \tag{1}$$

В системе СГС формулы для любой величины N механической, тепловой или электромагнитной природы имеют вид

$$N=L^lT^tM^m, \tag{2}$$

где показатели степеней l, t, m — нек-рые целые или дробные действительные числа, к-рые наз. **показателями размерности**, или **размерностью**, величины N. Принимают, что размерность первичной величины в отношении себя равна единице, а в отношении любой другой первичной величины — нулю.

Формулы размерности позволяют определить численные масштабные множители для пересчета соответствующих характеристик при изменении величин первичных единиц измерения. Если вместо заданных единиц измерения длины L, времени T и массы M перейти к новым единицам измерения, меньшим для длины в α раз, для времени в β раз и для массы в γ раз, то новая единица измерения для величины N с размерностью по формуле (2) будет меньше первоначальной в $\alpha^l\beta^t\gamma^m$ раз.

Если $l=t=m=0$, то численное значение величины не зависит от выбора масштабов для первичных единиц и, следовательно, такая величина будет **безразмерной**, или **отвлеченной**. Примерами безразмерных величин являются: число Рейнольдса $\mathrm{Re}=\rho vl/\mu$;. число Фруда $\mathrm{Fr}=\frac{v^2}{\sqrt{gl}}$, число Маха $\mathrm{M}=v/a$, число кавитации $\varkappa=2\Delta P/\rho v^2l^2$, где для характерных в нек-рых явлениях размерных величин приняты следующие обозначения: ρ — плотность, v — скорость, l — линейный размер, μ — динамич. коэффициент вязкости, ΔP — характерная разность давлений, g — ускорение силы тяжести.

Число первичных единиц измерения можно увеличивать, если кроме уже выбранных первичных единиц измерения выбирать по соглашению независимо единицы измерения для любых др. величин, напр. можно взять независимо единицы измерения: для тепловой энергии — калорию и для механич. энергии — килограммометр, прибавив соотношение: I — тепловая энергия в калориях или механич. энергия в килограммометрах, где I — размерная «физическая» постоянная, называемая механич. эквивалентом тепла.

Физич. законы, содержащие размерные постоянные, можно использовать для сокращения числа первичных единиц измерения. Так, напр., постоянную скорости света можно считать абсолютной постоянной, т. е. безразмерной величиной, и таким путем выразить единицу измерения и размерность длины через единицу измерения и размерность времени; при рассмотрении гравитационной постоянной как абсолютного безразмерного числа можно выразить размерность и единицу измерения для массы через размерность и единицы измерения для длины L и времени T.

В нек-рых вопросах явно проявляется тенденция к стандартизации путем введения единой универсальной системы единиц измерения. Однако привязывание универсальной системы единиц измерения к определенным физически фиксированным масштабам или к соответствующим физич. постоянным является искусственным. Наоборот, возможность использования произвольных единиц измерения и независимость рассматриваемых закономерностей от выбора систем единиц измерения могут служить источником ценных выводов.

Физич. закономерности, вообще говоря, не зависят от выбора системы единиц измерения. Это обстоятельство обусловливает особую структуру функций и функционалов, выражающих собой через посредство размерных величин физич. закономерности, независимые от систем единиц измерения. Эта специальная структура функциональных соотношений устанавливается π-теоремой: всякое соотношение между размерными характеристиками, имеющее физич. смысл, представляет собой, по существу, соотношение между отвлеченными безразмерными комбинациями, к-рые можно составить из размерных определяемых и определяющих величин, среди к-рых должны учитываться и размерные физич. постоянные, имеющие существенное значение в рассматриваемых явлениях.

Дополнительные данные об отсутствии нек-рых физич. постоянных в рассматриваемом соотношении приводят к сокращению в этих соотношениях существенных аргументов. Напр., если в рассматриваемых тепловых и механич. явлениях нет преобразования — перехода тепловой энергии, измеряемой в калориях, в механическую, измеряемую в эргах, то постоянная механич. эквивалента тепла будет отсутствовать среди аргументов функции, описывающей соответствующую закономерность.

Для получения полезных выводов с помощью Р. а. необходимо схематизировать проблему и, прежде всего, фиксировать общее моделирование явлений и свойств рассматриваемых объектов. Во многих случаях такая схематизация может быть связана с рядом рабочих гипотез. В рамках нек-рых моделей устанавливается система характеристик, к-рые связаны между собой физич. соотношением и к-рые согласно π-теореме должны представляться как соотношения между безразмерными параметрами. Таким образом, нужно ввести систему определяющих параметров постоянных или переменных, вытекающую из постановки выделяемого класса задач и характеризующую, вообще говоря, полностью для данной среды каждую отдельно взятую задачу.

При выделении минимального числа определяющих параметров требуется учитывать условия симметрии и выбор выгодных систем координат. Независимые переменные (координаты точек пространства и времени) и физич. параметры типа коэффициентов теплопроводности, вязкости, модулей упругости и т. п. необходимо включать в таблицу определяющих параметров. Такие постоянные, как ускорение силы тяжести или механич. эквивалент тепла, тоже должны фигурировать в перечне определяющих параметров, когда гравитация или переход тепловой энергии, измеряемой в калориях, в механическую, измеряемую в килограммометрах (или в эргах), существенны.

Для выделенного класса задач необходимо включать в число определяющих параметров размерные или безразмерные характеристики заданных границ рассматриваемых тел и задаваемых функций, участвующие в формулировке начальных, краевых или каких-либо других условий.

Если рассматриваемая задача сформулирована как математическая, то можно выписать полную таблицу аргументов для соотношений вида

$$a = f(a_1, a_2, \ldots, a_n), \qquad (3)$$

где a — искомая величина, а $a_1, \ldots, a_n$ — определяющие параметры. В зависимости от постановки задачи число n может быть конечным или бесконечным. Обычно при соответствующем фиксировании класса рассматриваемых задач можно ограничиваться случаями, когда n конечно и, вообще говоря, невелико. Параметры $a_1, \ldots, a_n$ составляются из задаваемых величин, входящих в основные уравнения, граничные условия и начальные данные. Определяющие параметры — это все исходные данные, к-рые надо знать предварительно по смыслу постановки математич. задачи для вычисления искомой функции различными путями, в том числе и при расчетах на специальных машинах или с помощью аналоговых систем.

Определяющие параметры при получении нужных ответов с помощью экспериментов — это величины, характеризующие каждый отдельный опыт, величины, к-рые необходимы и достаточны для повторения и сравнения различных экспериментов.

Можно выписать систему определяющих параметров и в тех случаях, когда детальные свойства модели и системы уравнений, описывающих рассматриваемые явления, вообще говоря, неизвестны: достаточно опереться на предварительные данные или гипотезы о виде задаваемых функций и о постоянных, к-рые входят или могут входить в определение модели, и на др. условия, выделяющие конкретные решения задачи.

Выводы Р. а. получаются на основании π-теоремы о существовании соотношения вида (3), к-рое выполняется для определяемой величины и определяющих величин $a_1, \ldots, a_n$ в любой системе единиц измерения.

Система аргументов в соотношении (3) должна в смысле теории размерностей обладать полнотой. Это значит, что если величина a отлична от нуля или бесконечности, то существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такие, что размерности величины a и комбинаций $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$ одинаковы. На основании этого и π-теоремы соотношение (3) можно переписать в виде

$$\pi = \frac{a}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}} = g(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-k}), \qquad (4)$$

где $\pi_1, \ldots, \pi_{n-k}$ — степенные безразмерные одночлены (аналогичные $\pi = 3{,}14\ldots$), образованные из $a_1, \ldots, a_n$, причем $k \leqslant n$. Число k равно числу параметров среди $a_1, \ldots, a_n$ с независимыми размерностями.

После явной записи физич. закономерностей в виде (4) по существу заканчиваются возможности применений Р. а. Соответствующие результаты, полученные таким путем, носят ограниченный характер. Если видоизменить любым способом уравнения движения без внесения в них каких-либо новых параметров, то физич. закономерности (4) могут сильно измениться, но основной вывод, содержащийся в формуле (4), сохраняет свою силу.

Существует целый ряд примеров получения плодотворных выводов и установления целесообразных удобных методов обработки экспериментальных результатов с использованием Р. а. и π-теоремы. Особая польза достигается за счет сокращения числа аргументов у искомых функций; это сокращение обеспечивается π-теоремой и во многих случаях достигается на основании постановки задачи с использованием опытных данных или нек-рых гипотез о механизмах существенных эффектов в изучаемых вопросах.

Основная практич. польза состоит в установлении возможности перенесения результатов опыта в одних условиях на др. условия, в к-рых опыт не проводился. Напр., по опытам с водой, движущейся в трубе с фиксированным диаметром, можно давать автоматически нужные ответы о движении воды в трубах той же формы, но других размеров, о движении в трубах нефти, воздуха и т. п. Однако для возможности перенесения результатов данного опыта на др. опыты необходимо обеспечивать в соответствующих случаях одинаковые значения безразмерных параметров. Значения нек-рых из этих величин легко обеспечиваются геометрич. условиями постановки опытов. Значения других параметров связаны с физико-механич. условиями проведения опытов.

Примерами применения Р. а. являются примеры установления из постановки задач автомодельности искомых решений. Свойство автомодельности состоит в следующем. При первом подходе к математич. разрешению ставящейся задачи можно отметить независимые переменные аргументы функций; обычно это три координаты точек в нек-ром объеме пространства и время. Кроме этих переменных величин среди аргументов искомых функций могут фигурировать нек-рые задаваемые постоянные параметры, возникающие при описании свойств изучаемой модели и при выделении конкретной схематизированной задачи. Всякую задачу можно сформулировать в безразмерных переменных как для искомых функций, так и для их независимо изменяющихся аргументов. Автомодельность проявляется в том, что сокращается число независимых безразмерных переменных аргументов по сравнению с числом размерных.

Эффективные результаты, связанные с автомодельностью, получаются в теории нек-рых одномерных неустановившихся задач со сферическими, цилиндрическими и плоскими волнами, когда имеются только две независимые переменные: координата r с размерностью длины и время t. Если из определяющих размерных постоянных, присутствующих в постановке задачи, нельзя образовать две комбинации — одну с размерностью длины, а другую с размерностью времени, то единственным переменным безразмерным аргументом в искомых безразмерных функциях будет параметр вида $\lambda = Cr/t^{\alpha}$, где α — нек-рый показатель, а C — размерная постоянная, выражающаяся через заданные постоянные, фигурирующие в постановке задачи. В частности, если математич. задача сводилась к решению нек-рой системы дифференциальных уравнений с частными производными по r и t, то при наличии только одного переменного параметра λ уравнения с частными производными по r и t преобразуются к обыкновенным дифференциальным уравнениям с одной независимой переменной λ, вследствие чего математич. задача сильно упрощается. Таким путем было получено решение многих практически важных задач, напр. задачи о возмущенном движении воздуха, вызванном концентрированным атомным взрывом в атмосфере.

Соображения Р. а. для автомодельных процессов могут служить не только для сведения уравнений с частными производными к обыкновенным, но и для получения конечных соотношений между искомыми функциями (интегралов этих уравнений), что позволяет находить решения нек-рых автомодельных задач в замкнутом формульном виде. Эти методы были продемонстрированы при решении задач о сильном взрыве в атмосфере и в задачах о распространении взрывных волн в газовых средах, в к-рых в исходном состоянии плотность переменна и изменяется вдоль радиуса по степенному закону. Эти задачи ставятся как сильно схематизированные модели взрыва звезд.

Р. а. непосредственно связан с понятием о физич. подобии, к-рое изучается в *подобии теории.*

Лит.: [1] Бриджмен П. В., Анализ размерностей, пер. с англ., Л.— М., 1934; [2] Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, 9 изд., М., 1981. *Л. И. Седов.*

РАЗМЕРНОСТИ АДДИТИВНЫЕ СВОЙСТВА — свойства, выражающие связь размерности топологич. пространства X, представленного в виде суммы своих подпространств X_α, с размерностями пространств X_α. Имеется несколько видов Р. а. с.

Теорема суммы. Если хаусдорфово и нормальное пространство X представимо в виде конечной или счетной суммы своих замкнутых подмножеств X_i, то

$$\dim X_i = \sup_i \dim X_i.$$

Если, дополнительно, пространство X совершенно нормально или наследственно паракомпактно, то

$$\operatorname{Ind} X = \sup_i \operatorname{Ind} X_i.$$

Локально конечная теорема суммы. Если хаусдорфово и нормальное пространство X представлено в виде суммы локально конечной системы своих замкнутых подмножеств X_α, то

$$\dim X = \sup_\alpha \dim X_\alpha.$$

Если, дополнительно, пространство X совершенно нормально или наследственно паракомпактно, то

$$\operatorname{Ind} X = \sup_\alpha \operatorname{Ind} X_\alpha.$$

Теорема сложения. Если пространство X хаусдорфово, наследственно нормально и $X = A \cup B$, то

$$\dim X \leqslant \dim A + \dim B + 1$$

(формула Менгера — Урысона). Если, кроме того, пространство X совершенно нормально, то

$$\operatorname{Ind} X \leqslant \operatorname{Ind} A + \operatorname{Ind} B + 1.$$

Метрич. пространство R имеет размерность $\dim R \leqslant n$ тогда и только тогда, когда

$$R = \bigcup_{i=1}^{n+1} R_i,\ \dim R_i \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, n+1;\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

В хаусдорфовом наследственно нормальном пространстве X для любого замкнутого подмножества F выполняются равенства

$$\dim X = \max(\dim F,\ \dim X \setminus F),$$
$$\operatorname{Ind} X = \max(\operatorname{Ind} F,\ \operatorname{Ind} X \setminus F).$$

Б. А. Пасынков.

РАЗМЕРНОСТИ ТЕОРИЯ — часть топологии, в к-рой для каждого компакта, а впоследствии и для более общих классов топологич. пространств тем или иным естественным образом определяется числовой топологич. инвариант — *размерность*, совпадающий, если X есть полиэдр (в частности, многообразие), с его числом измерений в смысле элементарной или дифференциальной геометрии. Первое общее определение размерности было дано Л. Брауэром (L. Brouwer, 1913) для компактов и даже более широкого класса полных метрич. пространств. Определение строится по индукции следующим образом. Пустому множеству приписывается размерность — 1. В предположении, что определены пространства, а значит и лежащие в них множества, размерности $\leqslant n$, говорят, что пространство X имеет размерность $\leqslant n+1$, если между любыми двумя дизъюнктными замкнутыми множествами A и B пространства X имеется перегородка Φ размерности $\leqslant n$ (при этом перегородкой между множествами A и B в пространстве X наз. такое замкнутое множество Φ этого пространства, что дополнение $X \diagdown \Phi$ есть сумма двух дизъюнктных открытых множеств C и D, из к-рых одно содержит множество A, а другое — множество B). В 1921 П. С. Урысон и К. Менгер (K. Menger) независимо от Л. Брауэра и друг от друга пришли к эквивалентному в случае компактов и даже любых сепарабельных метрич. пространств определению, отличающемуся от брауэровского тем, что одно из двух замкнутых множеств A, B предполагается состоящим из одной точки. Определения размерности в смысле Брауэра и в смысле Урысона и Менгера могут быть сформулированы для любых хаусдорфовых пространств, и определяемые ими топологич. инварианты наз. соответственно большой и малой индуктивной размерностями и обозначаются $\operatorname{Ind} X$ и $\operatorname{ind} X$, причем всегда $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$.

Совершенно иной подход к понятию размерности берет начало от А. Лебега (H. Lebesgue), высказавшего следующую теорему: n-мерный в смысле элементарной геометрии куб Q^n при любом положительном числе ε может быть покрыт конечным числом замкнутых множеств (даже кубов) диаметра $<\varepsilon$ таким образом, что кратность этого покрытия равна $n+1$, тогда как при достаточно малом $\varepsilon>0$ не существует покрытия куба Q^n, к-рое имеет кратность $<n+1$ и состоит из замкнутых множеств диаметра $<\varepsilon$ (при этом кратностью какой-либо (конечной) совокупности множеств наз. наибольшее целое число m такое, что в данной совокупности имеется m множеств с непустым пересечением). Теперь можно теорему Лебега сформулировать так. Число измерений куба Q^n есть наименьшее такое целое число n, для к-рого имеется сколь угодно мелкое (т. е. состоящее из элементов сколь угодно малого диаметра) покрытие кратности $n+1$ замкнутыми множествами. Эта теорема, впервые доказанная лишь Л. Брауэром, приводит к следующему определению. Размерностью $\dim X$ компакта X (определенной посредством покрытий) наз. наименьшее число n такое, что при любом $\varepsilon>0$ компакт X имеет покрытие кратности $n+1$, состоящее из замкнутых множеств диаметра $\leqslant \varepsilon$. Не меняя содержания этого определения, можно заменить в его формулировке замкнутые множества открытыми.

При определении размерности компакта X применяется понятие диаметра множества, относящееся к метрике, а не к топологии компакта X. Однако доказывается, что определенное так число $\dim X$ тем не менее является топологич. инвариантом компакта X, т. е. что два гомеоморфные между собою компакта имеют одну и ту же размерность $\dim X$. Этот факт устанавливается непосредственно, но его легко вывести и из того, что числу $\dim X$ можно дать и непосредственно топологич. определение, опирающееся лишь на топологию компакта X.

Покрытием данного топологич. пространства наз. любая конечная совокупность его открытых множеств, дающих в своей сумме все это пространство. Покрытие α' мельче покрытия α, если α' вписано в α, т. е. если каждый элемент покрытия α' является подмножеством хотя бы одного элемента покрытия α. Оказывается, размерность $\dim X$ можно определить так: число $\dim X$ есть наименьшее целое число n такое, что для всякого покрытия пространства X существует вписанное в него покрытие кратности $n+1$. Но это определение, очевидно, может быть сформулировано не только для компактов, а для любых топологич. пространств, и позволяет определить для них размерность. Размерность $\dim X$, определенная таким образом для топологич. пространств, позволяет построить содержательную и богатую математич. фактами теорию, оставаясь, по крайней мере, в классе нормальных пространств (а значит, в частности, и метризуемых пространств).

Одной из главных проблем Р. т. является выяснение наиболее широких условий, в к-рых имеет место т. н. основное тождество Урысона, а именно:

$$\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \dim X.$$

Оказывается, оно имеет место для всех сепарабельных метризуемых пространств, т. е. для всех нормальных пространств со счетной базой, а также для пространств локально бикомпактных групп (теорема Пасынкова). Без предположения сепарабельности для метризуемых пространств можно утверждать лишь справедливость формулы Катетова

$$\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X = \dim X,$$

а для бикомпактов — формулы Александрова

$$\dim X \leqslant \operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X,$$

причем имеются бикомпакты X, для к-рых

$$\dim X \neq \operatorname{ind} X$$

(пример Лунца—Локуциевского), и бикомпакты X, для к-рых

$$\operatorname{ind} X \neq \operatorname{Ind} X$$

(пример Филиппова).

Большое общепознавательное значение имеет следующая теорема Нёбелинга — Понтрягина: необходимое и достаточное условие для того, чтобы топологич. пространство X было гомеоморфно подпространству какого-либо евклидова пространства конечного числа измерений, заключается в том, чтобы X было нормальным пространством конечной размерности, имеющим счетную базу. Это позволяет при изучении конечномерных компактов и вообще конечномерных нормальных пространств со счетной базой рассматривать их как подпространства евклидовых пространств.

В связи с этим приобретает особый интерес т. н. теорема об ε-сдвигах: для того чтобы компакт X, лежащий в каком-либо евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, имел размерность $\dim X \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ этот компакт мог быть превращен в полиэдр размерности $\leqslant n$ посредством ε-сдвига в пространстве $\mathbb{R}^m$ (при этом ε-сдвигом подпространства X в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ наз. такое непрерывное отображение f этого подпространства X в содержащее его евклидово пространство $\mathbb{R}^m$, при к-ром расстояние $\rho(x, fx)$ любой точки $x \in X$ от ее образа fx меньше числа ε). Интуитивное содержание этой теоремы состоит в том, что всякий компакт данной конечной размерности n, рассматриваемый как множество, лежащее в каком-либо евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, может быть сколь угодно малым непрерывным видоизменением (к чему и сводится его ε-сдвиг) превращен в полиэдр той же, но не меньшей, размерности. Эта теорема так же, как и определение размерности $\dim X$ для компактов, может быть переформулирована в чисто топологич. терминах, причем снова «сколь угодно малые» числа $\varepsilon>0$ заменяются «сколь угодно мелкими» покрытиями ω. Это позволяет аналогичную теорему сформулировать для любых нормальных пространств и придти к заключению, что в нек-ром (все же наглядном) геометрическом смысле всякое n-мерное нормальное пространство «похоже» и даже «сколь угодно мало отличается» от n-мерного полиэдра.

Одной из важнейших теорем Р. т. является т. н. теорема о существенных отображениях, лежащая в основе значительной части всей этой теории. Пусть f — непрерывное отображение (нормального) пространства X на n-мерный шар Q^n с границей S^{n-1}. Пусть $\Phi\subset X$ — прообраз сферы S^{n-1} при этом отображении, $\Phi=f^{-1}S^{n-1}$. Отображение $f: X\to Q^n$ наз. существенным, если всякое непрерывное отображение $g: X\to Q^n$, совпадающее с f во всех точках $x\in\Phi$, есть отображение на весь шар Q^n. Упомянутая теорема Александрова утверждает, что нормальное пространство X тогда и только тогда имеет размерность $\dim X\geqslant n$, когда пространство X можно существенно отобразить на n-мерный шар. Из этой теоремы выводится теорема суммы (доказанная для компактов П. С. Урысоном и К. Менгером еще в самом начале развития Р. т.): если (нормальное) пространство X размерности $\dim X=n$ является объединением конечного или счетного числа своих замкнутых множеств Φ_k, то по крайней мере для одного из этих Φ_k имеет место $\dim\Phi_k=n$.

Теорема о существенных отображениях лежит в основе т. н. гомологической теории размерности, позволяющей применить к изучению размерности в весьма общих предположениях методы алгебраич. топологии. Понятие *гомологической размерности* связано с понятиями цикла и гомологии и поэтому предполагает, что наряду с топологич. пространством X дана и нек-рая коммутативная группа $\mathfrak{G}$, к-рая наз. группой коэффициентов. Тогда можно говорить о циклах компакта X по этой группе коэффициентов, об их носителях $\Phi\subset X$ и, в частности, о циклах, гомологичных нулю в X по области коэффициентов $\mathfrak{G}$, причем эти понятия можно эквивалентным образом понимать как в смысле теории гомологий Александрова — Чеха, так и в смысле гомологич. теории Вьеториса.

После этого можно определить гомологич. размерность компакта X по группе коэффициентов $\mathfrak{G}$ как наибольшее целое число n такое, что в компакте X имеется $(n-1)$-мерный цикл Z^{n-1}, гомологичный нулю в X, но не гомологичный нулю на нек-ром своем носителе Φ. Оказывается, что $\dim X$ есть гомологич. размерность по группе $\varkappa$, являющейся факторгруппой группы всех действительных чисел по подгруппе целых чисел, и она является наибольшей среди всех вообще гомологич. размерностей.

Если от циклов и гомологий перейти к коциклам и когомологиям, то получится *когомологическая размерность*, причем когомологич. размерность компакта по данной дискретной группе $\mathfrak{A}$ равна гомологич. размерности по бикомпактной группе $\mathfrak{B}$, двойственной группе $\mathfrak{A}$ в смысле теории характеров Понтрягина. Отсюда следует, что размерность $\dim X$ совпадает с когомологической размерностью по группе целых чисел.

Лит. см. при ст. *Размерность*. *П. С. Александров.*

РАЗМЕРНОСТИ ФУНКЦИЯ — целочисленная функция d на решетке L (т. е. отображение $d: L\to\mathbb{Z}$), удовлетворяющая условиям: 1) $d(x+y)+d(xy)=d(x)+d(y)$ для любых $x, y\in L$; 2) если $[x, y]$—*простой интервал* в L, то $d(y)=d(x)+1$. Для решетки, все ограниченные цепи к-рой конечны, существование Р. ф. эквивалентно дедекиндовости этой решетки.

Существует и более общее определение Р. ф. на ортомодулярной решетке или ортомодулярном частично упорядоченном множестве, где значениями Р. ф. могут быть произвольные действительные числа или даже функции (см. [3]).

Лит.: [1] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970; [2] Birkhoff G., Lattice theory, 3 ed., Providence, 1967; [3] Kalmbach G., Omolattices, L., 1981.

Т. С. Фофанова.

РАЗМЕРНОСТНЫЙ ИНВАРИАНТ — целое число $d(X)$, определяемое для каждого топологич. пространства X данного класса $\mathscr{K}$ и обладающее достаточным количеством свойств, сближающих его с обычным числом измерений евклидовых многомерных пространств. При этом от класса $\mathscr{K}$ требуется, чтобы он содержал все кубы любого числа измерений и вместе с любым данным пространством X, являющимся его элементом, содержал в качестве элемента и всякое пространство, гомеоморфное пространству X. От Р. и. $d(X)$ предполагается, во всяком случае, что для гомеоморфных пространств X и X' всегда $d(X)=d(X')$ и что для n-мерного куба I^n выполняется $d(I^n)=n$. Среди Р. и. важнейшими являются т. н. классические размерности — *Лебега размерность* $\dim X$ и (большая и малая) *индуктивная размерность* $\operatorname{Ind} X$, $\operatorname{ind} X$.

Имеют место следующие предложения, выделяющие размерность $\dim X$ среди всех Р. и., определенных соответственно в классе всех (метрических) компактов, всех метризуемых и всех сепарабельных метризуемых пространств и тем решающие для этих пространств проблему аксиоматич. определения размерности. Единственный, удовлетворяющий нижеперечисленным условиям 1), 2), 3), определенный в классе $\mathscr{K}$ всех (метрических) компактов X размерностный инвариант $d(X)$ есть размерность $\dim X=\operatorname{Ind} X=\operatorname{ind} X$ (теорема Александрова).

Условие 1) (аксиома Пуанкаре). Если пространство принадлежит к классу $\mathscr{K}$ и $d(X)$ равно неотрицательному целому числу n, то в X содержится замкнутое подпространство X_0, для к-рого $d(x_0)<n$ и такое, что множество $X\setminus X_0$ несвязно.

Условие 2) (аксиома конечной суммы). Если принадлежащее к классу $\mathscr{K}$ пространство X есть объединение двух замкнутых подпространств X_1 и X_2, для к-рых $d(X_1)\leqslant n$, $d(X_2)\leqslant n$, то и $d(X)\leqslant n$.

Условие 3) (аксиома Брауэра в метрической форме). Если X — принадлежащее к классу $\mathscr{K}$ пространство и $d(X)$ есть неотрицательное целое число n, то существует такое положительное число ε, что для всякого пространства Y, являющегося образом пространства X при каком-либо ε-отображении, имеет место неравенство $d(Y)\geqslant n$. При этом отображение f компакта X на компакт Y наз. ε-отображением, если оно непрерывно, и полный прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y\in Y$ имеет в X диаметр $<\xi$.

Теорема Щепина [2]. Размерность $\dim X$ есть единственный, определенный соответственно в классе $\mathscr{K}$ всех метрических, всех сепарабельных метрич. пространств X размерностный инвариант $d(X)$, удовлетворяющий следующим условиям (теорема Щепина).

Условие 1) (аксиома Пуанкаре, см. выше).

Условие 2) (аксиома счетной суммы). Если принадлежащее к классу $\mathscr{K}$ пространство X есть объединение счетного числа своих замкнутых подпространств X_k, $k=1,2,\ldots$, для каждого из к-рых $d(X_k)\leqslant n$, то и $d(X)\leqslant n$.

Условие 3) (аксиома Брауэра в общей форме). Если для принадлежащего к классу $\mathscr{K}$ пространства X имеется $d(X)\leqslant n$, то существует такое конечное открытое покрытие ω пространства X, что для всякого, принадлежащего к классу $\mathscr{K}$ пространства Y, являющегося образом пространства X при каком-либо ω-отображении, будет $d(Y) \geqslant n$. При этом отображение f пространства X, на к-ром зафиксировано нек-рое открытое покрытие ω, на пространство Y наз. ω-отображением, если каждая точка y пространства Y имеет окрестность Oy, полный прообраз к-рой $f^{-1}(Oy)$ содержится в нек-ром элементе покрытия ω.

Лит.: [1] Александров П. С., в кн.: Тр. Международного симпозия по топологии и ее применениях. Херцег-Нови. 1968, Beograd, 1969, с. 38—42; [2] Щепин Е., «Докл. АН СССР», 1972, т. 206, № 1, с. 31—32; [3] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973.

А. А. Мальцев.

РАЗМЕРНОСТНЫЙ МНОГОЧЛЕН расширения дифференциальных полей — многочлен, описывающий количество производных констант в решении системы уравнений с частными производными и являющийся аналогом *Гильберта многочлена*.

Пусть G — дифференциальное *расширение* дифференциального поля F. Максимальное подмножество поля G, дифференциально сепарабельно независимое над F, наз. базисом дифференциальной сепарабельности. Базис дифференциальной сепарабельности расширения G над F, дифференциально алгебраически независимый над F, наз. дифференциальным базисом трансцендентности.

Пусть G — конечно порожденное дифференциальное расширение: $G=F\ \langle\eta_1, \ldots, \eta_n\rangle$ и $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — общий нуль простого дифференциального идеала $p \subset F\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Дифференциальная степень трансцендентности поля G над F наз. дифференциальной размерностью идеала p (она обозначается $d(p)$). Если q — другой простой дифференциальный идеал и $p \subset q$, то $d(p) \geqslant d(q)$, причем равенство может иметь место даже для строгого включения. По этой причине желательно иметь более тонкую меру для измерения идеалов.

Фильтрация кольца дифференциальных многочленов $F\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ по степеням дифференцирований $\theta \in \Theta$ индуцирует фильтрацию полей расширения $G=F<\eta_1, \ldots, \eta_n>$ поля F:

$$F=\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_s \subset \cdots$$

Существует (см. [2]) многочлен, значение к-рого в точках $s \in \mathbb{Z}$ для всех $s \geqslant N_0$ равно степени трансцендентности расширения $\mathfrak{G}_s$ поля F. Он наз. размерностным многочленом расширения $\mathfrak{G}/F$ и имеет вид

$$\omega_{\eta/F}(x)=\sum\nolimits_{0 \leqslant i \leqslant m} a_i \binom{x+i}{i},$$

где m — мощность множества дифференцирований Δ, а a_i — целые. Р. м. является бирациональным инвариантом поля, то есть $F(\eta)=F(\zeta) \Rightarrow \omega_{\eta/F}=\omega_{\zeta/F}$, но не является дифференциальным бирациональным инвариантом, то есть из $F<\eta>=F<\zeta>$, вообще говоря, не следует, что $\omega_{\eta/F}=\omega_{\zeta/F}$. Тем не менее этот многочлен содержит в себе дифференциальные бирациональные инварианты, каковыми являются степень многочлена $\tau=\deg\,\omega_{\eta/F}$ (она наз. дифференциальным типом расширения $F<\eta>$ над F) и старший коэффициент a_τ (называемый типовой дифференциальной размерностью). Среди дифференциальных Р. м., соответствующих различным системам дифференциальных образующих дифференциального расширения, существует минимальный относительно нек-рого отношения порядка на множестве всех целозначных многочленов, являющийся, таким образом, дифференциальным бирациональным инвариантом расширения.

Многочлен дифференциальной размерности определяется также и для дифференциальных модулей.

Р. м. вычислен для расширений, задаваемых следующими системами (см. [1], где Р. м. наз. мерой жесткости системы уравнений поля): 1) волновое уравнение; 2) уравнение Максвелла для пустого пространства; 3) уравнения электромагнитного поля, задаваемого потенциалами; 4) уравнения Эйнштейна для пустого пространства. Другие примеры вычисления Р. м. см. в [3].

Лит.: [1] Эйнштейн А., Собрание научных трудов, т. 2, М., 1966; [2] Kolchin E. R., Differential algebra and algebraic groups, N. Y.— L., 1973; [3] Михалев А. В., Панкратьев Е. В., в кн.: Алгебра, М., 1980, с. 57—67.

Е. В. Панкратьев.

РАЗМЕРНОСТЬ топологического пространства X — целочисленный инвариант $\dim X$, определяемый следующим образом. Тогда и только тогда $\dim X=-1$, когда $X=\phi$. О непустом топологич. пространстве X говорят, что оно не более чем n-мерно, и пишут $\dim X\leqslant n$, если в любое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать конечное открытое покрытие пространства X кратности $\leqslant n+1$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Если $\dim X\leqslant n$ для нек-рого $n=-1, 0, 1, \ldots$, то пространство X наз. конечномерным, пишется $\dim X<\infty$ и считается

$$\dim X=\min\{n:\dim X\leqslant n\}.$$

При этом если $\dim X=n$, то пространство наз. n-мерным. Понятие Р. топологич. пространства обобщает элементарно-геометрич. понятие числа измерений евклидова пространства (и полиэдра), т. к. размерность n-мерного евклидова пространства (и любого n-мерного полиэдра) равна n (теорема Брауэра — Лебега).

Важность понятия Р. топологич. пространства выявляется теоремой Нёбелинга — Понтрягина — Гуревича — Куратовского: n-мерное метризуемое со счетной базой пространство вкладывается в $(2n+1)$-мерное евклидово пространство. Таким образом, класс пространств, топологически эквивалентных подпространствам всевозможных n-мерных евклидовых пространств, $n=1, 2, \ldots$, совпадает с классом конечномерных метризуемых пространств со счетной базой.

Размерность $\dim X$ иногда наз. лебеговой, т.к. ее определение отталкивается от теоремы Лебега «о мостовых»: n-мерный куб для любого $\varepsilon>0$ обладает конечным замкнутым кратности $\leqslant n+1$ покрытием с диаметром элементов $<\varepsilon$; существует такое $\varepsilon_0>0$, что кратность любого конечного замкнутого покрытия n-мерного куба $\geqslant n+1$, если диаметр элементов этого покрытия $<\varepsilon_0$.

К определению Р. топологич. пространства возможен другой — индуктивный — подход (см. *Индуктивная размерность*), основанный на разбиении пространства подпространствами меньшего числа измерений. Этот подход к понятию Р. восходит к А. Пуанкаре (H. Poincaré), Л. Брауэру (L. Brouwer), П. С. Урысону и К. Менгеру (K. Menger). В случае метризуемых пространств он эквивалентен лебеговскому.

Основы теории Р. были заложены в 1-й пол. 20-х гг. 20 в. в работах П. С. Урысона и К. Менгера. К кон. 30-х гг. была построена теория Р. метризуемых пространств со счетной базой, а к нач. 60-х гг.— теория Р. любых метризуемых пространств.

Ниже все рассматриваемые топологич. пространства считаются нормальными и хаусдорфовыми. В этом случае в определении Р. без ущерба вписываемые открытые покрытия можно заменить на замкнутые.

Лебегов подход к определению Р. (в отличие от индуктивного подхода) позволяет в случае любых рассматриваемых пространств геометризовать понятие Р. посредством сравнения исходного топологич. пространства с простейшими геометрич. образованиями — *полиэдрами*. Грубо говоря, пространство n-мерно тогда и только тогда, когда оно сколь угодно мало отличается от n-мерного полиэдра. Точнее, имеет место теорема Александрова об ω-отображениях: тогда и только тогда $\dim X \leqslant n$, когда для любого конечного открытого покрытия ω пространства X существует ω-отображение пространства X на не более чем n-мерный, $n=0,1,2,\ldots$, (компактный) полиэдр. Особую наглядность сформулированная теорема приобретает в случае компактов: для компакта X тогда и только тогда $\dim X \leqslant n$, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-отображение компакта на не более чем n-мерный полиэдр. Если еще X лежит в евклидовом или гильбертовом пространстве, то ε-отображение можно заменить ε-сдвигом (теорема Александрова об ε-отображениях и ε-сдвигах).

Следующее утверждение позволяет выяснить, какова Р. пространства, посредством его сравнения со всевозможными n-мерными кубами: тогда и только тогда $\dim X \geqslant n$, когда пространство обладает существенным отображением на n-мерный куб, $n=0,1,2,\ldots$ (теорема Александрова о существенных отображениях).

Этой теореме можно придать следующую форму. Тогда и только тогда $\dim X \leqslant n$, когда для любого замкнутого в X множества A и любого непрерывного отображения $f: A \to S^n$ в n-мерную сферу существует непрерывное продолжение $F: X \to S^n$, $n=0,1,\ldots$, отображения f.

Следующая характеристика Р. указывает на роль этого понятия в вопросах существования решений систем уравнений: тогда и только тогда $\dim X \geqslant n$, $n=1,2,\ldots$, когда в X существует такая система дизъюнктных пар замкнутых множеств A_i, B_i, $i=1,\ldots,n$, что для любых непрерывных на X функций f_i, удовлетворяющих условию $f_i|A_i > 0$, $f_i|B_i < 0$, $i=1,\ldots,n$, найдется точка $x \in X$, в к-рой $f_i(x)=0$, $i=1,\ldots,n$ (теорема Отто — Эйленберга — Хеммингсена о перегородках).

Одно из важнейших свойств Р. выражает теорема суммы Менгера — Урысона — Чеха: если пространство X есть конечная или счетная сумма своих замкнутых подмножеств размерности $\leqslant n$, то и $\dim X \leqslant n$, $n=0,1,\ldots$. В этой теореме можно условие конечности или счетности суммы заменить условием ее локальной конечности. Аналогичное теореме суммы утверждение для большой и малой индуктивных Р. не выполняется уже в классе бикомпактов. Следующие утверждения принадлежат к числу основных общих фактов теории Р. и позволяют сводить рассмотрение любых пространств к рассмотрению бикомпактов. Для любого нормального пространства

а) $\dim \beta X = \dim X$, $\operatorname{Ind} \beta X = \operatorname{Ind} X$, где βX — максимальное бикомпактное расширение Стоуна — Чеха пространства X; в то же время неравенство $\operatorname{ind} \beta X > \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ возможно;

б) существует бикомпактное расширение bX пространства X, вес к-рого $w(bX)$ равен весу wX, и размерность $\dim bX$ равна размерности $\dim X$; аналогичное утверждение верно и для большой индуктивной Р. Особенно интересен случай счетного веса пространства, т. к. в этом случае расширение bX метризуемо.

Утверждение б) может быть усилено следующим предложением: для любого $n=0,1,\ldots$ и любой бесконечной мощности существует бикомпакт Π_τ^n веса τ и размерности $\dim \Pi_\tau^n = n$, содержащий гомеоморфный образ любого нормального пространства X веса $\leqslant\tau$ и размерности $\dim X \leqslant n$ (теорема об универсальном бикомпакте данного веса и размерности). Аналогичное утверждение верно и для большой индуктивной Р. При этом в качестве $\Pi_{\aleph_0}^0$ можно взять канторово совершенное множество, а в качестве $\Pi_{\aleph_0}^1$ — менгеровскую универсальную кривую.

Казалось бы, что Р. должна обладать свойством монотонности: $\dim A \leqslant \dim X$, если $A \subset X$. Это так, если а) множество A замкнуто в X или сильно паракомпактно, или б) пространство X метризуемо (и даже совершенно нормально). Однако уже для подмножества A наследственно нормального пространства X может быть $\dim A > \dim X$ и $\operatorname{Ind} A > \operatorname{Ind} X$. Но всегда $\operatorname{ind} A \leqslant \operatorname{ind} X$ при $A \subset X$.

Одним из важнейших вопросов теории Р. является поведение Р. при непрерывных отображениях. В случае замкнутых отображений (к ним принадлежат и все непрерывные отображения бикомпактов) ответ дается формулами В. Гуревича (W. Hurewicz), полученными им первоначально в классе пространств со счетной базой.

Формула Гуревича для повышающих размерность отображений: если отображение $f: X \to Y$ непрерывно и замкнуто, то

$$\text{кратность } f + \dim X - 1 \geqslant \dim Y,$$

где кратность $f = \sup\{|f^{-1}y| : y \in Y\}$.

Формула Гуревича для понижающих размерность отображений: для непрерывного замкнутого отображения $f: X \to Y$ на паракомпакт Y выполняется неравенство

$$\dim X - \dim f \leqslant \dim Y, \qquad (1)$$

где

$$\dim f = \sup\{\dim f^{-1}y : y \in Y\}.$$

Для произвольного нормального пространства Y эта формула, вообще говоря, неверна.

В случае непрерывных отображений конечномерных компактов установлено, что непрерывное отображение f размерности $\dim f = k$ является суперпозицией k непрерывных отображений размерности 1 (это — уточнение формулы (1) и аналог того факта, что k-мерный куб есть произведение k отрезков).

В случае открытых отображений можно показать, что образ нульмерного бикомпакта нульмерен и в то же время гильбертов кирпич есть образ одномерного компакта, даже если соответствующее отображение f имеет размерность $\dim f$, равную нулю. Однако в случае открытого отображения $f: X \to Y$ бикомпактов X и Y кратности $\leqslant\aleph_0$ выполняется равенство $\dim X = \dim Y$.

Поведение Р. при взятии топологич. произведения описывают следующие утверждения:

а) существуют такие конечномерные компакты X и Y, что $\dim X \times Y < \dim X + \dim Y$;

б) если один из сомножителей произведения $X \times Y$ бикомпактен или метризуем, то $\dim X \times Y \leqslant \dim X + \dim Y$;

в) существуют такие нормальные пространства X и Y, что $\dim X \times Y > \dim X + \dim Y$.

В случае бикомпактных X и Y всегда $\operatorname{Ind} X \times Y < \infty$, если $\operatorname{Ind} X < \infty$ и $\operatorname{Ind} Y < \infty$, но может быть $\operatorname{Ind} X \times Y > \operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Y$. Если же бикомпакты X и Y совершенно нормальны или одномерны, то $\operatorname{Ind} X \times Y \leqslant \operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Y$.

Наиболее содержательна теория Р. прежде всего в классе метрич. пространств со счетной базой и затем в классе любых метрич. пространств. В классе метрич. пространств со счетной базой выполняются равенства Урысона

$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X. \qquad (2)$$

В классе любых метрич. пространств выполняется равенство Катетова

$$\dim X = \operatorname{Ind} X \qquad (3)$$

и может быть $\operatorname{ind} X = 0 < \operatorname{Ind} X = 1$.

В случае метрич. пространств понятие n-мерного пространства следующими двумя способами может быть сведено к понятию нульмерного пространства. Для метрич. пространства X тогда и только тогда $\dim X \leqslant n$, $n = 0, 1, \ldots$, когда

а) пространство X может быть представлено в виде не более чем $n+1$ нульмерных слагаемых;

б) существует непрерывное замкнутое отображение кратности $\leqslant n+1$ нульмерного метрич. пространства на пространство X.

Для любого подмножества A метрич. пространства X найдется такое подмножество $B \supset A$ типа G_δ в X, что $\dim B = \dim A$.

В классе метрич. пространств веса $\leqslant \tau$ и размерности $\leqslant n$ существует универсальное (в смысле вложений) пространство. Важную роль в построении теории Р. любых метрических (и более общих) пространств сыграла теорема Даукера: тогда и только тогда $\dim X \leqslant n$, когда в любое локально конечное открытое покрытие пространства X можно вписать открытое покрытие кратности $\leqslant n+1$.

Одним из наиболее важных вопросов теории Р. является вопрос о соотношениях между лебеговой и индуктивными Р. Хотя для произвольного пространства X значения размерностей $\dim X$, $\operatorname{ind} X$, $\operatorname{Ind} X$, вообще говоря, попарно различны, однако для нек-рых классов пространств, в том или ином смысле близких к метрическим, выполнено, напр., следующее:

а) если пространство X обладает непрерывным замкнутым отображением f размерности $\dim f = 0$ на метрич. пространство, то выполняется равенство (3), отсюда следуют равенства (2) для локально бикомпактных групп и их факторпространств;

б) если существует непрерывное замкнутое отображение метрич. пространства на пространство X, то выполняются равенства (2).

Еще одно общее условие для выполнения равенства (3) для паракомпакта X выглядит так: $\dim X = n$ и пространство X является образом нульмерного пространства при замкнутом отображении кратности $\leqslant n+$ $+1$, $n = 0, 1, \ldots$

В случае произвольного пространства X всегда выполняются неравенства $\dim X \leqslant \operatorname{Ind} X$ и $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$, а равенства $\dim X = 0$ и $\operatorname{Ind} X = 0$ равносильны. Для сильно паракомпактного (в частности, бикомпактного или финально компактного) пространства X выполняется неравенство $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$. Для бикомпактов равенства $\operatorname{ind} X = 1$ и $\operatorname{Ind} X = 1$ равносильны. Существуют бикомпакты, удовлетворяющие первой аксиоме счетности (и даже совершенно нормальные в предположении континуум-гипотезы), для которых $\dim X = 1$, $\operatorname{ind} X = n$, $n = 2, 3, \ldots$ Построен пример топологич. однородного бикомпакта с $\dim X < \operatorname{ind} X$. Для совершенно нормальных бикомпактов всегда $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$. Существуют бикомпакты даже с первой аксиомой счетности, для к-рых $\operatorname{ind} X < \operatorname{Ind} X$. Существует ли такое m, что для каждого $n > m$ найдется бикомпакт (метрич. пространство) X с $\operatorname{ind} X = m$, $\operatorname{Ind} X = n$,— неизвестно (1983).

В случае неметризуемых пространств Р. может не только не быть монотонной, но и обладает другими патологич. свойствами. Для любого $n = 2, 3, \ldots$ построен пример такого бикомпакта θ_n, что любое замкнутое подмножество его имеет Р. или 0 или $n=\dim\theta_n$. Аналогичный пример в случае индуктивных Р. невозможен. Построен также для любого $n=1,2,\ldots$ пример такого бикомпакта Φ_n, что любое разбивающее этот бикомпакт замкнутое множество имеет размерность $n=\dim\Phi_n$. Таким образом, подход к определению Р. в случае неметризуемого пространства в принципе отличен от индуктивного подхода А. Пуанкаре, основанного на разбиении пространства подпространствами меньшего числа измерений. Бикомпакты Φ_n имеют непосредственное отношение к следующему утверждению: в любом n-мерном бикомпакте содержится n-мерное канторово многообразие.

Подмножество n-мерного евклидова пространства E^n тогда и только тогда n-мерно, когда оно содержит внутренние относительно E^n точки. Компакт имеет размерность $\leqslant n$ тогда и только тогда, когда он обладает отображением Р. нуль в E^n, и, таким образом, с точностью до нульмерных отображений n-мерные компакты не отличимы от ограниченных замкнутых, содержащих внутренние (относительно E^n) точки подмножеств E^n.

См. также *Размерности теория*.

Лит.: [1] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973; [2] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948; [3] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1—2, М.— Л., 1951. *Б. А. Пасынков.*

РАЗМЕЩЕНИЕ с повторениями из m элементов по n — конечная последовательность $\bar{a}=(a_{i_1}, a_{i_2},\ldots,a_{i_n})$ элементов нек-рого множества $A=\{a_1, a_2,\ldots,a_m\}$. Если все члены $\bar{a}$ различны, то $\bar{a}$ наз. Р. без повторений. Число всех возможных Р. с повторениями из m по n равно m^n, а без повторений — $(m)_n=m(m-1)\ldots(m-n-1)$.

Р. можно рассматривать как функцию φ, заданную на $Z_n=\{1, 2, \ldots, n\}$ и принимающую значения из A: $\varphi(k=)a_{i_k}, k=1,2,\ldots, n$. Элементы A принято называть ячейками (или урнами), а элементы Z_n — частицами (или шарами); φ определяет заполнение различных ячеек различными частицами. Если речь идет о неразличимых частицах или ячейках, то подразумевается, что рассматриваются классы Р. Так, если все частицы одинаковы, то два Р., определяемые соответственно функциями φ и ψ, относятся к одному классу, если найдется подстановка σ множества Z_n такая, что $\varphi(\sigma(k))=\psi(k)$ для всех $k\in Z_n$. В этом случае число таких классов, или, как говорят, число размещений n одинаковых частиц по m различным ячейкам, есть число *сочетаний* с повторениями из n по m.

Если говорят, что все ячейки одинаковы, то имеют в виду, что Р. разбиваются на классы так, что два Р., определяемые функциями φ и ψ соответственно, относятся к одному классу, если существует подстановка τ множества A, при к-рой $\tau(\varphi(k))=\psi(k)$ для всех $k\in Z_n$. В этом случае число размещений n различных частиц по m одинаковым ячейкам, т. е. число классов, равно $\sum_{k=1}^{m} S(n, k)$, где $S(n, k)$ — числа Стирлинга II рода:

$$S(n, k)=S(n-1, k-1)+kS(n-1, k),\ S(0,0)=1,$$
$$S(n, k)=0 \text{ при } k>n \text{ и } k=0,\ n>0.$$

Если не различать как частицы, так и ячейки, то получают размещение n одинаковых частиц по m одинаковым ячейкам; число таких Р. равно $\sum_{k=1}^{n} p_n(k)$, где $p_n(k)$ — число разбиений n на k натуральных слагаемых.

Рассматриваются и другие разбиения Р. на классы, напр. когда вышеупомянутые подстановки σ и τ берутся из подгрупп симметрич. групп соответственно степеней n и m (см. об этом и других обобщениях в [1], [2]). Синонимами «Р.» являются термины «n-перестановка», «упорядоченная n-выборка из генеральной совокупности».

Лит.: [1] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [2] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963. *В. М. Михеев.*

РАЗНОСТНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ СХЕМА — разностная схема, построенная на основе вариационной задачи, соответствующей краевой задаче для дифференциального уравнения. Основная идея построения Р. в. с. состоит в том, чтобы при специальном выборе координатных функций в *Ритца методе* получить систему линейных алгебраич. уравнений, совпадающую по структуре с системой *разностных уравнений*; обычно неизвестными параметрами являются приближенные значения в узлах сетки точного решения и, возможно, нек-рых его производных. В качестве таких координатных функций можно использовать кусочно линейные, полилинейные и др. функции.

Разностные схемы можно получать также, выбирая специальным образом координатные функции в *Галеркина методе*. Метод получения разностных схем с помощью метода Галеркина наз. вариационно-разностным методом (или проекционно-разностным методом). Вариационно-разностный метод иногда наз. методом конечных элементов, хотя последнее название употребляется в более общем смысле.

Пусть поставлена краевая задача:

$$-(p(x)\,u'(x))' = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{2}$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, $p(x)$ — непрерывно дифференцируема и $p(x) \geqslant p_0 > 0$.

Умножение (1) на произвольную функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условиям (2), и интегрирование по x:

$$-\int_0^1 (pu')'\,\varphi\,dx = \int_0^1 f\varphi\,dx$$

приводит к тождеству

$$L(u, \varphi) \equiv \int_0^1 pu'\varphi'\,dx = \int_0^1 f\varphi\,dx, \tag{3}$$

к-рому удовлетворяет решение задачи (1), (2). Справедливо и обратное утверждение: функция $u(x)$, удовлетворяющая граничным условиям (2) и тождеству (3) при произвольных функциях $\varphi(x)$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, является решением задачи (1), (2). Тождество (3) используется для построения приближенного решения методом Галеркина. Промежуток [0,1] разбивается на N частей точками $x_i = ih$, $i = 1, \ldots, N-1$, $h = N^{-1}$. Множество $\{x_i\}$ наз. сеткой, точки x_i — узлами сетки, h — шагом сетки. В качестве координатных функций в методе Галеркина берутся функции

$$\varphi_i(x) = \psi(h^{-1}x - i), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

где

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{при } |t| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |t| > 1. \end{cases}$$

Функции $\varphi_i(x) \equiv 0$ вне промежутка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Это свойство координатных функций принято называть свойством локальности. Пусть приближенное решение задачи ищется в виде

$$v = \sum_{i=1}^{N-1} v_i \varphi_i(x), \tag{4}$$

где v_i — искомые параметры, к-рые являются значениями приближенного решения в узлах сетки:

$$v_i = v(x_i), \quad i=1, \ \dots, \ N-1.$$

Пусть K — множество функций вида (4). Функции из K линейны на промежутках $[x_i, x_{i+1}]$, непрерывны на $[0,1]$ и равны нулю при $x=0$ и $x=1$. Система метода Галеркина получается при подстановке в (3) функции $v(x)$ вместо $u(x)$ и функций $\varphi_i(x)$ вместо $\varphi(x)$:

$$L(v, \varphi_i) = \sum_{j=1}^{N-1} v_j \int_0^1 p(x) \varphi_j'(x) \varphi_i'(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 f(x) \varphi_i(x)\, dx, \quad i=1, \ \dots, \ N-1. \tag{5}$$

При этом

$$\varphi_i'(x) = \begin{cases} 1/h & \text{при } x_{i-1} < x < x_i, \\ -1/h & \text{при } x_i < x < x_{i+1} \end{cases}$$

и

$$L(\varphi_j, \varphi_i) = \int_0^1 p\varphi_j'\varphi_i'\, dx \neq 0$$

лишь для $j=i-1, \ i, \ i+1$, т. е. в каждом уравнении имеется не более трех неизвестных.

Система (5) может быть записана в виде

$$h^{-2}\left[-\alpha_{i-1/2} v_{i-1} + (\alpha_{i-1/2} + \alpha_{i+1/2}) v_i - \alpha_{i+1/2} v_{i+1}\right] = f_i,$$
$$i=1, \ \dots, \ N-1,$$

где

$$\alpha_{i-1/2} = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\, dx,$$

$$f_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x)\, dx, \quad v_0 = v_N = 0.$$

Эта система по структуре сходна с обычной разностной. Системы уравнений, полученные таким способом, и наз. **разностными вариационными схемами**. В отличие от обычных разностных схем коэффициенты $\alpha_{i-1/2}$ и f_i являются не значениями функций p и f в фиксированных точках, а их усреднениями. Это обстоятельство позволяет использовать Р. в. с. для уравнений с «плохими» (напр., разрывными) коэффициентами.

Пусть $L_h = \{L(\varphi_j, \varphi_i)\}$ — матрица системы (5). Так как $L(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i, \varphi_j)$, то матрица L_h симметрична. Имеет место равенство

$$(L_h w_h, \ w_h) = \int_0^1 p(w')^2\, dx,$$

где $w_h = \{w_i\}_{i=1}^{N-1}$ — произвольный вектор из евклидова пространства E_{N-1} размерности $N-1$, $(.,.)$ — скалярное произведение в E_{N-1},

$$w = \sum_{i=1}^{N-1} w_i \varphi_i(x).$$

Из неравенства

$$\max_x u^2(x) = \max \left(\int_0^x u'(t)\, dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 (u')^2\, dx,$$

справедливого для произвольной непрерывной и дифференцируемой функции, удовлетворяющей условию $u(0)=(0)$, следует оценка

$$\int_0^1 p(x)(w'(x))^2\, dx \geqslant p_0 \max_x (w(x))^2 \geqslant$$

$$\geqslant p_0 h \sum_{i=1}^{N-1} w_i^2,$$

из к-рой выводится неравенство

$$(L_h w_h, \ w_h) \geqslant p_0 h (w_h, \ w_h). \tag{6}$$

Матрица L_h положительно определена; система (5) однозначно разрешима.

При малых значениях h система (5) состоит из большого числа уравнений. Точность решения системы алгебраич. уравнений и объем необходимой для этого работы в большой степени зависят от величины т. н. **числа обусловленности** $P=\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ матрицы системы, где $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы L_h. Из неравенства (6) следует, что $\lambda_{\min}\geqslant p_0 h$. Справедлива также оценка

$$\lambda_{\max}\leqslant 4h^{-1}\max_x p(x).$$

Число обусловленности $P=O(h^{-2})$, что совпадает по порядку h с известными оценками для матриц обычных разностных схем.

Сходимость приближенного решения к точному доказывается по обычной для метода Галеркина схеме. Из (3) и (5) для произвольной функции φ из K следует, что

$$L(u-v,\ \varphi)=0, \tag{7}$$

откуда

$$L(u-v,\ u-v)=L(u-v,\ u-w), \tag{8}$$

где w — произвольная функция из K. Правая часть (8) оценивается с помощью неравенства

$$[L(\varphi,\ \psi)]^2\leqslant L(\varphi,\ \varphi)\,L(\psi,\ \psi).$$

Таким образом,

$$L(u-v,\ u-v)=\int_0^1 p(x)(u'-v')^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\inf_{w\in K}\int_0^1 p(x)(u'-w')^2\,dx.$$

Обозначение

$$|u|=\left(\int_0^1 pu'^2\,dx\right)^{1/2}$$

(число $|u|$ наз. **энергетической нормой** функции u) позволяет переписать последнее неравенство в виде

$$|u-v|\leqslant\inf_{w\in K}|u-w|.$$

Оценка погрешности Р. в. с. сводится к оценке наилучшего приближения точного решения функциями класса K. Если в качестве $w(x)$ взять кусочно линейную функцию

$$\tilde{w}(x)=\sum\nolimits_{i=1}^{N-1}u(x_i)\,\varphi_i(x),$$

совпадающую с функцией $u(x)$ в узлах сетки, то справедлива оценка:

$$|u-v|\leqslant Ch^2\max p(x)\int_0^1 (u'')^2\,dx,$$

где C — постоянная.

На рассмотренном примере видны нек-рые характерные черты вариационно-разностного метода: локальность координатных функций, обеспечивающих близость Р. в. с. по структуре к разностным схемам, и применимость техники проекционных методов к исследованию сходимости Р. в. с.

Основным при построении Р. в. с. является выбор локальных координатных функций, обладающих требуемыми аппроксимационными свойствами. Задача аппроксимации ставится в различных функциональных пространствах. Для задач математич. физики важны пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$, т. е. линейные множества функций с конечной нормой

$$\|u\|_{p,\,l}=\sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant l}\left(\int_\Omega |D^\alpha u|^p\,dx_1\ldots dx_n\right)^{1/p},$$

где Ω — область в E_n, $p\geqslant 1$, l — неотрицательное целое число, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — вектор с целочисленными координатами, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$,

$$D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Многие классы локальных координатных функций строятся по следующей схеме. Пусть заданы функции $\varphi^1(\xi)$, $\varphi^2(\xi),\ldots,\varphi^r(\xi)$, принадлежащие $W_p^k(E_n)$ и равные нулю вне n-мерного куба $|\xi_j|<R$, $j=1,2,\ldots,n$. Пусть $h=(h_1,\ldots,h_n)$ — заданный вектор с положительными координатами, $i=(i_1,\ldots,i_n)$ — произвольный целочисленный вектор,

$$h^{-1}(x)\equiv\left(h_1^{-1}x_1,\ h_2^{-1}x_2,\ \ldots,\ h_n^{-1}x_n\right).$$

Через I обозначено множество векторов i таких, что n-мерный параллелепипед $|h_j^{-1}x_j-i_j|<R$, $j=1,\ldots,n$, пересекается с Ω. Для данной области Ω в качестве координатных функций выбираются функции вида

$$\varphi_i^\mu(x)=\varphi^\mu(h^{-1}x-i),\quad i\in I,\ \mu=1,\ \ldots,\ r,$$

т. е. функции, полученные из исходных функций масштабированием аргументов и сдвигом на вектор i. Такие координатные функции принято называть р е г у л я р н ы м и. Пусть классом K наз. множество функций вида

$$w(x)=\sum\nolimits_{i\in I}\sum\nolimits_{\mu=1}^{r}w_i^\mu\varphi_i^\mu(x).$$

Если любой полином P_{l-1} степени l от ξ можно представить как линейную комбинацию $\varphi^1(\xi),\ldots,\varphi^r(\xi)$, то для произвольной функции $u(x)\in W_p^l(\Omega)$ можно указать функцию $w\in K$ такую, что справедливо аппроксимационное неравенство

$$\|u-w\|_{p,\,k}\leqslant C\bar{h}^{l-k}\|u\|_{p,\,l},\quad 0\leqslant k<l,\tag{9}$$

где $\bar{h}=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}h_j$, C не зависит от h и u.

Р. в. с. для краевых задач для эллиптич. уравнений строятся на основе эквивалентных задач нахождения функций, удовлетворяющих интегральным тождествам. Многие из этих задач состоят в нахождении функции $u\in W_2^m(\Omega)$, удовлетворяющей при произвольной функции $\varphi\in W_2^m(\Omega)$ интегральному тождеству

$$L(u,\ \varphi)\equiv\sum\nolimits_{|\alpha|,\ |\beta|\leqslant m}\int_\Omega a_{\alpha\beta}D^\alpha uD^\beta\varphi\,d\Omega+$$
$$+\sum\nolimits_{|\rho|,\ |\tau|<m}\int_S b_{\rho\tau}D^\rho uD^\tau\varphi\,dS=\int_\Omega f\varphi\,d\Omega,\tag{10}$$

где S — граница Ω, $a_{\alpha\beta}(x)$, $b_{\rho\tau}(x)$ и $f(x)$ — заданные функции. Предполагается, что

$$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha},\ b_{\rho\tau}=b_{\tau\rho}$$

и $$L(u,\ u)\geqslant\gamma\|u\|_{2,\,m}^2,\quad \gamma=\text{const}>0.$$

Применение к (10) метода Галеркина с координатными функциями φ_i^μ приводит к Р. в. с. для задачи (10). Пусть решение $u(x)$ задачи (10) принадлежит $W_2^l(\Omega)$, $l>m$, и функции φ_i^μ удовлетворяют условиям, при к-рых справедливо неравенство (9). Для оценки погрешности Р. в. с. используют стандартную технику метода Галеркина:

$$\gamma\|u-v\|_{2,\,m}^2\leqslant L(u-v,\ u-v)\leqslant$$
$$\leqslant\inf_{w\in K}L(u-w,\ u-w)\leqslant Ch^{2(l-m)}\|u\|_{2l}^2,$$

где v — приближенное решение.

Задачи вида (10), для к-рых в качестве функции φ может быть взята произвольная функция из $W_2^m(\Omega)$, наз. з а д а ч а м и с е с т е с т в е н н ы м и к р а евымн условиями. Существует другой класс краевых задач, в к-рых на границе S ставятся краевые условия вида

$$\left(\sum_{|\alpha|<m} b_{\alpha}^{j} D^{\alpha} u\right)\Big|_{S}=0,\ 0 \leqslant j \leqslant \nu, \quad \nu \leqslant m-1. \quad (11)$$

В этом случае краевым условиям (11) в тождестве (10) должны удовлетворять и функции $\varphi \in W_2^m(\Omega)$. Для приближенного решения таких задач методом Галеркина необходимо, чтобы координатные функции удовлетворяли условиям (11). Введенные выше координатные функции $\varphi_i^{\mu}(x)$, в силу самого способа их построения, вообще говоря, не пригодны для представления приближенного решения, удовлетворяющего условиям (11).

Один из приемов построения Р. в. с. для задач с краевыми условиями вида (11) связан с использованием метода штрафа. Пусть, напр., требуется решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона. Эта задача эквивалентна определению функции $u(x)$, $u|_S=0$, удовлетворяющей при произвольной функции $\varphi(x)$, $\varphi|_S=0$, интегральному тождеству

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) d\Omega=\int_{\Omega} f\varphi \, d\Omega.$$

В методе штрафа вводится в рассмотрение функция v, удовлетворяющая при произвольных функциях φ интегральному тождеству

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) d\Omega+\frac{1}{\varepsilon}\int_{S} v\varphi \, dS= \\ =\int_{\Omega} f\varphi \, d\Omega, \quad \varepsilon>0.$$

Функция v является решением задачи с естественным краевым условием. Доказывается, что при малых значениях ε решения u и v близки. Для приближенного решения последней задачи можно применить Р. в. с. с использованием регулярных координатных функций.

Общий способ построения координатных функций таков.

Пусть для произвольного положительного числа h в Ω задано множество точек z_i, $i=1, 2, \ldots, N$, наз. узлами сетки, такое, что каждая точка области отстоит от какого-либо узла не более чем на h. Пусть для каждого узла z_i определен набор функций $\varphi_1^i, \varphi_2^i, \ldots, \varphi_{\nu(i)}^i$ из $W_2^m(\Omega)$, удовлетворяющих заданным граничным условиям (11), причем $\nu(i) \leqslant M$, где M не зависит от i и h. Пусть при каждом i и всех j интеграл

$$\int_{\Omega} \varphi_j^i \varphi_m^k \, d\Omega$$

отличен от нуля лишь для числа индексов k, ограниченного числом, не зависящим от i и h (условие локальности координатных функций). Пусть K — класс функций вида

$$w=\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{\nu(i)} \lambda_j^i \varphi_j^i,$$

где λ_j^i — числовые параметры.

Если решение $u(x)$ краевой задачи может быть приближено функциями класса K с точностью, характеризуемой неравенством

$$\inf_{w \in K} \|u-w\|_{2, m} \leqslant C h^{l-m} \|u\|_{2, l}, \quad m<l,$$

то для решения, полученного при помощи Р. в. с., справедлива оценка погрешности

$$\|u-v\|_{2, m} \leqslant C h^{l-m} \|u\|_{2, l}.$$

Нерегулярные сетки применяются иногда для более полного учета свойств задачи. Напр., для более точного воспроизведения функции в окрестности угловой точки границы можно расположить узлы на радиально-кольцевой сетке.

Для численной реализации матрица Р. в. с. должна обладать не слишком плохой обусловленностью. Для задач вида (10) оптимальной считается обусловленность, выражаемая соотношением $P=O(N^{2m/n})$, где P — число обусловленности матрицы Р. в. с., N — число узлов сетки, n — размерность пространства, содержащего область Ω. Для многих конкретных задач такая обусловленность действительно имеет место.

Использование Р. в. с. сочетает достоинства метода сеток и проекционных методов. Структура Р. в. с. позволяет использовать экономичные методы решения разностных схем. Легко устанавливается разрешимость Р. в. с.: матрица Р. в. с. положительно определена, если положительно определен дифференциальный оператор. Вопрос о сходимости сводится к вопросу об аппроксимации точного решения координатными функциями Р. в. с., и, следовательно, скорость сходимости определяется дифференциальными свойствами точного решения. Р. в. с. можно применять при весьма слабых ограничениях на данные задачи.

Исследования по Р. в. с. проводятся в следующих основных направлениях:

1) создание координатных функций, удовлетворяющих краевым условиям, исследование их аппроксимационных свойств;

2) получение оценок точности в различных нормах;

3) построение Р. в. с. для задач, имеющих те или иные особенности (линии разрыва коэффициентов, угловые точки границы и т. д.);

4) разработка методов решения Р. в. с. и способы оптимизации методов решения;

5) решение нелинейных уравнений;

6) применение Р. в. с. для нестационарных уравнений.

Лит.: [1] Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А., Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, ч. 1—2, Вильнюс, 1973—74; [2] Strang G., Fix G., An analysis of the finite element method, Englewood Cliffs, 1973; [3] Aubin J.-P., Approximation of elliptic boundary — value problems, N. Y., 1972; [4] Варга Р., Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе, пер. с англ., М., 1974; [5] Михлин С. Г., «Зап. научн. семинаров ЛОМИ», 1974, т. 48, с. 32—188; [6] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [7] Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, М., 1971. *Л. А. Оганесян.*

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА — система *разностных уравнений*, аппроксимирующих дифференциальное уравнение и дополнительные (начальные, граничные и др.) условия. Аппроксимация исходной дифференциальной задачи Р. с.— это один из способов приближенной дискретизации исходной задачи. Он заключается в том, что заданную область изменения независимых переменных G заменяют дискретным множеством точек G_h — сеткой, а производные, входящие в дифференциальное уравнение, заменяют на сетке G_h разностными отношениями. В результате такой замены возникает замкнутая система большого числа алгебраич. уравнений (линейных или нелинейных в зависимости от исходной дифференциальной задачи), к-рая и представляет собой Р. с. По существу Р. с.— это семейство разностных уравнений, зависящих от шагов сетки. Решение Р. с. также зависит параметрически от шагов сетки. Р. с.— многопараметрический и сложный объект. Помимо коэффициентов исходного дифференциального уравнения она содержит свои собственные параметры такие, как шаги по времени и пространству, весовые множители и др. Влияние этих параметров может существенно исказить представление о поведении исходной дифференциальной задачи.

В связи с разностной аппроксимацией дифференциальных задач изучаются следующие вопросы: о способах построения Р. с., о сходимости при измельчении сетки решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи, о методах решения систем разностных уравнений. Все перечисленные вопросы рассматривает *разностных схем теория*. Разработаны эффективные численные методы решения типичных Р. с. для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, предполагающие использование быстродействующих ЭВМ.

Ниже приводится простой пример Р. с. Пусть имеется дифференциальная задача

$$\left.\begin{array}{c} u''(x) - q(x)\,u(x) = -f(x), \quad q(x) \geqslant 0, \ 0 < x < 1, \\ u'(0) = \sigma u(0) - \mu_1, \quad u(1) = \mu_2, \quad \sigma > 0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Область $G\{0<x<1\}$ заменяется сеткой

$$G_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad hN = 1\}.$$

Р. с. для задачи (1) имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q_i y_i = -f_i, \ i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ \dfrac{y_1 - y_0}{h} = (\sigma + 0{,}5hq_0)\, y_0 - (\mu_1 + 0{,}5hf_0), y_N = \mu_2, \end{array}\right\} \quad (2)$$

где $y_i = y(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $x_i \in G_h$. Можно показать, что при $h \to 0$ решение разностной задачи (2) сходится к решению исходной задачи (1) и при достаточной гладкости функции $q(x)$, $f(x)$.

Р. с. (2) имеет второй порядок точности, т. е.

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant N} |y_i - u(x_i)| \leqslant Mh^2,$$

где M — постоянная, не зависящая от h. Решение Р. с. (2) находится методом прогонки.

Лит.: [1] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [2] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

А. В. Гулин, А. А. Самарский.

РАЗНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО, совершенное разностное множество,— множество D, состоящее из k вычетов $d_1, d_2, \ldots, d_k$ по модулю нек-рого натурального числа v, причем для каждого $a \in D$, $a \not\equiv 0 \pmod v$, существует точно λ упорядоченных пар (d_i, d_j) элементов из D таких, что

$$a \equiv d_i - d_j \pmod v;$$

числа v, k, λ наз. параметрами Р. м. Напр., множество $D = \{1, 3, 4, 5, 9\}$ вычетов по модулю 11 есть Р. м. с $\lambda = 2$.

Р. м. тесно связаны с *блок-схемами*, а именно: существование Р. м. равносильно существованию симметричной блок-схемы с параметрами (v, k, λ), обладающей циклич. группой автоморфизмов порядка v (блоки такой схемы суть множества $\{d_1 + i, \ldots, d_k + i\}$, $i = 0, 1, \ldots, v-1$). Идея Р. м. обобщается следующим образом: множество D, состоящее из k различных элементов $d_1, \ldots, d_k$ группы G порядка v, наз. (v, k, λ)-разностным множеством в G, если для любого $a \in G$, $a \neq 1$, существует в точности λ упорядоченных пар (d_i, d_j), $d_i, d_j \in G$, таких, что $d_i d_j^{-1} = a$ (или, что то же, λ пар (d_i, d_j) с $d_i^{-1} d_j = a$). Тогда определенное выше Р. м. наз. циклическим Р. м. (т. к. группа классов вычетов по mod v есть циклич. группа). Существование (v, k, λ)-разностных множеств в группе G порядка v равносильно существованию симметричной блок-схемы с параметрами v, k, λ, допускающей G в качестве регулярной (т. е. без неподвижных элементов) группы автоморфизмов (эта схема получается отождествлением элементов блок-схемы с элементами группы и блоков — с множествами $\{d_1 g, \ldots, d_k g\}$, где g пробегает G).

Основным в теории Р. м. является вопрос о существовании и построении Р. м. с заданными параметрами.

При его изучении оказывается полезным понятие множителя Р. м.: автоморфизм группы G наз. **множителем** (v, k, λ)-разностного множества D в G, если он является также автоморфизмом блок-схемы, определяемой Р. м. D. Для циклического Р. м. множитель — это число t, взаимно простое с v и с тем свойством, что

$$\{td_1, \ldots, td_k\} = \{d_1 + i, \ldots, d_k + i\}$$

для нек-рого i, $0 \leqslant i \leqslant v-1$. Множители циклического Р. м. образуют группу. Справедливо утверждение: если D — циклическое (v, k, λ)-разностное множество и если p — простое число, делящее $k-\lambda$ и такое, что $(p, v)=1$ и $p>\lambda$, то p — множитель D (**теорема о множителе** Р. м.). При построении Р. м. полезен следующий результат: для любого множителя (v, k, λ)-разностного множества D в абелевой группе G порядка v в блок-схеме, определяемой D, существует блок, фиксируемый этим множителем; при $(v, k)=1$ существует блок, фиксируемый любым множителем.

Р. м. обычно строятся прямыми методами с использованием свойств конечных полей, полей деления круга (см. *Круговое поле*), а также конечных геометрий. Известно несколько бесконечных семейств Р. м., напр. следующие типы S и Q.

Тип S (**разностные множества Зингера**): это — гиперплоскости в n-мерной проективной геометрии над полем из q элементов; параметры:

$$v = (q^{n+1}-1)/(q-1),$$
$$k = (q^n-1)/(q-1), \quad \lambda = (q^{n-1}-1)/(q-1);$$

тип Q: квадратичные вычеты в поле $GF(p^r)$ при $p^r \equiv 3 \pmod 4$ (p — простое число); параметры:

$$v = p^r = 4t-1, \quad k = 2t-1, \quad \lambda = t-1.$$

Другие бесконечные семейства Р. м. см. в [1]—[3]. Наряду с Р. м. часто рассматриваются **обобщенные Р. м.**, или **разностные семейства**,— это множества $D_1, \ldots, D_r$, состоящие из вычетов по $\bmod\, v$ и такие, что для любого $a \not\equiv 0 \pmod v$ существует точно λ упорядоченных пар (d_i, d_j), $d_i, d_j \in D_k$, с

$$a \equiv d_i - d_j \pmod v$$

для нек-рого k, $1 \leqslant k \leqslant r$.

Имеются также другие обобщения Р. м.

Лит.: [1] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [2] Baumert L. D., Cyclic difference sets, B.— Hdlb.—N.Y., 1971; [3] Hall M., «Math. Centre Tracts», 1974, v. 57, p. 1—26.

В. Е. Тараканов.

РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, содержащее конечные разности искомой функции. Пусть $y(n) = y_n$ — функция целочисленного аргумента $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n, \quad \Delta^{m+1} y_n = \Delta(\Delta^m y_n),$$
$$\Delta^1 y_n = \Delta y_n, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

— конечные разности. Выражение $\Delta^m y_n$ содержит значения функции y в $(m+1)$-й точке $n, n+1, \ldots, n+m$. Справедлива формула

$$\Delta^m y_n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k y_{n+k}. \qquad (1)$$

Разностным уравнением наз. уравнение вида

$$F(n;\, y_n, \Delta y_n, \ldots, \Delta^m y_n) = 0, \qquad (2)$$

где y — искомая и F — заданная функции. Замена в (2) конечных разностей их выражениями через значения искомой функции согласно (1) приводит к уравнению вида

$$F(n;\, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+m}) = 0. \qquad (3)$$

Если $\frac{\partial F}{\partial y_n} \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y_{n+m}} \neq 0$, т. е. уравнение (3) действительно содержит как y_n, так и y_{n+m}, то уравнение (3) наз. разностным уравнением m-го порядка, или дифференциально-разностным уравнением.

Наиболее развита теория линейных Р. у., к-рая имеет много общего с теорией обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (см. [1] — [3]). Линейным Р. у. m-го порядка наз. уравнение

$$a_m(n)\, y_{n+m} + a_{m-1}(n)\, y_{n+m-1} + \ldots + a_0(n)\, y_n = f_n, \quad (4)$$

где $f_n = f(n)$ — заданная функция, $a_k(n)$, $k=0, 1, \ldots, m$, — заданные коэффициенты, причем $a_m(n) \neq 0$, $a_0(n) \neq 0$. Решением Р. у. (4) наз. всякая функция $y_n = y(n)$, удовлетворяющая уравнению (4). Как и в случае дифференциальных уравнений, различают частное и общее решения Р. у. (4). Общим решением Р. у. (4) наз. его решение, зависящее от m произвольных параметров и такое, что каждое частное решение может быть получено из этого общего решения при нек-ром значении параметров. Обычно конкретные значения параметров находятся из дополнительных условий. Типичной является задача Коши: по заданным $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}, f_n$ найти решение y_n уравнения (4) при $n=m, m+1, \ldots$ Существование и способ построения решения Р. у. (4) устанавливаются по следующей схеме. Наряду с (4) рассматривается однородное Р. у.

$$a_m(n)\, y_{n+m} + a_{m-1}(n)\, y_{n+m-1} + \ldots + a_0(n)\, y_n = 0. \quad (5)$$

Справедливы следующие утверждения.

1) Пусть $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots, y_n^{(k)}$ — решения уравнения (5) и $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — произвольный набор постоянных. Тогда функция $c_1 y_n^{(1)} + c_2 y_n^{(2)} + \ldots + c_k y_n^{(k)}$ также является решением уравнения (5).

2) Если $y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(m)}$ суть m решений уравнения (5) и определитель

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} & \cdots & y_0^{(m)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{m-1}^{(1)} & y_{m-1}^{(2)} & \cdots & y_{m-1}^{(m)} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то общее решение однородного Р. у. (5) имеет вид

$$y_n = \sum_{k=1}^{m} c_k y_n^{(k)}, \quad (6)$$

где c_k — произвольные постоянные.

3) Общее решение неоднородного Р. у. (4) представляется в виде суммы какого-либо частного его решения и общего решения однородного Р. у. (5).

Частное решение неоднородного уравнения (5) можно построить, исходя из общего решения (6) однородного уравнения, путем применения метода вариации произвольных постоянных (см., напр., [2]). В случае Р. у. с постоянными коэффициентами

$$a_m y_{m+n} + a_{m-1} y_{m+n-1} + \ldots + a_0 y_n = 0 \quad (7)$$

можно непосредственно найти m линейно независимых частных решений. Для этого рассматривается характеристич. уравнение

$$a_m q^m + a_{m-1} q^{m-1} + \ldots + a_0 = 0 \quad (8)$$

и ищутся его корни $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Если все корни простые, то функции

$$y_n^{(1)} = q_1^{(n)},\ y_n^{(2)} = q_2^{(n)},\ \ldots,\ y_n^{(m)} = q_m^n$$

образуют линейно независимую систему решений уравнения (7). В случае, когда q_k — корень кратности r, линейно независимыми являются решения

$$q_k^n,\ nq_k^n,\ n^2q_k^n,\ \ldots,\ n^{r-1}q_k^n.$$

Если коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_m$ действительные и уравнение (8) имеет комплексный корень, напр. простой корень $q_k = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то вместо комплексных решений q_k^n, $\bar{q}_k^n$ выделяют два линейно независимых действительных решения

$$\rho^n \cos n\varphi, \quad \rho^n \sin n\varphi.$$

Пусть имеется Р. у. 2-го порядка с постоянными действительными коэффициентами

$$a_2y_{n+2} + a_1y_{n+1} + a_0y_n = 0. \tag{9}$$

Характеристич. уравнение

$$a_2q^2 + a_1q + a_0 = 0$$

имеет корни

$$q_{1,2} = \left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}\right)/(2a_2).$$

Общее решение уравнения (9) в случае $q_2 \neq q_1$ удобно записывать в виде

$$y_n = c_1 \frac{q_2q_1^n - q_1q_2^n}{q_2 - q_1} + c_2 \frac{q_2^n - q_1^n}{q_2 - q_1}, \tag{10}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Если q_1 и q_2 — комплексно сопряженные корни:

$$q_{1,2} = \rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi),$$

то другое представление общего решения имеет вид

$$y_n = -c_1\rho^n \frac{\sin(n-1)\varphi}{\sin\varphi} + c_2\rho^{n-1} \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}. \tag{11}$$

В случае кратного корня общее решение может быть получено предельным переходом из (10) или (11). Оно имеет вид

$$y_n = -c_1(n-1)q_1^n + c_2nq_1^{n-1}.$$

Как и в случае уравнений произвольного порядка, для Р. у. 2-го порядка можно рассматривать задачу Коши или различные краевые задачи. Напр., для задачи Коши

$$\left.\begin{array}{c} T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = 0,\ n = 0, 1, \ldots, \\ T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x, \end{array}\right\} \tag{12}$$

где x — любое действительное число, решением (12) является многочлен $T_n(x)$ степени n (**многочлен Чебышева 1-го рода**), к-рый определяется формулой

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) =$$
$$= 0{,}5\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{-n}\right].$$

Краевая задача Р. у. 2-го порядка состоит в нахождении функции y_n, удовлетворяющей при $n = 1, 2, \ldots, N-1$ уравнению

$$Ly_n = a_ny_{n-1} - c_ny_n + b_ny_{n+1} = -f_n \tag{13}$$

и двум линейно независимым краевым условиям. Такими краевыми условиями могут быть, напр., условия

$$y_0 = \varkappa_1y_1 + \mu_1,\ y_N = \varkappa_2y_{N-1} + \mu_2 \tag{14}$$

или условия

$$y_0 = \mu_1,\ y_N = \mu_2. \tag{15}$$

Для Р. у. 2-го порядка справедлив следующий принцип максимума. Пусть дана задача (13), (15) и пусть выполнены условия

$$a_n > 0,\ b_n > 0,\ c_n \geqslant a_n + b_n,\ n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Тогда если $Ly_n \geqslant 0$ $(Ly_n \leqslant 0)$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$, то $y_n \not\equiv \mathrm{const}$ не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения при $n=1, 2, \ldots, N-1$. Из принципа максимума следует однозначная разрешимость краевой задачи (13), (15) и устойчивость ее решения относительно изменения граничных условий μ_1, μ_2 и правых частей f_n. Для решения разностных краевых задач (13), (14) применяется *прогонки метод* (см. [2]).

Построить в явном виде решения нелинейных Р. у.

$$y_{n+1}=f_n(y_n),\ n=0,\ 1,\ \ldots \tag{16}$$

удается лишь в отдельных очень частных случаях. Для уравнений вида (16) изучаются в основном качественные вопросы поведения решений при $n\to\infty$ и развита теория устойчивости, аналогичная теории устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [4], [5]).

При разностной аппроксимации уравнений с частными производными возникают многомерные Р. у. (см. [2], [6]). Напр., уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-f(x_1,\ x_2)$$

можно аппроксимировать Р. у.

$$\frac{u_{i+1,\ j}-2u_{i,\ j}+u_{i-1,\ j}}{h_1^2}+\frac{u_{i,\ j+1}-2u_{i,\ j}+u_{i,\ j+1}}{h_2^2}=-f_{i,j},$$

где

$$u_{i,j}=u\left(x_1^{(i)},\ x_2^{(j)}\right),\ x_1^{(i)}=ih_1,\ x_2^{(j)}=jh_2,$$
$$i,\ j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$$

h_1, h_2 — шаги сетки.

Система многомерных Р. у. в совокупности с дополнительными начальными и граничными условиями образует разностную схему. В связи с многомерными Р. у. изучаются такие вопросы, как корректность разностных задач, методы их решения, сходимость при измельчении сетки к решениям исходных дифференциальных уравнений (см. *Разностных схем теория*).

Хотя существуют различные математические и технич. модели, приводящие к Р. у. (см., напр., [4], [5]), основной областью их применения являются приближенные методы решения дифференциальных уравнений (см. [6], [9]).

Лит.: [1] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967; [2] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [3] Самарский А. А., Карамзин Ю. Н., Разностные уравнения, М., 1978; [4] Мартынюк Д. И., Лекции по качественной теории разностных уравнений, К., 1972; [5] Халанай А., Векслер Д., Качественная теория импульсных систем, пер. с рум., М., 1971; [6] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [7] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962; [8] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [9] Горбунов А. Д., Разностные уравнения, М., 1972.

А. В. Гулин, А. А. Самарский.

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ — методы приближенного решения дифференциальных уравнений, основанные на замене этих уравнений уравнениями относительно функций дискретного аргумента. См. *Гиперболического типа уравнение*, численные методы решения; *Параболического типа уравнение*, численные методы решения; *Эллиптического типа уравнение*, численные методы решения; *Дифференциальное уравнение обыкновенное*, приближенные методы решения. *Н. С. Бахвалов.*

РАЗНОСТНЫЙ ОПЕРАТОР — оператор, действующий в пространстве сеточных функций. Р. о. возникают при аппроксимации дифференциальной задачи разностной и являются предметом изучения *разностных схем теории*. Разностную схему можно рассматривать как операторное уравнение с операторами, действующими в нек-ром функциональном пространстве, а именно в пространстве сеточных функций. Под пространством сеточных функций понимается множество функций, определенных в точках заданной сетки и образующих конечномерное векторное пространство. Пространства сеточных функций обычно возникают при аппроксимации того или иного пространства функций непрерывного аргумента.

Пример 1. Пусть $C\,[0,\ 1]$ — пространство непрерывных функций, заданных на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ с нормой

$$\| u \|_C = \max_{x \in [0,\ 1]} | u(x) |.$$

Вводится сетка

$$\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N,\ hN = 1\}$$

и рассматривается множество $C_h\,[0,\ 1]$ функций $y = \{y_i\}_0^N$, $y_i = y(x_i)$, заданных на сетке ω_h. Множество $C_h[0,\ 1]$ образует $(N+1)$-мерное векторное пространство относительно покоординатного сложения и умножения на число. Норма в $C_h\,[0,\ 1]$

$$\| y \|_{C_h} = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} | y_i |$$

согласована с нормой в $C\,[0,\ 1]$ в том смысле, что для любой функции $u \in C\,[0,\ 1]$ определен вектор

$$u_h = \{u_i\}_0^N \in C_h\,[0,\ 1],\ u_i = u(x_i),$$

и существует

$$\lim_{h \to 0} \| u_h \|_{C_h} = \| u \|_C.$$

Любой линейный Р. о. A_h как оператор, действующий в конечномерном пространстве, может быть представлен матрицей. Характерными свойствами матриц, порождаемых разностными операторами, являются их большой размер и относительно большое число нулевых элементов.

В общем случае конструкция пространств сеточных функций и Р. о. может быть весьма сложной. Наиболее изучены свойства Р. о., действующих в пространствах с гильбертовой метрикой. В этом случае наибольший интерес представляют такие свойства Р. о., как самосопряженность и положительность. В основе математич. аппарата, позволяющего исследовать свойства Р. о., лежат разностные аналоги формул дифференцирования произведения и интегрирования по частям.

Пример 2. Пусть задано множество действительных функций на сетке ω_h. Вводятся обозначения:

$$y_{\bar{x},\ i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h},\quad y_{x,\ i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h},\quad y_{\overset{\circ}{x},\ i} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},$$

$$y_{\bar{x}x,\ i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},\quad (y,\ v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h,$$

$$(y,\ v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h,\quad [y,\ v) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i v_i h.$$

Справедливы следующие формулы:

$$(yv)_{\bar{x},\ i} = y_{\bar{x},\ i} v_i + y_i v_{\bar{x},\ i} - h y_{\bar{x},\ i} v_{\bar{x},\ i},$$

$$(yv)_{x,\ i} = y_{x,\ i} v_i + y_i v_{x,\ i} + h y_{x,\ i} v_{x,\ i}.$$

Имеет место также формула суммирования по частям

$$(y,\ v_{\bar{x}}] = -[y_x,\ v) + y_N v_N - y_0 v_0.$$

Из последней формулы следует, в частности, самосопряженность и положительность оператора второй разностной производной

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x}x,\ i},\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$$

на множестве функций, заданных на сетке ω_h и обращающихся в нуль на границе $i=0$, $i=N$.

Многочисленные исследования посвящены изучению свойств разностных аппроксимаций дифференциальных операторов эллиптич. типа (см. [1] — [4]). Для построения соответствующих Р. о. используются такие эффективные методы, как метод баланса, конечных элементов, вариационные и проекционные методы. Найденные разностные аппроксимации хорошо моделируют основные свойства исходных операторов, такие, напр., как эллиптичность, выполнение принципа максимума и др. Построены также Р. о., аппроксимирующие эллиптические дифференциальные операторы в областях сложной формы при различных типах краевых условий и в случае нерегулярных сеток (см. [5]).

Свойства стационарных Р. о. используются для изучения устойчивости нестационарных разностных задач и для построения итерационных методов. При этом теория итерационных методов может быть изложена как один из разделов общей теории устойчивости разностных схем (см. [6], [7]).

В связи с построением экономичных разностных схем для многомерных задач математич. физики исследованы факторизованные Р. о., то есть многомерные Р. о., представимые в виде произведения одномерных Р. о. (см. [1]). Изучались и нелинейные Р. о. (см. [8]).

Лит.: [1] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [2] Самарский А. А., Андреев В. Б., Разностные методы для эллиптических уравнений, М., 1976; [3] Корнеев В. Г., Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности, Л., 1977; [4] Обэн Ж.-П., Приближенное решение эллиптических краевых задач, пер. с англ., М., 1977; [5] Самарский А. А., Фрязинов И. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 6, с. 167—97; [6] Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973; [7] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [8] Карчевский М. М., Ляшко А. Д., «Изв. вузов. Математика», 1972, № 11, с. 23—31; 1973, № 3, с. 44—52. *А. В. Гулин, А. А. Самарский.*

РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ТЕОРИЯ — раздел вычислительной математики, изучающий методы приближенного решения дифференциальных уравнений путем их замены конечноразностными уравнениями (разностными схемами).

Р. с. т. изучает способы построения разностных схем, исследует корректность разностных задач и сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи, занимается обоснованием алгоритмов решения разностных задач. Метод конечных разностей (называемый также методом сеток) является универсальным вычислительным методом, позволяющим эффективно решать сложнейшие задачи математич. физики, включая нелинейные задачи. Отличительной чертой современной Р. с. т. является ориентация на построение и исследование методов, пригодных для ЭВМ.

Основные понятия. Метод конечных разностей применяется в теории дифференциальных уравнений как эффективное средство доказательства теорем существования. Для целей вычислительной математики задачи **Р. с. т.** существенно меняются. Решая приближенно ту или иную задачу математич. физики, заранее предполагают, что эта задача поставлена корректно; при этом основной целью Р. с. т. становится нахождение и обоснование наилучшего метода решения исходной дифференциальной задачи, формулировка общих принципов построения разностных схем с заданными свойствами для широких классов задач математич. физики.

Ниже излагаются на достаточно общем примере основные понятия, к-рыми оперирует Р. с. т. — понятия аппроксимации, устойчивости, сходимости; демонстрируется один из возможных подходов к построению Р. с. т.

Пусть в n-мерной области G с границей Γ ищется решение дифференциального уравнения

$$Lu(x) = f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in G, \qquad (1)$$

с дополнительными (граничными, начальными) условиями

$$lu(x)=\mu(x),\ x\in\Gamma, \tag{2}$$

где L и l — линейные дифференциальные операторы, $f(x)$ и $\mu(x)$ — заданные функции. Пусть в нек-ром классе функций задача (1), (2) поставлена корректно (т. е. ее решение $u(x)$ существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных $f(x)$, $\mu(x)$). В методе конечных разностей область $\bar{G}=G+\Gamma$ приближенно заменяют дискретным множеством точек — с е т к о й $\bar{G}_h=G_h+\Gamma_h$. Параметр $h=(h_1, \ldots, h_n)$, шаг сетки, характеризует плотность сетки, и обычно при $|h|\to 0$ последовательность сеток G_h стремится заполнить всю область $\bar{G}$. Производные, входящие в (1), (2), аппроксимируются на сетке $\bar{G}_h$ соответствующими разностными отношениями. В результате получается система линейных алгебраич. уравнений

$$L_h y_h(x)=\varphi_h(x),\ x\in G_h;\ l_h y_h(x)=\chi_h(x),\ x\in\Gamma_h, \tag{3}$$

где $y_h(x)$ — искомая сеточная функция, $\varphi_h(x)$, $\chi_h(x)$ — заданные сеточные функции L_h, l_h — разностные операторы. Семейство уравнений (3), зависящее от параметра h, наз. р а з н о с т н о й с х е м о й. Хотя уравнение (3) получено путем аппроксимации исходной задачи (1), (2), его можно рассматривать как независимый математич. объект. Из корректности задачи (1), (2) не следует, вообще говоря, корректность разностной задачи (3). Поэтому одной из основных задач Р. с. т. является исследование корректности задачи (3). Кроме того, Р. с. т. изучает сходимость при $h\to 0$ решения $y_h(x)$ разностной задачи к решению $u(x)$ исходной дифференциальной задачи. Корректность и сходимость тесно связаны между собой.

Пусть множество сеточных функций, заданных на $\bar{G}_h$, образует векторное пространство H_h, а операторы L_h, l_h действуют в этом пространстве; в пространствах решений $y_h(x)$ и правых частей $\varphi_h(x)$, $\chi_h(h)$ вводятся нормы $\|\cdot\|_{(1h)}$, $\|\cdot\|_{(2h)}$, $\|\cdot\|_{(3h)}$.

Говорят, что разностная задача (3) поставлена корректно, если для всех достаточно малых $|h|$ и при любых φ_h, $\chi_h\in H_h$ ее решение существует, единственно и для него выполняется оценка

$$\|y_h\|_{(1_h)}\leqslant M\left(\|\varphi_h\|_{(2_h)}+\|\chi_h\|_{(3_h)}\right) \tag{4}$$

с константой M, не зависящей от h. Последнее свойство, означающее равномерную по h непрерывную зависимость решения от входных данных, наз. у с т о й ч и в о с т ь ю р а з н о с т н о й с х е м ы. Оценки вида (4) решения разностной задачи через известные правые части наз. а п р и о р н ы м и о ц е н к а м и. Получение априорных оценок составляет основу Р. с. т.

Для оценки погрешности решение задачи (3) представляется в виде суммы

$$y_h(x)=u_h(x)+z_h(x),$$

где $u_h(x)$ — проекция решения $u(x)$ задачи (1), (2) в пространство H_h, $z_h(x)$ — погрешность приближенного решения. В силу линейности задачи (3) для погрешности $z_h(x)$ получаются уравнения

$$L_h z_h(x)=\psi_h(x),\ x\in G_h;\ l_h z_h(x)=\nu_h(x),\ x\in\Gamma_h, \tag{5}$$

где

$$\psi_h(x)=\varphi_h(x)-L_h u_h(x);\ \nu_h(x)=\chi_h(x)-l_h u_h(x),$$

функции $\psi_h(x)$ и $\nu_h(x)$ наз. п о г р е ш н о с т я м и а п п р о к с и м а ц и и разностной схемой (3) уравнения (1) и дополнительного условия (2) соответственно. Говорят, что схема (3) аппроксимирует задачу (1), (2) с m-м порядком аппроксимации, если

$$\|\psi\|_{(2_h)} = O(|h|^m), \ \|\nu\|_{(3_h)} = O(|h|^m), \ m > 0.$$

Схема (3) имеет m-й порядок точности или сходится со скоростью $O(|h|^m)$, если

$$\|y_h - u_h\|_{(1_h)} = O(|h|^m).$$

Для сходимости разностной схемы одной только аппроксимации, вообще говоря, недостаточно: надо потребовать еще, чтобы разностная задача (3) была корректна. Именно, справедливо следующее утверждение: если разностная схема (3) корректна и имеет m-й порядок аппроксимации, то она сходится со скоростью $O(|h|^m)$ (см. [28]).

Возможны и другие подходы к построению Р. с. т. Так, в теории Лакса (см. [8]) сходимость разностных схем изучается не в пространствах сеточных функций, а в пространстве решений исходной дифференциальной задачи; здесь доказана т. н. теорема эквивалентности: если исходная задача (1), (2) корректна и схема (3) аппроксимирует задачу (1), (2), то устойчивость необходима и достаточна для сходимости. Возможны и другие постановки вопроса о связи устойчивости и сходимости (см., напр., [9]). Исследование сходимости разностных схем проводилось и в пространствах обобщенных решений (см. [10]).

Требования к разностным схемам. При расчетах на современных ЭВМ не всегда достаточно требовать от разностной схемы только сходимости при $|h| \to 0$. Использование реальных сеток при конечном шаге сетки предъявляет к схемам ряд дополнительных требований. Они сводятся к тому, что разностная схема помимо обычной аппроксимации и устойчивости должна хорошо моделировать характерные свойства исходного дифференциального уравнения. Кроме того, разностная схема должна удовлетворять определенным условиям простоты реализации вычислительного алгоритма. Ниже рассматриваются нек-рые из этих дополнительных требований.

Под однородной разностной схемой (см. [1], [11]) понимается разностная схема, вид к-рой не зависит ни от выбора конкретной задачи из данного класса, ни от выбора разностной сетки. Во всех узлах сетки для любой задачи из данного класса разностные уравнения имеют один и тот же вид. К однородным разностным схемам относятся, в частности, схемы сквозного счета для решений уравнений с сильно меняющимися или разрывными коэффициентами. Схемы сквозного счета не предусматривают явного выделения точек разрыва коэффициентов и позволяют вести вычисления по одним и тем же формулам. Широко используются схемы сквозного счета при расчетах разрывных решений уравнений газовой динамики (см. [1], [5], [12]).

Требование консервативности разностной схемы означает, что данная разностная схема имеет на сетке такой же закон сохранения, что и исходное дифференциальное уравнение. В частности, если L - самосопряженный оператор и схема (3) консервативна, то L_h — самосопряженный в H_h оператор, т. е. консервативная схема сохраняет свойство самосопряженности.

Регулярным методом получения консервативных однородных схем является т. н. метод баланса, или интегро-интерполяционный метод. Сущность метода баланса состоит в аппроксимации на разностной сетке интегрального закона сохранения (уравнения баланса), соответствующего данному дифференциальному уравнению. Метод баланса нашел широкое применение при аппроксимации уравнений с переменными, в том числе и разрывными, коэффициентами. Другой группой методов построения разностных схем, сохраняющих свойства самосопряженности и положительности исходного оператора, являются методы, основанные на вариационных принципах (метод Ритца, метод конечных элементов) (см. *Разностная вариационная схема*).

При конструировании разностных схем для уравнений газовой динамики нашел применение принцип полной консервативности (см. [5]). Для уравнений гиперболич. типа оказалось полезным исследование дисперсионных свойств соответствующих разностных уравнений (см. [13]).

Если известно, что при $t \to \infty$ решение исходной дифференциальной задачи стремится к нулю, то естественно требовать того же и от решения аппроксимирующей разностной задачи. Схемы, обладающие этим свойством, наз. асимптотически устойчивыми (см. [4]).

Другой подход к построению разностных схем лучшего качества состоит в получении схем, удовлетворяющих тем же априорным оценкам, к-рые характерны (неулучшаемы) для исходных дифференциальных уравнений (см. [14]).

Экономичные разностные схемы для многомерных задач математической физики. При решении систем разностных уравнений, аппроксимирующих нестационарные многомерные задачи математич. физики (с числом пространственных переменных два или более), возникают специфич. затруднения, связанные с тем, что число арифметич. операций, необходимых для отыскания решения на новом временном слое, резко возрастает при измельчении сетки. В то же время решение одномерных нестационарных задач осуществляется методом прогонки, к-рый экономичен в том смысле, что он требует конечного (не зависящего от шага сетки h) числа действий на одну точку сетки. В общем случае разностную схему наз. экономичной, если отношение числа действий, необходимых для отыскания решения на новом временном слое к числу узлов пространственной сетки, не зависит от числа узлов сетки. Обычные неявные разностные схемы не являются экономичными. Наиболее эффективным приемом построения экономичных разностных схем является метод сведения многомерных задач к нескольким одномерным задачам (метод переменных направлений, метод расщепления) (см. [1], [15], [16]).

Новые алгоритмы стимулировали и новый подход к основным понятиям теории разностных схем: аппроксимации, устойчивости, сходимости. Напр., оказалось плодотворным понятие суммарной аппроксимации или аппроксимации в слабом смысле (см. [1], [16]). Сформулирован принцип аддитивности, позволяющий в общем случае строить экономичные разностные схемы, обладающие свойством суммарной аппроксимации (см. [17]). Дальнейшим обобщением разностных схем переменных направлений явились схемы с уравнениями на графах и векторные схемы (см. [18]).

Методы исследования корректности и сходимости разностных схем. Для линейных задач из устойчивости и аппроксимации следует сходимость. Поэтому основное внимание в Р. с. т. уделяется получению априорных оценок, из к-рых следует корректность задач в той или иной норме. Методы получения априорных оценок для разностных схем во многом аналогичны тем же методам в теории дифференциальных уравнений, напр. можно указать следующие методы: разделение переменных, преобразование Фурье, принцип максимума, энергетич. неравенства.

Методы решения сеточных уравнений. Любой сеточный метод для дифференциальных уравнений приводит к большим системам линейных алгебраич. уравнений.

Напр., в случае многомерных задач число уравнений достигает порядка 10^4-10^6. Одномерные разностные задачи обычно решают методом прогонки (см. [2]), представляющим собой вариант метода последовательного исключения неизвестных. Наиболее распространенными методами решения многомерных сеточных уравнений являются итерационные методы. В вычислительной практике широко используются такие итерационные методы, как метод Ричардсона с чебышевским набором параметров, итерационные методы переменных направлений, двухступенчатые итерационные методы, представляющие собой комбинацию методов переменных направлений (внутренняя итерация) с каким-либо классич. методом (внешняя итерация). Часто используются также метод верхней релаксации и попеременно-треугольный итерационный метод (см. [2], [6]). Теория итерационных методов может быть изложена как один из разделов общей теории устойчивости разностных схем (см. [2]).

Наметилась тенденция к использованию прямых (неитерационных) методов решения многомерных разностных задач. К таким методам относятся матричная прогонка, быстрое дискретное преобразование Фурье и его обобщения, метод суммарных представлений.

Нелинейные задачи. Развита теория однородных разностных схем для нелинейных уравнений параболич. типа (см. [19]). Обобщена на нелинейный случай теорема Лакса о связи между устойчивостью и сходимостью (см. [20], [21]). Рассматривались разностные схемы для нелинейных эллиптич. уравнений (см. [23], [24]) и для нелинейных параболич. уравнений (см. [21], [22]). Имеется ряд общих теорем о корректности разностных схем для нелинейной абстрактной задачи Коши (см. [25]). Изучалась сходимость разностных схем для нелинейных эволюционных уравнений (см. [26], [27]).

Лит.: [1] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [2] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [3] Самарский А. А., Андреев В. Б., Разностные методы для эллиптических уравнений, М., 1976; [4] Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973; [5] Самарский А. А., Попов Ю. П., Разностные методы решения задач газовой динамики, М., 1980; [6] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [7] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы. Введение в теорию, М., 1973; [8] Рихтмайер Р. Д., Мортон К., Разностные методы решения краевых задач, пер. с англ., М., 1972; [9] Гудович Н. Н., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1966, т. 6, № 5, с. 916—21; [10] Кузнецов Н. Н., там же, 1972, т. 12, № 2, с. 334—51; [11] Тихонов А. Н., Самарский А. А., там же, 1961, т. 1, № 1, с. 5—63; [12] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М., 1978; [13] Поттер Д., Вычислительные методы в физике, пер. с англ., М., 1975; [14] Мокин Ю. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1975, т. 15, № 3, с. 661—71; [15] Фрязинов И. В., там же, 1976, т. 16, № 4, с. 908—921; [16] Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967; [17] Самарский А. А., «Докл. АН СССР», 1965, т. 165, № 6, с. 1253—56; [18] Самарский А. А., Фрязинов И. В., «Beitr. Numer. Math.», 1975, № 4, S. 191—203; [19] Самарский А. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 1, с. 25—56; [20] Якут Л. И., «Докл. АН СССР», 1964, т. 156, № 6, с. 1304—07; [21] Ansorge R., Hass R., Konvergenz von Differenzenverfahren für lineare und nichtlineare Anfangswertaufgaben, B., 1970; [22] Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, в. 2 — Нестационарные задачи, М., 1972; [23] Карчевский М. М., Ляшко А. Д., «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1972, № 11, с. 23—31; 1973, № 3, с. 44—52; [24] Сапаговас М. П., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, т. 5, № 4, с. 638—47; [25] Карчевский М. М., Лапин А. В., Ляшко А. Д., «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1972, № 3, с. 23—31; [26] Лапин А. В., Ляшко А. Д., там же, 1973, № 1, с. 71—77; [27] Raviart P. A., «J. math. pures et appl.», 1967, t. 46, № 1, p. 11—107; № 2, p. 109—83; [28] Рябенький В. С., Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956.

А. В. Гулин, А. А. Самарский.

РАЗНОСТЬ множеств — одна из операций над множествами. Пусть имеется два множества A и B (из к-рых второе может и не содержаться в первом).

Тогда множество тех элементов множества A, к-рые не являются элементами множества B, наз. разностью этих множеств.

Р. множеств A и B обозначается $A \setminus B$.

М. И. Войцеховский.

РАЗРЕЖЕННАЯ МАТРИЦА — матрица с малым числом ненулевых элементов. Системы линейных уравнений с такими матрицами возникают, в частности, при аппроксимации дифференциальных уравнений конечноразностными или вариационно-разностными.

Н. С. Бахвалов.

РАЗРЕЖЕННОСТЬ МНОЖЕСТВА $E \subset \mathbb{R}^n$ в точке $y_0 \in \mathbb{R}^n$ — локальный признак того, что E является *полярным множеством*. Непустое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ наз. разреженным в точке $y_0 \in \mathbb{R}^n$ в двух случаях: 1) если y_0 не является предельной точкой E, то есть $y_0 \notin E'$, где E' — производное множество для E; 2) если $y_0 \in E'$ и в окрестности y_0 существует супергармонич. функция $v(x)$ (см. *Субгармоническая функция*) такая, что

$$\lim_{\substack{x \to y_0 \\ x \in E \setminus \{y_0\}}} \inf v(x) > v(y_0).$$

Множество E является полярным тогда и только тогда, когда оно — разреженное множество (р. м.) в каждой из своих точек. Для произвольного множества E подмножество тех точек, в к-рых E есть р. м., является полярным. Любое непустое подмножество р. м. в точке $y_0 \in \mathbb{R}^n$ является р. м. в y_0. Объединение конечного числа р. м. в точке $y_0 \in \mathbb{R}^n$ является р. м. в точке y_0.

Отрезок на плоскости $\mathbb{R}^2$ не является р. м. ни в одной из своих точек. Если $E \subset \mathbb{R}^2$ — р. м. в точке y_0, то существуют сколь угодно малые окружности с центром y_0, не пересекающиеся с E. Полярное множество $E \subset \mathbb{R}^2$ вполне разрывно. Однако канторово множество меры нуль на оси абсцисс не является р. м. ни в одной из своих точек. Вместе с тем в пространстве $\mathbb{R}^3$, напр., множество точек

$$E = \{(x, y, z\} : V(x, y, z) \geqslant k > 1\},$$

имеющее острие в точке $(0, 0, 0)$, где

$$V(x, y, z) = \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{(x-t)^2+y^2+z^2}}$$

— *ньютонов потенциал* плотности t на отрезке $(0 \leqslant x \leqslant 1, 0, 0)$, есть р. м. в острие $(0, 0, 0) \in E'$ (пример Лебега).

Лит.: [1] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [2] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966. *Е. Д. Соломенцев.*

РАЗРЕЗ области $D \subset \mathbb{C}$ по разомкнутой простой дуге $\gamma = \{z(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ — удаление из области D точек дуги γ, т. е. переход от области D к области (или областям) $D \setminus \gamma$, а также само множество γ. При этом предполагается, что области D принадлежит либо вся дуга γ, либо вся дуга за исключением начальной или конечной точек $z(0)$, $z(1)$, а $z(0)$ или $z(1)$ принадлежат границе ∂D. Каждой точке $z(t)$ разреза γ при $0 < t < 1$ соответствуют два *граничных элемента* прилегающей к γ части области D: левый и правый. В совокупности эти элементы образуют соответственно левый и правый берега разреза γ.

Е. Д. Соломенцев.

РАЗРЕЗА МНОЖЕСТВО, множество раздела, от точки O — множество тех точек x риманова многообразия W, к-рые либо соединимы с O более чем одной кратчайшей Ox, либо Ox не продолжима как кратчайшая за точку x. В двумерном случае Р. м. является одномерным графом без циклов (см. [2]); в аналитическом W любой размерности — полиэдром из аналитич. подмногообразий (см. [3]). Р. м. непрерывно зависит от O. Р. м. определяется не только от точки, но и от других подмножеств, напр. от края ∂W, а также в пространствах, отличных от римановых, напр. на выпуклых поверхностях (см. [4]) и в двумерных многообразиях ограниченной кривизны.

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Myers S. B., «Duke Math. J.», 1935, v. 1, p. 376—91; [3] Buchner M. A., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1977, v. 64, № 1, p. 118—21; [4] Kunze J., Der Schnittort auf konvexen Verheftungsflächen, B., 1969. *В. А. Залгаллер.*

РАЗРЕШАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ — то же, что *Сколема функция.*

РАЗРЕШЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ, десингуляризация,— замена особого алгебраич. многообразия на бирационально изоморфное неособое многообразие. Более точно, Р. о. алгебраич. многообразия X над основным полем k наз. собственный бирациональный морфизм $f: X' \to X$ такой, что многообразие X' неособое (гладкое). Аналогично определяется Р. о. схемы, комплексно-аналитического пространства и т. д. Существование Р. о. позволяет сводить многие вопросы к неособым многообразиям, при изучении к-рых можно использовать теорию пересечений и аппарат дифференциальных форм.

Обычно Р. о. происходит путем последовательного применения операции *моноидального преобразования.* Известно, что если центр D моноидального преобразования $X' \to X$ допустим (то есть D неособо, а X — нормальное плоское многообразие вдоль D), то численные характеристики особенностей многообразия (кратность, функция Гильберта и т. д.) не хуже, чем у X. Проблема состоит в выборе центра раздутия так, чтобы особенности у X' действительно улучшились.

В случае кривых проблема Р. о. сводится по существу к нормализации. В двумерном случае ситуация сложнее. Доказано существование Р. о. у любого многообразия над полем k нулевой характеристики. Точнее, для приведенного многообразия X_0 существует конечная последовательность допустимых моноидальных преобразований $f_i: X_{i+1} \to X_i$, $i=0, 1, \ldots, r$, с центрами $D_i \subset X_i$ такая, что D_i содержатся в множествах особых точек X_i, а X_r — неособое многообразие. Аналогичный результат верен для комплексно-аналитических пространств. В положительной характеристике существование Р. о. установлено (1983) для размерностей $\leqslant 3$.

С задачей Р. о. тесно связана задача разрешения вложенных особенностей, формулируемая следующим образом. Пусть X вложено в неособое алгебраич. многообразие Z; существует ли собственное отображение $f: Z' \to Z$ с неособым Z' такое, что а) f индуцирует изоморфизм $Z' \setminus f^{-1}(X)$ на $Z \setminus X$, б) $f^{-1}(X)$ является дивизором с нормальными пересечениями? (Дивизор на неособом многообразии имеет нормальные пересечения, если локально он задается уравнением $t_1 \ldots t_k = 0$, где $t_1, \ldots, t_k$ — часть регулярной системы параметров на Z.)

Задача разрешения вложенных особенностей является частным случаем задачи тривиализации пучка идеалов. Пусть Z — неособое многообразие, I — когерентный пучок идеалов на Z, а $D \subset Z$ — неособое замкнутое подмногообразие. Слабым прообразом идеала I при раздутии $f: Z' \to Z$ с центром в D наз. пучок идеалов

$$f^*(I) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_{Z'}(mD')$$

на Z', где $D' = f^{-1}(D)$, а m — кратность идеала I в общей точке D. Тривиализация пучка идеалов состоит в нахождении последовательности раздутий с неособыми центрами, при к-рых слабый прообраз I становится структурным пучком. Пусть Z_0 — неособое многообразие над полем нулевой характеристики, I_0 — когерентный пучок идеалов на Z_0 и, кроме того, задан нек-рый дивизор E_0 на Z_0 с нормальными пересечениями. Тогда существует последовательность раздутий

$f_i: Z_{i+1} \to Z_i$, $i=0, 1, \ldots, r-1$, с неособыми центрами $D_i \subset Z_i$, обладающая следующими свойствами: если определить I_{i+1} как слабый прообраз I_i при раздутии f_i, а E_{i+1} — как $f_i^{-1}(E_i) \cup f_i^{-1}(D)$, то $I_r = \mathcal{O}_{Z_r}$, а E_r имеет лишь нормальные пересечения (теорема Хиронака). Более того, можно считать, что D_i лежит в множестве точек максимальной кратности I_i и имеет нормальные пересечения с E_i. В положительной характеристике аналогичный результат известен лишь при $\dim Z \leqslant 3$.

Другой задачей этого типа является задача исключения точек неопределенности рационального отображения. Пусть $f: X \to Y$ — рациональное отображение неособых алгебраич. многообразий. Существует ли последовательность раздутий с неособыми центрами

$$X_r \longrightarrow X_{r-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_0 = X$$

такая, что индуцированное отображение $X_r \to Y$ является морфизмом? Эта задача сводится к задаче существования тривиализации пучка идеалов, и ответ утвердителен, если $\operatorname{char} k = 0$ или если $\dim X \leqslant 3$.

Лит.: [1] Abhyankar S., Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces, N. Y.— L., 1966; в кн.: Тр. Международного конгресса математиков. 1966, М., 1968, с. 469—481; [2] Lipman J., в кн.: Algebraic geometry, Providence, 1975, p. 531—46; [3] Хиронака Х., «Математика», 1965, т. 9, № 6, с. 2—70.
В. И. Данилов.

РАЗРЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМА — *алгоритмическая проблема*, в к-рой для заданного множества A требуется построить алгоритм, разрешающий A относительно другого множества B, включающего A ($A \subseteq B$), т. е. такой алгоритм $\mathfrak{A}$, к-рый применим ко всякому элементу из B, причем $\mathfrak{A}(x) = 1$, если $x \in A$, и $\mathfrak{A}(x) = 0$, если $x \in B \setminus A$. Важным классом алгоритмич. проблем являются Р. п. для формальных теорий, то есть Р. п. множества всех доказуемых в теории формул (множество A) относительно множества всех формул теории (множество B).

Термин «Р. п.» следует отличать от термина «проблема разрешимости», означающего вопрос о разрешимости той или иной математической (напр., алгоритмической) проблемы.
В. Е. Плиско.

РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА — группа, обладающая конечным субнормальным рядом с абелевыми факторами (см. *Подгрупп ряд*). Она также обладает *нормальным рядом* с абелевыми факторами (такие ряды наз. разрешимыми). Длина кратчайшего разрешимого ряда группы наз. ее длиной, или ступенью разрешимости. Важнейшим из таких рядов является ряд коммутантов, или производный ряд (см. *Коммутант* группы). Термин «Р. г.» возник в теории Галуа и связан с разрешимостью алгебраич. уравнений в радикалах.

Конечные Р. г. обладают субнормальным рядом с факторами простых порядков. Эти группы характеризуются справедливостью следующего обращения теоремы Лагранжа: для любого разложения $n = n_1 n_2$ порядка n группы на два взаимно простых сомножителя существует подгруппа порядка n_1, и все подгруппы порядка n_1 сопряжены между собой. Если порядок конечной группы делится только на два простых числа, то такая группа разрешима. В классе Р. г. конечные группы выделяются как конечно порожденные периодич. группы.

Частными случаями Р. г. являются *нильпотентные группы*, *полициклические группы*, *метабелевы группы*. Важный подкласс образуют конечно порожденные группы, являющиеся расширениями своей абелевой нормальной подгруппы с помощью полициклич. факторгруппы. Они удовлетворяют условию максимальности для нормальных подгрупп (см. *Обрыва цепей условие*) и финитно аппроксимируемы (см. *Финитно аппроксимируемая группа*). Всякая связная разрешимая группа Ли, а также Р. г. матриц, связная в *Зариского топологии*, имеют нильпотентный коммутант. Всякая матричная Р. г. над алгебраически замкнутым полем имеет подгруппу конечного индекса, сопряженную с подгруппой треугольной группы (см. *Ли — Колчина теорема*).

Все Р. г. длины, не превосходящей числа l, образуют многообразие (см. *Групп многообразие*). Свободные группы таких многообразий наз. свободными разрешимыми группами.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.
А. Л. Шмелькин.

π-РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА — обобщение понятия *разрешимой группы*. Пусть π — нек-рое множество простых чисел. Конечная группа, каждый индекс композиционного ряда к-рой либо не делится ни на одно число из π, либо совпадает с нек-рым числом из π, наз. π-разрешимой группой. Основные свойства π-Р. г. подобны свойствам разрешимых групп. π-Р. г. является π_1-Р. г. для любого $\pi_1 \subset \pi$; подгруппы, факторгруппы и расширения π-Р. г. с помощью π-Р. г. также являются π-Р. г. В π-Р. г. G каждая π-подгруппа (т. е. подгруппа, все простые делители порядка к-рой принадлежат π) содержится в нек-рой холловской π-подгруппе (π-подгруппа наз. холловской, если ее индекс в группе не делится ни на одно число из π), а каждая π'-подгруппа (где π' — множество, дополняющее π в множестве всех простых чисел) — в нек-рой холловской π'-подгруппе; все холловские π-подгруппы, а также холловские π'-подгруппы сопряжены в G; индекс максимальной подгруппы группы G либо не делится ни на одно число из π, либо равен степени одного из чисел множества π (см. [1]). Число холловских π-подгрупп в G равно $\alpha_1\alpha_2 \ \ldots \ \alpha_t$, где $\alpha_i \equiv 1 \pmod{p_i}$ для каждого $p_i \in \pi$, делящего порядок группы G, причем α_i делит порядок одного из главных факторов группы G (см. [2]).

Лит.: [1] Чунихин С. А., Подгруппы конечных групп, Минск, 1964; [2] Brauer W., «Arch. Math.», 1968, Bd 19, № 3, S. 245—55.
С. П. Струнков.

РАЗРЕШИМАЯ ФОРМУЛА (в данной системе) — такая формула A данной *формальной системы*, что либо она доказуема в этой системе (т. е. является теоремой), либо опровержима (т. е. доказуемо ее отрицание $\rceil A$). Если всякая замкнутая формула данной формальной системы разрешима в ней, то такая система наз. полной. (Следует заметить, что нельзя требовать, чтобы в системе были разрешимы все формулы, а не только замкнутые. Так, формула $x=0$, где x — переменная для натуральных чисел, не выражает ни истинное, ни ложное суждение, и поэтому ни она, ни ее отрицание не являются теоремами формальной арифметики.)

Название «Р. ф.» связано с тем, что вопрос об истинности или ложности суждения, выражаемого такой формулой, может быть решен на основе данной системы аксиом. В силу *Гёделя теоремы о неполноте* в любой формальной системе арифметики найдется неразрешимое предложение, т. е. замкнутая формула, к-рая не является разрешимой в этой системе. В частности, неразрешимой оказывается формула, выражающая утверждение о непротиворечивости такой системы.

Термин «Р. ф.» следует отличать от термина «разрешимый предикат».
В. Е. Плиско.

РАЗРЕШИМОЕ МНОГООБРАЗИЕ, солвмногообразие,— компактное факторпространство связной разрешимой группы Ли (иногда, впрочем, компактности не требуют). Частный случай — *нильмногообразие*. По сравнению с последним общий случай значительно сложнее, но для него тоже имеется полная структурная теория.

Лит.: [1] Auslander L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1973, v. 79, № 2, p. 227—61. *Д. В. Аносов.*

РАЗРЕШИМОЕ МНОЖЕСТВО — множество *конструктивных объектов* какого-либо фиксированного типа, допускающее проверку принадлежности к нему его элементов при помощи *алгоритма.* Фактически мы можем ограничиться понятием Р. м. натуральных чисел, т. к. более общий случай может быть сведен к данному при помощи соответствующей нумерации рассматриваемых объектов. Множество M натуральных чисел наз. разрешимым, если существует такая *общерекурсивная функция* f, что $M=\{n|f(n)=0\}$. В этом случае f и представляет собой алгоритм, проверяющий принадлежность к M натуральных чисел. В самом деле, $n\in M$ равносильно тому, что $f(n)=0$. Р. м. натуральных чисел часто наз. также общерекурсивным, или рекурсивным, множеством.

Многие известные математич. проблемы (такие, как проблема тождества, проблема гомеоморфии, 10-я проблема Гильберта, проблема разрешимости в математич. логике) состоят в требовании доказать или опровергнуть утверждение о том, что нек-рые конкретные множества суть Р. м. Известные (отрицательные) решения перечисленных выше проблем состоят в установлении неразрешимости соответствующих им множеств (см. также *Алгоритмическая проблема*).

Лит.: [1] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960. *Н. М. Нагорный.*

РАЗРЕШИМЫЙ ПОТОК — поток на *разрешимом многообразии* $M=G/H$, определяемый действием на M какой-нибудь однопараметрич. подгруппы g_t разрешимой группы Ли G: если M состоит из смежных классов gH, то под действием Р. п. такой класс за время t переходит в класс g_tgH. Частный случай Р. п.— *нильпоток*; в общем случае свойства Р. п. могут быть значительно более разнообразными.

Лит.: [1] Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф., Потоки на однородных пространствах, пер. с англ., М., 1966; [2] Степин А. М., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 5, с. 241—42; [3] Auslander L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1973, v. 79, № 2, p. 262—85; [4] Сафонов А. В., «Функциональный анализ и его приложения», 1980, т. 14, № 4, с. 81—82. *Д. В. Аносов.*

РАЗРЕШИМЫЙ ПРЕДИКАТ — такой n-местный предикат P, заданный на нек-ром множестве конструктивных объектов (напр., натуральных чисел) M, для к-рого существует алгоритм, позволяющий для любого набора $a_1, \ldots, a_n$ элементов множества M найти значение (И или Л) предиката P на этом наборе. Иными словами, предикат является разрешимым, если он, рассматриваемый как n-местная функция на M со значениями во множестве $\{И, Л\}$, является *вычислимой функцией*.

Когда в качестве математич. уточнения понятия вычислимости используется понятие *рекурсивной функции* или какое-либо эквивалентное понятие, то вместо «Р. п.» обычно употребляется термин «рекурсивный предикат». *В. Е. Плиско.*

РАЗРЫВА ТОЧКА — точка, принадлежащая множеству X определения функции $f\colon X\to Y$, где X и Y — топологич. пространства, в к-рой эта функция не является непрерывной. Иногда к Р. т. относят и точки, к-рые хотя и не принадлежат множеству определения функции, но в этом множестве содержатся нек-рые их проколотые окрестности.

Среди Р. т. функций, определенных в проколотых окрестностях точек числовой оси, различают точки разрыва 1-го и 2-го рода. Если точка x_0 является Р. т. функции f, определенной в нек-рой окрестности этой точки, кроме, быть может, ее самой, и в ней существуют конечные пределы слева $f(x_0-0)$ и справа $f(x_0+0)$ функции f (по проколотой окрестности точки x_0), то эта точка наз. точкой разрыва 1-го рода, а число $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ скачком функции f в точке x_0, причем если он равен нулю, то x_0 наз. точкой устранимого разрыва. Если Р. т. не является точкой разрыва 1-го рода, то она наз. точкой разрыва 2-го рода. *Л. Д. Кудрявцев.*

РАЗРЫВНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА — задача вариационного исчисления, в к-рой экстремум функционала достигается на ломаной экстремали. Ломаная экстремаль — кусочно гладкое решение *Эйлера уравнения*, удовлетворяющее в угловых точках нек-рым дополнительным необходимым условиям. Эти условия принимают конкретный вид в зависимости от типа Р. в. з. Так, в Р. в. з. 1-го рода ломаная экстремаль разыскивается при обычных предположениях относительно непрерывности и непрерывной дифференцируемости подинтегральной функции. Для простейшего функционала

$$J=\int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y,\ y')\,dx,\ \ y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2, \qquad (1)$$

в угловой точке x_0 ломаной экстремали необходимо выполнение условий Вейерштрасса — Эрдмана

$$F_{y'}(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0-0))=F_{y'}(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0+0)), \quad (2)$$

$$\begin{gathered} F(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0-0)) - \\ -y'(x_0-0)\,F_{y'}(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0-0)) = \\ =F(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0+0)) + \\ +y'(x_0+0)F_{y'}(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0+0)). \qquad (3) \end{gathered}$$

В случае, когда F зависит от n неизвестных функций, т. е. y в (1) есть n-мерный вектор $y=(y_1,\ .\ .\ .,\ y_n)$, условия Вейерштрасса — Эрдмана в угловой точке имеют вид, аналогичный (2), (3):

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right]_{x_0-0}=\left[\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right]_{x_0+0},\ \ i=1,\ \ldots,\ n, \qquad (4)$$

$$\left[F-\sum\nolimits_{i=1}^{n} y_i'\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right]_{x_0-0}=\left[F-\sum\nolimits_{i=1}^{n} y_i'\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right]_{x_0+0}. \qquad (5)$$

Для задач на условный экстремум, в к-рых подинтегральная функция зависит от n неизвестных функций и имеется m дифференциальных ограничений типа равенства (см. *Больца задача*), условия Вейерштрасса—Эрдмана формулируются с помощью функции Лагранжа L и имеют вид (4), (5) с заменой F на L.

В терминах теории оптимального управления необходимые условия в угловой точке ломаной экстремали требуют непрерывности сопряженных переменных и функции Гамильтона в точках разрыва оптимального управления. Как следует из *Понтрягина принципа максимума*, эти условия автоматически выполняются, если управление вдоль ломаной экстремали определяется из условия максимума функции Гамильтона.

В Р. в. з. 2-го рода подинтегральная функция разрывна. Пусть, напр., $F(x,\ y,\ y')$ претерпевает разрыв вдоль линии $y=\varphi(x)$ так, что $F(x,\ y,\ y')$ соответственно равна $F_1(x,\ y,\ y')$ и $F_2(x,\ y,\ y')$ по одну и другую сторону от линии $y=\varphi(x)$. Тогда если оптимальное решение существует, то оно достигается на ломаной экстремали, имеющей угловую точку $(x_0,\ \varphi(x_0))$ и вместо функционала (1) получают функционал

$$J=\int_{x_1}^{x_0} F_1(x,\ y,\ y')\,dx+\int_{x_0}^{x_2} F_2(x,\ y,\ y')dx=J_1+J_2. \quad (6)$$

Вариация функционала (6) сводится к вариации функционалов J_1 и J_2 на кривых сравнения, имеющих соответственно правый и левый подвижные концы, смещающиеся вдоль линии $y=\varphi(x)$. Для того чтобы ломаная экстремаль доставляла минимум функционалу (6), необходимо, чтобы в угловой точке $(x_0, \varphi(x_0))$ выполнялось условие

$$[F_1-(\varphi'-y')\,F_{1y'}]_{x=x_0-0}=[F_2+(\varphi'-y')\,F_{2y'}]_{x=x_0+0}. \tag{7}$$

Для случая, когда F зависит от n неизвестных функций $y=(y_1, \ldots, y_n)$, а поверхность разрыва F задана в виде

$$\Phi(x, y)=0, \tag{8}$$

необходимые условия в угловой точке ломаной экстремали, находящейся на поверхности (8), принимают вид

$$\frac{\left[F_1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial y_i'}\right]_{x_0-0}-\left[F_2-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial y_i'}\right]_{x_0+0}}{\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_{x_0}}=$$

$$=\frac{\left[\frac{\partial F_1}{\partial y_1'}\right]_{x_0-0}-\left[\frac{\partial F_2}{\partial y_1'}\right]_{x_0+0}}{\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\right]_{x_0}}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{\left[\frac{\partial F_1}{\partial y_n'}\right]_{x_0-0}-\left[\frac{\partial F_2}{\partial y_n'}\right]_{x_0+0}}{\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}\right]_{x_0}}. \tag{9}$$

Необходимые условия (7), (9) дают недостающие условия для вычисления произвольных постоянных, определяющих ломаную экстремаль — частное решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее граничным условиям. Действительно, равенства (9) дают n необходимых условий, к-рые в совокупности с $2n$ граничными условиями, n условиями непрерывной стыковки ломаной экстремали в угловой точке и уравнением (8) дают $4n+1$ условий, с помощью к-рых можно определить абсциссу угловой точки x_0 и $4n$ произвольных постоянных — по $2n$ для каждой из экстремалей, лежащих по разные стороны от поверхности (8).

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Курс вариационного исчисления, Л.— М., 1941; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958; [3] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976.

И. Б. Вапнярский.

РАЗРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ — функция $f\colon X\to Y$, где X и Y — топологич. пространства, не являющаяся непрерывной функцией на пространстве X. Среди разрывных действительных функций $f\colon X\to\mathbb{R}$ важные классы составляют *Бэра классы*, кусочно непрерывные функции, ступенчатые функции.

Р. ф. возникают, напр., при интегрировании по параметру элементарных функций (см. *Дирихле разрывный множитель*), при вычислении суммы функциональных рядов, членами к-рых являются элементарные функции, в частности при вычислении суммы тригонометрич. рядов, в задачах оптимального управления.

Примеры.

1) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=\begin{cases}0, & \text{если } x=0,\\ 1+x^2, & \text{если } x\neq 0.\end{cases}$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}0, & \text{если } x=0,\\ \frac{\pi-x}{2}, & \text{если } 0<x<2\pi.\end{cases}$$

Л. Д. Кудрявцев.

РАЗРЫВНЫЙ МНОЖИТЕЛЬ — величина, зависящая от одного или более параметров и принимающая два (или больше) значения. Напр.,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{y^{s+2k}\,ds}{s(s+1)\ldots(s+2k)}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{(2k)!}(y-1)^{2k}, & \text{если } y\geqslant 1,\ k>0,\\ 0, & \text{если } 0\leqslant y<1.\end{cases}$$

Р. м. применяются для формального расширения области суммирования или интегрирования, для сведения данного выражения к другому, к к-рому можно применить заданные формулы или преобразования. Другие примеры — *Дирихле разрывный множитель*, *дельта-функция* Дирака и т. п. *К. Ю. Булота.*

РАМА КОГОМОЛОГИИ, де Рама когомологии, алгебраического многообразия — теория когомологий алгебраич. многообразий, основанная на дифференциальных формах. С каждым алгебраич. многообразием X над полем k связывается комплекс регулярных дифференциальных форм (см. *Дифференциальная форма* на алгебраическом многообразии); его группы когомологий $H^p_{\mathrm{DR}}(X/k)$ наз. группами Р. к. многообразия X. Если X гладко и полно, а $\mathrm{char}\, k=0$, то Р. к. являются *Вейля когомологиями* (см. [2], [3]). Если X гладко и аффинно, а $k=\mathbb{C}$, то справедлив следующий аналог *Рама теоремы*:

$$H^p_{\mathrm{DR}}(X/k) \cong H^p(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}), \; p \geqslant 0,$$

где X^{an} — комплексное аналитич. многообразие, соответствующее алгебраич. многообразию X (см. [1]). Напр., если X — дополнение к алгебраич. гиперповерхности в $P^n(\mathbb{C})$, то когомологии $H^p(X, \mathbb{C})$ могут быть вычислены при помощи рациональных дифференциальных форм на $P^n(\mathbb{C})$ с полюсами на этой гиперповерхности.

Для любого морфизма $f: X \to S$ можно определить относительный комплекс де Рама $\sum_{p\geqslant 0}\Gamma(\Omega^p_{X/S})$ (см. *Дифференциалов модуль*), приводящий к относительным когомологиям де Рама $H^p_{\mathrm{DR}}(X/S)$. В случае, когда $X=\mathrm{Spec}\, A$ и $S=\mathrm{Spec}\, B$ аффинны, относительный комплекс де Рама совпадает с $\Lambda\Omega^1_{A/B}$. Когомологии $\mathscr{H}^p_{\mathrm{DR}}(X/S)$ комплекса пучков $\sum_{p\geqslant 0} f_*\Omega^p_{X/S}$ на S наз. пучками относительных когомологий де Рама. Эти пучки когерентны на S, если f — собственный морфизм.

Лит.: [1] Grothendieck A., «Publs math. IHES», 1966, t. 29, p. 351—59; [2] Hartshorne R., Ample subvarieties of algebraic varieties, B., 1970; [3] его же, «Manuscr. math.», 1972, v. 7, p. 125—40. *А. Л. Онищик.*

РАМА КРУЧЕНИЕ, де Рама кручение,— инвариант, позволяющий различать многие структуры в дифференциальной топологии; то же, что *Рейдемейстера кручение*.

РАМА ТЕОРЕМА, де Рама теорема,— теорема, выражающая вещественные когомологии дифференцируемого многообразия M при помощи комплекса *дифференциальных форм* на M. Если $E^*(M) = \sum_{p=0}^{n} E^p(M)$ — комплекс де Рама многообразия M, где $E^p(M)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых p-форм на M, снабженный внешним дифференциалом, то Р. т. устанавливает изоморфизм между градуированными алгебрами когомологий $H^*(E^*(M))$ комплекса $E^*(M)$ и когомологий $H^*(M, \mathbb{R})$ многообразия M со значениями в $\mathbb{R}$. Явная интерпретация этого изоморфизма состоит в том, что каждой замкнутой p-форме ω сопоставляется линейная форма $\gamma \to \int_\gamma \omega$ на пространстве p-мерных сингулярных циклов γ в M.

Р. т. впервые была установлена Ж. де Рамом [1], хотя идея связи между когомологиями и дифференциальными формами восходит к А. Пуанкаре (H. Poincaré).

Существует ряд вариантов Р. т. Напр., когомологии $H^*(E^*_c(M))$ комплекса $E^*_c(M)$ с компактными носителями изоморфны алгебре вещественных когомологий $H^*_c(M, \mathbb{R})$ многообразия M с компактными носителями. Когомологии многообразия M со значениями в локально постоянном пучке векторных пространств изоморфны когомологиям комплекса дифференциальных форм со значениями в соответствующем плоском векторном расслоении [3]. Когомологии симплициального множества S со значениями в любом поле k характеристики 0 изоморфны когомологиям соответствующего полиномиального комплекса де Рама над k. В случае, когда S — сингулярный комплекс произвольного топологич. пространства X, получают таким образом градуированно-коммутативную дифференциальную градуированную k-алгебру $A_{\mathrm{DR}}(X)$, алгебра когомологий $H^*(A_{\mathrm{DR}}(X))$ к-рой изоморфна алгебре сингулярных когомологий $H^*(X, k)$ (см. [4]). Если X — гладкое аффинное алгебраич. многообразие над $\mathbb{C}$, то когомологии $H^*(X, \mathbb{C})$ изоморфны когомологиям комплекса регулярных дифференциальных форм на M (см. *Рама когомологии*).

Лит.: [1] Rham J. de, «J. math. pures et appl. 9 sér.», 1931, t. 10, p. 115—200; [2] Рам Ж. де, Дифференцируемые многообразия, пер. с франц., М., 1956; [3] Рагунатан М., Дискретные подгруппы групп Ли, пер. с англ., М., 1977; [4] Гомотопическая теория дифференциальных форм, пер. с англ. и франц., М., 1981.

А. Л. Онищик.

РАМАНУДЖАНА ГИПОТЕЗА — высказанное С. Рамануджаном [1] предположение, что коэффициенты Фурье $\tau(n)$ функции Δ (параболич. формы веса 12) удовлетворяют неравенству

$$|\tau(p)| \leqslant 2p^{11/2}, \ p \text{— простое},$$

$\tau(n)$ наз. также *Рамануджана функцией.* Функция Δ есть собственная функция операторов Гекке, $\tau(n)$ — соответствующие собственные значения. Петерсон (H. Petersson) обобщил Р. г. на случай собственных значений операторов Гекке модулярных форм веса k, k — целое $\geqslant 2$ (гипотеза Петерсона). П. Делинь (P. Deligne, см. [2]) свел гипотезу Петерсона к гипотезе Вейля, затем доказал последнюю (1974). Этим была доказана и Р. г.

Лит.: [1] Ramanujan S., «Trans. Camb. Phil. Soc.», 1916, v. 22; [2] Делинь П., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 5, с. 159—90; [3] Фоменко О. М., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 5—91.

К. Ю. Булота.

РАМАНУДЖАНА СУММЫ — зависящие от двух целочисленных параметров k и n тригонометрич. суммы

$$c_k(n) = \sum\nolimits_h \exp\left(\frac{2\pi nhi}{k}\right) = \sum\nolimits_h \cos\frac{2\pi nh}{k},$$

где h пробегает все целые неотрицательные числа, меньшие, чем k, и взаимно простые с k. Основные свойства Р. с. — мультипликативность относительно индекса k:

$$c_{kk'}(n) = c_k(n)\, c_{k'}(n), \text{ если } (k, k') = 1,$$

а также представление через функцию Мёбиуса μ:

$$c_k(n) = \sum\nolimits_{d \setminus (k,\ n)} \mu\left(\frac{k}{d}\right) d.$$

Р. с. являются ограниченными, если ограничено k либо n. В частности, $c_k(1) = 1$.

Многие мультипликативные функции от натурального аргумента разлагаются в ряды по Р. с. и наоборот, основные свойства Р. с. позволяют просуммировать суммы вида

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{c_k(qn)}{n^s} f(n), \quad \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(qn)}{k^s} f(k),$$

где $f(n)$ — мультипликативная функция, q — целое число. В частности,

$$\sum\nolimits_{k-1}^{\infty} \frac{c_k(n)}{n^s} = \frac{\sigma_{1-s}(n)}{\zeta(s)},$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, $\sigma_a(n)$ — сумма a-х степеней делителей числа n. Такие суммы тесно связаны с особыми рядами нек-рых аддитивных проблем теории чисел, напр. представление натуральных чисел в виде четного числа квадратов. С. Рамануджаном [1] были получены многие формулы, содержащие Р. с.

Лит.: [1] Ramanujan S., «Trans. Camb. Phil. Soc.», 1918, v. 22, p. 259—76; [2] Hardy G. H., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1920/21, v. 20, p. 263—71; [3] Ramanujan S., Collected papers, ed. G. H., Hardy, [a. o.], Camb., 1927, p. 137—41; [4] Volkmann B., «J. reine und angew. Math.», 1974, Bd 271, S. 203—13; [5] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [6] Левин В. И., в кн.: Историко-математические исследования, т. 13, М., 1960.

К. Ю. Булота.

РАМАНУДЖАНА ФУНКЦИЯ — функция $n \to \tau(n)$, где $\tau(n)$ — коэффициент при x^n $(n \geqslant 1)$ разложения произведения

$$D(x) = x \prod_{m=1}^{\infty} (1-x^m)^{24}$$

в степенной ряд:

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n.$$

Если положить

$$\Delta(z) = D(e^{2\pi i z}), \ \operatorname{Im} z > 0,$$

то Р. ф. является n-м коэффициентом Фурье параболич. формы $\Delta(z)$, впервые исследованной С. Рамануджаном [1]. Нек-рые значения Р. ф.: $\tau(1)=1$, $\tau(2)=-24$, $\tau(3)=252$, $\tau(4)=-1472$, $\tau(5)=4830$, $\tau(6)=-6048$, $\tau(7)=-16744$, $\tau(30)=9458784518400$. С. Рамануджан предположил (а Л. Дж. Морделл, L. J. Mordell, доказал) справедливость следующих свойств Р. ф.:

$$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n); \text{ если } (m, n)=1,$$

$$\tau(p^{n+1}) = \tau(p^n)\tau(p) - p^1\tau(p^{n-1}), \text{ если } p \text{ — простое, } n \geqslant 1.$$

Следовательно, вычисление $\tau(n)$ сводится к вычислению $\tau(p)$, p — простое. Известно, что $|\tau(p)| \leqslant 2p^{11/2}$ (см. *Рамануджана гипотеза*). Известны многие сравнения, к-рым удовлетворяет Р. ф. Напр., С. Рамануджану было известно сравнение

$$\tau(p) \equiv 1 + p^1 \pmod{691}.$$

Примеры позже найденных сравнений:

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{2^1}, \text{ если } n \equiv 1 \pmod 8;$$

$$\tau(p) \equiv p + p^{10} \pmod{25};$$

и т. п.

Лит.: [1] Ramanujan S., «Trans. Camb. Phil. Soc.», 1916, v. 22, p. 159—84; [2] Серр Ж.-П., «Математика», 1969, т. 13, № 4, с. 3—15; [3] Фоменко О. М., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 5—91.

К. Ю. Булота.

РАМСЕЯ ТЕОРЕМА — название нескольких теорем в дискретной математике, сформулированных и доказанных Ф. Рамсеем [1].

Первую из этих теорем Ф. Рамсей сформулировал следующим образом. Пусть Γ — бесконечный класс и μ и r — положительные целые числа; и пусть все те подклассы Γ, к-рые имеют r элементов или, иначе, все r-сочетания элементов Γ, разделены любым способом на μ взаимно исключающих классов C_i, $i=1, 2, \ldots, \mu$, так, что каждое r-сочетание является элементом одного и только одного класса C_i; тогда, предполагая справедливой аксиому выбора, класс Γ должен содержать бесконечный подкласс Δ такой, что все r-сочетания членов Δ принадлежат одному и тому же классу C_i. Конечный аналог этой Р. т., также установленный Ф. Рамсеем, можно сформулировать следующим образом.

Пусть S — множество, содержащее N элементов, и T — семейство всех подмножеств множества S, содержащих в точности r элементов из S. Пусть семейство T разбито на t (непересекающихся) подсемейств $T_1, T_2, \ldots, T_t$ и пусть $q_1, q_2, \ldots, q_t$, r — целые числа, $q_i \geqslant r \geqslant 1$, $i=1, 2, \ldots, t$. Тогда существует такое минимальное число n (q_1, q_2, ..., q_t, r), зависящее только от q_1, q_2, ..., q_t, r и не зависящее от множества S, что если $N \geqslant n(q_1, q_2, \ldots, q_t, r)$, то для нек-рого i, $i=1, 2, \ldots, t$, в S существует подмножество A_i из q_i элементов, все r-подмножества к-рого находятся в семействе T_i (доказательства этой теоремы содержатся также в [2], [3]).

Последнюю теорему можно пояснить примером, в к-ром вычисляется число n (3, 3, 2). Рассматриваются шесть точек на плоскости, связанных попарно дугами, каждая из к-рых окрашена либо в красный, либо в голубой цвета. Существуют три точки такие, что дуги, соединяющие их, окрашены в один и тот же цвет. Из пяти дуг, соединяющих нек-рую точку P_0 с пятью другими точками, три дуги одного цвета (напр., красного). Пусть это дуги P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3. Если какая-нибудь из дуг P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3 красная, то она и две другие, соединяющие ее концы с точкой P_0, образуют красный треугольник, если же они все голубые, то сами образуют голубой треугольник. Это означает, что $n(3, 3, 2) \leqslant 6$. Однако пять точек на плоскости можно так попарно соединить красными и голубыми дугами, что при этом не найдется треугольника одного цвета. Для этого пусть дуги P_1P_2, P_1P_3, P_2P_4, P_3P_5, P_4P_5 будут красными, а остальные — голубыми. Это показывает, что $n(3, 3, 2) > 5$. Таким образом, $n(3, 3, 2) = 6$.

Из Р. т. вытекает следующий результат: для данного натурального $n \geqslant 3$ существует целое число $N = N(n)$ такое, что любые N точек в плоскости, никакие три из к-рых не лежат на одной прямой, содержат n точек, образующих выпуклый n-угольник (см. [4]).

Лит.: [1] Ramsey F. P., «Proc. London Math. Soc. Ser. 2», 1930, v. 30, p. 264—86; [2] Райзер Г.-Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [3] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [4] Erdös P., Szekeres G., «Compositio math.», 1935, v. 2, p. 463—70; [5] Erdös P., Rado R., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1956, v. 62, p. 427—89.

М. П. Минеев.

РАНГ — понятие, тесно связанное с понятием *базиса*. Обычно Р. определяется либо как минимальная из мощностей порождающего множества (так, напр., вводится базисный ранг алгебраической системы), либо как максимальная мощность независимой в нек-ром смысле подсистемы элементов.

Ранг системы векторов в векторном пространстве над телом — это максимальное число линейно независимых векторов в этой системе (см. *Линейная независимость*). Ранг, или размерность, векторного пространства, в частности, равен числу элементов базиса этого пространства (Р. не зависит от выбора базиса: все базисы имеют одну и ту же мощность). Для модулей ситуация сложнее. Существуют такие ассоциативные кольца R, что даже свободный модуль над R может обладать двумя базисами с различным числом элементов (см. *Ранг модуля*, *Свободный модуль*). Если каждый свободный R-модуль имеет единственный Р., то говорят, что R обладает свойством инвариантности базисного числа. Таким кольцом является всякое ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, что позволяет определить, напр., ранг (Прюфера) *абелевой группы* (к-рую можно рассматривать как модуль над кольцом $\mathbb{Z}$). В неабелевом случае вводятся два понятия Р. группы — общий и специальный Р. (см. *Ранг группы*). Особым образом определяются *ранг алгебраической группы* и *ранг группы Ли*.

Ранг алгебры (над телом) понимается как Р. ее аддитивного векторного пространства. Однако особо существует еще понятие Р. в теории алгебр Ли (см. *Ранг алгебры Ли*).

Ранг матрицы определяется как Р. системы векторов ее строк (строчный ранг) или системы ее столбцов (столбцовый ранг). Для матриц над телом или коммутативным кольцом с единицей оба эти понятия Р. совпадают. Для матрицы над полем Р. равен также максимальному порядку отличного от нуля минора. Р. произведения матриц не больше Р. каждого из сомножителей. Р. матрицы не меняется при умножении ее на невырожденную матрицу.

Ранг линейного отображения — это размерность образа этого отображения. В конечномерном случае он совпадает с Р. матрицы этого отображения.

Вводятся также понятия ранга билинейной формы (см. *Билинейная форма*) и ранга квадратичной формы (см. *Квадратичная форма*). Они также (в конечномерном случае) совпадают с Р. матрицы соответствующей формы. *О. А. Иванова.*

РАНГ линейного обыкновенного дифференциального уравнения в комплексной области

$$\sum\nolimits_{j=0}^{n} P_j(z)\, w^{(n-j)}=0, \quad P_0(z)=1, \tag{1}$$

— число $r=k+1$, где

$$k=\max_{1\leqslant j\leqslant n} n_j/j.$$

Коэффициенты уравнения (1) — сходящиеся при больших $|z|$ ряды

$$P_j(z)=\sum\nolimits_{m=-\infty}^{n_j} p_{jm} z^{-m}, \; j=1, \; \ldots, \; n.$$

Понятие Р. употребляется только тогда, когда $z=\infty$ — *особая точка* дифференциального уравнения (1). Р. дифференциального уравнения наз. также рангом особой точки $z=\infty$. Если эта точка — *регулярная особая точка*, то $r=0$; если *иррегулярная особая точка*, то $r>0$. Число k наз. подрангом. Р. уравнения — целое или дробное число. Если подранг дробный, со знаменателем $q\geqslant 2$, то подранг уравнения, полученного из (1) заменой переменной $z=\zeta^{1/q}$, будет целым. Р. уравнения инвариантен относительно замены переменной вида $z=\zeta\varphi(\zeta)$, где функция $\varphi(\zeta)$ голоморфна и отлична от нуля в точке $\zeta=\infty$.

Понятие Р. уравнения и особой точки используется при исследовании структуры решений уравнения (1) на бесконечности. Пусть $Q(z)$ — многочлен степени p,

$$\psi(\zeta)=\sum\nolimits_{m=0}^{\infty} \psi_m \zeta^{-m}$$

— формальный ряд, $s\geqslant 1$ — целое число. Ряд

$$w=e^{Q\left(z^{1/s}\right)} z^{\rho} \Psi\left(z^{1/s}\right) \tag{2}$$

наз. нормальным (соответственно поднормальным) порядка p/s, если $s=1$ (соответственно $s\geqslant 2$). Решение уравнения (1), представимое сходящимся в окрестности точки $z=\infty$ нормальным (поднормальным) рядом, наз. нормальным (подномальным) решением того же порядка (см. [2], [3]).

Порядок нормального (подномального) решения не превосходит Р. уравнения; это верно и для формальных решений вида (2). Если ранг r уравнения (1) целый, то оно имеет по крайней мере одно формальное решение вида (2) порядка r. Подстановка $w(z)=e^{Q(z)}u(z)$ не меняет Р. уравнения. Если подранг $k=p/q$, где p, q — взаимно простые целые числа и $q\geqslant 2$, то уравнение имеет не менее q формальных решений вида (2) порядка r.

Уравнением Гамбургера наз. уравнение (1) с рациональными коэффициентами, если оно имеет ровно две особые точки: регулярную $z=0$ и иррегулярную $z=\infty$. Для уравнения Гамбургера получены достаточные условия, при к-рых оно имеет нормальные решения, а при $n=2$ — необходимые и достаточные условия существования нормальных и поднормальных решений (см. [2]).

Понятие Р. вводится и в том случае, когда уравнение (1) имеет конечную особую точку (см. [2], [3]).

В случае линейной системы из n обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области

$$w' = z^r A(z) w, \tag{3}$$

где $r \geq -1$ — целое число, матрица-функция $A(z)$ голоморфна в точке $z=\infty$ и $A(\infty) \neq 0$, число $r+1$ наз. **рангом системы** (3), или **рангом особой точки** $z=\infty$, число r — ее **подрангом** (см. [4] — [6]). Если $r=-1$, то точка $z=\infty$ — регулярная особая точка; в отличие от скалярного уравнения (1), точка $z=\infty$ может быть регулярной особой, если $r>-1$ (см. [4]).

Лит.: [1] Poincaré H., «Acta math.», 1886, v. 8; [2] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Харьков, 1939; [3] Латышева К. Я., Терещенко Н. И., Орел Г. С., Нормально-регулярные решения и их приложения, К., 1974; [4] Коддингтон Э., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [5] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [6] Вазов В., Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1968.

М. В. Федорюк.

РАНГ особой точки — см. *Ранг линейного обыкновенного дифференциального уравнения.*

РАНГ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГРУППЫ G — размерность любой из ее *Картана подгрупп* (эта размерность не зависит от выбора подгруппы Картана). Наряду с Р. а. г. G рассматриваются ее **полупростой ранг** и **редуктивный ранг**, к-рые, по определению, равны соответственно Р. а. г. G/R и Р. а. г. G/R_u, где R — радикал алгебраич. группы G, а R_u — ее унипотентный радикал. Редуктивный Р. а. г. G равен размерности любого из ее максимальных торов. **Редуктивным k-рангом** линейной алгебраич. группы G, определенной над полем k (а в случае, когда группа G редуктивна,— просто ее **k-рангом**), наз. размерность любого ее максимального k-разложимого тора (эта размерность не зависит от выбора тора; см. *Разложимая группа*). Если k-ранг определенной над k редуктивной линейной алгебраич. группы G равен нулю (соответственно рангу G), то группа G наз. **анизотропной** (соответственно **разложимой**) над k (см. также *Анизотропная группа*).

Примеры. 1) Р. а. г. T_n всех невырожденных верхнетреугольных квадратных матриц порядка n равен ее редуктивному рангу и равен n; полупростой ранг группы T_n равен нулю. 2) Р. а. г. U_n всех верхнетреугольных квадратных матриц порядка n с единицами на главной диагонали равен ее размерности $n(n-1)/2$, а редуктивный и полупростой ранги группы U_n равны нулю. 3) Р. а. г. $O_n(k, f)$ всех автоморфизмов определенной над полем k квадратичной формы f в n-мерном векторном пространстве над k равен $[n/2]$, а k-ранг группы $O_n(k, f)$ равен индексу Витта формы f.

Если характеристика основного поля равна 0, то Р. а. г. G совпадает с рангом ее алгебры Ли L (см. *Ранг алгебры Ли*) и равен минимальной из кратностей собственного значения $\lambda=1$ всевозможных присоединенных операторов $\mathrm{Ad}_L g$ (минимум берется по всем $g \in G$). Элемент $g \in G$, для к-рого эта кратность равна Р. а. г. G, наз. **регулярным**. Множество регулярных элементов группы G открыто в G в топологии Зариского.

Лит.: [1] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958; [2] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; [3] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [4] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980.

В. Л. Попов.

РАНГ АЛГЕБРЫ ЛИ—минимальная из кратностей собственного значения $\lambda=0$ для линейных операторов $\mathrm{ad}_L x$ по всем x из алгебры Ли L. Предполагается, что алгебра L конечномерна. Элемент x, для к-рого эта кратность минимальна, наз. регулярным. Множество регулярных элементов алгебры Ли открыто в ней (в топологии Зариского). Р. а. Ли равен размерности любой из ее *Картана подалгебр*. Ранг $\mathrm{rk} L$ ненулевой алгебры Ли L удовлетворяет неравенствам

$$1 \leqslant \mathrm{rk}\, L \leqslant \dim L,$$

причем равенство $\mathrm{rk} L=\dim L$ имеет место тогда и только тогда, когда L нильпотентна. Для полупростых алгебр Ли над полем k ранг совпадает со степенью трансцендентности над k подполя поля рациональных функций на L, порожденного всеми коэффициентами характеристич. многочлена эндоморфизма $\mathrm{ad}_L x$.

Р. а. Ли L/R, где R — радикал в L, наз. полупростым рангом алгебры L.

Примеры. Пусть L — одна из следующих алгебр Ли: 1) алгебра $\mathfrak{Gl}_n$ всех квадратных матриц порядка n с элементами из поля k; 2) алгебра $\mathfrak{Sl}_n$ всех матриц с нулевым следом; 3) алгебра всех верхнетреугольных матриц; 4) алгебра всех диагональных матриц; 5) алгебра всех верхнетреугольных матриц с нулями на главной диагонали. Для этих алгебр ранг и полупростой ранг равны соответственно n, $n-1$, n, n, $n(n-1)/2$ и $n-1$, $n-1$, 0, 0, 0.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958. *В. Л. Попов.*

РАНГ ГРУППЫ (общий и специальный) — понятие теории групп. Группа G имеет конечный общий ранг r, если r — наименьшее число с тем свойством, что всякая конечно порожденная подгруппа группы G содержится в подгруппе, обладающей r' образующими ($r' \leqslant r$). Группа G имеет конечный специальный ранг r, если r является наименьшим числом с тем свойством, что всякая конечно порожденная подгруппа группы G обладает системой образующих, содержащей не более чем r элементов. В случае, если соответствующего конечного числа не существует, общий (специальный) Р. г. считается бесконечным.

Общий Р. г. меньше или равен ее специальному рангу. Существуют группы, общий ранг к-рых конечен (и даже равен двум), в то время как специальный ранг бесконечен. Такова, напр., счетная симметрич. группа. Для абелевых групп общий и специальный ранги совпадают с рангом Прюфера (см. *Абелева группа*).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.
О. А. Иванова.

РАНГ ГРУППЫ ЛИ (вещественной или комплексной) — размерность (соответственно вещественная или комплексная) любой из ее *Картана подгрупп*. Р. г. Ли равен рангу ее алгебры Ли (см. *Ранг алгебры Ли*). Если группа Ли G совпадает с множеством вещественных или комплексных точек линейной алгебраич. группы $\hat{G}$, то Р. г. Ли G равен *рангу алгебраической группы* $\hat{G}$. *В. Л. Попов.*

РАНГ МОДУЛЯ — 1) ранг левого модуля M над кольцом R, вложимым в тело k — размерность тензорного произведения $k_R \otimes M$, рассматриваемого как векторное пространство над k. Если $R=\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, то это определение совпадает с обычным определением ранга абелевой группы. Если тело k является плоским R-модулем (напр., k — тело частных кольца R), то для точной последовательности

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

выполняется следующее равенство между рангами:

$$\mathrm{rk}\, M = \mathrm{rk}\, M' + \mathrm{rk}\, M''.$$

2) Ранг свободного модуля M над произвольным кольцом R определяется как число его свободных образующих. Для колец, вложимых в тело, это определение совпадает с определением из пункта 1). В общем случае ранг свободного модуля определяется неоднозначно. Существуют кольца (называемые n-FI-кольцами), над к-рыми любой свободный модуль с не более, чем n свободными образующими, имеет однозначно определенный ранг, а для свободных модулей с числом образующих, большим n, это свойство не верно. Достаточным условием однозначности ранга свободного модуля над кольцом R является существование гомоморфизма φ: $R \rightarrow k$ в тело k. В этом случае понятие Р. м. распространяется на проективные модули следующим образом. Гомоморфизм φ индуцирует гомоморфизм групп проективных классов φ^*: $K_0R \rightarrow K_0k \approx \mathbb{Z}$ и рангом проективного модуля P наз. образ представителя модуля P в $\mathbb{Z}$. Гомоморфизм φ существует для произвольного коммутативного кольца R.

Лит.: [1] Кон П., Свободные кольца и их связи, пер. с англ., М., 1975; [2] Милнор Дж., Введение в алгебраическую K-теорию, пер. с англ., М., 1974. *В. Е. Говоров.*

РАНГОВ ВЕКТОР — векторная статистика $R = (R_1, \ldots, R_n)$, построенная по случайному вектору наблюдений $X = (X_1, \ldots, X_n)$, i-я компонента к-рой $R_i = R_i(X)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, определяется по правилу

$$R_i = \sum\nolimits_{j=1}^{n} \delta(X_i - X_j),$$

где $\delta(x)$ — характеристическая функция множества $[0, +\infty)$, т. е.

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Статистика R_i наз. рангом i-й компоненты X_i, $i=1, 2, \ldots, n$, случайного вектора X. Определение Р. в. будет корректным при выполнении следующего условия:

$$\mathsf{P}\{R_i = R_j\} = 0, \quad i \neq j,$$

к-рое заведомо выполняется, если распределение вероятностей случайного вектора X задается плотностью $p(x) = p(x_1, \ldots, x_n)$. В этих условиях из определения Р. в. следует, что статистика R принимает значения в пространстве $\mathfrak{R} = \{r\}$ всех перестановок $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, при этом реализация r_i ($r_i = 1, 2, \ldots, n$) ранга R_i численно равна количеству компонент вектора X, наблюденные значения к-рых не превосходят реализации i-й компоненты X_i, $i=1, 2, \ldots, n$.

Пусть $X^{(\cdot)} = (X_{(n1)}, \ldots, X_{(nn)})$ — вектор порядковых статистик, построенный по вектору наблюдений X. Тогда пара $(R, X^{(\cdot)})$ является достаточной статистикой для распределения вектора X, причем сам вектор X однозначно восстанавливается по достаточной статистике $(R, X^{(\cdot)})$. Кроме того, при дополнительном предположении о симметричности плотности вероятности $p(x)$ случайного вектора X относительно перестановок аргументов компоненты R и $X^{(\cdot)}$ достаточной статистики $(R, X^{(\cdot)})$ независимы и

$$\mathsf{P}\{R = r\} = \frac{1}{n!}, \quad r \in \mathfrak{R}.$$

В частности, если

$$p(x) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod\nolimits_{i=1}^{n} f(x_i), \qquad (1)$$

т. е. компоненты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ случайного вектора X суть независимые одинаково распределяемые случайные величины ($f(x_i)$ — плотность вероятности случайной величины X_i), то

$$\left.\begin{array}{c} \mathsf{P}\{R_i=k\}=\frac{1}{n},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \\ \mathsf{P}\{R_i=k,\ R_j=m\}=\frac{1}{n(n-1)},\ i\neq j,\ k\neq m, \\ i,\ j,\ k,\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \\ \mathsf{E}\{R_i\}=\frac{n+1}{2},\ \mathsf{D}\{R_i\}=\frac{n^2-1}{12},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \end{array}\right\} \quad (2)$$

для любого $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

При выполнении условия (1) существует совместная плотность вероятности $q(x_i,\ k)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, случайных величин X_i и R_i, к-рая выражается формулой

$$q(x_i,\ k)=$$
$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}[F(x_i)]^{k-1}[1-F(x_i)]^{n-k}f(x_i), \quad (3)$$

где $F(x_i)$ — функция распределения случайной величины X_i. Из (2) и (3) следует, что условная плотность вероятности $q(x_i|R_i=k)$ случайной величины X_i при условии, что $R_i=k$ ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$), выражается формулой

$$q(x_i\mid R_i=k)=$$
$$=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}[F(x_i)]^{k-1}[1-F(x_i)]^{n-k}f(x_i). \quad (4)$$

Последняя формула позволяет проследить внутреннюю связь, существующую между вектором наблюдений X, Р. в. R и вектором порядковых статистик $X^{(\cdot)}$, так как (4) есть не что иное, как плотность вероятности k-й порядковой статистики $X_{(nk)}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Кроме того, из (3) следует, что условное распределение ранга R_i выражается формулой

$$\mathsf{P}\{R_i=k\mid X_i\}=$$
$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}[F(X_i)]^{k-1}[1-F(X_i)]^{n-k}.$$

И, наконец, при допущении о существовании моментов $\mathsf{E}\{X_i\}$ и $\mathsf{D}\{X_i\}$ и выполнении (1) из (2) и (3) следует, что коэффициент корреляции $\rho(X_i,\ R_i)$ между X_i и R_i равен

$$\rho(X_i,\ R_i)=\sqrt{\frac{12(n-1)}{(n+1)\,\mathsf{D}\{X_i\}}}\int_{-\infty}^{\infty}x_i\left[F(x_i)-\frac{1}{2}\right]dF(x_i).$$

В частности, если X_i подчиняется равномерному распределению на отрезке $[0,1]$, то

$$\rho(X_i,\ R_i)=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

В случае, если X_i подчиняется нормальному распределению $N(a,\ \sigma^2)$, то

$$\rho(X_i,\ R_i)=\sqrt{\frac{3(n-1)}{\pi(n+1)}},$$

причем $\rho(X_i,\ R_i)$ не зависит от параметров нормального закона.

Лит.: [1] Hoeffding W., в кн.: Proc. 2 Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, Berkeley — Los Ang., 1951, p. 83—92; [2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [3] Тарасенко Ф. П., Непараметрическая статистика, Томск, 1976. *М. С. Никулин.*

РАНГОВАЯ СТАТИСТИКА — статистика, построенная по вектору рангов. Если $R=(R_1,\ \ldots,\ R_n)$ — *рангов вектор*, построенный по случайному вектору наблюдений $X=(X_1,\ \ldots,\ X_n)$, то любая статистика $T=T(R)$, являющаяся функцией от R, наз. ранговой статистикой. Классич. пример Р. с. дает коэффициент τ ранговой корреляции Кендалла между векторами R и $1=(1,\ 1,\ \ldots,\ 1)$, к-рый определяется по формуле

$$\tau=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j}\operatorname{sign}(i-j)\operatorname{sign}(R_i-R_j).$$

В классе всех Р. с. особое положение занимают т. н. линейные Р. с., к-рые определяются следующим образом. Пусть $A=\|a(i, j)\|$ — произвольная квадратная матрица порядка n. Тогда статистика

$$T=\sum_{i=1}^{n} a(i, R_i)$$

наз. линейной ранговой статистикой. Напр., коэффициент ρ ранговой корреляции Спирмена между векторами R и 1, определяемый по формуле

$$\rho=\frac{12}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{n+1}{2}\right)\left(R_i-\frac{n+1}{2}\right),$$

является линейной Р. с.

Линейные Р. с., как правило, просто устроены в вычислительном отношении и их распределения вероятностей нетрудно находить. Именно поэтому в теории Р. с. играет большую роль понятие проекции Р. с. в семейство линейных Р. с. Если T — нек-рая Р. с., построенная по случайному вектору X, относительно распределения вероятностей к-рого высказана гипотеза H_0, то проекцией $\hat{T}=\hat{T}(R)$ Р. с. T в семейство линейных Р. с. наз. такую линейную Р. с., что $\mathsf{E}\{(T-\hat{T})^2\}$ минимально при справедливости H_0. Как правило, проекция $\hat{T}$ достаточно хорошо аппроксимирует Р. с. T, и разность $T-\hat{T}$ пренебрежимо мала, когда $n\to\infty$. При справедливости гипотезы H_0, согласно к-рой компоненты $X_1, \ldots, X_n$ случайного вектора X суть независимые случайные величины, проекция $\hat{T}$ Р. с. T определяется по формуле

$$\hat{T}=\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{a}(i, R_i)-(n-2)\,\mathsf{E}\{T\}, \qquad (*)$$

где $\hat{a}(i,j)=\mathsf{E}\{T|R_i=j\}$, $1\leqslant i, j\leqslant n$ (см. [1]).

Существует внутренняя связь между Р. с. τ и ρ. Как показано в [1], при справедливости гипотезы H_0 проекция $\hat{\tau}$ коэффициента корреляции Кендалла τ в семейство линейных Р. с. с точностью до постоянного множителя совпадает с коэффициентом ранговой корреляции Спирмена ρ, а именно:

$$\hat{\tau}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\rho.$$

Из этого равенства следует, что коэффициент корреляции $\operatorname{corr}(\rho, \tau)$ между ρ и τ равен

$$\operatorname{corr}(\rho, \tau)=\sqrt{\frac{\mathsf{D}\hat{\tau}}{\mathsf{D}\tau}}=\frac{2(n+1)}{\sqrt{2n(2n+5)}},$$

т. е. при больших n Р. с. ρ и τ асимптотически эквивалентны (см. [2]).

Лит.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Kendall M. G., Rank correlation methods, 4 ed., L., 1970. *М. С. Никулин.*

РАНГОВЫЙ КРИТЕРИЙ — статистический критерий, основанный на *ранговой статистике*. Напр., критерии Вилкоксона и Манна — Уитни являются ранговыми. Р. к. инвариантны относительно группы G всех преобразований, задаваемых непрерывными строго возрастающими функциями и, следовательно, являются инвариантными относительно изменений параметров сдвига и масштаба. Кроме того, во многих задачах статистич. проверки гипотез наиболее мощные инвариантные критерии хорошо аппроксимируются Р. к.

См. также *Непараметрический критерий.*

Лит.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

РАНДОМИЗАЦИИ КРИТЕРИЙ, перестановок критерий,— статистический критерий, предназначенный для проверки гипотезы о симметричности плотности вероятности наблюдаемого случайного вектора относительно перестановки ее аргументов.

Пусть по реализации $x=(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора $X=(X_1, \ldots, X_n)$ надлежит проверить гипотезу H_0, согласно к-рой неизвестная плотность вероятности $p(x)=p(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора X симметрична относительно перестановок своих аргументов, т. е.

$$p(x_1, \ldots, x_n)=p(x_{r_1}, \ldots, x_{r_n}),$$

где $(r_1, \ldots, r_n)$ — вектор, получающийся в результате произвольной перестановки координат вектора $(1, 2, \ldots, n)$. Далее, пусть $X^{(\cdot)}$ и R — вектор порядковых статистик и вектор рангов соответственно, построенные по вектору наблюдений X, и пусть $\Psi=\Psi(X^{(\cdot)}, R)$ такая статистика, что

$$\mathsf{E}\{\Psi(X^{(\cdot)}, R) \mid X^{(\cdot)}\}=\alpha$$

почти всюду для нек-рого $\alpha \in (0; 1)$. В таком случае статистич. критерий с критич. функцией φ, связанной со статистикой Ψ соотношением $\varphi(X)=\Psi(X^{(\cdot)}, R)$, наз. критерием рандомизации. В силу того что $X^{(\cdot)}$ является полной *достаточной статистикой*, то при справедливости гипотезы H_0 семейство *подобных критериев* совпадает с семейством критериев перестановок.

Лит.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

РАНДОМИЗАЦИЯ — статистическая процедура, в к-рой решение принимается случайным образом. Пусть по реализации x случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$ надлежит принять решение ξ из измеримого пространства решений $(\Xi, \mathcal{A})$ и пусть на этом пространстве $(\Xi, \mathcal{A})$ задано семейство $\{Q_x\}$, $x \in \mathfrak{X}$, т. н. переходных вероятностных распределений $Q_x(\cdot)$ таких, что для любого фиксированного события A, $A \in \mathcal{A}$, функция $Q.(A)$ является $\mathcal{B}$-измеримой от x. В таком случае статистич. процедура принятия решения, в к-рой по наблюденной реализации x случайной величины X решение принимается с помощью розыгрыша по вероятностному закону $Q_x(\cdot)$, наз. рандомизацией.

Лит.: [1] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972. *М. С. Никулин.*

РАО — БЛЭКУЭЛЛА — КОЛМОГОРОВА ТЕОРЕМА — утверждение из теории статистич. оценивания, на основе к-рого построен метод улучшения несмещенных статистич. оценок.

Пусть X — случайная величина, принимающая значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, причем семейство вероятностных распределений $\{\mathsf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ обладает достаточной статистикой $T=T(X)$, и пусть $\varphi=\varphi(X)$ — нек-рая векторная статистика с конечной матрицей вторых моментов. В этом случае математич. ожидание $\mathsf{E}_\theta\{\varphi\}$ статистики φ существует и, кроме того, условное математич. ожидание $\varphi^*=\mathsf{E}_\theta\{\varphi | T\}$ является несмещенной оценкой для $\mathsf{E}_\theta\{\varphi\}$, то есть

$$\mathsf{E}_\theta\{\varphi^*\}=\mathsf{E}_\theta\{\mathsf{E}_\theta\{\varphi \mid T\}\}=\mathsf{E}_\theta\{\varphi\}.$$

В этих условиях Р.— Б.— К. т. утверждает, что квадратичный риск статистики φ^* не превосходит квадратичного риска статистики φ равномерно по всем $\theta \in \Theta$, т. е. для любого вектора z, имеющего ту же размерность, что и статистика φ, выполняется неравенство

$$z\mathsf{E}_\theta\left\{(\varphi-\mathsf{E}_\theta\{\varphi\})^T(\varphi-\mathsf{E}_\theta\{\varphi\})\right\}z^T \geqslant$$
$$\geqslant z\mathsf{E}_\theta\left\{(\varphi^*-\mathsf{E}_\theta\{\varphi^*\})^T(\varphi^*-\mathsf{E}_\theta\{\varphi^*\})\right\}z^T$$

для всех $\theta \in \Theta$. В частности, когда φ является одномерной статистикой, то при любом $\theta \in \Theta$ дисперсия $\mathsf{D}_\theta\varphi^*$ статистики φ^* не превосходит дисперсии $\mathsf{D}_\theta\varphi$ статистики φ.

В самом общем случае Р.— Б.— К. т. утверждает, что операция осреднения по достаточной статистике не приводит к увеличению риска относительно произвольной выпуклой функции потерь, откуда следует, что хорошие статистич. оценки нужно искать только в терминах достаточных статистик, т. е. в классе необходимых статистик.

В случае, когда семейство $\{\mathsf{P}_\theta\}$ является полным, т. е. когда единственной несмещенной оценкой нуля является функция, почти всюду равная нулю, несмещенная оценка с равномерно минимальным риском, получаемая с помощью Р.— Б.— К. т., является единственной. Таким образом, Р.— Б.— К. т. дает рецепт построения наилучших несмещенных оценок: нужно взять любую несмещенную оценку, а затем осреднить ее по достаточной статистике. Именно таким образом в следующем примере, принадлежащем А. Н. Колмогорову, строится наилучшая несмещенная оценка функции распределения нормального закона.

П р и м е р. Пусть по реализации случайного вектора $X=(X_1, \ldots, X_n)$, компоненты к-рого X_i, $i=1, 2, \ldots, n$, $n \geqslant 3$, суть независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же нормальному закону $N_1(\xi, \sigma^2)$, следует оценить функцию распределения

$$\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-(u-\xi)^2/2\sigma^2}\,du, \quad |\xi|<\infty, \sigma>0.$$

Предполагается, что параметры ξ и σ^2 неизвестны. Так как семейство

$$\left\{\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right), \ |\xi|<\infty, \ \sigma>0\right\}$$

нормальных законов является полным и существует достаточная статистика $T=(\overline{X}, S^2)$, где

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n)$$

и

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

то для построения наилучшей несмещенной оценки функции распределения $\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)$ следует воспользоваться Р.— Б.— К. т. В качестве исходной статистики φ можно взять, напр., функцию эмпирич. распределения, построенную по какой-то одной компоненте вектора X, напр. X_1, то есть

$$\varphi=\begin{cases}0, & \text{если } x<X_1\\ 1, & \text{если } x\geqslant X_1,\end{cases}$$

к-рая является тривиальной несмещенной оценкой для $\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)$, так как

$$\mathsf{E}\{\varphi\}=\mathsf{P}\{X_1\leqslant x\}=\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right).$$

Осреднение оценки φ по достаточной статистике T приводит к оценке

$$\varphi^*=\mathsf{E}\{\varphi \mid T\}=\mathsf{P}\{X_1\leqslant x \mid \overline{X}, S^2\}=$$
$$=\mathsf{P}\left\{\frac{X_1-\overline{X}}{S}\leqslant\frac{x-\overline{X}}{S} \mid \overline{X}, S^2\right\}. \quad (1)$$

В силу того что статистика

$$V=\left(\frac{X_1-\overline{X}}{S}, \frac{X_2-\overline{X}}{S}, \ldots, \frac{X_n-\overline{X}}{S}\right),$$

являющаяся дополнительной к достаточной статистике T, имеет равномерное распределение на $(n-2)$-мерной сфере радиуса n и, следовательно, не зависит ни от неизвестных параметров ξ и σ^2, ни от достаточной статистики T, то $(X_1-\bar{X})/S$ тоже не зависит от ξ, σ^2 и T, причем

$$\mathsf{P}\left\{\frac{X_1-\bar{X}}{S}\leqslant u\right\}=T_{n-2}(u),\ |u|<\sqrt{n-1}, \qquad (2)$$

где

$$T_f(u)=\frac{1}{\sqrt{\pi(f+1)}}\frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)}\int_{-\sqrt{f+1}}^{u}\left(1-\frac{t^2}{f+1}\right)^{\frac{f-2}{2}}du \quad (3)$$

— функция распределения Томпсона с f степенями свободы. Таким образом, из (1)—(3) следует, что наилучшей несмещенной оценкой для $\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)$, построенной по n независимым наблюдениям $X_1, \ldots, X_n$, является

$$\varphi^*=T_{n-2}\left(\frac{x-\bar{X}}{S}\right)=S_{n-2}\left(\frac{x-\bar{X}}{S}\sqrt{\frac{n-2}{n-1-\left(\frac{x-\bar{X}}{S}\right)^2}}\right),$$

где $S_f(\cdot)$ — функция распределения Стьюдента с f степенями свободы.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 4, с. 303—26; [2] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [3] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Blackwell D., «Ann. Math. Statistics», 1947, v. 18, p. 105—10. *М. С. Никулин.*

РАО — КРАМЕРА НЕРАВЕНСТВО, неравенство Фреше, неравенство информации,— неравенство в математич. статистике, устанавливающее нижнюю границу риска в задаче статистич. оценивания неизвестного параметра относительно квадратичной функции потерь.

Пусть распределение вероятностей случайного вектора $X=(X_1, \ldots, X_n)$, принимающего значения в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, задается плотностью вероятности $p(x|\theta)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)^T$, $\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^1$, и пусть в качестве оценки неизвестного скалярного параметра θ используется статистика $T=T(X)$ такая, что

$$\mathsf{E}_\theta T=\theta+b(\theta),$$

где $b(\theta)$ — нек-рая дифференцируемая функция, называемая смещением статистики T. В таком случае при определенных условиях регулярности семейства $\{p(x|\theta)\}$, одно из к-рых заключается в отличии от нуля информационного количества Фишера

$$I(\theta)=\mathsf{E}\left[\frac{\partial\ln p(X|\theta)}{\partial\theta}\right]^2,$$

имеет место неравенство Рао — Крамера

$$\mathsf{E}_\theta|T-\theta|^2\geqslant\frac{[1+b'(\theta)]^2}{I(\theta)}+b^2(\theta), \qquad (1)$$

устанавливающее нижнюю границу для среднеквадратичной ошибки $\mathsf{E}_\theta|T-\theta|^2$ всех оценок T неизвестного параметра θ, имеющих одну и ту же функцию смещения $b(\theta)$.

В частности, если статистика T является несмещенной оценкой параметра θ, то есть $\mathsf{E}_\theta T=\theta$, то из (1) следует, что

$$\mathsf{D}T=\mathsf{E}_\theta|T-\theta|^2\geqslant\frac{1}{I(\theta)}. \qquad (2)$$

Таким образом, в этом случае Р.— К. н. показывает нижнюю границу для дисперсий несмещенных оценок T параметра θ, к-рая равна $1/I(\theta)$, и, кроме того, Р.— К. н. демонстрирует, что существование состоятельных оценок связано с неограниченным ростом информационного количества Фишера $I(\theta)$ при $n\to\infty$. В случае если в Р.— К. н. (2) достигается равенство для какой-то несмещенной оценки T, то она является наилучшей в смысле минимума квадратичного риска в классе всех несмещенных оценок и наз. **эффективной оценкой.** Напр., если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же нормальному закону $N(\theta, 1)$, то статистика $T=\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n)$ является эффективной оценкой неизвестного математич. ожидания θ.

В общем случае равенство в (2) достигается тогда и только тогда, когда семейство $\{p(x|\theta)\}$ является *экспоненциальным*, т. е. *плотность вероятности* случайного вектора X представима в виде

$$p(x \mid \theta)=c(x) \exp \{u(\theta) \varphi(x)-v(\theta)\},$$

причем эффективной оценкой для параметра θ в этом случае является достаточная статистика $T=\varphi(X)$. В тех случаях, когда эффективные оценки не существуют, нижнюю границу дисперсий несмещенных оценок следует уточнять в силу того, что Р.— К. н. дает лишь нижнюю границу, к-рая не обязательно является точной нижней границей. Напр., если $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же нормальному закону $N(a^{1/3}, 1)$, то нижней границей для дисперсий несмещенных оценок параметра a является

$$\frac{9a^4}{n}+\frac{18a^2}{n^2}+\frac{6}{n^3},$$

в то время как

$$\frac{1}{I(\theta)}=\frac{9a^4}{n}.$$

Вообще, если в Р.— К. н. (2) равенство не достигается, то это не означает, что найденная оценка не является наилучшей, т. к. она может оказаться единственной несмещенной оценкой.

Существуют различные обобщения Р.— К. н. на случай векторного параметра, а также на случай, когда оценивается неизвестная функция от этого параметра. Именно в этих случаях большую роль играют уточнения нижней границы в Р.— К. н.

Неравенство (1) было получено независимо друг от друга М. Фреше (M. Fréchet), Рао (C. R. Rao), Г. Крамером (H. Cramér).

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Большев Л. Н., «Теория вероятностей и ее применения», 1961, т. 6, № 3, с. 319—26; [4] Bhattacharyya A., «Sankhyā», 1946, v. 8, № 1, p. 1—14; 1947, v. 8, № 3, p. 201—18; 1948, v. 8, № 4, p. 315—28.

М. С. Никулин.

РАСКРОЯ ЗАДАЧА, задача рационального раскроя,— выбор такого размещения заготовок в кусках материала, к-рое дает заготовки, как правило, в требуемой комплектности при минимальном расходе материала. В соответствии с особенностями в технологии и организации раскроя различаются математич. модели рационального раскроя (р. р.) для массового и индивидуального производства: для прямых (отрезки, прямоугольники, параллелепипеды) и фигурных заготовок, для случая кусков материала постоянных размеров и формы и с разбросом формы или размещения пороков (см. [1]). В зависимости от отрасли производства и используемого оборудования учитываются ограничения на допустимые виды раскроев. С Р. з. совпадает постановка нек-рых задач размещения грузов в сушильных печах, в вагонах, на палубах судов.

В массовом производстве при поступлении одинаковых кусков материала, если можно перечислить все $i=1, 2, \ldots, N$ доступные способы раскроя одного куска материала на нек-рые из $j=1, \ldots, m$ нужных видов заготовок, Р. з. сводится к решению задачи *линейного программирования*: найти интенсивность применения $x_i \geqslant 0$ каждого из раскроев, при к-рых $\sum_i x_i=\min$ и для каждого j соблюдено условие $\sum_i a_{ij} x_i \geqslant b_j$, где a_{ij} — количество j-х заготовок в i-м раскрое, а b_j — необходимое на одно изделие количество этих заготовок. На практике обычно нельзя перечислить все допустимые раскрои. Упомянутую задачу линейного программирования решают исходя из нек-рого набора допустимых раскроев методом последовательного улучшения плана. Одновременно нередко изменяют список допущенных к рассмотрению раскроев. На каждом шаге составляют (генерируют на ЭВМ) один из тех раскроев, к-рые, согласно оценкам двойственной задачи линейного программирования, способны улучшить план раскроя в целом. В случае «линейного» материала (к-рый надо кроить только по длине) упомянутое генерирование осуществимо в приемлемое время средствами *динамического программирования* (см. [1], [2]). При раскрое листов на прямоугольники этот путь принципиально тоже осуществим, но в реальных задачах может становиться громоздким. Генерирование улучшающих раскроев тогда ведут эвристич. алгоритмами: ограничиваются целенаправленным составлением раскроев с участием не более трех разнотипных заготовок (см. [2], [3]).

Сходно ставятся и решаются Р. з. при возможности выбора одного или нескольких стандартных размеров материала или при необходимости использовать имеющийся в наличии материал нескольких размеров (см. [1]). В программах решения Р. з. для прямых и прямоугольных заготовок учитываются ограничения, связанные со спецификой используемого оборудования (см. [2], [3]). В программы включают составление подетальных норм и печать карт раскроя.

В массовом производстве часто используют линейный материал смешанных длин. Здесь Р. з. состоит в выборе раскроя очередного куска конкретной длины. В машиностроении целесообразно применять специально рассчитываемую линейку, предписывающую раскрой остатка, к-рый возникает после отрезания нескольких заготовок [1]. В швейном производстве при составлении настилов ткани из рулонов разной длины используют также малые специализированные ЭВМ (см. [4]), решающие только эту Р. з. В металлургии на прокатных станах замеряют на ходу длину прокатного металла и, на основе решения Р. з. на ЭВМ, осуществляют в автоматич. режиме управление раскройным устройством (см. [5]). В зарубежной стекольной промышленности автоматизируют обнаружение пороков стекла и решают на ЭВМ Р. з., подчиняя ее обходу пороков. В лесопилении бревна также имеют разброс размеров и формы, но массовость задачи придает коэффициентам a_{ijk} (характеризующим для k-й группы бревен выход досок j-го вида при установке пил i-м способом) устойчивый статистич. характер. Р. з. в лесопилении математически поставлена давно (см. [1]) и эффективно решена в производственных условиях (см. [6]).

Для фигурных заготовок в массовом производстве есть вполне применимые программы выбора оптимального положения заготовок при однорядной и двухрядной штамповке из бесконечной ленты (см. [7], [8]), а также при штамповке из лент, нарезаемых из заданного листа. Остается эффективным также глазомерное составление наборов, включающих разные фигурные заготовки раскроев с последующим решением задачи линейного программирования только на этом множестве раскроев.

При индивидуальном производстве Р. з. требует вместо линейного программирования решения более сложной задачи *целочисленного программирования*, снова с неявно заданной матрицей коэффициентов, поскольку все допустимые раскрои не перечислены. Для линейных и прямоугольных заготовок запрограммированы практичные эвристич. алгоритмы приближенного решения этой задачи (см. [2]).

Для фигурных заготовок при индивидуальном производстве имеются различные разработки, но пока нет

(1983) достаточно удовлетворительных приемов решения Р. з. на ЭВМ. Надобность в таком решении ощущает в первую очередь судостроительная промышленность. Довольно эффективны диалоговые алгоритмы, при к-рых глазомерные возможности человека сочетаются с переносом на ЭВМ труда по воспроизведению поправок, обсчету и оформлению возникающих вариантов.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Залгаллер В. А., Рациональный раскрой промышленных материалов, 2 изд., Новосиб., 1971; [2] Мухачева Э. А., «Кузн.-штамп. произ-во», 1979, № 6, с. 14—17; [3] Математическое обеспечение расчетов линейного и прямоугольного раскроя, Уфа, 1980 (Тр. Всесоюзного науч. семинара); [4] Галынкер И. И., Сафронова Н. В., Механическая технология производства одежды, М., 1977; [5] Эпштейн В., Лагутин А., «Материально-техн. снабж.», 1976, № 11, с. 77—81; [6] Соболев И. В., Управление производством пиломатериалов, Петрозаводск, 1976; [7] Белякова Л. Б., Рябинина Н. О., «Кузн.-штамп. произ-во», 1977, № 11, с. 25—28; [8] Стоян Ю. Г., Панасенко А. А., Периодическое размещение геометрических объектов, К., 1978. *В. А. Залгаллер, Л. В. Канторович.*

РАСПАДА РАЗРЫВА МЕТОД — один из методов численного решения задач математич. физики. Термин «распад разрыва» привнесен из газовой динамики. Он означает процесс, возникающий при соприкосновении двух масс газа с различными состояниями газодинамич. величин (плотности, скорости, давления, внутренней энергии). Применительно к численному решению задач газовой динамики метод заключается в следующем. В области, где численно решается задача, строится разностная сетка (см. *Подвижных сеток метод*). Принимается, что в пределах каждой ячейки разностной сетки газодинамич. величины постоянны и равны нек-рым средним значениям, полученным из имеющегося их распределения. Затем на каждой из границ ячеек сетки решается задача о распаде разрыва применительно к состоянию газов в двух соседних ячейках. Ее решение достаточно просто алгоритмизируется для двух полубезграничных, соприкасающихся по плоской поверхности газов, в каждом из к-рых распределение газодинамич. величин постоянно. Значения газодинамич. величин из решения этой задачи, отвечающие пространственно-временному положению границы, разделяющей ячейки сетки, принимаются за значения на соответствующей границе ячейки. Это приближение справедливо по крайней мере на промежутке времени Δt, пока ни одно из попарных взаимодействий на границах соседних ячеек не будет влиять друг на друга. Рассчитав потоки по значениям газодинамич. величин на границах ячеек и зная исходное ступенчатое распределение на момент t_0, из балансов массы, импульса, полной энергии по каждой ячейке разностной сетки рассчитывается ступенчатое распределение на момент $t_0+\Delta t$. Сама разностная сетка может перестраиваться в ходе расчета. Ее движение может задаваться независимо или определяться в соответствии с особенностями решаемой задачи. Упомянутое выше ограничение на временной шаг Δt является по своей сути условием устойчивости описанной схемы расчета.

Изложенный подход к построению вычислительных алгоритмов обобщается применительно к решению задач гидродинамики с теплопроводностью, теории упругости и др. Благодаря наглядной физич. интерпретации, адекватности граничных условий исходной дифференциальной постановке и универсальности, Р. р. м. получил широкое распространение в практике численного решения задач математич. физики.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954; [2] Численное решение многомерных задач газовой динамики, М., 1976. *А. В. Забродин.*

РАСПИСАНИЙ ТЕОРИЯ — ветвь прикладной математики (раздел *исследования операций*), изучающая математич. постановки и методы решения задач оптимального упорядочения и согласования выполнения нек-рых действий во времени. К Р. т. относятся вопросы, связанные с построением оптимальных расписаний (календарных планов, графиков) выполнения конечных (или повторяющихся) комплексов операций. Область приложения результатов Р. т. включает в себя управление производством, транспортом, строительством, вычислительными системами и др.

Исследуемые в Р. т. задачи часто формулируются как задачи оптимизации процесса обслуживания конечного множества требований в системе, содержащей ограниченные ресурсы. Конечное множество требований отличает модели Р. т. от сходных с ними моделей массового обслуживания теории, где в основном рассматриваются бесконечные потоки требований. В остальном эти теории имеют близкие отправные точки. В Р. т. для каждого требования задается момент его поступления в систему. Находясь в системе, требование должно пройти одну или несколько, в зависимости от условий задачи, стадий обслуживания. Для каждой стадии указываются допустимые наборы ресурсов и длительности обслуживания требования при использовании этих наборов. Оговаривается возможность прерываний процесса обслуживания отдельных требований. Ограничения на очередность обслуживания задаются, как правило, транзитивным, антирефлексивным бинарным отношением. Алгоритмы расчета характеристик больших частично упорядоченных множеств требований составляют основное содержание раздела Р. т., к-рый носит название теории сетевого планирования. Иногда в моделях Р. т. указываются длительности переналадок при переходе от обслуживания одного требования к обслуживанию следующего требования и др. условия.

Следует отметить, что исходя из практич. направленности Р. т. не стремится к унификации терминологии: наряду с термином «требование» употребляются, напр., термины «работа», «операция» и т. д. По той же причине по-разному формально определяется расписание обслуживания требований. В общем случае под расписанием можно понимать однозначное отображение, ставящее в соответствие каждому требованию в каждый момент времени определенный набор ресурсов. В качестве критериев обычно выбираются критерии суммарного и максимального штрафов, имеющие следующий вид:

$$F(s)=\sum\nolimits_{a\in N}\varphi_a(t_a(s)) \text{ и } F(s)=\max_{a\in N}\varphi_a(t_a(s)),$$

здесь $t_a(s)$ — момент завершения обслуживания требования a в расписании s, N — множество требований, а $\varphi_a(\cdot)$ — неубывающие функции, именуемые функциями штрафа. В практич. постановках функции штрафа имеют обычно конкретный экономич. смысл (напр., омертвление оборотных средств, ущерб от потери потребителей и т. д.). Рассматриваются многокритериальные задачи.

Помимо детерминированных изучаются и стохастич. модели. В этом случае обычно рассматривается либо задача минимизации математич. ожидания значения одного из используемых в детерминированных постановках критериев, либо задача минимизации вероятности нек-рого события. Таким событием может быть, напр., запаздывание в обслуживании требований относительно заданных сроков.

Основным подходом к решению детерминированных задач Р. т. является общая алгоритмич. схема последовательного анализа вариантов. Именно на этом пути удалось решить наиболее адекватные практике задачи, отработать оптимизационные процедуры планирования работ во времени (календарное планирование), реализуемые в автоматизированных системах управления. Вместе с тем для ряда детерминированных задач получены быстродействующие решающие правила, доказаны необходимые и достаточные условия их применимости, предложены эффективные приемы, имеющие значение для дискретной оптимизации в целом (см., напр., [1]—[4]). При разработке таких оптимизационных алгоритмов находят применение, в частности, результаты *графов теории* и математич. программирования. Опубликованные в нач. 70-х гг. 20 в. работы по теории *NP*-полноты привели к появлению многочисленных исследований сложности задач Р. т. (см., напр., [5]). Результаты этих исследований повысили интерес к алгоритмам приближенного решения и оценке точности таких алгоритмов (см., напр., [6]). Для многих подходов и приемов решения задач дискретной оптимизации Р. т. представляет легко формулируемые практически значимые «пробные камни» — примеры.

Лит.: [1] Танаев В. С., Шкурба В. В., Введение в теорию расписаний, М., 1975; [2] Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В., Теория расписаний, пер. с англ., М., 1975; [3] Computer and job-shop scheduling theory, N. Y.—[a. o.], 1976; [4] Gonzalez M. J., «A C T Computing Surveys», 1977, v. 9, № 3, p. 173—204; [5] Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., «Operations Research», 1978, v. 26, № 1, p. 22—35; [6] Garey M. R., Graham R. L., Johnson D. S., там же, p. 3—21. *Я. Б. Зиндер, В. В. Шкурба.*

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ — раздел математич. кибернетики, разрабатывающий принципы и методы классификации, а также идентификации предметов, явлений, процессов, сигналов, ситуаций — всех тех объектов, к-рые могут быть описаны конечным набором нек-рых признаков или свойств, характеризующих объект.

Описание объекта представляет собой n-мерный вектор, где n — число признаков, используемых для характеристики объекта, причем i-я координата этого вектора равна значению i-го признака, $i=1, \ldots, n$. В описании объекта допустимо отсутствие информации о значении того или иного признака. Если необходимо расклассифицировать предъявленные объекты по нескольким группам (образам) только на основе их описаний, причем число групп не обязательно известно, то такая задача Р. о. наз. задачей таксономии (кластера, обучения без учителя, самообучения). Собственно для задач Р. о. (обучения с учителем), кроме описания объектов, необходимы дополнительные сведения о принадлежности этих объектов к тому или иному классу (образу). Количество классов конечно и задано. Классы могут пересекаться.

Совокупность описаний объектов, для к-рых известны образы, к к-рым они принадлежат, образует т. н. обучающую последовательность (набор эталонов). Основная задача Р. о. заключается в том, чтобы исходя из обучающей последовательности определить класс, к к-рому принадлежит описание нек-рого объекта, подвергаемого классификации или идентификации. К такой схеме приводится любая задача принятия решений, если только процесс принятия решения базируется в основном на изучении ранее накопленного опыта.

Прикладные задачи, решаемые методами Р. о., возникают при идентификации машинописных и рукописных текстов, идентификации фотоизображений, при автоматич. распознавании речи, в медицинской диагностике, при геологич. прогнозировании, прогнозировании свойств химич. соединений, оценке экономических, политических, производственных ситуаций, при классификации социологич. материала и т. п. Для решения этих задач накоплено большое число т. н. эвристических алгоритмов распознавания, ориентируемых на специфику каждой конкретной задачи. Кроме того, на основе нек-рых интуитивных принципов строятся модели алгоритмов распознавания, т. е. семейства алгоритмов для решения классификационных задач. Наиболее употребительны следующие модели: модели, построенные с использованием принципа разделения, задающие класс поверхностей, разделяющих образы; модели, построенные на принципе потенциалов; модели вычисления оценок (голосования); структурные модели; статистич. модели.

На уровне модели ставится задача отыскания экстремального по качеству алгоритма распознавания (модель вычисления оценок). О качестве работы распознающего алгоритма обычно судят по результатам работы алгоритма на нек-ром тестовом наборе объектов (контрольная последовательность), для к-рого исследователю априори известна достоверная классификация. При построении общей теории распознающих алгоритмов наиболее полные результаты получены в рамках алгебраич. подхода. Распознающий алгоритм представляется в виде произведения распознающего оператора и решающего правила. Введение над распознающими операторами операций сложения, умножения, умножения на скаляр позволяет доказать существование в рамках нек-рого алгебраич. расширения исходного набора распознающих операторов такого распознающего алгоритма, к-рый обладает экстремальным качеством на любой контрольной последовательности.

К задачам Р. о. относятся также задачи минимизации описания исходных объектов, выделения информативных признаков.

Лит.: [1] Журавлев Ю. И., «Проблемы кибернетики», 1978, в. 33, с. 5—68; [2] Айзерман М. А., Браверман Э. М., Розоноэр Л. И., Метод потенциальных функций в теории обучения машин, М., 1970; [3] Вапник В. Н., Червоненкис А. Я., Теория распознавания образов, М., 1974; [4] Фу К. С., Структурные методы в распознавании образов, пер. с англ., М., 1977. *П. П. Кольцов.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — то же, что *обобщенная функция.*

***F*-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** — см. *Фишера F-распределение.*

***t*-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** — см. *Стьюдента распределение.*

T^2-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *Хотеллинга T^2-распределение.*

***W*-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** — см. *Уишарта распределение.*

***z*-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** — см. *Фишера z-распределение.*

В-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *Бета-распределение.*

Г-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *Гамма-распределение.*

χ^2-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *«Хи-квадрат» распределение.*

ω^2-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *«Омега-квадрат» распределение.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ — одно из основных понятий *вероятностей теории* и *математической статистики.* При современном подходе в качестве математич. модели изучаемого случайного явления берется соответствующее *вероятностное пространство* $\{\Omega, S, P\}$, где Ω — множество элементарных событий, S — выделенная в Ω σ-алгебра подмножеств, P — определенная на S мера со свойством $P(\Omega)=1$ *(вероятностная мера).*

Любую такую меру на $\{\Omega, S\}$ и называют распределением вероятностей (см. [1]). Однако это определение, являющееся основой аксиоматики А. Н. Колмогорова (1933), при последующем развитии теории оказалось чрезмерно общим и было, с целью исключения нек-рых «патологических» случаев, заменено более ограничительным, напр. требованием «совершенности» вероятностной меры P (см. [2], особенно добавление к англ. переводу [3] этой книги). От Р. в. в функциональных пространствах требуют обычно выполнения нек-рого свойства регулярности, формулируемого как сепарабельность, но допускающее формулировку и в других терминах (см. *Сепарабельный процесс*, а также [4]).

Р. в., встречающиеся в большинстве конкретных задач теории вероятностей и математич. статистики, весьма немногочисленны. Все они давно известны и связаны с основными вероятностными схемами [5]. Они описываются или вероятностями отдельных значений (см. *Дискретное распределение*) или плотностями вероятности (см. *Непрерывное распределение*). В необходимых случаях для них составлены таблицы [6].

Из этих основных Р. в. одни связаны с повторениями независимых испытаний (см. *Биномиальное распределение*, *Геометрическое распределение*, *Полиномиальное распределение*), а другие — с соответствующими этой вероятностной схеме предельными закономерностями, возникающими при неограниченном возрастании числа испытаний (см. *Нормальное распределение*, *Пуассона распределение*, *Арксинуса распределение*). Однако эти предельные распределения могут возникать и как точные: в теории случайных процессов (см. *Винеровский процесс*, *Пуассоновский процесс*) или как решения уравнений, возникающих в т. н. *характеризационных теоремах* (см. также *Нормальное распределение*, *Показательное распределение*). *Равномерное распределение* вероятностей, принимаемое обычно как математич. выражение равновозможности соответствующих исходов опыта, также может быть получено как предельное (напр., при приведении по какому-то модулю суммы большого числа случайных величин или каких-либо других случайных величин с достаточно гладкими «расплывающимися» распределениями). Из упомянутых выше основных Р. в. получают другие Р. в. с помощью функциональных преобразований рассматриваемых случайных величин. Так, напр., в математич. статистике из нормально распределенных случайных величин получают величины, имеющие *«хи-квадрат» распределение*, *нецентральное «хи-квадрат» распределение*, *Стьюдента распределение*, *Фишера F-распределение* и др.

Важные классы распределений были открыты в связи с развитием асимптотич. методов теории вероятностей и математич. статистики (см. *Предельные теоремы*, *Устойчивое распределение*, *Безгранично делимое распределение*, *«Омега-квадрат» распределение*).

С теоретической и прикладной точек зрения важно умение определить понятие близости распределений. Совокупность всех Р. в. на $\{\Omega, S\}$ может быть различными способами превращена в топологич. пространство. При этом основную роль играет слабая сходимость Р. в. (см. *Распределений сходимость*). В одномерном и конечномерном случаях основным средством изучения сходимости Р. в. является аппарат *характеристических функций*.

Часто полное описание Р. в. (напр., при помощи *плотности вероятности* или *распределения функции*) заменяют заданием небольшого числа характеристик. Из этих характеристик наиболее употребительны *математическое ожидание* (среднее значение), *дисперсия*, *медиана* и *моменты* в одномерном случае. О числовых характеристиках многомерных Р. в. см. *Корреляция*, *Регрессия*.

Статистическим аналогом Р. в. является *эмпирическое распределение*. Эмпирич. распределение и его характеристики могут быть использованы для приближенного представления теоретического Р. в. и его характеристик (см. *Оценка статистическая*). О способах измерения степени согласия эмпирич. распределения с гипотетическим Р. в. см. *Статистических гипотез проверка*, *Непараметрические методы статистики*.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [3] их же, Limit distributions for sums of independent random variables, Camb. Mass. 1954; [4] Прохоров Ю. В., в кн.: Proc. fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, v. 2, Berkeley — Los Ang., 1961, p. 403—19; [5] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967; [6] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [7] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [8] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [9] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

Ю. В. Прохоров.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ — распределение в единичном интервале $[0,1)$ дробных долей $\{\alpha_j\}$ последовательности действительных чисел α_j, $j=1,2,\ldots$ Последовательность дробных долей $\{\alpha_j\}$, $j=1,2,\ldots$, наз. равномерно распределенной в интервале $[0,1)$, если для каждого интервала $[a,b)\subset[0,1)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n(a,b)}{n}=b-a,$$

где $\varphi_n(a,b)$ — число первых n членов $\{\alpha_j\}$, $1\leqslant j\leqslant n$, последовательности $\{\alpha_j\}$, $j=1,2,\ldots$, попавших в $[a,b)$. При этом последовательность чисел α_i, $j=1,2,\ldots$, наз. равномерно распределенной по модулю 1.

Критерий Вейля (см. [1]) для равномерно Р. д. д.: бесконечная последовательность дробных долей $\{\alpha_j\}$, $j=1,2,\ldots$, равномерно распределена в единичном интервале $[0,1)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\nolimits_{j=1}^{n}f(\{\alpha_j\})=\int_0^1 f(x)\,dx$$

для любой интегрируемой по Риману на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$ функции $f(x)$. Это утверждение эквивалентно следующему. Для того чтобы последовательность α_j, $j=1,2,\ldots$, была равномерно распределена по модулю 1, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\nolimits_{j=1}^{n}e^{2\pi i m\alpha_j}=0$$

для каждого целого $m\neq 0$. Из критерия Вейля и его оценок тригонометрич. сумм

$$\sum\nolimits_{x-1}^{p}e^{2\pi i f(x)}$$

следует, что если хотя бы один из коэффициентов a_s, $1\leqslant s\leqslant k$, многочлена

$$f(x)=a_kx^k+\ldots+a_1x$$

иррационален, то последовательность дробных долей $\{f(n)\}$, $n=1,2,\ldots$, равномерно распределена в интервале $[0,1)$.

Понятию равномерного Р. д. д. $\{\alpha_j\}$, $j=1,2,\ldots$, можно придать количественный характер, если ввести в рассмотрение величину

$$D_n=\sup_{0\leqslant a<b\leqslant 1}\left|\frac{\varphi_n(a,b)}{n}-(b-a)\right|,$$

называемую отклонением первых n членов последовательности $\{\alpha_j\}$, $j=1,2,\ldots$ (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Ann.», 1916, Bd 77, S. 313—52; [2] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] Хуа Ло-кен, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964.

С. А. Степанов.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ МНОГОМЕРНОЕ — распределение в n-мерном единичном кубе E, $0\leqslant x_i<1$, $i=1,2,\ldots,n$, дробных долей $\{P_j\}=(\{x_1^{(j)}\},\ldots,\{x_n^{(j)}\})$ последовательности точек n-мерного евклидова пространства $P_j=(x_1^{(j)},\ldots,x_n^{(j)})$, $j=1,2,\ldots$. Здесь $\{\ \}$ — знак дробной доли.

Последовательность дробных долей $\{P_j\}$, $j=1,2,\ldots$, наз. равномерно распределенной в единичном n-мерном кубе E, если для каждого прямоугольника V, содержащегося в E, имеет место равенство

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\varphi_m(V)}{m} = |V|,$$

где $\varphi_m(V)$ — число точек среди первых m членов последовательности $\{P_j\}$, попавших в V, и $|V|$ — мера прямоугольника V.

Последовательность P_j, $j=1, 2, \ldots$, точек n-мерного пространства наз. **равномерно распределенной по модулю 1**, если соответствующая ей последовательность дробных долей $\{P_j\}$ равномерно распределена в единичном кубе E.

Критерий Вейля для Р. д. д. м. Последовательность $\{P_j\}$, $j=1, 2, \ldots$, равномерно распределена в единичном кубе E тогда и только тогда, когда

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i \left(a_1 x_1^{(j)} + a_2 x_2^{(j)} + \ldots + a_n x_n^{(j)}\right)} = 0$$

для каждого набора целых чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0 \ldots 0)$. Частным случаем этой теоремы является *Вейля критерий* для равномерного распределения по модулю 1 последовательности действительных чисел. Из критерия Вейля следует **теорема Кронекера**: пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, 1 — действительные числа, линейно независимые над полем рациональных чисел, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольные действительные числа и N, ε — положительные числа; тогда существуют целые m и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ такие, что

$$m > N, \ |m\theta_i - p_i - \alpha_i| < \varepsilon$$

для всех $i=1, 2, \ldots, n$. Иначе говоря, последовательность $m\theta = (m\theta_1, m\theta_2, \ldots, m\theta_n)$, $m=1, 2, \ldots$, равномерно распределена по модулю 1.

Лит.: [1] Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961.

С. А. Степанов.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ — раздел теории чисел, в к-ром изучаются закономерности распределения простых чисел (п. ч.) среди натуральных чисел. Центральной является проблема наилучшего асимптотич. выражения при $x \to \infty$ функции $\pi(x)$, обозначающей число п. ч., не превосходящих x, а также функции $\pi(x; d, l)$, обозначающей число п. ч., не превосходящих x в арифметич. прогрессии $dn+l$ при $1 \leqslant l \leqslant d$, $n=0, 1, 2, \ldots$, для растущих вместе с x значений d.

Основная теорема арифметики: каждое натуральное число $n>1$ является или п. ч. или единственным (с точностью до перестановки сомножителей) произведением п. ч.

$$n = p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$$

(т. н. **каноническое представление числа** n), где $p_1, \ldots, p_k$ — различные п. ч., $n_1, \ldots, n_k$ — натуральные числа. Таким образом, п. ч. есть базис мультипликативного построения ряда натуральных чисел, это, однако, непосредственно ничего не говорит о величине $\pi(x)$.

Для нахождения п. ч. от 1 до x служит известный с 3 в. до н. э. метод *Эратосфена решета*. Решето Эратосфена является простейшей процедурой получения последовательности п. ч. Однако аналитич. формула решета

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1 = \sum_d (-1)^{\nu(d)} \left[\frac{x}{d}\right],$$

где d пробегает делители произведения всех п. ч. $\leqslant \sqrt{x}$, $\nu(d)$ — число простых делителей d, $[u]$ — целая часть u, непригодна для изучения $\pi(x)$ при $x \to \infty$.

Рассмотрение последовательности п. ч. от 1 до x:

$$2, 3, 5, 7, 11, 14, \ldots, p \qquad (1)$$

показывает, что с увеличением x она становится в среднем все более редкой. Существуют сколь угодно длинные отрезки ряда натуральных чисел, среди к-рых нет ни одного п. ч. Напр., $n-1$ натуральных чисел вида $n!+2, \ldots, n!+n$ для любого $n \geqslant 2$ являются составными числами. В то же время в (1) встречаются п. ч. такие, как 8004119 и 8004121, разность между к-рыми равна 2 (п. ч.— *близнецы*). Проблема поведения $\pi(x)$ при $x \to \infty$ является одной из наиболее трудных и интересных проблем теории чисел.

Первый результат о величине $\pi(x)$ — теорема Евклида: $\pi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Л. Эйлер (L. Euler, 1737, 1749, см. [1]) ввел функцию

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{2}$$

и показал, что при $s>1$

$$\zeta(s)=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}, \tag{3}$$

где ряд распространяется на все натуральные числа, а произведение на все п. ч. Тождество (3) и его обобщения играют фундаментальную роль в теории Р. п. ч. Исходя из него, Л. Эйлер доказал, что ряд $\sum 1/p$ и произведение $\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$ по простым p расходятся. Это— новое доказательство бесконечности числа п. ч. Более того, Л. Эйлер установил, что п. ч. «много», ибо

$$\pi(x)>\log \frac{x}{e},$$

и, в то же время, почти все натуральные числа являются составными, т. к.

$$\pi(x) x^{-1} \longrightarrow 0 \text { при } x \longrightarrow \infty .$$

Далее значительного успеха достиг П. Л. Чебышев (1851—52, см. [2]). Он доказал, что:

1) для любых $m>0$, $M>0$ есть последовательности $x \to \infty$, $y \to \infty$, для к-рых

$$\pi(x)-\operatorname{li} x<M x \log^{-m} x,$$

$$\pi(y)-\operatorname{li} y>-M y \log^{-m} y;$$

2) если существует предел частного $\pi(x) \log x / x$ при $x \to \infty$, то он равен 1.

Тем самым впервые был решен вопрос о существовании простой функции

$$\operatorname{li} x=\int_{2}^{x} \frac{d u}{\log u}=$$

$$=\frac{x}{\log x}+\frac{x}{\log^{2} x}+\ldots+(r-1)!\frac{x}{\log^{r} x}+O\left(\frac{x}{\log^{r+1} x}\right),$$

к-рая служит наилучшим приближением для $\pi(x)$. Затем П. Л. Чебышев установил истинный порядок роста $\pi(x)$, т. е. существование постоянных $a>0$, $A>0$ таких, что

$$a \frac{x}{\log x}<\pi(x)<A \frac{x}{\log x}, \tag{4}$$

причем, $a=0{,}92\ldots$, $A=1{,}05\ldots$ для $x \geqslant x_0$. Он же доказал, что при любом $n \geqslant 2$ в интервале $(n, 2n)$ содержится по крайней мере одно п. ч. (постулат Бертрана). В основе вывода неравенств (4) лежит тождество Чебышева

$$F(x)=\log[x]!=\sum_{n \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{n}\right), \tag{5}$$

в к-ром введенная П. Л. Чебышевым функция ψ определяется суммой по степеням p^m, $m=1, 2, \ldots$, п. ч. p:

$$\psi(x)=\sum_{p^{m} \leqslant x} \log p=\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n).$$

Именно, комбинация $\log[u]!$ для $x \geqslant 30$ в форме

$$F^{*}(x)=F(x)+F\left(\frac{x}{30}\right)-F\left(\frac{x}{2}\right)-F\left(\frac{x}{3}\right)-F\left(\frac{x}{6}\right),$$

вследствие (5), дает тождество

$$F^*(x)=\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)+\psi\left(\frac{x}{7}\right)-\psi\left(\frac{x}{10}\right)+\ldots,$$

из к-рого следует, что

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)<F^*(x)<\psi(x).$$

Отсюда, вследствие асимптотич. формулы Стирлинга для $n!$, вытекает аналог неравенств (4) для $\psi(x)$, из к-рых частичным суммированием получаются неравенства (4). Функция Чебышева $\psi(x)$ оказалась более удобной, чем $\pi(x)$, при изучении Р. п. ч., поскольку наилучшим приближением ее является сам аргумент x. Поэтому обычно сначала рассматривают $\psi(x)$, а затем частичным суммированием получают соответствующий результат для $\pi(x)$.

Принцип Римана. В 1859—60 Б. Риман (B. Riemann, см. [3]) рассмотрел введенную Л. Эйлером для $s>1$ функцию $\zeta(s)$ как функцию комплексного переменного $s=\sigma+it$, где σ, t — действительные переменные, определяемую рядом (2) при $\sigma>1$ (см. *Дзета-функция*), и обнаружил исключительную важность этой функции для теории Р. п. ч. В частности, он указал выражение разности $\pi(x)-\mathrm{li}\,x$ через x и нули функции $\zeta(s)$, лежащие в полосе $0\leqslant\sigma\leqslant1$. к-рые наз. нетривиальными нулями функции $\zeta(s)$.

Вместо формулы Римана обычно используется более простой конечный ее аналог для $\psi(x)$, доказанный (наряду с формулой Римана) Х. Мангольдтом (H. Mangoldt, 1895). Именно, для $x>1$

$$\psi(x)=x-\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^\rho}{\rho}+O\left(\frac{x}{T}\log^2 xT+\log 2x\right), \quad (6)$$

где $\rho=\beta+i\gamma$ пробегает нетривиальные нули $\zeta(s)$, T — любое $\geqslant2$.

Поскольку

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{1}{\gamma}\ll\log^2 T,$$

формула (6) показывает, что величина разности $\psi(x)-x$ в главном определяется величиной β (действительной частью самых правых нулей ρ). В частности, если $\zeta(s)\neq0$ правее вертикали $\sigma=\theta$, $^1/_2\leqslant\theta<1$, для функций $\psi(x)$, $\pi(x)$ справедливы следующие асимптотич. выражения:

$$\psi(x)=x+O\left(x^\theta\log^2 x\right),$$

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O\left(x^\theta\log x\right).$$

Наоборот, из этих соотношений следует, что $\zeta(s)\neq0$ для $\sigma\geqslant\theta$. Если справедлива гипотеза Римана, т. е. все нетривиальные нули $\zeta(s)$ лежат на одной прямой $\sigma=^1/_2$, тогда асимптотич. закон распределения п. ч. должен иметь вид

$$\psi(x)=x+O\left(\sqrt{x}\log^2 x\right),$$

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O\left(\sqrt{x}\log x\right).$$

Причем эти соотношения существенно усилить нельзя, т. е. существуют последовательности $x\to\infty$, $y\to\infty$ такие, что

$$\pi(x)-\mathrm{li}\,x<-\sqrt{x}\,\frac{\log\log\log x}{\log\log x},$$

$$\pi(y)-\mathrm{li}\,y>+y\,\frac{\log\log\log y}{\log\log y}.$$

Таким образом, согласно принципу Римана проблема асимптотич. выражения функций Р. п. ч. $\psi(x)$, $\pi(x)$ сводится к проблеме границы действительной части нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$. До сих пор (1983), однако, не удалось найти какое-либо постоянное θ, $^1/_2\leqslant\theta<1$, с условием $\beta\geqslant0$. Искомая граница для β

оказывается связанной с мнимой частью γ нулей ρ, причем так, что прямая $\sigma=1$ является для нее асимптотой.

Методы Адамара и Валле Пуссена. Асимптотич. закон Р. п. ч. в простейшем виде

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1$$

был получен в 1896 независимо Ж. Адамаром (J. Hadamard) и Ш. Валле Пуссеном (Ch. La Vallée Poussin), к-рые доказали, что $\zeta(1+it)\neq 0$, т. е. что на прямой $\sigma=1$ нет нулей функции $\zeta(s)$. В 1899 Ш. Валле Пуссен показал, что $\zeta(\sigma+it)\neq 0$ в области $\sigma\geqslant 1-c/\log(|t|+2)$. Тем самым было доказано, что

$$\psi(x)=x+O\left(x\exp\left(-a\sqrt{\log x}\right)\right),$$

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O\left(x\exp\left(-b\sqrt{\log x}\right)\right)$$

при постоянных $a>0$, $b>0$.

Были получены также дальнейшие расширения области свободной от нулей функции $\zeta(s)$ (см. [4]—[12]).

Метод Вейля — Литлвуда. Существует определенная связь между ростом модуля функции $\zeta(s)$ и ее нулями вблизи прямой $\sigma=1$. Именно, если $\zeta(s)\ll\exp(\varphi(t))$ при $1-\theta(t)\leqslant\sigma\leqslant 2$, где $\varphi(t)$, $1/\theta(t)$ — положительные неубывающие функции $t\geqslant 0$ такие, что $\theta(t)\leqslant 1$, $\varphi(t)\to\infty$ при $t\to\infty$ и $\varphi(t)/\theta(t)\ll\exp\varphi(t)$, то существует постоянная A такая, что $\zeta(s)\neq 0$ в области

$$\sigma\geqslant 1-A(\theta)(2t+1)/\varphi(2t+1).$$

При этом для оценки $\zeta(s)$ используется частная сумма ее ряда (2), к-рая сводит вопрос к оценке тригонометрич. сумм вида

$$\sum_{v<n\leqslant u}\exp(it\log n).$$

За счет оценок таких сумм по *Вейля методу* Дж. Литлвуд (J. Littlewood, 1921) показал, что для $t>A$ $\zeta(s)\ll\log^5 t$ при $\sigma\geqslant 1-\log^2\log t/\log t$ и, следовательно, $\zeta(s)\neq 0$ в области

$$\sigma\geqslant 1-A\log\log t/\log t.$$

Отсюда

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O\left(x\exp\left(-a\sqrt{\log x\log\log x}\right)\right).$$

Метод Виноградова. Дальнейший прогресс в оценках $\pi(x)$, $\psi(x)$ связан с созданием И. М. Виноградовым (см. *Виноградова метод*) нового, значительно более мощного метода оценок тригонометрич. сумм. При помощи этого метода им в 1938 было доказано, что $\zeta(s)\neq 0$ при

$$\sigma\geqslant 1-c/\log^{3/4}(|t|+2)\log^{3/4}\log(|t|+2)$$

и соответственно что

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O\left(x\exp\left(-a\log^{4/7}x\log^{-3/7}\log x\right)\right).$$

В 1858 И. М. Виноградов и другие (см. [6]—[11]) показали, что $\zeta(s)\neq 0$ при

$$\sigma\geqslant 1-c/\log^{2/3}(|t|+2)\log^{1/3}\log(|t|+2).$$

Это пока (1983) лучший результат о границе нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$, к-рому отвечает лучший результат в Р. п. ч.:

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O\left(x\exp\left(-a\log^{3/5}x\log^{-1/5}\log x\right)\right),$$

$$\psi(x)=x+O\left(x\exp\left(-b\log^{3/5}x\log^{-1/5}\log x\right)\right).$$

Из асимптотики $\pi(x)$ следует асимптотика n-го простого числа $p_n\sim n\log n$. Показано (см. [21]) также, что $p_n>n\log n$ для всех $n\geqslant 1$ и что для $17\leqslant x\leqslant e^{100}$, $x\geqslant e^{200}$

$$\frac{x}{\log x}<\pi(x)<\frac{x}{\log x-2};$$

для $x \geqslant 55$

$$\frac{x}{\log x+2} < \pi(x) < \frac{x}{\log x-4}.$$

Элементарные методы. Так называют методы изучения асимптотич. закона Р. п. ч., не опирающиеся на принцип Римана (нули дзета-функции) и, вообще, на какие бы то ни было положения теории функций комплексного переменного. Впервые такой метод открыли в 1948 А. Сельберг [16] и П. Эрдёш [17]. В основе лежит элементарная формула Сельберга

$$\psi(x)\log x+\sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n)=2x\log x+O(x). \quad (7)$$

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы из асимптотики в среднем для $\psi(u)$ в виде (7) вывести асимптотику $\psi(x)$. Это можно сделать по-разному, но общим во всех случаях является использованием факта медленного колебания функции ψ (см. [18]). В 1962 Э. Бомбьери (E. Bombieri) и Э. Вирзинг (E. Wirsing) доказали, что при любом фиксированном $A>0$

$$\psi(x)=x+O(x\log^{-A}x).$$

В 1970 Х. Дайамонд и Дж. Стейниг (см. [19]) существенно усовершенствовали идею и технику оценок элементарного метода и доказали, что для $x \geqslant \exp\exp 100$

$$|\psi(x)-x|<x\exp\left(-\log^{1/7}x\log^{-2}\log x\right).$$

Наконец, в 1973 А. Ф. Лаврик и А. Ш. Собиров [20] показали, что при элементарном методе доказательства справедлива теорема: для $x \geqslant \exp\exp 10^3$

$$|\psi(x)-x|<x\exp\left(-\log^{1/6}x\log^{-3}\log x\right).$$

Этот результат представляет пока лучшее достижение элементарного метода в изучении Р. п. ч., хотя он несколько слабее того, к-рый получен аналитич. методом, в принципе эти результаты близки между собой.

Разность между простыми числами. Существует много вопросов Р. п. ч., касающихся разности между п. ч. Среди них выделяются вопросы поведения $d_n=p_{n+1}-$ $-p_n$ — разности между соседними п. ч.; проблема количества п. ч. близнецов, или, более общо, пар п. ч. разности $2k$ и, вообще, числа систем $p, p+u_1, \dots, p+u_m$ из $m+1$ п. ч., лежащих на отрезке $[1, x]$.

С помощью гипотезы Римана доказано, что $d_n \ll$ $\ll \sqrt{p_n}\log p_n$; а нек-рые эвристич. рассуждения показывают, что, вероятно, справедлива оценка $d_n \ll \log^2 p_n$. Лучшей к 1983 является оценка $d_n \ll p_n^{\delta}$, где $\delta=\frac{7}{12}+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, полученная М. Н. Хаксли (M. N. Huxley, 1973) по методу большого решета. Что касается пар п. ч. разности, равной 2 (близнецов), или разности, равной $2k$, $k=1, 2, \dots$, то до сих пор (1983) неизвестно, является количество их бесконечным или нет. Пусть $\pi_k(x)$ есть число пар п. ч., не превосходящих x, разности $2k$. В 1919 В. Брун (V. Brun) нашел метод решета (см. *Бруна решето*), к-рый позволил получить ожидаемую оценку сверху для $\pi_k(x)$:

$$\pi_k(x) \ll \frac{x}{\log^2 x}\prod_{p\setminus k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Кроме этого, за счет оценок И. М. Виноградова тригонометрич. сумм с п. ч. (см. *Виноградова метод*) доказано *круговым методом* (см. [13]), что если положить

$$f(x)=2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\int_2^x\frac{du}{\log^2 u},$$

то при любых фиксированных $A>1$, $M>0$

$$\sum_{1\leqslant 2k\leqslant x\log^{-A}x}\left[\pi_k(x)-f(x)\prod_{p\setminus k,\ p>2}\frac{p-1}{p-2}\right]^2 \ll$$
$$\ll x^3\log^{-A-M}x.$$

Отсюда, в частности, следует, что при $X=x\log^{-A}x$ для всех $1\leqslant k\leqslant X$, исключая не более $X\log^{-M}x$ из них, $\pi_k(x)$ имеет асимптотич. выражение в виде

$$\pi_k(x)\sim 2\prod\nolimits_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\times$$
$$\times\frac{x}{\log^2 x}\prod\nolimits_{p\setminus k,\ p>2}\frac{p-1}{p-2}.$$

Аналогичные результаты получены для систем п. ч. $p,\ p+u_1,\ \ldots,\ p+u_m$ при любом $m\geqslant 1$.

Простые числа арифметической прогрессии. Первый способ (Евклида) доказательства бесконечности числа п. ч. можно перенести и на нек-рые арифметич. прогрессии. Но доказать таким путем, что в каждой арифметич. прогрессии $dn+l$, первый член к-рой l и разность d взаимно просты, содержится бесконечно много п. ч., до сих пор (1983) не удалось. Задачу другим методом решил П. Дирихле (P. Dirichlet, 1837—40), распространив идею Л. Эйлера о том, что $\sum 1/p^s\to\infty$ при $s\to 1+0$ на п. ч. $p\equiv l\pmod d$. Для этого он ввел арифметич. функции — характеры $\chi=\chi(n,\ d)$ (см. *Дирихле характер*) и функции $L(s,\ \chi)$ (см. *Дирихле L-функция*), которые подобно функции $\zeta(s)$ для $\pi(x), \psi(x)$ служат в качестве основного аппарата изучения функции $\pi(x;\ d,\ l)$ и ее аналога

$$\psi(x;\ d,\ l)=\sum\nolimits_{n\leqslant x,\ n\equiv l\ (\mathrm{mod}\ d)}\Lambda(n).$$

В случае фиксированного значения d, $1\leqslant l\leqslant d$, $(l,\ d)=1$, большинство результатов, указанных выше для $\pi(x)$ и $\psi(x)$, перенесены и на функции $\pi(x;\ d,\ l)$ и $\psi(x;\ d,\ l)$. Однако особый интерес здесь представляют результаты для растущих вместе с x значений d, к-рые важны в аддитивной теории чисел и ряде других задач. В таком случае возникают значительные дополнительные трудности, связанные прежде всего с оценкой величины d — наибольшего действительного нуля функции $L(s,\chi)$ по mod d. При помощи *Пейджа теорем* доказано, что для $1\leqslant d\leqslant(\log x)^{2-\varepsilon}$, $0<\varepsilon<{}^1/_2$,

$$\psi(x;\ d,\ l)=\frac{x}{\varphi(d)}+O\left(x\exp\left(-a\log^{\varepsilon/3}x\right)\right),$$

а вследствие оценки К. Зигеля (K. Siegel, 1935) для любого фиксированного $A>1$ при $1\leqslant d\leqslant\log^A x$

$$\psi(x;\ d,\ l)=\frac{x}{\varphi(d)}+O\left(x\exp\left(-c_1\sqrt{\log x}\right)\right),$$

где $\varphi(d)$ — функция Эйлера, a — положительная постоянная, $c_1=c_1(A)$ — неэффективная постоянная >0, то есть c_1 не может быть вычислена по заданному A.

Если справедлива расширенная *Римана гипотеза*, то для $d\leqslant x$

$$\psi(x;\ d,\ l)=\frac{x}{\varphi(d)}+O\left(\sqrt{x}\log^2 x\right).$$

Таким образом, к 1983 доказано, что п. ч. равномерно распределены по всем $\varphi(d)$ прогрессиям $1\leqslant l\leqslant d$, $(l,\ d)=1$, разности d лишь при $d\leqslant\log^A x$. Что же касается отрезков прогрессий $dn+l\leqslant x$ разности, напр. $d=x^\varepsilon$ с каким бы то ни было постоянным $\varepsilon>0$, то из предыдущего не следует даже, что такая прогрессия содержит хотя бы одно п. ч.

Метод решета Бруна, как и его модификация, предложенная А. Сельбергом в 1947, показывает, что для всех $1\leqslant d<x$, $1\leqslant l\leqslant d$, $(l,\ d)=1$, имеет место неравенство сверху

$$\pi(x;\ d,\ l)\ll\frac{x}{\varphi(d)\log\frac{x}{d}},$$

с абсолютной константой $\ll$, но никаких оценок снизу для $\pi(x;\ d,\ l)$ эти методы дать не могут.

Выражение для $\psi(x;\ d,\ l)$ по принципу Римана через нули $\rho=\beta+i\gamma$, лежащие в полосе $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ функций

$L(s, \chi)$, имеет вид

$$\psi(x; d, l)=\frac{\psi(x)}{\varphi(d)}-$$
$$-\frac{1}{\varphi(d)}\left(\sum_{\chi}{}' \overline{\chi}(l) \sum_{|\gamma|\leqslant T} \frac{x^{\rho}}{\rho}+\frac{\overline{\chi}(l)\, x^{\alpha}}{\alpha}\right)+R, \quad (8)$$

где штрих у суммы — знак суммирования по комплексным $\chi \bmod d$, α — действительный нуль функции $L(s, \chi)$, если он существует и больше $1-C_0/\log d$,

$$R \ll xT^{-1}\log^2 dx+x^{1/4}\log x,$$

T — любое $\geqslant 2$.

Из (8) видно, если не считать слагаемого, отвечающего α, что остаточный член асимптотики $\psi(x; d, l)$ определяется величиной двойной суммы, зависящей и от действительной части нулей ρ и от количества всех $L(s, \chi)$ с $\chi \bmod d$, имеющих нули ρ с $\mathrm{Re}\,\rho=\beta$. Если для $0{,}5\leqslant\sigma\leqslant 1$ через $N(\sigma, T, \chi)$ обозначить число нулей функции $L(s, \chi)$ в прямоугольнике: $\sigma\leqslant \mathrm{Re}\, s\leqslant 1$, $|t|\leqslant T$, то вопросы оценки остаточного члена для $\psi(x; d, l)$ и его среднего значения сводятся к вопросам оценки плотности распределения нулей L-функций в виде

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \sum_{\chi \bmod d}{}' N(\sigma, T, \chi), \\ N_2 &= \sum_{d\leqslant D}\sum_{\chi \bmod d}{}' N(\sigma, T, \chi). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Таким образом, понижение разного рода оценок для п. ч. связывается не только с отсутствием нулей $L(s, \chi)$ в критич. полосе, но и с сравнительно редким их распределением здесь.

Реализация этой идеи была одним из центральных направлений исследований Р. п. ч. последних 40 лет. Начало положил Ю. В. Линник открытием в 1941 метода *большого решета* (см. [22], а также [14], [15], [24]). Особо важными являются теоремы о наименьшем п. ч. в арифметической прогрессии, о поведении $\pi(x; d, l)$ и $\psi(x; d, l)$ в среднем по $d\leqslant D$ и о двойном усреднении этих функций по $1\leqslant l\leqslant d$, $(l, d)=1$, и $d\leqslant D$.

Именно, в 1944 Ю. В. Линник [23] показал, что при $d\to\infty$ сумма N_1 в (9) имеет оценку $\ll d^{a(1-\sigma)}$, где a — постоянная; отсюда он вывел существование постоянной c такой, что любая арифметич. прогрессия $dn+l$, где $1\leqslant l\leqslant d$, $(l, d)=1$, содержит п. ч., меньшее d^c. Последняя к 1983 оценка постоянной Линника имеет вид $c=17$; а если верна плотностная гипотеза: $N_1\ll \ll (dT)^{2(1-\sigma+\varepsilon)}$, то $c=2+\varepsilon$.

В 1965 А. И. Виноградов и Э. Бомбьери независимо получили сильные оценки сумм N_2 из (9). Более совершенствованный метод оценки этих сумм разработал Г. Монтгомери (H. Montgomery, 1969). Одним из следствий оценок N_2 является следующий результат о Р. п. ч. в арифметич. прогрессиях в среднем:

$$\sum_{d\leqslant \sqrt{x}\log^{-B}x}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,\, d)=1}\left|\psi(y; d, l)-\frac{y}{\varphi(d)}\right|\ll$$
$$\ll x\log^{-A}x,$$
$$\sum_{d\leqslant \sqrt{x}\log^{-B}x}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,\, d)=1}\left|\pi(y; d, l)-\frac{\mathrm{li}\, y}{\varphi(d)}\right|\ll$$
$$\ll x\log^{-A}x,$$

при любом постоянном A и $B=A+7/2$. Эти оценки существенно усилить уже нельзя, т. к. из расширенной гипотезы Римана следует, что $B=A+2$.

Другие вопросы распределения простых чисел. Пусть $\pi_{\nu}(x; d, l)$ есть количество чисел вида $dn+l\leqslant x$, к-рые являются произведением простых ν чисел. Х. Рихерт (H. Richert, 1953) доказал, что

$$\pi_\nu(x;\ d,\ l)=$$
$$=\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{m=0}^{r(x)}\sum_{h=0}^{\nu-1}A_\nu(h,\ m,\ d)\int_2^x\frac{\log^h\log u}{\log^{m+1}u}\,du+$$
$$+O\left(x\exp(-r(x))\right)+O\left(x^{1-1/bd^\varepsilon}\frac{\log^{\nu-1}d\,\log^{\nu-1}\log x}{\varphi(d)\log x}\right),$$

где $r(x)=c\sqrt{\log x}$, $c\geqslant 20$, $b=b(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, $A(h,\ m,\ d)$ определяется рядами, зависящими от h, m, d и ν.

Э. Ландау (E. Landau, 1903—1918) перенес нек-рые результаты Р. п. ч. на алгебраические числовые поля. Пусть K — алгебраическое числовое поле n-й степени, $\pi(x;\ K)$ — есть число простых идеалов с нормой $\leqslant x$ в K. Тогда

$$\pi(x;\ K)=\operatorname{li}x+O\left(x\exp\left(-\frac{c}{\sqrt{n}}\sqrt{\log x}\right)\right),$$

где c — абсолютная положительная постоянная, и

$$\pi(x)-\operatorname{li}x=\pm\Omega\frac{\sqrt{x}}{\log x}\log\log\log x,$$

где Ω — отрицание символа o (малое).

Много изучалась функция $F(x,\ y)$, обозначающая число натуральных чисел $\leqslant x$, не содержащих простых делителей, меньших y. Для $y=x^{1/\xi}$, $\xi=\xi(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, такие числа наз. **квазипростыми числами**. Методом решета для этих чисел получена достаточно полная теория их распределения, аналогичная ожидаемой теории Р. п. ч. Рассматривалось также распределение чисел с малыми простыми делителями (см. [25]).

Лит.: [1] Эйлер Л., Введение в анализ бесконечных, пер. с латин., 2 изд., т. 1, М., 1961; [2] Чебышев П. Л., Избр. матем. труды, М.— Л., 1946; [3] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948; [4] Ингам А. Е., Распределение простых чисел, пер. с англ., М.— Л., 1936; [5] Виноградов И. М., Избр. труды, М., 1952; [6] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1958, т. 22, № 2, с. 161—64; [7] его же, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [8] Титчмарш Е., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [9] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [10] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975; [11] Хуа Ло-кен, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [12] Чудаков Н. Г., Введение в теорию L-функций Дирихле, М.— Л., 1947; [13] Лаврик А. Ф. «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 64, с. 90—125; [14] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [15] Монтгомери Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1974; [16] Selberg A., «Ann. Math.», 1949, v. 50, p. 305—13; [17] Erdös P., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1949, v. 35, p. 371—84; [18] Лаврик А. Ф. (Обзорный доклад международной конференции по теории чисел, М., 1981); [19] Diamond H. G., Steinig J., «Invent. Math.», 1970, v. 11, p. 199—258; [20] Лаврик А. Ф., Собиров А. Ш., «Докл. АН СССР», 1973, т. 211, № 3, с. 534—36; [21] Rosser B., «Proc. London math. Soc.», 1939, v. 45 (2), p. 21—44; [22] Линник Ю. В., «Докл. АН СССР», 1941, т. 30, № 4, с. 290—92; [23] его же, «Матем. сб.», 1944, т. 15, с. 139—78; [24] Лаврик А. Ф., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, в. 2, с. 55—65; [25] Halberstam H., Richert H. E., Sieve Methods, L.— [etc], 1974.
А. Ф. Лаврик.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕННЫХ ВЫЧЕТОВ И НЕВЫЧЕТОВ — распределение среди чисел $1,\ 2,\ldots,$ $m-1$ тех значений x, для к-рых сравнение

$$y^n\equiv x\ (\mathrm{mod}\ m),$$

$n>1$ — целое, разрешимо (неразрешимо). В вопросах, связанных с Р. с. в. и н., наиболее полно изучен случай простого модуля p. Пусть $q=(n,\ p-1)$. Тогда сравнение $y^n\equiv x\ (\mathrm{mod}\ p)$ разрешимо при $\frac{p-1}{q}$ значениях x из множества $1,\ 2,\ \ldots,\ p-1$ и неразрешимо при остальных $(q-1)\ \frac{p-1}{q}$ значениях x (см. *Двучленное сравнение*).

Однако сравнительно немного известно о том, как расположены эти значения среди чисел $1,\ 2,\ldots,\ p-1$.

Первые результаты о распределении степенных вычетов были получены еще К. Гауссом (С. Gauss, см. [1]) в 1796. С того времени и до работ И. М. Виноградова в вопросах о Р. с. в. и н. были получены лишь отдельные частные результаты. В 1915 И. М. Виноградов (см. [2]) доказал ряд общих результатов о распределении степенных вычетов и невычетов, а также *первообразных корней* по модулю p среди чисел $1, 2, \ldots, p$. В частности, им была получена оценка

$$N_{\min} < p^{\frac{1}{2\sqrt{e}}} (\ln p)^2$$

для наименьшего квадратичного невычета $N_{\min}$ и оценка

$$N^*_{\min} \leqslant 2^{2k} \sqrt{p} \ln p,$$

где k — число различных простых делителей $p-1$, для наименьшего первообразного корня $N^*_{\min}$ по простому модулю p. Кроме того, И. М. Виноградовым был высказан ряд гипотез о распределении квадратичных вычетов и невычетов (см. *Виноградова гипотезы*), стимулировавших ряд исследований в этой области. Так, Ю. В. Линник [3] доказал, что при достаточно большом N на отрезке $[N^{\varepsilon}, N]$ количество простых чисел p, для к-рых $N_{\min} > p^{\varepsilon}$, не превосходит нек-рой константы $C(\varepsilon)$, зависящей лишь от $\varepsilon > 0$. Таким образом, простые числа p, для к-рых $N_{\min} > p^{\varepsilon}$, если только они существуют, встречаются очень редко. Другим существенным шагом в исследовании гипотез Виноградова явилась теорема Д. Бёрджесса [4]: для любого фиксированного сколь угодно малого $\delta > 0$ максимальное расстояние $d(p)$ между соседними квадратичными невычетами удовлетворяет неравенству

$$d(p) \leqslant A(\delta)\, p^{\frac{1}{4}+\delta}.$$

Отсюда, в частности, следует оценка

$$N_{\min} \leqslant B(\delta)\, p^{\frac{1}{4\sqrt{e}}+\delta}.$$

В этих неравенствах константы $A(\delta)$, $B(\delta)$ зависят только от δ и не зависят от p. Доказательство теоремы Бёрджесса, сложное само по себе, основывалось на теореме Хассе — Вейля о числе решений гиперэллиптич. сравнения

$$y^2 \equiv f(x) \pmod p,$$

доказательство к-рой требовало привлечения аппарата абстрактной алгебраич. геометрии. Простой вывод теоремы Бёрджесса см. в [5], [6].

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, пер. с нем., М., 1959; [2] Виноградов И. М., Избранные труды, М., 1952; [3] Линник Ю. В., «Докл. АН СССР», 1942, т. 36, с. 131; [4] Berdgess D., «Mathematika», 1957, v. 4, № 8, p. 106—12; [5] Степанов С. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 237—46; [6] Карацуба А. А., «Докл. АН СССР», 1968, т. 180, № 6, с. 1287—89. *С. А. Степанов.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОЛНОЕ СЕМЕЙСТВО — семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$, заданное на измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, для к-рого единственной несмещенной оценкой нуля в классе $\mathfrak{B}$-измеримых функций на $\mathfrak{X}$ является функция, тождественно равная нулю, т. е. для любой $\mathfrak{B}$-измеримой функции $f(\cdot)$, определенной на $\mathfrak{X}$ и удовлетворяющей соотношению

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\mathsf{P}_\theta(x) = 0 \text{ для любого } \theta \in \Theta, \qquad (*)$$

следует, что $f(x) \equiv 0$. Напр., экспоненциальное семейство распределений является полным. Если соотношение (*) выполняется при дополнительном предположении об ограниченности функции $f(x)$, то семейство $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$ наз. ограниченно полным. Ограниченно полные семейства распределений достаточных статистик играют важную роль в математич. статистике, в частности в задаче построения *подобных критериев*, обладающих *Неймана структурой*.

Лит.: [1] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

М. С. Никулин.

РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СХОДИМОСТЬ — в основном слабая сходимость и сходимость по вариации, определяемые следующим образом. Последовательность распределений (вероятностных мер) $\{P_n\}$ на борелевских множествах метрич. пространства S наз. слабо сходящейся к распределению P, если

$$\lim_n \int_S f\,dP_n = \int_S f\,dP \qquad (*)$$

для любой действительной ограниченной непрерывной функции f на S. Слабая сходимость является основным типом сходимости, рассматриваемым в теории вероятностей. Обозначают ее обычно знаком $\Rightarrow$. Следующие условия равносильны слабой сходимости:

1) соотношение $(*)$ выполняется для любой ограниченной равномерно непрерывной действительной функции f;

2) соотношение $(*)$ выполняется для любой ограниченной непрерывной P-почти всюду действительной функции f;

3) $\overline{\lim_n} P_n(F) \leqslant P(F)$

для любого замкнутого множества $F \subset S$;

4) $\underline{\lim_n} P_n(G) \geqslant P(G)$

для любого открытого множества $G \subset S$;

5) $\lim_n P_n(A) = P(A)$

для любого борелевского множества $A \subset S$ такого, что $P(\partial A)=0$, где ∂A — граница A;

6) $\lim_n p(P_n, P) = 0$,

где p есть *Леви — Прохорова метрика*.

Пусть U — замкнутый относительно пересечений класс подмножеств S такой, что всякое открытое множество из S есть конечное или счетное объединение множеств из U. Тогда если $\lim_n P_n(A) = P(A)$ при всех $A \in U$, то $P_n \Rightarrow P$. Если $S = \mathbb{R}^k$ и F_n, F — функции распределения, отвечающие P_n и P соответственно, то $P_n \Rightarrow P$ тогда и только тогда, когда $F_n(x) \to F(x)$ в каждой точке x непрерывности функции F.

Пусть пространство S сепарабельно и $\mathcal{F}$ — класс ограниченных борелевских действительных функций на S. Для того чтобы $\int_S f dP_n \to \int_S f dP$ равномерно по $f \in \mathcal{F}$ для всякой последовательности $\{P_n\}$ такой, что $P_n \Rightarrow P$, необходимо и достаточно, чтобы:

а) $\sup_{f \in F} \omega_f(S) < \infty$,

б) $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{f \in \mathcal{F}} P(\{x : \omega_f(S_{x,\varepsilon}) > \delta\}) = 0, \ \forall \delta > 0$,

где

$$\omega_f(A) = \sup\{|f(x) - f(y)|, \quad x, \ y \in A\},$$

и где $S_{x,\varepsilon}$ — открытый шар радиуса ε с центром в x. Если класс $\mathcal{F}$ образован индикаторами множеств из нек-рого класса E, то условия а) и б) сводятся к условию

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{A \in E} P(A^{\varepsilon} \setminus A^{-\varepsilon}) = 0,$$

где

$$A^{\varepsilon} = \bigcup_{x \in A} S_{x,\varepsilon}, A^{-\varepsilon} = S \setminus (S \setminus A)^{\varepsilon}$$

(когда всякий открытый шар в S связен, $A^{\varepsilon} \setminus A^{-\varepsilon} =$

$=(\partial A)^{\varepsilon}$). Если $S=\mathbb{R}^k$ и распределение P абсолютно непрерывно по мере Лебега, то $P_n \Rightarrow P$ тогда и только тогда, когда $P_n(A) \to P(A)$ равномерно по всем борелевским выпуклым множествам A.

Пусть P_n, P — распределения на метрич. пространстве S, $P_n \Rightarrow P$ и h — непрерывное P-почти всюду измеримое отображение S в метрич. пространство S'; тогда $P_n h^{-1} \Rightarrow P h^{-1}$, где для любого распределения Q на S распределение Qh^{-1} есть его h-образ на S':

$$Qh^{-1}(A)=Q(h^{-1}(A))$$

для любого борелевского $A \in S'$.

Семейство распределений $\mathcal{P}$ на S наз. слабо относительно компактным, если всякая последовательность его элементов содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Условие слабой относительной компактности дает теорема Прохорова. Семейство $\mathcal{P}$ наз. плотным, если $\forall \varepsilon>0$ существует компакт $K \subset S$ такой, что $P(k)>1-\varepsilon$ $\forall P \in \mathcal{P}$. Теорема Прохорова: если $\mathcal{P}$ плотно, то оно относительно компактно, а если S сепарабельно и полно, то слабая относительная компактность $\mathcal{P}$ влечет его плотность. В случае, когда $S=\mathbb{R}^k$, семейство распределений $\mathcal{P}$ слабо относительно компактно тогда и только тогда, когда соответствующее $\mathcal{P}$ семейство характеристич. функций равностепенно непрерывно в нуле.

Пусть теперь P_n, P — распределения на измеримом пространстве (X, A), где A есть σ-алгебра. Под сходимостью по вариации P_n к P понимают равномерную сходимость по всем множествам из A или, что равносильно, стремление вариации

$$|P_n-P|=(P_n-P)^{+}+(P_n-P)^{-}$$

к нулю; здесь $(P_n-P)^+$ и $(P_n-P)^-$ — компоненты разложения Жордана — Хана обобщенной меры P_n-P.

Лит.: [1] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [2] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [3] Бхаттачария Р. Н., Р. Ранга Рао, Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения, пер. англ., 1982. *В. В. Сазонов.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТИП — совокупность распределений вероятностей случайных величин, получаемых одна из другой каким-либо линейным преобразованием. Точное определение в одномерном случае таково: распределения вероятностей случайных величин X_1 и X_2 называют однотипными, если существуют постоянные A и $B>0$ такие, что распределения величин X_2 и BX_1+A совпадают. Соответствующие функции распределения связаны при этом соотношением

$$F_2(x)=F_1\left(\frac{x-A}{B}\right)=F_1(bx+a),$$

где $b=1/B$ и $a=-A/B$.

Таким образом, множество функций распределения разбивается на попарно непересекающиеся типы. При этом, напр., все нормальные распределения образуют один тип, все равномерные распределения также образуют один тип.

Понятие типа широко используется в *предельных теоремах* теории вероятностей. Распределение сумм S_n независимых случайных величин часто «неограниченно расплываются» при $n \to \infty$ и сходимость к предельному распределению (например, к нормальному) оказывается возможной только после линейной «нормировки», т. е. для сумм $\frac{S_n-a_n}{b_n}$, где a_n и $b_n>0$ — нек-рые константы, $b_n \to \infty$ при $n \to \infty$. При этом если для каких-либо случайных величин X_n распределения величин $\frac{X_n-a_n}{b_n}$ и $\frac{X_n-a_n'}{b_n'}$ сходятся к невырожденным предельным распределениям, то эти последние обязательно однотипны. Поэтому можно дать следующее определение сходимости типов (А. Я. Хинчин, 1938). Пусть $T(F)$ — тип, к-рому принадлежит функция распределения F (из дальнейшего изложения исключается вырожденный тип — тип, к-рому принадлежат вырожденные распределения). Говорят, что последовательность типов T_n сходится к типу T, если существует последовательность функций распределения $F_n \in T_n$, сходящаяся (слабо) к функции распределения $F \in T$. Топологизированное таким образом множество типов есть хаусдорфово нерегулярное пространство и, следовательно, неметризуемо (В. Дёблин, W. Doeblin, 1939).

Пусть, теперь, S_n — суммы независимых одинаково распределенных случайных величин и F_n — соответствующие функции распределения. Тогда класс типов, предельных для $T(F_n)$, совпадает с классом всех устойчивых типов, т. е. таких типов, что из $F_1 \in T$ и $F_2 \in T$ вытекает, что свертка F_1 и F_2 принадлежит T (т. е., иными словами, сумма двух независимых случайных величин с распределениями типа T снова имеет тип T, см. *Устойчивое распределение*).

Понятие Р. т. может быть распространено на многомерный случай. Однако это распространение неоднозначно. Выбирая какую-либо подгруппу G полной группы матриц, можно получить соответствующее понятие Р. т. Случайные векторы X_1 и X_2 со значениями из $\mathbb{R}^n$ называют G-однотипными, если существует такое преобразование $g \in G$, что X_2 и gX_1 имеют одно и то же распределение. Соответственно можно ввести понятие G-устойчивости Р. т. По отношению к полной группе матриц устойчивы только нормальные распределения (Г. Сакович, 1960).

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949. *Ю. В. Прохоров.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАКОН в теории вероятностей — удобный описательный термин, могущий означать, в зависимости от контекста, распределение вероятностей (напр., какой-либо случайной величины) или соответствующую *распределения функцию* или *плотность вероятности*. *Ю. В. Прохоров.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ТЕОРИЯ — теория распределения значений мероморфных функций, построенная в 20-х гг. 20 в. Р. Неванлинной (R. Nevanlinna, см. [1]), основной задачей к-рой является изучение систем $\{z_n\}$ точек области G, в к-рых функция $w(z)$ принимает заданное значение $w=a$ (так наз. a-точек); при этом рассматриваются всевозможные значения $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Основные понятия. Основные положения неванлинновской теории можно проиллюстрировать на случае, когда $w=f(z)$ является трансцендентной мероморфной функцией во всей открытой комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть $n(t, a, f)$ обозначает число a-точек $f(z)$ с учетом их кратностей, попавших в круг $\{|z| \leq t\}$. И пусть для произвольного комплексного числа a

$$N(r, a, f)=\int_0^r [n(t, a, f)-n(0, a, f)]\, d\ln t+$$

$$+n(0, a, f)\ln r,$$

$$m(r, a, f)=m\left(r, \infty, \frac{1}{f-a}\right), \quad a \neq \infty,$$

$$m(r, \infty, f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta,$$

$$T(r, f)=m(r, \infty, f)+N(r, \infty, f).$$

Функция $T(r, f)$ наз. неванлинновской характеристикой (или характеристической функцией) мероморфной функции $f(z)$. Функция $m(r, a, f)$ характеризует скорость среднего приближения $f(z)$ к числу a при $|z| \to \infty$, а функция $N(r, a, f)$ характеризует среднюю плотность распределения a-точек $f(z)$. Справедлива следующая теорема, допускающая геометрич. интерпретацию характеристики $T(r, f)$. Пусть F_r обозначает часть римановой поверхности $f(z)$, соответствующей кругу $\{|z| \leqslant r\}$, а $\pi A(r, f)$ — сферич. площадь поверхности F_r, тогда

$$T(r, f) = \int_0^r A(s, f)\, d \ln s + O(1) \quad (r \longrightarrow \infty).$$

С помощью характеристики $T(r, f)$ определяются порядок роста ρ функции $f(z)$ и ее нижний порядок роста λ:

$$\rho = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r}, \quad \lambda = \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r}.$$

Первая основная теорема Неванлинны: при $r \to \infty$

$$m(r, a, f) + N(r, a, f) = T(r, f) + O(1),$$

т. е. сумма $m(r, a, f) + N(r, a, f)$, с точностью до ограниченного при $r \to \infty$ слагаемого, сохраняет постоянное для различных a значение $T(r, f)$. В этом смысле все значения w для мероморфной функции $f(z)$ являются равноправными. Особый интерес представляет поведение при $r \to \infty$ функции $N(r, a, f)$. В Р. з. т. используются следующие количественные характеристики роста функций $N(r, a, f)$ и $m(r, a, f)$ по сравнению с ростом характеристики $T(r, f)$:

$$\delta(a, f) = 1 - \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)} = \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} \leqslant 1,$$

$$\Delta(a, f) = 1 - \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)} = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} \leqslant 1.$$

Величина $\delta(a, f)$ наз. дефектом $f(z)$ в точке a в смысле Неванлинны, а величина $\Delta(a, f)$ — дефектом $f(z)$ в точке a в смысле Валирона. Пусть

$$D(f) = \{a : \delta(a, f) > 0\}, \quad V(f) = \{a : \Delta(a, f) > 0\}.$$

Множество $D(f)$ наз. множеством *дефектных значений* $f(z)$ в смысле Неванлинны, а множество $V(f)$ — множеством дефектных значений $f(z)$ в смысле Валирона. Теорема Неванлинны о величинах дефектов и о множестве дефектных значений $f(z)$: для произвольной мероморфной функции $f(z)$ справедливы утверждения: а) множество $D(f)$ не более чем счетно; б) дефекты $f(z)$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{(a)} \delta(a, f) \leqslant 2 \tag{1}$$

(соотношение дефектов). Постоянная 2, фигурирующая в (1),— это эйлерова характеристика всей замкнутой плоскости $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, к-рую накрывает риманова поверхность функции $f(z)$.

Структура множества $D(f)$. Утверждение Р. Неванлинны о том, что множество $D(f)$ не более чем счетно, усилить нельзя. Справедлива теорема: каково бы ни было конечное или счетное множество E точек из расширенной комплексной плоскости и каково бы ни было число ρ, $0 < \rho \leqslant \infty$, существует мероморфная функция $f_\rho(z)$ порядка ρ, для к-рой E совпадает с множеством ее дефектных значений $D(f_\rho)$. Для мероморфных функций нулевого нижнего порядка $D(f)$ может содержать самое большее одну точку. Таким образом, вопрос о структуре множества $D(f)$ полностью решен.

Кроме того, показано, что для каждого $\rho > 0{,}5$ существует целая функция $g_\rho(z)$ порядка ρ, для к-рой множество $D(g_\rho)$ является счетным. Целые функции нижнего порядка $\lambda \leqslant 0{,}5$ не могут иметь конечных дефектных значений.

Структура множества $V(f)$. Множество валироновских дефектных значений $V(f)$ исследовано (1983) не в полной мере. Ж. Валирон (G. Valiron) показал, что существует целая функция $g(z)$ 1-го порядка, для к-рой множество $V(g)$ имеет мощность контиуума. С другой стороны, справедлива теорема: для произвольной мероморфной функции $f(z)$ множество $V(f)$ всегда имеет нулевую логарифмич. *емкость*.

Для каждого множества E класса F_σ нулевой логарифмич. емкости существует целая функция $g(z)$ бесконечного порядка, для к-рой $E \subset V(g)$.

Свойства дефектов мероморфных функций конечного нижнего порядка. Для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка величины дефектов, вообще говоря, не удовлетворяют никаким дополнительным соотношениям, кроме основного соотношения (1). Однако если ограничиться рассмотрением мероморфных функций конечного нижнего порядка, то картина резко меняется. Справедлива теорема: если $f(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то при любом α, $^1/_3 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

$$\sum_{(a)} \delta^\alpha (a, f) \leqslant K(\lambda, \alpha), \tag{2}$$

где постоянная $K(\lambda, \alpha)$ зависит лишь от λ и α. С другой стороны, существуют мероморфные функции конечного нижнего порядка, для к-рых при $\alpha < 1/3$ ряд, стоящий слева в (2), уже может расходиться. Наличие у мероморфной функции $f(z)$ нижнего порядка $\lambda \leqslant 0{,}5$ одного дефектного значения a такого, что $\delta(a, f) \geqslant 1 - \cos \pi\lambda$, влияет на ее асимптотич. свойства: такая функция не может иметь других дефектных значений.

Обратная задача Р. з. т. В несколько упрощенном виде обратную задачу Р. з. т. в каком-либо классе $\mathscr{K}$ мероморфных функций можно сформулировать в следующем виде. Каждой точке нек-рой последовательности $\{a_k\}$ из расширенной комплексной плоскости поставлено в соответствие число $\delta(a_k)$, $0 < \delta(a_k) < 1$, так, что $\Sigma_k \delta(a_k) \leqslant 2$. Требуется указать мероморфную функцию $f(z) \in \mathscr{K}$ такую, что $\delta(a_k, f) = \delta(a_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\delta(a, f) = 0$ для каждого $a \neq a_k$, $k = 1, 2, \ldots$, либо доказать отсутствие таких функций в $\mathscr{K}$. Обратная задача полностью решена положительно в классе целых функций бесконечного нижнего порядка и в классе мероморфных функций бесконечного нижнего порядка. При решении обратной задачи в классе мероморфных функций конечного нижнего порядка возникают определенные трудности, к-рые объясняются тем, что в этом случае величины дефектов, кроме основного соотношения (1), подчинены еще другим соотношениям (см. (2)).

Рост мероморфных функций. Пусть для мероморфной функции $f(z)$

$$L(r, \infty, f) = \max_{|z|=r} \ln^+ |f(z)|,$$

$$L(r, a, f) = L\left(r, \infty, \frac{1}{f-a}\right), \quad a \neq \infty,$$

$$\beta(a, f) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{L(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

Величина $\beta(a, f)$ наз. величиной отклонения мероморфной функции $f(z)$ от числа a, а множество $\Omega(f) = \{a : \beta(a, f) > 0\}$ наз. множеством положительных отклонений мероморфной функции $f(z)$; $D(f) \subseteq \Omega(f)$. Доказано, что если $g(z)$ — целая функция конечного порядка ρ, то

$$\beta(\infty, g) \leqslant \begin{cases} \dfrac{\pi\rho}{\sin \pi\rho}, & \text{если } 0 < \rho < 0{,}5, \\ \pi\rho, & \text{если } \rho \geqslant 0{,}5. \end{cases}$$

Справедлива также теорема: если мероморфная функция $f(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то а) множество $\Omega(f)$ не более чем счетно; б) для каждого a

$$\beta(a, f) \leqslant \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & \text{если } 0 < \lambda < 0{,}5, \\ \pi\lambda, & \text{если } \lambda \geqslant 0{,}5; \end{cases}$$

в) при любом α, $0{,}5<\alpha\leqslant 1$.

$$\sum_{(a)} \beta^{\alpha}(a, f) \leqslant K(\lambda, \alpha),$$

где постоянная $K(\lambda, \alpha)$ зависит лишь от λ и α;

г) $\Omega(f) \subseteq V(f)$.

Кроме этого, существуют мероморфные функции бесконечного нижнего порядка, для к-рых множество $\Omega(f)$ имеет мощность континуума. Множество $\Omega(f)$ (подобно $V(f)$) для каждой мероморфной функции $f(z)$ имеет нулевую логарифмич. емкость. Следующая теорема характеризует отличия в свойствах величин $\delta(a, f)$ и $\beta(a, f)$: для любого λ, $0\leqslant\lambda<\infty$, существует мероморфная функция $f_{\lambda}(z)$ нижнего порядка λ, для к-рой при нек-ром a выполняются соотношения

$$\delta(a, f)=0 \quad \text{и} \quad \beta(a, f)\geqslant 1.$$

Исключительные значения мероморфных функций в смысле Пикара и Бореля. Значение a наз. *исключительным значением* мероморфной функции $f(z)$ в смысле Пикара, если число a-точек $f(z)$ при $\{|z|<\infty\}$ конечно. Значение a наз. исключительным значением $f(z)$ в смысле Бореля, если $n(r, a, f)$ при $r\to\infty$ растет в определенном смысле медленнее $T(r, f)$. Каждая мероморфная функция, отличная от постоянной, не может иметь более двух борелевских (а значит, и пикаровских) исключительных значений.

Успешно развивается теория распределения значений голоморфных отображений комплексных многообразий — многомерный аналог теории Неванлинны (см. [6], [7]), а также теория распределения значений минимальных поверхностей (см. [9], [10]).

Распределение значений функций, мероморфных в круге. Выше описана теория распределения значений мероморфных во всей открытой плоскости функций; это параболич. случай. Теория роста и распределения значений построена также и для случая гиперболического, т. е. когда $f(z)$ является функцией, мероморфной в единичном круге $\{|z|<1\}$ (см. [1], [8]). При этом функции $N(r, a, f)$, $m(r, a, f)$, $L(r, a, f)$ и $T(r, f)$ определяются для каждого r, $0\leqslant r<1$, точно так же, как и в параболическом случае. Дефект $f(z)$ в точке a в смысле Неванлинны и в смысле Валирона определяется соответственно так:

$$\delta(a, f)=\varliminf_{r\to 1}\frac{m(r, a, f)}{T(r, f)},$$

$$\Delta(a, f)=\varlimsup_{r\to 1}\frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

А величина

$$\beta(a, f)=\varliminf_{r\to 1}\frac{L(r, a, f)}{T(r, f)}$$

наз. величиной отклонения $f(z)$ относительно значения a.

Пусть $D(f)=\{a: \delta(a, f)>0\}$,

$$V(f)=\{a: \Delta(a, f)>0\} \text{ и } \Omega(f)=\{a: \beta(a, f)>0\}.$$

Основные положения параболич. случая о величинах $\delta(a, f)$, $\Delta(a, f)$ и $\beta(a, f)$, а также о структуре множеств $D(f)$, $V(f)$ и $\Omega(f)$ сохраняются и в гиперболич. случае, но не для всех функций, а лишь для функций с быстро растущей (в определенном смысле) при $r\to 1$ характеристикой $T(r, f)$.

Лит.: [1] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [2] Хейман У.-К., Мероморфные функции, пер. с англ., М., 1966; [3] Аракелян Н. У., «Докл. АН СССР», 1966, т. 170, № 5, с. 999—1002; [4] Гольдберг А. А., Островский И. В., Распределение значений мероморфных функций, М., 1970; [5] Петренко В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 6, с. 1330—1348; 1970, т. 34, № 1, с. 31—56; [6] Гриффитс Ф., Кинг Дж., Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий, пер. с англ., М., 1976; [7] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [8] Петренко В. П., Рост мероморфных функций, Хар., 1978; [9] его же, «Докл. АН СССР», 1981, т. 256, № 1, с. 40—42; [10] Beckenbach E. F., Hutchison G. A., «Pacific J. Math.», 1969, v. 28, № 1, p. 17—47. *В. П. Петренко.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЯ какой-либо случайной величины X — функция действительного переменного x, принимающая при каждом x значение, равное вероятности неравенства $X<x$.

Каждая Р. ф. $F(x)$ обладает следующими свойствами:
1) $F(x')\leqslant F(x'')$ при $x'<x''$;
2) $F(x)$ непрерывна слева при каждом x;
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0,\ \lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$

(иногда Р. ф. определяют как вероятность неравенства $X\leqslant x$, и тогда она оказывается непрерывной справа).

В математич. анализе Р. ф. называют любую функцию, для к-рой имеют место свойства 1)—3). Существует взаимно однозначное соответствие между распределениями вероятностей P_F на σ-алгебре $\mathscr{B}$ борелевских подмножеств числовой прямой $\mathbb{R}^1$ и Р. ф. Это соответствие определяется формулой: для любого интервала $[a,\ b)$

$$P_F([a,\ b))=F(b)-F(a).$$

Каждая функция F, обладающая свойствами 1)—3), может рассматриваться как Р. ф. нек-рой случайной величины X (напр., случайной величины $X(x)=x$, заданной на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^1,\ \mathscr{B},\ P_F)$).

Всякая Р. ф. может быть однозначно представлена в виде суммы

$$F(x)=a_1F_1(x)+a_2F_2(x)+a_3F_3(x),$$

где $a_1,\ a_2,\ a_3$ — неотрицательные числа, сумма к-рых равна 1, а $F_1,\ F_2,\ F_3$ — Р. ф. такие, что $F_1(x)$ абсолютно непрерывна:

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x} p(z)\,dz,$$

$F_2(x)$ — «ступенчатая функция»:

$$F_2(x)=\sum\nolimits_{x_k<x} p_k,$$

где x_k — точки скачков $F(x)$, а $p_k>0$ пропорциональны размеру этих скачков; $F_3(x)$ — «сингулярная» компонента — непрерывная функция, производная к-рой почти всюду равна нулю.

Пример. Пусть $X_k,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$— бесконечная последовательность независимых случайных величин, принимающих значения 1 и 0 с вероятностями $0<p_k\leqslant 1/2$ и $q_k=1-p_k$, соответственно. Пусть

$$X=\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{2^k},$$

тогда

1) если $p_k=q_k=1/2$ при всех k, то X имеет абсолютно непрерывную Р. ф. (с $p(x)=1$ для $0\leqslant x\leqslant 1$, т. е. X равномерно распределена на $[0,\ 1]$);

2) если $\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} p_k<\infty$, то X имеет «ступенчатую» Р. ф. (она имеет скачки во всех двоично-рациональных точках отрезка $[0,\ 1]$);

3) если $\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} p_k=\infty,\ p_k\to 0$ при $k\to\infty$, то X имеет «сингулярную» Р. ф.

Этот пример является иллюстрацией одной теоремы П. Леви (P. Lévy), в соответствии с к-рой предел бесконечной свертки дискретных Р. ф. может содержать только одну из указанных выше компонент.

«Расстояние» между распределениями P и Q на числовой прямой часто определяют в терминах соответствующих Р. ф. F и S, полагая, напр.,

$$\rho_1(P,\ Q)=\sup_x |F(x)-S(x)|$$

или

$$\rho_2(P,\ Q)=\mathrm{Var}\,(F(x)-S(x))$$

(см. *Распределений сходимость, Леви метрика, Характеристическая функция*).

Р. ф. наиболее употребительных распределений вероятностей (напр., нормального, биномиального, пуассоновского распределений) табулированы.

Для проверки гипотез о Р. ф. F по результатам независимых наблюдений используют так или иначе измеренное отклонение F от эмпирической Р. ф. (см. *Колмогорова критерий, Колмогорова — Смирнова критерий, Крамера — Мизеса критерий*).

Понятие Р. ф. естественным образом распространяется на многомерный случай, но многомерные Р. ф. значительно менее употребительны, чем одномерные.

О приближенном представлении Р. ф. см. *Грама — Шарлье ряд, Эджворта ряд, Предельные теоремы*.

Лит.: [1] Крамер Г., Случайные величины и распределения вероятностей, пер. с англ., М., 1947; [2] его же, Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967; [4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.
Ю. В. Прохоров.

РАССЕИВАНИЕ ВЫБОРКИ — одна из скалярных характеристик разброса выборки на прямой относительно какой-либо конкретной точки, называемой центром рассеивания, численно равная сумме квадратов отклонений значений случайных величин, образующих выборку, от центра рассеивания. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же закону, и пусть точка x, $x \in \mathbb{R}^1$, выбрана в качестве центра рассеивания. Тогда величина

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}(X_i-x)^2$$

наз. рассеиванием выборки $X_1, \ldots, X_n$ относительно центра рассеивания x. Так как для любого x

$$S_n(x)=S_n(\overline{X})+n(\overline{X}-x)^2 \geq S_n(\overline{X}),$$

где $\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n)$, то Р. в. будет минимальным, если в качестве центра рассеивания выбрать $\overline{X}$. Малые значения Р. в. говорят о сосредоточенности элементов выборки около центра рассеивания, и наоборот: большие значения Р. в. говорят о большой разбросанности элементов выборки. Понятие Р. в. естественным образом распространяется на многомерные выборки.

Лит.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.
М. С. Никулин.

РАССЕИВАНИЯ ЭЛЛИПСОИД — эллипсоид в пространстве реализаций случайного вектора, характеризующий сосредоточенность его распределения вероятностей возле нек-рого заданного вектора в терминах моментов 2-го порядка. Пусть случайный вектор X, принимающий значения $x=(x_1, \ldots, x_n)^T$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, имеет невырожденную ковариационную матрицу B. В таком случае для любого фиксированного вектора a, $a \in \mathbb{R}^n$, в пространстве реализаций $\mathbb{R}^n$ можно определить эллипсоид

$$(x-a)^T B^{-1}(x-a)=n+2, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

к-рый наз. эллипсоидом рассеивания распределения вероятностей случайного вектора X относительно вектора a, или эллипсоидом рассеивания случайного вектора X. В частности, если $a=\mathsf{E}X$, то Р. э. является геометрич. характеристикой концентрации распределения вероятностей случайного вектора X около его математич. ожидания $\mathsf{E}X$.

В задаче статистич. оценивания неизвестного n-мерного параметра θ с помощью понятия Р. э. можно ввести отношение частичного упорядочивания на множестве $\tau=\{T\}$ всех несмещенных оценок T параметра θ, имеющих невырожденные ковариационные матрицы, считая, что из двух оценок T_1, $T_2 \in \tau$ предпочтительней является оценка T_1, если Р. э. оценки T_1 лежит целиком внутри Р. э. оценки T_2. Именно в этом смысле несмещенные эффективные оценки неизвестного векторного параметра являются наилучшими, то есть Р. э. несмещенной эффективной оценки лежит внутри Р. э. любой другой несмещенной оценки. См. *Рао — Крамера неравенство*, *Эффективная статистика*, *Информации количество*.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [3] Ибрагимов И. С., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979. *М. С. Никулин.*

РАССЕЛА ПАРАДОКС — см. *Антиномия.*

РАССЕЯНИЯ МАТРИЦА, S-матрица,— совокупность величин (матрица), описывающая процесс перехода квантовомеханич. систем из одних состояний в другие при их взаимодействии (рассеянии).

При рассеянии система переходит из одного квантового состояния, начального (его можно отнести к моменту времени $t=-\infty$), в другое, конечное ($t=+\infty$). Если обозначить набор квантовых чисел, характеризующих начальное состояние, через i, а конечное — через j, то амплитуда рассеяния (квадрат модуля к-рой определяет вероятность данного рассеяния) может быть записана как S_{ij}. Совокупность амплитуд рассеяния образует таблицу с двумя входами, к-рая и наз. матрицей рассеяния S.

Нахождение Р. м.— основная задача квантовой механики и квантовой теории поля. Р. м. содержит всю информацию о поведении системы, если известны не только численные значения, но и аналитич. свойства ее элементов; в частности, ее полюсы определяют связанные состояния системы (а следовательно, дискретные уровни энергии). Из основных принципов квантовой теории следует важнейшее свойство Р. м.— ее унитарность.

По материалам ст. Матрица рассеяния в БСЭ-3.

РАССЛОЕНИЕ — непрерывное сюръективное отображение $\pi: X \to B$ пространства X на пространство B (следует различать Р. как процесс и Р. как объект (X, π, B)). При этом X наз. пространством Р., B — базой Р., π — проекцией Р., $\pi^{-1}(b)$ — слоем над b. Р. представляет собой объединение слоев $\pi^{-1}(b)$, параметризованных базой B и склеенных топологией пространства X. Напр., расслоение-произведение $\pi: B \times F \to B$, где π — проекция на первый сомножитель; расслоение-база $\pi: B \to B$, где $\pi=id$, X отождествляется с B; расслоение над точкой* , где X отождествляется с (единственным) пространством F.

Сечением Р. наз. непрерывное отображение $s: B \to X$ такое, что $\pi s=id$.

Ограничением расслоения $\pi: X \to B$ на подмножество $A \subset B$ наз. расслоение $\pi': X' \to A$, где $X^1=\pi^{-1}(A)$ и $\pi'=\pi|_{X'}$. Обобщением операции ограничения является построение *индуцированного расслоения.*

Отображение $F: X \to X'$ наз. морфизмом расслоения $\pi: X \to B$ в расслоение $\pi': X' \to B'$, если оно переводит слои в слои, т. е. если для каждой точки $b \subset B$ существует такая точка $b' \in B'$, что $F(\pi^{-1}(b)) \subset \pi'^{-1}(b')$. Отображение F определяет согласно формуле $f(b)=\pi' F(\pi^{-1}(b))$ нек-рое отображение $f: B \to B'$; F является *накрытием* f и имеет место равенство $\pi' \circ F = f \circ \pi$; ограничения $F_b : \pi^{-1}(b) \to (\pi')^{-1}(b')$ суть отображения слоев. Если $B = B'$ и $f = \mathrm{id}$, то морфизм F наз. B-морфизмом. Р. и их морфизмы образуют категорию, содержащую в качестве подкатегории Р. над B и их B-морфизмы.

Всякое сечение расслоения $\pi : X \to B$ представляет собой B-морфизм $s : B \to X$ расслоения (B, id, B) в расслоение (X, π, B). Если $A \subset B$, то канонич. вложение $i : \pi^{-1}(A) \to B$ является морфизмом расслоения $\pi|_A$ в расслоение π.

Гомеоморфное отображение F наз. изоморфизмом Р., изоморфное расслоению-произведению, наз. тривиальным Р., а изоморфизм $\theta : X \to B \times F$ тривиализацией π.

Если каждый слой $\pi^{-1}(b)$ расслоения гомеоморфен пространству F, то расслоение π наз. расслоением со слоем F. Напр., в любом локально тривиальном Р. над связной базой B все слои $\pi^{-1}(b)$ гомеоморфны, и в качестве F можно взять любое $\pi^{-1}(b_0)$; таким образом, определены гомеоморфизмы $\varphi_b : F \to \pi^{-1}(b)$.

М. И. Войцеховский.

G-РАССЛОЕНИЕ, расслоение со структурной группой,— обобщение понятия прямого произведения двух топологич. пространств.

Пусть G — топологич. группа, а X — эффективное правое G-пространство, т. е. топологич. пространство с заданным правым действием группы G таким, что $xg = x$ влечет $g = 1$, $x \in X$, $g \in G$. Пусть $X^* \subset X \times X$ — подмножество таких пар (x, x'), что $x' = xg$ для некрого $g \in G$, $B = X/_G$ — пространство орбит и $p : X \to B$ — отображение, сопоставляющее с каждой точкой ее орбиту. Если отображение $X^* \to G : (x, xg) \to g$ непрерывно, то набор $\xi = (X, p, B)$ наз. главным расслоением со структурной группой G.

Пусть F — левое G-пространство. Топологич. пространство $X \times F$ снабжается правым действием группы G по формуле $(xf)g = (xg, g^{-1}f)$, $f \in F$. Композиция $X \times F \xrightarrow{\mathrm{pr}_X} X \xrightarrow{p} B$ индуцирует отображение $X_F = (X \times F)\,G \xrightarrow{p_F} B$ (здесь X_F — пространство орбит действия G на $X \times F$). Набор (X_F, p_F, B, F) наз. расслоением со структурной группой, ассоциированным с главным расслоением ξ, а набор (X_F, p_F, F, ξ) — расслоением со слоем F, базой B и структурной группой G. Таким образом, главное расслоение со структурной группой является частью структуры любого расслоения со структурной группой, и оно однозначно определяет расслоение для любого левого G-пространства F.

Если $\xi = (X, p, B)$, $\xi' = (X', p', B')$ — два главных расслоения со структурной группой G, то морфизмом $\xi \to \xi'$ наз. отображение G-пространств $h : X \to X'$. Отображение h индуцирует отображение $f : B \to B'$. Главное расслоение со структурной группой наз. тривиальным, если оно изоморфно расслоению следующего вида:

$$(B \times G,\ \mathrm{pr}_B,\ B),\ (b,\ g)\,g' = (b,\ gg'),\ b \in B,\ g, g' \in G.$$

Пусть (X, p, B) — главное расслоение и $f : B' \to B$ — непрерывное отображение произвольного топологич. пространства B' в B. Пусть $X' \subset B' \times X$ — подмножество таких пар (b, x), что $f(b) = p(x)$. Проекция $\mathrm{pr}_{B'} : B' \times X \to B'$ индуцирует отображение $p' : X' \to B'$. Пространство X' обладает естественной структурой правого G-пространства, и тройка (X', p', B') представляет собой главное расслоение, оно индуцировано расслоением (X, p, B) с помощью отображения f и наз. индуцированным расслоением. Если $f : B' \to B$ — включение подпространства, то (X', p', B') наз. ограничением (X, p, B) над подпространством B'.

Главное расслоение со структурной группой наз. локально тривиальным, если его ограничение на нек-рую окрестность любой точки базы B тривиально. Для широкого класса случаев требование локальной тривиальности излишне (напр., если G — компактная группа Ли, X — гладкое G-многообразие). Поэтому часто термин «расслоение» со структурной группой используется в смысле локально тривиального расслоения (или косого произведения).

Пусть (X_F, p_F, F, ξ), (X'_F, p'_F, F, ξ') пара расслоений с одной структурной группой и одним G-пространством в качестве слоя. Для морфизма $h: \xi \to \xi'$ главных расслоений отображение $h \times \mathrm{id}: X \times F \to X' \times F$ индуцирует непрерывное отображение $\varphi: X_F \to X'_F$, и пара (h, φ) наз. морфизмом расслоений со структурной группой $(X_F, p_F, F, \xi) \to (X'_F, p'_F, F, \xi')$.

Локально тривиальное расслоение $\eta = (X_F, p_F, F, \xi)$ допускает следующее описание, лежащее в основе другого, также общепринятого определения расслоения со структурной группой. Пусть $U = \{u_\alpha\}$ — открытое покрытие базы B для к-рого ограничение η на u_α при всех α тривиально. Выбор тривиализации и их сравнение на пересечениях $u_\alpha \cap u_\beta$ приводит к непрерывным функциям (наз. функциями перехода) $\{g_{\alpha\beta}\}$, $g_{\alpha\beta}: u_\alpha \cap u_\gamma \to G$. В пересечениях трех окрестностей $u_\alpha \cap u_\beta \cap u_\gamma$ имеет место равенство $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} = 1 \in G$, а выбор других тривиализаций над каждой окрестностью приводит к новым функциям $g'_{\alpha\beta} = h_\alpha g_{\alpha\beta} h_\beta^{-1}$. Таким образом, функции $\{g_{\alpha\beta}\}$ образуют одномерный коцикл в смысле Александрова — Чеха с коэффициентами в пучке ростков G-значных функций (коэффициенты неабелевы), и локально тривиальное расслоение определяет этот коцикл с точностью до кограницы.

Лит.: [1] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [2] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953. *А. Ф. Харшиладзе.*

РАССЛОЕННАЯ ВЫБОРКА — выборка, разбитая на несколько выборок меньших объемов по нек-рым отличительным признакам. Пусть каждый элемент какой-то выборки объема $N \geqslant 2$ обладает одним и только одним из $k \geqslant 2$ возможных признаков. В таком случае исходную выборку можно разбить на k выборок объемов $n_1, \ldots, n_k$ соответственно $(n_1 + \ldots + n_k = N)$:

$$\begin{gathered} X_{11}, \ldots, X_{1n_1}, \\ X_{21}, \ldots, X_{2n_2}, \\ \cdots\cdots \\ X_{k1}, \ldots, X_{kn_k}, \end{gathered}$$

исходя из принципа: в i-ю выборку $X_{i1}, \ldots, X_{ini}$ отнесены только те элементы исходной выборки, к-рые обладают i-м признаком. В результате такого разбиения первоначальная выборка оказывается как бы расслоенной на k слоев $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$, $i = 1, \ldots, k$, причем именно i-й слой содержит информацию об i-м признаке. К понятию Р. в. приходят, наблюдая, напр., реализации компоненты X двумерной случайной величины (X, Y), вторая компонента к-рой Y подчиняется дискретному распределению.

Лит.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967. *М. С. Никулин.*

РАССЛОЕННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ объектов категории — частный случай понятия (обратного или проективного) предела. Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная категория и пусть заданы морфизмы $\alpha: A \to C$, $\beta: B \to C$ из $\mathfrak{K}$. Объект D, вместе с морфизмами $\varphi: D \to A$ $\psi: D \to B$, наз. расслоенным произведением объектов A и B (над α и β), если $\varphi\alpha=\psi\beta$ и для любой пары морфизмов γ: $X \to A$, δ: $X \to B$, для которой $\gamma\alpha=\delta\beta$, существует такой единственный морфизм $\xi : X \to D$, что $\xi\varphi=\gamma$, $\xi\psi=\delta$. Коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\psi} & B \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A & \xrightarrow[\alpha]{} & C \end{array}$$

часто наз. универсальным, или декартовым, квадратом. Объект D вместе с морфизмами φ и ψ есть предел диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A & \xrightarrow[\alpha]{} & C\,. \end{array}$$

Р. п. объектов A и B над α и β обозначают одним из следующих способов:

$$A\underset{C}{\times}B,\quad A\underset{\alpha,\,\beta}{\times}B,\quad A\underset{\alpha\ \beta}{\prod}B.$$

Р. п., если оно существует, определено однозначно с точностью до изоморфизма.

В категории с конечными произведениями и ядрами пар морфизмов Р. п. объектов A и B над α и β строится следующим образом. Пусть $P=A\times B$ — произведение A и B с проекциями π_1 и π_2 и пусть (D, μ) — ядро пары морфизмов $\pi_1\alpha$, $\pi_2\beta : P \to C$. Тогда D, вместе с морфизмами $\mu\pi_1=\varphi$ и $\mu\pi_2=\psi$, есть Р. п. A и B над α и β. Во многих категориях структуризованных множеств D является подмножеством произведения $(A\times\times B)$, состоящим из всех таких пар (a, b), где $a\in A$, $b\in B$, для к-рых $a\alpha=b\beta$. *М. Ш. Цаленко.*

РАССЛОЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО — тотальное пространство *расслоения*. *М. И. Войцеховский.*

РАСТЯГИВАЮЩЕЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — дифференцируемое отображение f замкнутого многообразия M на себя, под действием к-рого длины всех касательных векторов (в смысле какой-нибудь, а тогда и любой, римановой метрики) растут с экспоненциальной скоростью, т. е. существуют такие константы $C>0$ и $\lambda>1$, что для всех $X\in TM$ и всех $n>0$

$$\| Tf^{(n)}(X)\| \geqslant C\lambda^n \| X \|.$$

Имеется также вариант понятия Р. о. без условия дифференцируемости, охватывающий, в частности, многие ранее изучавшиеся одномерные примеры. Свойства Р. о. аналогичны свойствам *У-систем* и отчасти даже проще (так, Р. о. класса C^2 всегда имеет конечную инвариантную меру, задаваемую в терминах локальных координат положительной плотностью). *Д. В. Аносов.*

РАСХОДЯЩАЯСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность точек топологич. пространства, не имеющая предела. Из всякой расходящейся последовательности метрич. компакта можно выделить сходящуюся подпоследовательность. В классе Р. п. нормированных пространств выделяют бесконечно большие последовательности, т. е. такие последовательности $\{x_n\}$ точек этих пространств, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\infty$. Понятие Р. п. обобщается на кратные последовательности и на направленные (частично упорядоченные) множества. *Л. Д. Кудрявцев.*

РАСХОДЯЩИЙСЯ ИНТЕГРАЛ — понятие, противоположное понятию сходящегося интеграла (см. *Несобственный интеграл*). Напр., если функция определена на конечном или бесконечном промежутке $[a, b)$, $-\infty<a\leqslant b\leqslant\infty$, если для любого $\eta\in[a, b]$ она интегрируема на отрезке $[a, \eta]$ и не существует конечного

предела

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\, dx,$$

то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$ расходится. В случае, когда

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\, dx = +\infty \text{ или } -\infty,$$

говорят, что Р. и. $\int_a^b f(x) dx$ равен соответственно $+\infty$ или $-\infty$.

Л. Д. Кудрявцев.

РАСХОДЯЩИЙСЯ РЯД — ряд, у к-рого последовательность частичных сумм не имеет конечного предела. Напр., ряды

$$1+1+1+1+1+\ldots,$$
$$1-1+1-1+1-\ldots,$$
$$1-2+3-4+5-\ldots,$$
$$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots \quad (|x| \geqslant 1),$$

расходятся.

Р. р. стали появляться в работах математиков 17—18 вв. Л. Эйлер (L. Euler) первым пришел к выводу, что нужно ставить вопрос, не чему равна сумма, а как определить сумму Р. р., и нашел подход к решению этого вопроса, близкий к современному. Р. р. до кон. 19 в. не находили применения и были почти забыты. Накопление к кон. 19 в. различных фактов математич. анализа вновь пробудило интерес к Р. р. Стал выдвигаться вопрос о возможности суммирования рядов в нек-ром смысле, отличном от обычного.

П р и м е р ы. 1) Если перемножить два ряда

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \text{ и } \sum_{n=0}^\infty b_n,$$

сходящихся соответственно к A и B, то полученный в результате перемножения ряд

$$\sum_{n=0}^\infty c_n = \sum_{n=0}^\infty (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) \qquad (1)$$

может оказаться расходящимся. Однако если сумму ряда (1) определить не как предел частичных сумм s_n, а как

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}, \qquad (2)$$

то в этом смысле ряд (1) всегда будет сходиться (т. е. предел в (2) будет существовать) и его сумма в этом смысле равна $C = AB$.

2) Ряд Фурье функции $f(x)$, непрерывной в точке x_0 (или имеющей разрыв 1-го рода), может расходиться в этой точке. Если же сумму ряда определить по формуле (2), то в этом смысле ряд Фурье такой функции всегда будет сходиться и его сумма в этом смысле равна $f(x_0)$ (или соответственно $[f(x_0+0)+f(x_0-0)]/2$, если x_0 — точка разрыва 1-го рода).

3) Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^\infty z_n \qquad (3)$$

сходится для $|z|<1$ к сумме $1/(1-z)$ и расходится для $|z| \geqslant 1$. Если сумму ряда определить как

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^\infty \frac{s_n x^n}{n!}, \qquad (4)$$

где s_n — частичные суммы ряда (3), то в этом смысле ряд (3) будет сходиться для всех z, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} z < 1$, причем его суммой будет функция $1/(1-z)$.

Для обобщения понятия суммы ряда в теории Р. р. рассматривают нек-рую операцию или правило, в результате к-рого Р. р. ставится в соответствие определенное число, наз. его суммой (в этом определении). Такое правило наз. *суммирования методом*. Так, правило, описанное в примере 1), наз. методом суммирования средних арифметических (см. *Чезаро методы суммирования*). Правило, определяемое в примере 2), наз. *Бореля методом суммирования*.

См. также *Суммирование расходящихся рядов*.

Лит.: [1] Borel E., Leçons sur les séries divergentes, P., 1928; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [3] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [4] Pcyerimhoff A., Lectures on summability, B., 1969; [5] Knopp K., Theory and application on infinite series, N. Y., 1971; [6] Zeller K., Beekmann V., Theory der Limitierungsverfahren, B.— Hdlb. — N. Y., 1970. *И. И. Волков.*

РАСШИРЕНИЕ алгебры Ли S с ядром A — алгебра Ли G с эпиморфизмом $\varphi : G \rightarrow S$, ядром к-рого служит идеал $A \subset G$, это равносильно заданию точной последовательности

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} S \longrightarrow 0.$$

Р. наз. расщепимым, если существует подалгебра $S_1 \subset S$ такая, что $G = S_1 \oplus A$ (прямая сумма модулей). Тогда φ индуцирует изоморфизм $S_1 \approx S$, и потому определено действие алгебры S на A дифференцированиями. Обратно, по любому гомоморфизму $\alpha : S \rightarrow \operatorname{Der} A$, где $\operatorname{Der} A$ — алгебра дифференцирований алгебры A, однозначно строится расщепимое расширение $S \oplus A$ с законом умножения

$$[(s, a), (s', a')] = ([s, s'], \alpha(s) a' - \alpha(s') a + [a, a']).$$

Для конечномерных алгебр Ли над полем характеристики 0 справедлива теорема Леви: если S полупроста, то всякое расширение алгебры S расщепимо.

Из нерасщепимых Р. наиболее изучены абелевы Р., то есть Р. с абелевым ядром A. В этом случае действие алгебры G на A индуцирует действие алгебры $G/A \cong S$ на A, то есть A есть S-модуль. Для алгебр Ли над полем всякое абелево Р. алгебры S, ядром к-рого служит S-модуль A, имеет вид $S \oplus A$ со следующим законом умножения:

$$[(s, a), (s', a')] = ([s, s'], \alpha(s) a' - \alpha(s') a + \psi(s, s')),$$

где ψ — нек-рое линейное отображение $S \wedge S \rightarrow A$. Тождество Якоби равносильно тому, что ψ — двумерный коцикл (см. *Когомологии алгебр Ли*). Р., к-рым эквивалентны когомологичные коциклы, эквивалентны в естественном смысле; в частности, Р. расщепимо тогда и только тогда, когда ψ когомологичен нулю. Таким образом, абелевы Р. алгебры S с ядром A описываются группой когомологий $H^2(S, A)$. К случаю абелевых Р. сводится изучение Р. с разрешимым ядром.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964. *А. К. Толпыго.*

РАСШИРЕНИЕ ассоциативной алгебры R над коммутативным кольцом K — гомоморфизм $\varphi : S \rightarrow R$ K-алгебры S на алгебру R. Если $\operatorname{Ker}\varphi = I$ — алгебра с нулевым умножением, то Р. наз. сингулярным. В этом случае на I естественным образом вводится структура R-модуля. На множестве всех Р. ассоциативной алгебры R с ядром I вводится отношение эквивалентности (так же, как для групп, модулей и т. д.), и множество классов эквивалентных Р. обозначается $F(R, I)$. Если алгебра R является K-проективной, то алгебра S разложима в прямую сумму K-модулей $S = I + R$, и элементы алгебры S можно записать в виде пар (u, r), $u \in I$, $r \in R$, к-рые перемножаются по правилу

$$(u_1, r_1)(u_2, r_2) = (u_1 r_2 + r_1 u_2 + a(r_1, r_2), r_1 r_2),$$

где $a : R \otimes R \rightarrow I$. Ассоциативность умножения накладывает ограничения на функцию a, превращая ее в коцикл. Сопоставление Р. его коцикла устанавливает изоморфизм K-модуля $F(R, I)$ со второй группой когомологий $H^2(R, I)$ алгебры R с коэффициентами в I.

Р. алгебры R наз. также алгебру, содержащую R. Такие Р. часто связаны с конкретной конструкцией (многочлены над R, локализация R, кольцо частных алгебры R и т. д.). См. также *Расширение* поля.

Лит.: [1] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [2] Hochschild G., «Ann. Math.», 1945, v. 46, p. 58—67.

В. Е. Говоров.

РАСШИРЕНИЕ группы — группа, содержащая данную группу в качестве нормального делителя. Обычно фиксируется и факторгруппа, т. е. расширением группы A при помощи группы B наз. группа G, содержащая A в качестве нормального делителя и такая, что $G/A \cong B$, или точная последовательность

$$E \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\gamma} B \longrightarrow E. \qquad (1)$$

Иногда группу G наз. расширением группы B при помощи группы A (см., напр., [2]) или эпиморфизм $\gamma: G \twoheadrightarrow B$ — Р. группы B (см., [1]). Наконец, точная последовательность (1) может называться как Р. группы A при помощи группы B, так и Р. группы B при помощи группы A. Р. группы A при помощи группы B всегда существует, однако группы A и B определяют его неоднозначно. Необходимость описания всех Р. группы A при помощи группы B вызвана как потребностями самой теории групп, так и ее приложениями. Такое описание естественно проводить с точностью до эквивалентности. Два Р. группы A при помощи группы B наз. эквивалентными, если коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E. \end{array}$$

Произвольное Р. (1) определяет путем трансформирования элементами группы G гомоморфизм

$$\alpha: G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, A, \quad \alpha(g)\, a = gag^{-1},$$

для к-рого $\alpha(A)$ содержится в группе $\mathrm{In}\, A$ внутренних автоморфизмов группы A, и, следовательно, определяет гомоморфизм

$$\beta: B \longrightarrow \mathrm{Aut}\, A/\mathrm{In}\, A.$$

Тройку (A, B, β) наз. абстрактным ядром Р. Фиксируя Р. (1), выбирают для каждого $b \in B$ представителя $u(b) \in G$ так, чтобы удовлетворялись условия $\gamma u(b) = b$ и $u(1) = 1$. Тогда сопряжение элементом $u(b)$ порождает автоморфизм $\varphi(b)$ группы A:

$$\varphi(b)\, a = u(b)\, a\, u(b)^{-1} = a^b.$$

Произведение $u(b_1)\, u(b_2)$ равно $u(b_1 b_2)$ с точностью до множителя $f(b_1, b_2) \in A$:

$$u(b_1)\, u(b_2) = f(b_1, b_2)\, u(b_1 b_2).$$

Легко проверяется, что введенные функции должны удовлетворять условиям

$$[\varphi(b_1)\, f(b_2, b_3)]\, f(b_1, b_2 b_3) = f(b_1, b_2)\, f(b_1 b_2, b_3), \qquad (2)$$

$$(a^{b_1})^{b_2} = (a^{f(b_1, b_2)})^{b_1 b_2}, \qquad (3)$$

где в равенстве (3) неявно присутствует функция $\varphi: B \to \mathrm{Aut}\, A$.

Задание групп A и B и функций $f: B \times B \to A$, $\varphi: B \to \mathrm{Aut}\, A$, удовлетворяющих условиям (2) и (3) и условиям нормализованности:

$$\varphi(1) = 1, \quad f(a, 1) = 1 = f(1, b),$$

определяет Р. (1) в следующем смысле. Множество

$$B_0(A, B, \varphi, f) \text{ пар } (a, b),\ a \in A,\ b \in B,$$

является группой относительно операции

$$(a, b)(a_1, b_1) = \left(aa_1^b f(b, b_1),\ bb_1\right).$$

Гомоморфизмы $a \mapsto (a, 1)$, $(a, b) \mapsto b$ задают Р.

Если задано абстрактное ядро (A, B, β), то всегда можно найти нормализованную функцию φ, удовлетворяющую условию (3). Естественно возникает функция f, однако условие (2) не всегда выполняется; в общем случае

$$f(b_2, b_3) f(b_1, b_2 b_3) = k(b_1, b_2, b_3) f(b_1, b_2) f(b_1 b_2, b_3),$$

где $k(b_1, b_2, b_3) \in A$. Функция $f: B \times B \to A$ наз. системой факторов, а функции $k: B \times B \times B \to A$ наз. препятствиями к Р. Если группа A абелева, то системы факторов составляют группу $Z_2(B, A)$ относительно их естественного сложения. Факторы, соответствующие полупрямым произведениям, составляют подгруппу $B_2(B, A)$ группы $Z_2(B, A)$. Факторгруппа $Z_2(B, A)/B_2(B, A)$ изоморфна второй группе когомологий группы B с коэффициентами в группе A. Аналогичную интерпретацию имеют препятствия в третьей группе когомологий.

Идея изучения Р. с помощью систем факторов появилась давно (О. Гёльдер, О. Hölder, 1893). Однако упоминание систем факторов обычно связано с именем О. Шрайера (О. Schreier), предпринявшего с их помощью первое систематич. изучение расширений. Р. Бэр (R. Baer) впервые начал инвариантные исследования Р. групп без участия систем факторов. Теория Р. групп явилась одним из истоков гомологич. алгебры.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1978; [3] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [4] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966. *В. Е. Говоров.*

РАСШИРЕНИЕ дифференциального поля F_0 — дифференциальное поле $F \supset F_0$ с таким множеством дифференцирований Δ, что ограничение Δ на F_0 совпадает с множеством дифференцирований, заданных на F_0. В свою очередь F_0 будет дифференциальным подполем поля F.

Пересечение любого множества дифференциальных подполей в F является дифференциальным подполем поля F. Для любого множества элементов $\Sigma \subset F$ существует наименьшее дифференциальное подполе в F, содержащее все элементы из Σ и F_0; оно обозначается $F_0\langle\Sigma\rangle$ и наз. расширением поля F_0, порожденным множеством Σ (при этом говорят, что Σ является множеством, или семейством, образующих расширения $F_0\langle\Sigma\rangle$ над F_0). Р. наз. конечно порожденным, если оно имеет конечное множество образующих, и наз. просто порожденным, если множество образующих состоит из одного элемента. Если F_1 и F_2 — два дифференциальных подполя в F, то подполе

$$F_1 F_2 = F_1\langle F_2\rangle = F_1(F_2) = F_2(F_1) = F_2\langle F_1\rangle,$$

являющееся дифференциальным подполем поля F, наз. композитом полей F_1 и F_2.

Пусть Θ — свободная коммутативная полугруппа с множеством свободных образующих Δ (ее элементы наз. дифференциальными операторами). Семейство $(\alpha_i)_{i \in I}$ элементов дифференциального поля F наз. дифференциально алгебраически зависимым над дифференциальным полем $F_0 \subset F$, если семейство $(\theta\alpha_i)_{i \in I, \theta \in \Theta}$ алгебраически зависимо над F_0, в противном случае семейство $(\alpha_i)_{i \in I}$ наз. дифференциально алгебраически независимым над F_0, или семейством дифференциальных неизвестных над F_0. Говорят, что элементы $(\alpha_i)_{i\in I}$ дифференциально сепарабельно зависимы над F_0, если семейство $(\theta\alpha_i)_{i\in I,\theta\in\Theta}$ сепарабельно зависимо над F_0; в противном случае семейство $(\alpha_i)_{i\in I}$ наз. дифференциально сепарабельно независимым над F_0.

Расширение F наз. дифференциально алгебраическим над F_0, если таковым является каждый элемент поля F. Аналогично, F наз. дифференциально сепарабельным над F_0, если таковым является каждый элемент из F. Для дифференциальных Р. справедлива теорема о примитивном элементе: пусть множество Θ независимо на F_0, тогда всякое конечно порожденное дифференциально сепарабельное расширение F поля F_0 порождается одним элементом.

Пусть J — нек-рое множество и $F_0[(y_{i\theta})_{i\in J,\theta\in\Theta}]$ — алгебра многочленов над F_0 от семейства неизвестных $(y_{j\theta})_{j\in J,\theta\in\Theta}$ с множеством индексов $J\times\Theta$. Любое дифференцирование $\delta\in\Delta$ поля F_0 единственным образом продолжается до дифференцирования кольца $F_0[(y_{j\theta})_{j\in J,\theta\in\Theta}]$, отображающего $y_{j\theta}$ в $y_{j\delta\theta}$. Это дифференциальное кольцо наз. кольцом дифференциальных многочленов от дифференциальных неизвестных y_j, $j\in J$, и обозначается $F_0\{(y_j)_{j\in J}\}$. Его дифференциальное поле частных (т. е. поле частных с продолжением дифференцирований) обозначается $F_0\langle(y)_{j\in J}\rangle$, а элементы этого поля наз. дифференциальными функциями над F_0 от дифференциальных неизвестных $(y_j)_{j\in J}$. Для обыкновенных дифференциальных полей имеет место аналог теоремы Люрота: пусть F — произвольное дифференциальное Р. дифференциального поля F_0, содержащееся в $F_0\langle u\rangle$, тогда F содержит элемент v такой, что $F=F_0\langle v\rangle$.

Для любого дифференциального поля F существует сепарабельное полуунивepсальное расширение, т. е. такое Р., в к-рое вкладывается всякое конечно порожденное сепарабельное Р. поля F. Более того, существует сепарабельное универсальное расширение U, т. е. такое Р., к-рое является полууниверсальным над каждым конечно порожденным Р. дифференциального поля F, содержащимся в U.

В теории дифференциальных полей нет объекта, соответствующего алгебраически замкнутому полю в теории полей. До нек-рой степени их роль играют стесненно замкнутые поля. Основным свойством такого поля F является то, что любая конечная система алгебраических дифференциальных уравнений и неравенств с коэффициентами в F, имеющая решение, рациональное над нек-рым Р. поля F, имеет решение, рациональное над F. Семейство $\eta=(\eta_j)_{j\in J}$ элементов из нек-рого Р. дифференциального поля F наз. стесненным над F, если существует дифференциальный многочлен $c\in F\{(y_j)_{j\in J}\}$ такой, что $c(\eta)\neq0$ и $c(\eta')=0$ для любой необщей дифференциальной специализации η' точки η над F. Расширение $\mathcal{G}$ поля F наз. стесненным над F, если любая конечная система элементов $\eta_1, \ldots, \eta_n\in\mathcal{G}$ является стесненной над F; это равносильно тому, что произвольный элемент из $\mathcal{G}$ является стесненным над F. Дифференциальное поле, не имеющее нетривиальных стесненных Р., наз. стесненно замкнутым. Пример такого поля — универсальное дифференциальное поле нулевой характеристики (универсальное Р. поля рациональных чисел Q). Для любого дифференциального поля нулевой характеристики существует стесненное замыкание, т. е. стесненно замкнутое Р. поля F, к-рое вкладывается в любое другое стесненно замкнутое Р. поля F.

Определение нормального Р. из теории полей может быть перенесено в дифференциальную алгебру различными способами. В дифференциальной теории Галуа основную роль играют сильно нормальные Р. Пусть U — фиксированное универсальное дифференциальное поле характеристики 0 с полем констант K. Все дифференциальные поля, встречающиеся ниже, предполагаются лежащими в U, а все упоминаемые далее изоморфизмы предполагаются дифференциальными изоморфизмами, т. е. коммутируют с операторами из множества Δ. Пусть F и $\mathcal{G}$ — дифференциальные поля, над к-рыми U универсально. Пусть C — поле констант поля $\mathcal{G}$. Изоморфизм σ поля $\mathcal{G}$ наз. сильным, если σ оставляет инвариантным каждый элемент из C, $\sigma\mathcal{G}\subset\mathcal{G}K$ и $\mathcal{G}\subset\sigma\mathcal{G}K$ (то есть $\mathcal{G}K=\mathcal{G}\sigma K$). Сильно нормальным Р. дифференциального поля F наз. конечно порожденное расширение $\mathcal{G}$ поля F такое, что всякий изоморфизм поля $\mathcal{G}$ над F является сильным. Сильно нормальные Р. являются стесненными. Множество сильных изоморфизмов сильно нормального расширения $\mathcal{G}$ над F имеет естественную структуру алгебраич. группы, определенной над полем K (обозначаемой через $G(\mathcal{G}/F)$). Это — *Галуа дифференциальная группа* расширения $\mathcal{G}/F$. Частным случаем сильно нормальных Р. являются расширения Пикара — Вессио, т. е. расширения, сохраняющие поле констант и получающиеся присоединением к полю F базиса решений какой-либо системы линейных однородных дифференциальных уравнений с коэффициентами из F. Для таких Р. группа Галуа $G(\mathcal{G}/F)$ является алгебраической матричной группой, т. е. алгебраич. подгруппой группы $\mathrm{GL}_K(n)$ для нек-рого целого $n>0$.

Дифференциальные группы Галуа типичных дифференциально-алгебраических Р. имеют следующий вид.

1) Пусть $\mathcal{G}=F\langle\alpha\rangle$, где α удовлетворяет системе уравнений $\delta_i\alpha=a_i\alpha$, $\delta_i\in\Delta$, $a_i\in F$, $i=1, \ldots, m$, и пусть поля констант полей $\mathcal{G}$ и F совпадают. Тогда $\mathcal{G}$ является расширением Пикара — Вессио поля F и дифференциальная группа Галуа $G(\mathcal{G}/F)$ является подгруппой мультипликативной группы поля K (то есть $\mathrm{GL}_K(1)=K^*$). Если элемент α трансцендентен над F, то $G(\mathcal{G}/F)\approx K^*$, а если α алгебраичен, то α удовлетворяет уравнению вида $y^d-b=0$, где $b\in F$ и $G(\mathcal{G}/F)=Z_d$ (группа корней из 1 степени d). Расширение $\mathcal{G}$ поля F наз. Р. при помощи экспоненты.

2) Пусть $\mathcal{G}=F\langle\alpha\rangle$, где α удовлетворяет системе уравнений $\delta_i\alpha=a_i$, $\delta_i\in\Delta$, $a_i\in F$, $i=1, \ldots, m$ (такой элемент α наз. примитивным над F). И пусть поле констант поля $F\langle\alpha\rangle$ совпадает с C. Если $\alpha\notin F$, то α трансцендентен над F. Полученное Р. является расширением Пикара — Вессио, и группа Галуа $G(F\langle\alpha\rangle/F)$ изоморфна аддитивной группе поля K. Такие Р. наз. расширениями при помощи интеграла.

3) Пусть g_2, g_3 — элементы поля C такие, что $g_2^3-27g_3^2\neq0$. Элемент $\alpha\in U$ наз. вейерштрассовым над F, если α удовлетворяет системе уравнений $(\delta_i\alpha)^2-a_i^2(4\alpha^3-g_2\alpha-g_3)$; $\delta_i\in\Delta$, $a_i\in F$, $1\leqslant i\leqslant m$. Расширение $\mathcal{G}=F\langle\alpha\rangle$ является сильно нормальным над F, однако, если α трансцендентен над F, оно не является расширением Пикара — Вессио. Имеется мономорфизм

$$c:G\left(F\langle\alpha\rangle/F\right)\longrightarrow W_K,$$

где W_K — группа точек кубич. кривой

$$X_0X_2^2-\left(4X_1^3-g_2X_0^2X_1-g_3X_0^3\right)=0.$$

Если α трансцендентен над F, то c является изоморфизмом.

4) Пусть F — дифференциальное поле, $a_1, \ldots, a_n \in F$ и $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — фундаментальная система нулей уравнения $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0$, к-рая порождает расширение Пикара — Вессио поля F. Группа Галуа $G(F<\eta_1, \ldots, \eta_n>/F)$ содержится в $\mathrm{SL}_K(n)$ тогда и только тогда, когда уравнение $y'+a_1y=0$ имеет нетривиальный нуль в F. В частности, если $F=C(x)$ — дифференциальное поле рациональных функций одного комплексного переменного с дифференцированием d/dx и $B_\nu=y''+x^{-1}y'+(1-\nu^2x^{-2})y$ — дифференциальный многочлен Бесселя, то группа Галуа соответствующего Р. совпадает с $\mathrm{SL}_K(2)$ при $\nu-{}^1/_2 \notin \mathbb{Z}$. Если $\nu-{}^1/_2 \in \mathbb{Z}$, то группа Галуа совпадает с K^*.

Для любого натурального n можно построить Р. дифференциальных полей $\mathcal{G} \supset F$ такое, что $G(\mathcal{G}/F) \approx \mathrm{GL}_K(n)$.

Существует соответствие Галуа между множеством дифференциальных подполей сильно нормального Р. и множеством алгебраич. подгрупп его группы Галуа.

Как и в обычной теории Галуа, в дифференциальном случае рассматриваются две общие задачи.

а) Прямая задача: задано сильно нормальное расширение $\mathcal{G}$ дифференциального поля F. Определить его группу Галуа.

б) Обратная задача: заданы дифференциальное поле F и алгебраич. группа G. Описать множество сильно нормальных Р. поля F, группа Галуа к-рых изоморфна группе G (в частности, определить, не пусто ли оно).

Существует другой способ обобщения нормальности на случай Р. дифференциальных полей и построения дифференциальной теории Галуа, использующий методы дифференциальной геометрии [4].

Лит.: [1] Ritt J. F., Differential algebra, N. Y., 1950; [2] Kolchin E. R., Differential algebra and algebraic groups, N. Y., 1973; [3] Капланский И., Введение в дифференциальную алгебру, пер. с англ., М., 1959; [4] Pommaret J. F., Differential Galois theory, N. Y.—L.—P., 1983.

А. В. Михалев, Е. В. Панкратьев.

РАСШИРЕНИЕ модуля — любой модуль X, содержащий данный модуль A в качестве подмодуля. Обычно, говоря о Р. модуля A, фиксируют фактормодуль X/A, т. е. расширением модуля A с помощью модуля B наз. *точную последовательность*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

Такой модуль X всегда существует (напр., прямая сумма A и B), но не определяется модулями A и B однозначно. Как в теории модулей, так и в ее приложениях возникает потребность в обозрении всех различных Р. модуля A с помощью B. С этой целью в классе всех Р. модуля A с помощью B вводится отношение эквивалентности, а на классах эквивалентных Р.— операция умножения (см. *Бэра умножение*), относительно к-рой множество классов эквивалентности Р. модуля A над кольцом R образует абелеву группу $\mathrm{Ext}'_R(A, B)$. Эта конструкция обобщается и на n-кратные Р. модуля A с помощью B, т. е. на точные последовательности вида

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0,$$

к-рым соответствует группа $\mathrm{Ext}^n_R(A, B)$. Группы

$$\mathrm{Ext}^n_R(A, B), \quad n=1, 2, \ldots,$$

являются производными функторами функтора $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ и вычисляются с помощью проективной резольвенты модуля A или инъективной резольвенты модуля B. Расширение X модуля A наз. существенным, если для любого подмодуля S модуля X из $S \cap A=0$ следует $S=0$. Всякий модуль обладает максимальным существенным Р., являющимся минимальным *инъективным модулем*, содержащим данный.

Лит. см. при ст. *Расширение группы.* *В. Е. Говоров.*

РАСШИРЕНИЕ оператора — линейный оператор, график к-рого содержит график данного линейного оператора. Тот факт, что оператор B есть Р. оператора A, записывается в виде $A \subset B$. Обычные задачи теории Р.: максимально расширить оператор, сохраняя определенное свойство, или изучить Р. оператора, обладающие нек-рым дополнительным свойством.

Пусть, напр., дан изометрич. оператор A в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A) \subset H$ и областью значений $R(A) \subset H$; тогда изометрические Р. оператора A находятся во взаимно однозначном соответствии с изометрич. отображениями из $H_+ = D(A)^{\perp}$ в $H_- = R(A)^{\perp}$. В частности, A имеет унитарные Р., когда размерности H_+ и H_- совпадают.

Расширения симметрических операторов. Наиболее развитой (и важной для приложений) является теория самосопряженных Р. симметрич. операторов в гильбертовом пространстве. Оператор T является симметрическим тогда и только тогда, когда $T \subset T^*$, где T^* — сопряженный к T оператор. Поэтому область определения любого симметрического Р. оператора T содержится в $D(T^*)$, и это Р. есть сужение оператора T^*. Тем самым описание симметрических Р. сводится к нахождению их областей определения. Подпространство $L \subset D(T^*)$ является областью определения нек-рого симметрического Р. оператора T тогда и только тогда, когда $(T^*x, y) = (xT^*y)$ для любых $x, y \in L$. Оказывается, что

$$D(T^*) = D(T) \dot{+} N_+ \dot{+} N_-,$$

где $N_{\pm} = \mathrm{Ker}(T^* \mp i)$ — дефектные подпространства (их размерности $n_{\pm} = \dim N_{\pm}$ наз. дефектными числами), и симметрические Р. оператора T находятся во взаимно однозначном соответствии с изометрич. отображениями из N_+ в N_-: каждому такому отображению V соответствует Р. оператора T с областью определения $D(T) \dot{+} \Gamma_V$, где Γ_V — график оператора V. Самосопряженные Р. соответствуют унитарным операторам V и, следовательно, существуют тогда и только тогда, когда дефектные числа равны.

Области определения Р. симметрич. операторов удобно описывать с помощью т. н. (абстрактных) граничных условий. Граничным значением для симметрич. оператора T наз. всякий линейный функционал на $D(T^*)$, непрерывный относительно нормы $\langle x \rangle = (\|x\|^2 + \|T^*x\|^2)^{1/2}$ и равный нулю на $D(T)$; граничным условием наз. уравнение $f(x) = 0$, где f — граничное значение. Граничные значения определяются своими значениями на $N_+ \dot{+} N_-$. Если дефектные числа симметрич. оператора T конечны, то всякое его симметрич. расширение $\tilde{T}$ определяется семейством граничных условий, то есть $D(\tilde{T}) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\, f_i$, где f_i — граничные значения. Семейства граничных значений, определяющие самосопряженные Р. оператора T с дефектными числами $n_+ = n_- = n$, описываются следующим образом. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — ортонормированный базис в N_+, а $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — в N_- и пусть для $1 \leqslant i \leqslant n$

$$f_i(x) = (T^*x, \varphi_i) - (x, T^*\varphi_i),$$

$$g_i(x) = (T^*x, \psi_i) - (x, T^*\psi_i).$$

Тогда всякое самосопряженное расширение $\tilde{T}$ оператора T определяется граничными условиями

$$D(\tilde{T}) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\left(f_i - \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} g_j\right),$$

где $\|\theta_{ij}\|$ — унитарная $(n \times n)$-матрица.

В нек-рых случаях удается установить существование самосопряженных Р. (и найти нек-рые из них), не решая трудной задачи нахождения дефектных подпространств и дефектных чисел. Напр., если T коммутирует с (антиунитарной) инволюцией пространства H, то он допускает самосопряженное Р. Это часто используется в теории дифференциальных операторов, где в качестве инволюции берется комплексное сопряжение пространства $\mathscr{L}^2$. Равенство дефектных чисел имеет место и в том случае, когда на действительной оси есть точки регулярного типа оператора T (точка λ наз. точкой регулярного типа, если $\|Tx-\lambda x\|\geqslant c\|x\|$ при нек-ром $c>0$ и для всех $x\in D(T)$).

Расширения полуограниченных операторов. Оператор T наз. полуограниченным снизу числом $a\in R$, если его числовая область $\{(Tx, x) : \|x\|=1, x\in D(T)\}$ лежит в интервале (a, ∞); оператор, полуограниченный снизу нулем, наз. положительным. Если T полуограничен снизу числом a, то все числа $\lambda<a$ — его точки регулярного типа, дефектные числа равны и существуют самосопряженные Р. Одно из них можно построить следующим образом. Полуторалинейная форма $q_T(x, y)=(Tx, y)$, определенная на $D(T)\times D(T)$, допускает замыкание $\overline{q_T}$. Но, как всякой замкнутой симметричной билинейной форме, форме $\overline{q_T}$ соответствует единственный самосопряженный оператор $\hat{T}$ такой, что $q_{\hat{T}}\subset\subset\overline{q_T}$. Оператор $\hat{T}$ наз. расширением Фридрихса оператора Т, он полуограничен, и нижняя грань его спектра равна нижней грани числовой области оператора T. Это — единственное самосопряженное Р., область определения к-рого содержится в области определения формы $\overline{q_T}$. С помощью расширения Фридрихса можно описать другие полуограниченные Р. оператора T (если дефектные числа оператора T конечны, то все его самосопряженные Р. полуограничены). Для этого достаточно найти все положительные Р. положительных операторов (общий случай сводится к данному добавлением оператора, кратного единичному). Пусть T — положительный оператор, $L=\operatorname{Ker} T^*$, тогда положительные самосопряженные Р. оператора T однозначно соответствуют положительным ограниченным операторам B в L: для каждого такого оператора B подпространство $D(T)\dotplus(\hat{T}^{-1}+B)L$ — область определения соответствующего Р. (см. [4]).

Построение расширения Фридрихса обобщается на секториальные операторы, т. е. операторы, числовая область к-рых содержится в нек-ром угле $\{z\in\mathbb{C} : |\arg(z-z_0)|\leqslant\theta<\pi/2\}$; существует Р., являющееся максимальным секториальным оператором, числовая область к-рого находится в том же угле и к-рое обладает свойством минимальности, аналогичным свойству расширения Фридрихса. Рассмотрен случай операторов, действующих из банахова пространства в сопряженное к нему (см. [5]).

Диссипативные расширения. В нек-рых задачах возникает необходимость строить симметрические Р. симметрич. операторов. Типичный результат состоит в следующем. Оператор A наз. диссипативным, если его числовая область лежит в левой полуплоскости, и максимальным диссипативным, если он диссипативен и не имеет диссипативных Р. Всякий симметрич. оператор имеет Р. вида iA, где A — максимальный диссипативный оператор; все такие Р. описываются с помощью сжимающих отображений N_+ в N_- (см. [8]).

Расширения дифференциальных операторов. Важные применения теория Р. операторов имеет при исследовании дифференциальных операторов. Пусть

$$l(y)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}(p_i(x)\,y^{(n-i)})^{(n-i)}$$

— формально самосопряженное дифференциальное выражение на интервале (a, b); пусть $D \in \mathscr{L}^2(a, b)$ — подпространство, состоящее из всех функций с абсолютно непрерывными квазипроизводными порядков $0, 1, \ldots, 2n-1$ и $2n$-й квазипроизводной, принадлежащей $\mathscr{L}^2(a, b)$, где D_0 — подпространство в D, состоящее из функции, носители к-рых не содержат концов интервалов. Формула $Ty=l(y)$ при $y \in D$ определяет оператор T; пусть T_0' — его сужение на D_0. Оператор T_0' — симметрический, $T_0'^*=T$ и пусть $T_0=\bar{T}_0'$ — его замыкание. Область определения оператора T_0 в регулярном случае (т. е. когда интервал (a, b) конечен и функция $1/p_0$ суммируема) образована всеми функциями из D, первые $2n-1$ квазипроизводных к-рых обращаются в 0 на концах интервала. В сингулярном случае $D(T_0)$ описывается более сложно (см. [2]). Дефектные числа оператора T_0 равны, причем в регулярном случае они равны $2n$, а в сингулярном — не превосходят $2n$. Таким образом, T_0 всегда обладает самосопряженными Р.; их спектры, спектральные разложения и резольвенты являются основными объектами теории дифференциальных операторов, поскольку выбор того или иного самосопряженного Р. является фактически точной постановкой нек-рой спектральной задачи. Это особенно наглядно проявляется в регулярном случае: (абстрактные) граничные условия, задающие область определения самосопряженного Р. оператора T_0, записывается тогда в виде обычных граничных условий:

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} y^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_{jk} y^{[k-1]}(b) = 0,$$

$$j=1, \ldots, 2n,$$

где α_{ik}, β_{ik} — набор чисел (такое описание следует из вышеприведенного описания (абстрактных) граничных условий, поскольку в регулярном случае определены граничные значения $\varphi_j(y)=y^{[j]}(a)$, $\psi_j(y)=y^{[j]}(b)$).

При $p_0(x)>0$ оператор T_0 является полуограниченным снизу, и его расширение Фридрихса соответствует граничным условиям $y^{[j]}(a)=y^{[j]}(b)=0$, $0 \leqslant j \leqslant 2n-1$.

В общем случае самосопряженные Р. оператора T_0 можно описать следующим образом. Пусть

$$[y, z] = \sum_{k=1}^{n} \left(y^{[k-1]} \bar{z}^{[2n-k]} - y^{[2n-k]} \bar{z}^{[k-1]}\right)$$

для любых функций y и z из D; тогда существуют пределы

$$\lim_{x \to a} [y, z]_x = [y, z]_a, \quad \lim_{x \to b} [y, z](x) = [y, z]_b,$$

причем

$$[y, z]_b - [y, z]_a = (Ty, z) - (y, Tz)$$

(формула Лагранжа). Поэтому для описания самосопряженных Р. оператора T_0 достаточно выбрать базисы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и $\psi_1, \ldots, \psi_n$ в дефектных подпространствах N_+ и N_- (удобно считать, что $\psi_i=\bar{\varphi}_i$) и каждой унитарной матрице $\|\theta_{ij}\|$ поставить в соответствие самосопряженное расширение T_θ, область определения к-рого состоит из всех функций $y \in D$, удовлетворяющих граничным условиям

$$[y, \xi_j]_b - [y, \xi_j]_a = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

где

$$\xi_j = \varphi_j - \sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} \bar{\varphi}_i.$$

Расширения, отвечающие краевым задачам. Р. полуограниченных операторов играют центральную роль в теории эллиптических краевых задач. Пусть, напр., $l(y)$ — эллиптическое дифференциальное выражение 2-го порядка в области G n-мерного пространства и пусть A_0 и $A = A_0^*$ — минимальный и максимальный операторы, определенные этим выражением. Тогда оператор A_0 положительно определен, его дефектные числа бесконечны и дефектное подпространство $L_0 = \operatorname{Ker} A$ (оно наз. пространством l-гармонических функций в G) допускает естественную реализацию в виде пространства функций на границе ∂G области G. Таким образом, различные Р. оператора A_0 соответствуют тем или иным граничным условиям и определяют различные краевые задачи. В частности, расширение Фридрихса $\hat{A}_0$ определено на всех функциях из пространства Соболева $W_2^2(G)$, обращающихся в нуль на ∂G, и уравнение $\hat{A}_0 u = f$ соответствует задаче Дирихле:

$$l(u) = f, \quad u\big|_{\partial G} = 0.$$

Теория уравнений с частными производными диктует постановку многих общих задач о Р. симметрич. операторов. Среди них задачи об условиях единственности самосопряженного Р. (т. н. существенная самосопряженность), о существовании коммутирующих Р. у коммутирующих (в том или ином смысле) симметрич. операторов, о существовании промежуточных Р. с заданными свойствами (напр., с условиями на спектр) и т. д. (см. [7]—[9]).

Расширения с выходом из гильбертова пространства. Всякий симметрич. оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, может быть расширен до самосопряженного оператора, действующего в нек-ром пространстве $H_1 \supset H$ (см. [10]), откуда следует существование у всякого симметрич. оператора обобщенной спектральной функции. С этим также связаны различные результаты о Р. с выходом из пространства и дилатациях (см. [11]). Так, всякое сжатие, т. е. оператор с нормой $\leqslant 1$, гильбертова пространства может быть расширено до коизометрического (т. е. сопряженного к изометрическому) оператора; всякое сжатие, степени к-рого сильно сходятся к нулю, может быть расширено до обратного одностороннего сдвига (т. е. сопряженного к одностороннему сдвигу). Результаты о Р. с выходом из пространства обобщаются на коммутативные семейства, полугруппы и т. д.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж.-Т., Линейные операторы, пер. с англ., т. 2, М., 1966; [2] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [3] Като Т., Теория возмущения линейных операторов, пер. с англ., М., 1972; [4] Крейн М. Г., «Матем. сб.», 1947, т. 20, с. 431—98, т. 21, с. 365—404; [5] Бирман М. Ш., там же, 1956, т. 38, с. 431—50; [6] Филлипс Р. С., «Математика», 1962, т. 6, № 4, с. 11—70; [7] Морен К., Методы гильбертова пространства, пер. с польск., М., 1965; [8] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [9] Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, М.—Л., 1952; [10] Наймарк М. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1940, т. 4, с. 277—318; [11] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970; [12] Brown L., Douglas R., Fillmore P., в кн.: Proc. Conference operator theory, В.—[a.o.], 1973; [13] Arveson W., «Duke math. J.», 1977, v. 44, № 2, p. 329—55; [14] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 2 — Гармонический анализ. Самосопряженность, М., 1978.

А. И. Логинов, В. С. Шульман.

РАСШИРЕНИЕ полугруппы A — полугруппа S, содержащая A в качестве подполугруппы. Обычно речь идет о расширениях полугруппы A, связанных с A теми или иными условиями. Наиболее развита теория идеальных Р. полугрупп (полугрупп, содержащих A в качестве идеала). Каждому элементу s идеального расширения S полугруппы A сопоставляют ее левый и правый сдвиги $\lambda_s, \rho_s : \lambda_s x = sx, x\rho_s = xs (x \in A)$; пусть $\tau s = (\lambda_s, \rho_s)$. Отображение τ является гомоморфизмом полугруппы S в сдвиговую оболочку $T(A)$ полугруппы A или изоморфизмом, если A слабо редуктивна (см. *Сдви-*

ги полугрупп). Полугруппа τS наз. **типом идеального расширения** S. Среди идеальных расширений S полугруппы A выделяют **строгие** Р., для к-рых $\tau S = \tau A$, и **чистые** Р., в к-рых $\tau^{-1}\tau A = A$. Каждое идеальное Р. полугруппы A является чистым Р. нек-рого ее строгого Р.

Идеальное расширение S полугруппы A наз. **плотным** (иногда **существенным**), если всякий гомоморфизм полугруппы S, инъективный на A, является изоморфизмом. Полугруппа A тогда и только тогда обладает максимальным плотным идеальным расширением D, когда A слабо редуктивна; в этом случае D единственна с точностью до изоморфизма и изоморфна $T(A)$, а полугруппа A наз. **плотно вложенным идеалом** в D. Подполугруппы $T(A)$, содержащие τA, и только они изоморфны плотным идеальным Р. слабо редуктивной полугруппы A.

Если S — идеальное Р. полугруппы A и факторполугруппа S/A изоморфна Q, то S называется Р. полугруппы A при помощи полугруппы Q. Хорошо изучены идеальные Р. вполне простых полугрупп, идеальные Р. группы при помощи вполне 0-простой полугруппы, коммутативной полугруппы с сокращением при помощи группы с присоединенным нулем и т. д. В общем случае задача описания всех идеальных Р. полугруппы A при помощи полугруппы Q далека от решения.

Среди Р. полугруппы A других типов выделяются полугруппы S, обладающие конгруэнцией, одним из классов к-рой является A, в частности т. н. **шрейеровы** Р. полугруппы с единицей [1] — аналог шрейеровых расширений групп. При изучении различных видов таких Р. полугрупп (в частности, для инверсных полугрупп) используются когомологии полугрупп.

Другим широким направлением теории Р. полугрупп являются различные задачи о существовании Р. полугруппы A, принадлежащих фиксированному классу полугрупп. Так, всякую полугруппу A можно вложить в полную полугруппу, в простую относительно конгруэнций полугруппу, в бипростую полугруппу с нулем и единицей (см. *Простая полугруппа*); всякую конечную или счетную полугруппу — в полугруппу с двумя образующими. Известны условия, при к-рых полугруппу A можно вложить в полугруппу без собственных левых идеалов, в инверсную полугруппу, в группу (см. *Вложение полугруппы*) и т. д.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., М., 1972, т. 1; [2] Petrich M., Introduction to semigroups, Columbus, 1973.

Л. М. Глускин.

РАСШИРЕНИЕ поля — поле, содержащее данное поле в качестве подполя. Запись K/k означает: K — расширение поля k. Поле K в этом случае наз. также **надполем** поля k.

Пусть K/k и L/k — два Р. поля k. Изоморфизм полей $\varphi: K \to L$ наз. **изоморфизмом расширений** (или k-**изоморфизмом полей**), если φ тождествен на k. Если изоморфизм Р. существует, то Р. наз. *изоморфными*. В случае $K = L$ φ наз. **автоморфизмом расширения** K/k. Множество всех автоморфизмов Р. образует группу $G(K/k) = \mathrm{Aut}(K/k)$, наз. **группой Галуа поля** K **относительно** k, или **группой Галуа расширения** K/k. Расширение наз. **абелевым**, если эта группа абелева.

Элемент поля α наз. **алгебраическим** над k, если он удовлетворяет нек-рому алгебраич. уравнению с коэффициентами из поля k, и **трансцендентным** — в противном случае. Для каждого алгебраич. элемента α существует единственный многочлен $f_\alpha(x)$ со старшим коэффициентом, равным 1, неприводимый в кольце многочленов $k[x]$ и такой, что $f_\alpha(\alpha)=0$, и всякий многочлен над k, корнем к-рого является элемент α, делится на $f_\alpha(x)$. Этот многочлен наз. **мини-**

мальным многочленом элемента α. Расширение K/k наз. **алгебраическим**, если всякий элемент из K алгебраичен над k. Р., не являющееся алгебраическим, наз. **трансцендентным**. Р. наз. **нормальным**, если оно алгебраическое и всякий неприводимый в $k[x]$ многочлен, обладающий корнем в K, разлагается в $K[x]$ на линейные множители. Подполе k наз. **алгебраически замкнутым** в K, если каждый алгебраический над k элемент из K на самом деле лежит в k, т. е. всякий элемент из K/k трансцендентен над k. Поле, алгебраически замкнутое в любом своем Р., является *алгебраически замкнутым полем*.

Расширение K/k наз. **конечно порожденным** (или **расширением конечного типа**), если в K существует такое конечное подмножество элементов S, что K совпадает с наименьшим подполем, содержащим S и k. В этом случае говорят, что K порождается множеством S над k. Если K может быть порождено над k множеством из одного элемента α, то Р. наз. **простым** и обозначается $K=k(\alpha)$. Простое алгебраич. расширение $k(\alpha)$ полностью определяется минимальным многочленом f_α порождающего элемента α. Точнее, если $k(\beta)$ — другое простое алгебраическое Р. и $f_\alpha=f_\beta$, то существует изоморфизм расширений $k(\alpha)\to k(\beta)$, переводящий α в β. Далее, для любого неприводимого многочлена $f\in k[x]$ существует простое алгебраич. расширение $k(\alpha)$ с минимальным многочленом $f_\alpha=f$. Оно может быть построено как факторкольцо $k[x]/fk[x]$. С другой стороны, для всякого простого трансцендентного расширения $k(\alpha)$ существует изоморфизм расширений $k(\alpha)\to k(x)$, где $k(x)$ — поле рациональных функций от x над k. Любое Р. конечного типа может быть получено с помощью конечной цепочки простых Р.

Расширение K/k наз. **конечным**, если K как алгебра конечномерна над полем k, и **бесконечным**, если эта алгебра бесконечномерна. Размерность этой алгебры наз. **степенью расширения** K/k и обозначается $[K:k]$. Каждое конечное Р. является алгебраическим и каждое алгебраическое Р. конечного типа — конечным. Степень простого алгебраического Р. совпадает со степенью соответствующего минимального многочлена. Напротив, простое трансцендентное Р. бесконечно.

Пусть дана последовательность расширений $K\subset L\subset\subset M$. Расширение M/K является алгебраическим тогда и только тогда, когда и L/K и M/L — алгебраические Р. Далее, M/K конечно тогда и только тогда, когда конечны L/K и M/L, причем

$$[M:K]=[M:L]\cdot[L:K].$$

Если P/k и Q/k — два алгебраических Р. и PQ — *композит* полей P и Q в нек-ром их общем надполе, то PQ/k также алгебраическое Р.

См. также *Сепарабельное расширение*, *Трансцендентное расширение*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [2] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, 2 изд., пер. с нем., М., 1979; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 1, пер. с англ., М., 1963; [4] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

О. А. Иванова.

РАСШИРЕНИЕ топологического пространства X — топологическое пространство Y, в к-ром X является всюду плотным подпространством. Если Y бикомпактно, то оно наз. **бикомпактным расширением**, если Y хаусдорфово — **хаусдорфовым расширением**.

М. И. Войцеховский.

РАСШИРЕНИЯ ОБЛАСТИ ПРИНЦИП, **принцип Карлемана**: *гармоническая мера* $\omega(z, \alpha, D)$ дуг α границы Γ области D может только возрастать при расширении области D через дополнительные дуги $\beta \subset \Gamma$, $\alpha \cup \beta = \Gamma$. Точнее, пусть граница Γ области D на плоскости комплексного переменного z состоит из конечного числа жордановых кривых, α — часть Γ, состоящая из конечного числа дуг Γ, и пусть область D' есть расширение области D через дополнительные дуги $\beta = \Gamma \setminus \alpha$, то есть $D \subset D'$ и α есть часть границы Γ' области D'. Тогда для гармонич. мер справедливо неравенство $\omega(z, \alpha, D) \leqslant \omega(z, \alpha, D')$, $z \in D$, причем знак равенства здесь имеет место только в случае $D' = D$. Р. о. п. справедлив и для гармонич. меры относительно областей евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, или $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$.

Р. о. п. находит важные применения в различных ситуациях, связанных с оценками гармонич. меры. Напр., еще Т. Карлеман [1] дал при помощи Р. о. п. решение следующей проблемы Карлемана — Мийю. Пусть граница Γ односвязной области D состоит из конечного числа жордановых дуг, точка ζ расположена на Γ или $\zeta \in C\overline{D}$, $\Delta = \{z: |z-\zeta| < R\}$ — круг радиуса R с центром ζ, а α — часть Γ, попавшая в $\Delta_R = \Delta \cap D$. Требуется найти оценку снизу для гармонич. меры $\omega(z, \alpha, \Delta_R)$, зависящую только от R и $|z-\zeta|$, $z \in \Delta_R$. Решение выражается неравенством

$$\omega(z, \alpha, \Delta_R) \geqslant \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\theta(R)} \ln \frac{R}{|z-\zeta|}\right), \qquad (1)$$

где $R\theta(R)$ — сумма длин дуг пересечения

$$\{z: |z-\zeta| = R\} \cap D.$$

Поскольку $\theta(R) \leqslant 2\pi$, то

$$\omega(z, \alpha, \Delta_R) \geqslant \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{R}{|z-\zeta|}\right), \quad z \in \Delta_R. \qquad (2)$$

Имеются обобщения проблемы Карлемана — Мийю и уточнения формул (1), (2) (см. [3]). Р. о. п. позволяет доказать также *Линделёфа теоремы.* Многочисленные применения Р. о. п. и формул типа (1), (2) дал А. Мийю (см. [2], а также [3], [4]).

Лит.: [1] Carleman T., «Ark. Mat. Astron. Fys.», 1921, v. 15, № 10; [2] Milloux H., «J. math. pures et appl.», 9 sér., 1924, t. 3; [3] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [4] Евграфов М. А., Аналитические функции, 2 изд., М., 1968. *Е. Д. Соломенцев.*

РАСШИРЕННАЯ КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ — плоскость комплексного переменного $\mathbb{C}$, компактифицированная посредством добавления бесконечно удаленной точки ∞ и обозначаемая $\overline{\mathbb{C}}$. Окрестностью ∞ является внешность любого круга в $\overline{\mathbb{C}}$, т. е. множество вида $\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| > R\}$, $R \geqslant 0$. Р. к. п. есть *Александрова бикомпактное расширение* плоскости $\mathbb{C}$, гомеоморфное и конформно эквивалентное *Римана сфере.* Сферическая, или хордальная, метрика на $\overline{\mathbb{C}}$ дается формулами

$$\rho(z, w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

$$\rho(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976.
Е. Д. Соломенцев.

РАСЩЕПЛЕНИЯ МЕТОД — сеточный метод решения нестационарных задач со многими пространственными переменными, в к-ром переход от заданного временного слоя t_n к новому слою $t_{n+1} = t_n + \tau$ осуществляется за счет последовательного решения сеточных аналогов родственных нестационарных задач с меньшим числом пространственных переменных (см. [1] — [4]).

Часто в этом классе методов могут быть найдены такие, что 1) весь переход от сеточного слоя в момент времени t_n к новому сеточному слою $t=t_{n+1}$ является достаточно простым и может быть осуществлен при затрате $O(N)$ арифметич. действий, где N — число узлов пространственной сетки; 2) гарантируется абсолютная устойчивость метода; 3) гарантируется наличие приемлемой точности метода (наличие аппроксимации в том или ином смысле). Р. м. довольно широко применяются при практич. решении многомерных задач математич. физики, связанных, напр., с линейными и нелинейными системами параболического, гиперболического или смешанного типа (см. [1] — [8]).

Обычно для задачи с p пространственными переменными переход от t_n к t_{n+1} в Р. м. производится с использованием p вспомогательных (дробных) шагов:

$$A_s^{(n)} u^{n+s/p} = B_s^{(n)} (u^n, u^{n+1/p}, \ldots, u^{n+(s-1)/p}), \quad (1)$$

где

$$u^n \equiv u(t_n), \quad u^{n+k/p} \equiv u(t_{n+1}), \quad A_s^{(n)}$$

— матрица, соответствующая разностной аппроксимации нек-рого дифференциального оператора, содержащего производные только по x_s (одномерного дифференциального оператора), а правые части (1) легко вычислимы. При соответствующей нумерации неизвестных, связанной с выбором направления x_s, матрицы $A_s^{(n)}$ становятся обычно диагональными и решение систем (1) при каждом s сводится к многократному решению одномерных разностных систем по направлению x_s. Поэтому часто Р. м. наз. также или *переменных направлений методом* или *дробных шагов методом.*

Одним из типичных примеров в случае уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f, \quad (x_1, x_2) \in \Omega,$$

с начальным условием $u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2)$ и краевым условием $u|_\Gamma = \psi(x_1, x_2, t)$, где $\Omega \equiv (0, 1) \times (0, 1)$, Γ — граница Ω, может служить следующий метод, построенный на квадратной сетке с шагом h:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u_i^{n+1/2} - u_i^n}{\tau/2} + [\Lambda_1 (\sigma u^{n+1/2} + (1-\sigma) u^n)]_i = f_i^{n+1/2}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \bar{x}_i \in \Omega_n; \\ &u_i^{n+1/2} = \psi_i^{n+1/2} \text{ при } \bar{x}_i \in \Gamma, \ u_i^{n+1} = \psi_i^{n+1} \text{ при} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \bar{x}_i \in \Gamma; \\ &\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+1/2}}{\tau/2} + [\Lambda_2 (\sigma u^{n+1} + (1-\sigma) u^{n+1/2})]_i = \\ &\qquad\qquad = f_i^{n+1/2}, \quad \bar{x}_i \in \Omega_n, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где $i \equiv (i_1, i_2)$, $\bar{x}_i \equiv (i_1 h, i_2 h)$, $u_i^n \equiv u(n\tau, \bar{x}_i)$, $\psi_i^{n+1/2} \equiv \psi((n+{}^1/_2)\tau, \bar{x}_i)$, — Λ_1 и Λ_2 — простейшие разностные аппроксимации для $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, Ω_n — совокупность внутренних узлов $\bar{x}_i$, $\sigma \geqslant 1/2$.

Имеются два альтернативных подхода к теории Р. м. В одном из них промежуточные шаги ни в чем существенном не отличаются от целых шагов, и сами разностные уравнения на дробных шагах и граничные условия для них, подобно методу (2), устроены одинаково, и можно ожидать, что u^n и $u^{n+1/2}$ будут служить аппроксимациями для решения исходной задачи в моменты времени t_n и $t_{n+1/2} \equiv t_n + \tau/2$. Этот подход основан на использовании понятия составной схемы и суммарной аппроксимации (см. [2]). Схемы такого типа часто наз. локальноодномерными схемами или аддитивными схемами; их можно также трактовать как обычные разностные схемы для некрого уравнения с сильно осциллирующими по времени коэффициентами, решение к-рого должно быть близко к решению исходной задачи (см. [1]—[4]). Достоинства этого подхода в его простоте и общности, напр. обобщения метода (2) возможны и для случая криволинейных областей Ω и более общих задач. Точность же получаемых на этом пути методов обычно не очень высока. Известны и иногда успешно применяются варианты Р. м., в к-рых расщепление производится не по пространственным переменным, а по физич. процессам (см. [5]).

Второй подход в плане анализа устойчивости и сходимости исключает какие-либо дробные шаги из рассмотрения. Сама разностная схема и аппроксимация трактуются традиционным образом. Необычность разностной схемы проявляется лишь в том, что на верхнем слое схемы появляется необычный разностный оператор. Напр., вместо метода (2) рассматривается метод

$$\left(A\left(\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}\right)\right)_i+(\Lambda_1u^n)_i+(\Lambda_2u^n)_i=f_i^{n+1/2},$$
$$\bar{x}_i\in\Omega_n \qquad (3)$$
$$u_i^n=\psi_i^n \quad \text{при} \quad \bar{x}_i\in\Gamma,$$

где $A\equiv(E+\sigma\tau\Lambda_1)(E+\sigma\tau\Lambda_2)$, E — тождественный оператор. Такие операторы A обычно наз. расщепляющимися или факторизованными операторами. Дробные шаги связываются лишь с методом решения возникающих систем и для одной и той же схемы (3) могут быть введены различными способами, граничные условия для них должны выбираться в зависимости от этого. Сами схемы типа (3) можно трактовать как обычные схемы с весом для ε-уравнения, напр., вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\varepsilon\frac{\partial^5 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2\partial t}=f,\quad \varepsilon>0,$$

решения к-рого отличаются от решения исходной задачи на $O(\varepsilon)$ (см. [4]). В случае области Ω, составленной из прямоугольников, матрицы возникающих систем в методах типа (3) уже не представимы в виде произведения «одномерных» матриц. Все же решения подобных систем могут быть найдены при затрате $O(N)$ арифметич. действий (см. [4]), операторы подобного типа наз. расширенно расщепляющимися операторами. При исследовании устойчивости и сходимости схем с расщепляющимися и расширенно расщепляющимися операторами большую роль играет метод энергетич. неравенств (см. [2], [4], [6] — [8]).

Лит.: [1] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [2] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [3] Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967; [4] Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, в. 1—2, М., 1971—72; [5] Ковеня В. М., Яненко Н. Н., Метод расщепления в задачах газовой динамики, Новосиб., 1981; [6] Дрыя М., в кн.: Banach center publications, v. 3, Warszawa, 1978, p. 59—67; [7] Злотник А. А., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1980, т. 20, № 2, с. 422—32; [8] Hayes L. J., «SIAM J. Numer. Analysis», 1981, v. 18, № 4, p. 627—43.
Е. Г. Дьяконов.

РАСЩЕПЛЯЕМАЯ ГРУППА — группа G, порожденная своими подгруппами H и K такими, что H инвариантна в G и пересечение $H\cap K=E$ (так что факторгруппа G/H изоморфна K). В этом случае G наз. также расщепляемым расширением группы H при помощи группы K, или полупрямым произведением H на K. Если подгруппы H и K поэлементно перестановочны, то их полупрямое произведение совпадает с прямым произведением $H\times K$. Полупрямое произведение G группы H на группу

K существует тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм ψ группы K в группу $\operatorname{Aut} H$ автоморфизмов группы H. В этом случае для любых $k \in K$, $h \in H$ справедлива формула

$$k^{-1}hk = h^{k\psi},$$

определяющая умножение в G. В случае, когда $K = \operatorname{Aut} H$ и ψ — тождественное отображение, группа G наз. голоморфом группы H.

Лит.: [1] Gorenstein D., Finite groups, N. Y.— L., 1968. *Н. Н. Вильямс.*

РАСЩЕПЛЯЮЩАЯСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — *точная последовательность*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

в абелевой категории, изоморфная последовательности прямой суммы:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \oplus C \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

причем этот изоморфизм таков, что A и C отображаются в A и C соответственно тождественным образом. Для расщепляемости последовательности (*) достаточно существования правого обратного f' для отображения f или левого обратного g' для отображения g. Класс расщепляющихся точных последовательностей является нулем группы $\operatorname{Ext}^1_R(A, C)$ (см. *Бэра умножение*). В категории векторных пространств (т. е. модулей над фиксированным полем) все точные последовательности являются расщепляемыми.

Для *относительной гомологической алгебры* типична ситуация, когда рассматриваются точные последовательности одной категории, являющиеся Р. п. в другой категории. *В. Е. Говоров.*

РАУСА ТЕОРЕМА — теорема, позволяющая для многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами (в регулярном случае) определить с помощью схемы Рауса число комплексных корней этого многочлена с положительной действительной частью.

Пусть многочлен $f(x)$ для удобства записан в виде
$$f(x) = a_0x^n + b_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \ldots \; (a_0 \neq 0).$$

Схемой Рауса этого многочлена наз. система чисел

$$\begin{array}{l} a_0a_1a_2 \;\ldots \\ b_0b_1b_2 \;\ldots \\ c_0c_1c_2 \;\ldots \\ d_0d_1d_2 \;\ldots \\ \;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{array}$$

В этой схеме первые две строки составлены из коэффициентов многочлена $f(x)$, а каждая строка, начиная с третьей, получается из двух предыдущих следующим образом: из первой строки вычитается вторая, умноженная на такое число, чтобы первый элемент обратился в нуль. Выбрасывая этот первый нуль, получают искомую строку. Напр., в третьей строке

$$c_i = a_{i+1} - b_{i+1}\frac{a_0}{b_0}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots .$$

В первой строке схемы Рауса число элементов равно целой части числа $\frac{n+1}{2}$, во второй — целой части числа $\frac{n}{2}$, в k-й строке при $k > 2$ число элементов на 1 меньше, чем в $(k-2)$-й строке. Вся схема содержит $n+1$ строку. Регулярным наз. тот случай, когда в схеме Рауса многочлена все числа первого столбца отличны от нуля.

Теорема Рауса. Для многочлена с действительными коэффициентами в регулярном случае число корней, лежащих в правой полуплоскости (т. е. имеющих положительные действительные части), равно числу перемен знака в ряду чисел первого столбца схемы Рауса. В регулярном случае многочлен не может иметь корней, лежащих на мнимой оси. Критерий Рауса: для того чтобы все корни многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все числа первого столбца схемы Рауса были отличны от нуля и имели одинаковые знаки. Эти теоремы были установлены Э. Раусом [1]. Метод Рауса применяется для определения числа корней многочлена в правой полуплоскости и в нек-рых нерегулярных случаях.

Построение схемы Рауса возможно лишь для многочленов с заданными числовыми коэффициентами. Более широко применим метод, в к-ром роль схемы Рауса играет матрица Гурвица, а роль первого столбца схемы Рауса — последовательность главных миноров Δ_i, $i=1, 2, \ldots, n$ (см. *Рауса — Гурвица критерий*). При этом аналогом Р. т. будет теорема Рауса — Гурвица: если все миноры Δ_i отличны от нуля, то число корней многочлена $f(x)$, лежащих в правой полуплоскости, равно числу перемен знака в ряду чисел

$$a_0,\ \Delta_1,\ \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ \frac{\Delta_3}{\Delta_2},\ \ldots,\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

и $f(x)$ не имеет корней, лежащих на мнимой оси. Этот метод применим при нек-рых дополнительных условиях к случаю, когда отдельные из миноров Δ_i равны нулю.

Лит.: [1] Routh E. J., Treatise on the stability of a given state of motion..., L., 1877; [2] его же, The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, 6 ed., L., 1905; [3] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.— Л., 1950; [4] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967.

И. В. Проскуряков.

РАУСА — ГУРВИЦА КРИТЕРИЙ, Гурвица критерий, — необходимое и достаточное условие того, чтобы все корни многочлена

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

с действительными коэффициентами и $a_0>0$ имели отрицательные действительные части. Р.—Г. к. состоит в том, чтобы были положительными все главные миноры Δ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, матрицы Гурвица H, где H — матрица порядка n, i-я строка к-рой имеет вид

$$a_{2-i},\ a_{4-i},\ \ldots,\ a_{2n-i},$$

и, по определению, $a_k=0$, если $k<0$ или $k>n$ (условия Гурвица, условия Рауса — Гурвица). Этот критерий получен А. Гурвицем [1] и является обобщением работы Э. Рауса (см. *Рауса теорема*).

Многочлен $f(x)$, удовлетворяющий условиям Гурвица, наз. многочленом Гурвица, или устойчивым многочленом, что связано с применениями Р.— Г. к. в теории устойчивости колебательных систем. Известны и другие критерии устойчивости многочленов: критерий Рауса, *Льенара — Шипара критерий*, а также способы определения числа корней многочлена.

Лит.: [1] Hurwitz A., «Math. Ann.», 1895, Bd 46, S. 273—84; [2] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967.

Е. Н. Кузьмин.

РАЦИОНАЛЬНАЯ КРИВАЯ — одномерное алгебраич. многообразие, определенное над полем k, поле рациональных функций к-рого является чисто трансцендентным расширением поля k степени 1. Все неособые полные Р. к. изоморфны проективной прямой P^1. Полная неособая кривая X рациональна тогда и только тогда, когда ее геометрич. род $g=0$, то есть когда на X нет регулярных дифференциальных форм.

В случае, когда $k=\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, неособая полная Р. к. X — это сфера Римана $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

Вик. С. Куликов.

РАЦИОНАЛЬНАЯ ОСОБЕННОСТЬ — нормальная *особая точка* P алгебраич. многообразия или комплексно аналитич. пространства X, допускающая разрешение особенности $\pi : Y \to X$, при к-ром прямые образы $R^i\pi_*O_Y$ структурного пучка O_Y тривиальны при $i \geqslant 1$. Тогда этим свойством будет обладать и любое разрешение данной особенности. Если основное поле имеет характеристику 0, то особенность является Р. о. тогда и только тогда, когда X — многообразие Коэна — Маколея и вложение $\pi_* : \omega_Y \to \omega_X$ дуализирующих пучков является изоморфизмом [5].

Р. о. являются, например, особые точки факторпространства $\mathbb{C}^n/G$, где G — конечная группа линейных преобразований; особая точка 0 гиперповерхности $x_0^{k_0}+\ldots+x_n^{k_n}=0$ при $\sum_{i=1}^{n} k_i^{-1}>1$ (см. [8]); торические особенности.

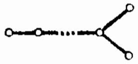
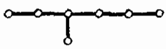
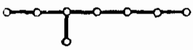
Если $P \in X$ — горенштейнова изолированная особенность (т. е. пучок ω_X локально свободен) над полем $\mathbb{C}$ и ω — образующая пучка ω_X, то P является Р. о. тогда и только тогда, когда

$$\int_U \omega \wedge \overline{\omega} < \infty$$

в достаточно малой окрестности U точки P (см. [7]).

В случае, когда $\dim X=2$, особенность P рациональна тогда и только тогда, когда $h^1(O_D)=0$ для каждого цикла D на исключительной кривой $E=\pi^{-1}(P)$ разрешения π. В этом случае для Р. о. все компоненты E_i кривой E изоморфны проективной прямой P^1, E — дивизор с нормальными пересечениями и граф Γ разрешения является деревом.

Фундаментальным циклом особенности наз. минимальный цикл $Z>0$ на E, для к-рого $Z \cdot E_i \leqslant 0$ для всех i. В терминах цикла Z можно дать критерий рациональности: $h^1(O_z)=0$, а также вычислить кратность особенности и размерность касательного пространства [1].

Обозначение	Уравнение	Граф	G
A_n, $n \geqslant 1$	$x^{n+1}+y^2+z^2$		C_{n+1}
D_n, $n \geqslant 4$	$xy^2+x^{n-1}+z^2$		D_{n-2}
E_6	$x^3+y^4+z^2$		T
E_7	$x^3+xy^3+z^2$		O
E_8	$x^3+y^5+z^2$		I

Р. о. гиперповерхностей X в трехмерном аффинном пространстве A^3 или, что эквивалентно, двумерные Р. о. кратности 2 наз. двойными Р. о. Двойные Р. о. имеют ряд эквивалентных характеризаций и несколько различных названий: особенности Клейна, особенности Дю Валя, простые особенности. Уравнения двойных Р. о. возникают как уравнения, связывающие инварианты групп симметрий правильных многогранников (см. [6]). Это соответствует характеризации двойных Р. о. как особенностей факторпространств $X=\mathbb{C}^2/G \subset \mathbb{C}^3$, где G — конечная подгруппа в SL $(2, \mathbb{C})$; с точностью до сопряженности такие подгруппы исчерпываются списком: C_n — циклич. группа порядка n, бинарные группы диэдра D_n, группа тетраэдра T, группа октаэдра O, группа икосаэдра I. Если π — минимальное разрешение двойной Р. о., то все $E_i^2=-2$ и взвешенный граф Γ совпадает со схемой простых корней одной из полупростых алгебр Ли A_n, D_n, E_6, E_7, E_8, обозначения к-рых переносятся и на особенности. С точностью до изоморфизма такая особенность определяется своим взвешенным графом Г ([3], [11]), см. таблицу, кол. 915. Двойные Р. о. могут быть охарактеризованы как двумерные горенштейновы Р. о. Они наз. также каноническими особенностями, т. к. это в точности те особенности, к-рые появляются на канонич. моделях алгебраич. поверхностей основного типа.

Если $P \in X$ горенштейнова Р. о. произвольной размерности, то ее общее гиперповерхностное сечение есть либо рациональная, либо эллиптическая горенштейнова особенность, что позволяет, в частности, описать трехмерные Р. о. (см. [8]).

В произвольной размерности справедливы следующие факты (см. [4]). 1) Деформация Р. о. есть снова Р. о. 2) Если $f: X \to S$ — плоский морфизм, $x \in X$, причем точка $s = f(x)$ является Р. о. в S, а x — Р. о. слоя $X_s = f^{-1}(s)$, то x является Р. о. в X. 3) Если деформация $f: X \to S$ имеет гладкую базу S и допускает одновременное разрешение особенностей, то точка $x \in X$ является Р. о. тогда и только тогда, когда x является Р. о. в своем слое $f^{-1}(f(x))$.

В случае $\dim X = 2$ любая деформация многообразия Y, разрешающего Р. о. $P \in X$, определяет деформацию особенности P, к-рая получается, если стянуть исключительные кривые слоев данной деформации. В результате получается морфизм $\varphi: \mathrm{Def}\, Y \to \mathrm{Def}\, X$ баз версальных деформаций многообразия Y и особенности P. Образ $A = \varphi(\mathrm{Def}\, Y)$ есть неособая неприводимая компонента в $\mathrm{Def}\, X$, называемая компонентой Артина, а $\varphi: \mathrm{Def}\, Y \to A$ — накрытие Галуа, группа W к-рого может быть найдена при помощи графа Г особенности P (см. [2], [10]). В частности, для двойной Р. о. φ сюръективно и W совпадает с группой Вейля соответствующей алгебры Ли, т. е. версальная деформация Р. о. одновременно разрешается после накрытия Галуа базы деформации с группой Вейля W (см. [9]).

Лит.: [1] Artin M., «Amer. J. Math.», 1966, v. 88, p. 129—36; [2] его же, «J. Algebra», 1974, v. 29, № 2, p. 330—48; [3] Brieskorn E., «Invent. math.», 1968, v. 4, p. 336—58; [4] Elkik R., там же, 1978, v. 47, p. 139—47; [5] Kempf G., в кн.: Toroidal embeddings, v. 1, B.— [u. a.], 1973, p. 41—52; [6] Klein F., Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung von fünften Grade, Lpz., 1884; [7] Laufer H. B., «Amer. J. Math.», 1972, v. 94, p. 597—608; [8] Reid M., в кн.: Géométrie algébrique, Rockvill, 1980, p. 273—311; [9] Slodowy P. J., Simple singularities and simple algebraic groups, B., 1980; [10] Wahl J., «Compos. math.», 1979, v. 38, p. 43—54; [11] Тюрина Г. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, с. 943—70.
Вал. С. Куликов.

РАЦИОНАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — двумерное алгебраич. многообразие, определенное над полем k, поле рациональных функций к-рого является чисто трансцендентным расширением поля k степени 2. Любая Р. п. X бирационально изоморфна проективному пространству $\mathbb{P}^2$.

Геометрич. род p_g и иррегулярность q полной гладкой Р. п. X равны 0, то есть на X нет регулярных дифференциальных 2-форм и 1-форм. Все кратные роды $P_n = \dim H^0(X, O_X(nK_X))$ гладкой полной Р. п. X также равны 0, где K_X — канонич. дивизор поверхности X. Эти бирациональные инварианты выделяют Р. п. среди всех алгебраич. поверхностей, а именно, всякая гладкая полная алгебраич. поверхность с инвариантами $p_g = q = P_2 = 0$ является Р. п. (критерий рациональности Кастельнуово). Согласно другому критерию рациональности гладкая полная алгебраич. поверхность X является Р. п. тогда и только тогда, когда на X лежит неособая рациональная кривая C, индекс самопересечения к-рой $(C^2)_X > 0$.

Каждая алгебраич. поверхность, кроме Р. п. и линейчатых поверхностей, бирационально изоморфна единственной минимальной модели. В классе Р. п. имеется счетное множество относительно минимальных моделей. Это — проективное пространство P^2 и поверхности $F_n \simeq P(\mathscr{L}_n)$ (проективизации двумерных линейных расслоений над проективной прямой P^1), $\mathscr{L}_n \simeq \simeq O_{P^1} \oplus O_{P^1}(-n)$, где $n \geqslant 0$ и $n \neq 1$. Другими словами, поверхность F_n — это расслоение на рациональные кривые над рациональной кривой, у к-рого есть сечение S_n — гладкая рациональная кривая с индексом самопересечения $(S_n^2)_F = -n$. Поверхность F_0 изоморфна прямому произведению $P^1 \times P^1$, а поверхности F_n получаются из F_0 с помощью последовательности элементарных преобразований (см. [1]).

Р. п. имеют большую группу бирациональных преобразований (т. н. группу кремоновых преобразований).

Если на гладкой полной Р. п. антиканонич. пучок $O_X(-K_X)$ обилен, то X наз. поверхностью Дель Пеццо. Наибольшее целое число $r > 0$ такое, что $-K_X \sim rD$ для нек-рого дивизора D на X, наз. индексом поверхности Дель Пеццо. Индекс r может принимать значения 1, 2, 3 (см. [2]). Поверхность Дель Пеццо индекса 3 изоморфна P^2. Для поверхности Дель Пеццо X индекса 2 рациональное отображение $\varphi_{O_X(D)} : X \to P^3$, определяемое пучком $O_X(D)$, дает бирациональный изоморфизм на квадрику в P^3. Поверхности Дель Пеццо индекса 1 могут быть получены n моноидальными преобразованиями плоскости P^2 с центрами в точках общего положения, где $1 \leqslant n \leqslant 8$ (см. [2]).

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 [Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75]; [2] Исковских В. А., в сб.: Современные проблемы математики, т. 12, М., 1979, с. 59—157; [3] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981. *Вик. С. Куликов.*

РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ — 1) Р. ф. — функция $w = R(z)$, где $R(z)$ — рациональное выражение от z, т. е. выражение, полученное из независимого переменного z и нек-рого конечного набора чисел (действительных или комплексных) посредством конечного числа арифметич. действий. Р. ф. можно записать (не единственным образом) в виде

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где P, Q — многочлены, $Q(z) \not\equiv 0$. Коэффициенты этих многочленов наз. коэффициентами Р. ф. Дробь P/Q наз. несократимой, если P, Q не имеют общих нулей (то есть P, Q — взаимно простые многочлены). Всякую Р. ф. можно записать в виде несократимой дроби $R(z) = P(z)/Q(z)$; если при этом P имеет степень m, а Q — степень n, то степенью Р. ф. $R(z)$ наз. пару (m, n) или число

$$N = \max\{m, n\}.$$

Р. ф. степени (m, n) при $n = 0$, т. е. *многочлен*, наз. целой рациональной функцией, в противном случае — дробно-рациональной функцией. Р. ф. $R(z) \equiv 0$ не имеет степени. При $m < n$ дробь R наз. правильной, при $m \geqslant n$ — неправильной. Неправильную дробь можно единственным образом записать в виде

$$\frac{P}{Q} = P_1 + \frac{P_2}{Q},$$

где P_1 — многочлен, наз. целой частью дроби P/Q, а P_2/Q — правильная дробь. Правильная дробь с несократимой записью $R(z) = P(z)/Q(z)$, где

$$Q(z) = b(z - b_1)^{n_1} \ldots (z - b_l)^{n_l},$$

может быть единственным образом разложена в сумму простейших дробей:

$$R(z)=\sum_{i=1}^{l}\frac{c_{i_1}}{z-b_i}+\frac{c_{i_2}}{(z-b_i)^2}+\ldots+\frac{c_{i_{n_i}}}{(z-b_i)^{n_i}}. \quad (1)$$

Если $P(x)/Q(x)$ — правильная Р. ф. с действительными коэффициентами и

$$Q(x)=b_0(x-b_1)^{l_1}\ldots(x-b_r)^{l_r}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s},$$

где $b_0, b_1, \ldots, b_r, p_1, q_1, \ldots, p_s, q_s$ — действительные числа, $p_j^2-4q_j<0$, $j=1, \ldots, s$, то $P(x)/Q(x)$ также единственным образом представляется в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{c_{i_1}}{x-b_i}+\frac{c_{i_2}}{(x-b_i)^2}+\ldots+\frac{c_{i_{l_i}}}{(x-b_i)^{l_i}}\right]+$$
$$+\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{D_{j_1}x+E_{j_1}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{D_{j_2}x+E_{j_2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{D_{j_{t_j}}x+E_{j_{t_j}}}{(x^2+p_jx+q_j)^{t_j}}\right], \quad (2)$$

где все коэффициенты действительны. Эти коэффициенты, как и c_{ij} в (1), могут быть найдены *неопределенных коэффициентов методом.*

Р. ф. степени (m, n) в несократимой записи определена и аналитична в расширенной комплексной плоскости (т. е. плоскости, дополненной точкой $z=\infty$) за исключением конечного числа особых точек — полюсов в нулях ее знаменателя, а при $m>n$ еще и в точке ∞; при этом сумма кратностей полюсов функции R равна ее степени N. Обратно, всякая аналитич. функция, имеющая в расширенной комплексной плоскости в качестве особых точек только полюсы, является Р. ф.

В результате арифметич. действий над Р. ф. получают также Р. ф. (деление на $R(z)\equiv 0$ исключается), так что все Р. ф. образуют поле; вообще, Р. ф. с коэффициентами из нек-рого поля образуют поле. Если $R_1(z)$, $R_2(z)$ суть Р. ф., то и $R_1(R_2(z))$ является Р. ф. Производная порядка p от Р. ф. степени N есть Р. ф. степени $\leqslant(p+1)N$. Неопределенный интеграл (первообразная) от Р. ф. представляет собой сумму нек-рой Р. ф. и выражений вида $c_r\ln(z-b_r)$. Если Р. ф. $R(x)$ действительна при действительном x, то неопределенный интеграл $\int R(x)dx$ может быть записан в виде суммы нек-рой Р. ф. $R_0(x)$ с действительными коэффициентами, выражений вида

$$c_{i_1}\ln|x-b_i|, \quad M_j\ln(x^2+p_jx+q_j),$$
$$N_j\operatorname{arctg}\frac{2x+p_j}{\sqrt{4q_j-p_j^2}}, \ i=1, \ldots, r; \ j=1, \ldots, s,$$

и произвольной постоянной C (здесь числа c_{i_1}, b_i, p_j, q_j — те же, что и в (2), M_j, N_j — нек-рые действительные числа). Функцию $R_0(x)$ по *Остроградского методу* можно найти, минуя разложение $R(x)$ на простейшие дроби (2).

Удобные для вычислений, Р. ф. используются для приближенного представления функций. Рассматриваются также Р. ф. от нескольких действительных или комплексных переменных $R=P/Q$, где P, Q — многочлены от соответствующих переменных ($Q\not\equiv 0$), а также абстрактные Р. ф.

$$R=\frac{A_1\Phi_1+\ldots+A_m\Phi_m}{B_1\Phi_1+\ldots+B_n\Phi_n},$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ — линейно независимая система непрерывных функций на нек-ром бикомпакте X, а $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ — числа.

См. также *Дробно-линейная функция*, *Жуковского функция*.

Лит.: [1] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977; [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. *Е. П. Долженко.*

2) Р. ф. на алгебраическом многообразии — обобщение классич. понятия рациональной функции (см. п. 1). Р. ф. на неприводимом алгебраич. многообразии X — это класс эквивалентности пар (U, f), где X — непустое открытое подмножество в X, а f — регулярная функция на U. Две пары (U, f) и (V, g) наз. эквивалентными, если $f=g$ на $U \cap V$. Р. ф. на X образуют поле, обозначаемое $k(X)$.

В случае, когда $X = \operatorname{Spec} R$ — аффинное неприводимое многообразие, поле Р. ф. на X совпадает с полем частных кольца R. Степень трансцендентности над k поля $k(X)$ наз. размерностью многообразия X.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *Вик. С. Куликов.*

РАЦИОНАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — алгебраическое многообразие X над алгебраически замкнутым полем k, поле рациональных функций $k(X)$ к-рого изоморфно чисто трансцендентному расширению конечной степени поля k. Другими словами, Р. м. — это алгебраич. многообразие X, бирационально изоморфное проективному пространству P^n.

Полное гладкое Р. м. X обладает следующими бирациональными инвариантами. Размерности всех пространств $H^0(X, \Omega_X^k)$ регулярных дифференциальных k-форм на X равны 0. Кроме того, кратный род

$$P_n = \dim_k H^0\ (X,\ O_X(nK_X)) = 0 \text{ при } n > 0,$$

где K_X — канонич. дивизор алгебраич. многообразия X, т. е. кодаировская размерность Р. м. X равна 0.

В малых размерностях перечисленные выше инварианты однозначно выделяют класс Р. м. среди всех алгебраич. многообразий. Так, если $\dim_k X = 1$ и род алгебраич. кривой X равен 0, то X — рациональная кривая. Если $\dim_k X = 2$, а арифметич. род

$$p_a = \dim_k H^0(X, \Omega_X^2) - \dim_k H^0(X, \Omega_X^1) = 0$$

и кратный род $P_2 = 0$, то X — рациональная поверхность. Однако в случае $\dim_k X \geqslant 3$ нет хорошего критерия рациональности из-за отрицательного решения *Люрота проблемы*.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *Вик. С. Куликов.*

РАЦИОНАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — обобщение понятия *рациональной функции* на алгебраич. многообразии. А именно, рациональным отображением неприводимого алгебраич. многообразия X в алгебраич. многообразие Y (оба определены над полем k) наз. класс эквивалентности пар (U, φ_U), где U — непустое открытое подмножество в X, а φ_U — морфизм из U в Y. При этом пары (U, φ_U) и (V, φ_V) считаются эквивалентными, если φ_U и φ_V совпадают на $U \cap V$. В частности, Р. о. многообразия X в аффинную прямую есть рациональная функция на многообразии X. Для каждого Р. о. $\varphi : X - - \to Y$ существует такая пара $(\tilde{U}, \varphi_{\tilde{U}})$, что $U \subseteq \tilde{U}$ для любой эквивалентной ей пары (U, φ_U) и φ_U является ограничением $\varphi_{\tilde{U}}$ на U. Открытое подмножество $\tilde{U}$ наз. областью регулярности Р. о. φ, а $\varphi(\tilde{U})$ — образом многообразия X (обозначается $\varphi(X)$) при Р. о. φ.

Если $\varphi : X - - \to Y$ — Р. о. алгебраич. многообразий и образ $\varphi(X)$ плотен в Y, то φ определяет вложение полей $\varphi^* : k(Y) \to k(X)$. Обратно, вложение полей рациональных функций $\varphi^* : k(Y) \to k(X)$ определяет Р. о. многообразия X в Y. Если Р. о. φ индуцирует изоморфизм полей рациональных функций $k(X)$ и $k(Y)$, то φ наз. **бирациональным отображением.**

Множество точек из X, в к-рых Р. о. $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ не регулярно, имеет в общем случае коразмерность 1. Но если Y — полное многообразие, а X — гладкое неприводимое многообразие, то множество точек из X, в к-рых φ не регулярно, имеет коразмерность не меньше двух. Если X и Y — полные неприводимые многообразия над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, то Р. о. $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ может быть включено в коммутативную диаграмму (см. [2]):

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[rr, "\varphi"] & & Y \end{tikzcd} \qquad , \qquad (*)$$

где η, f — морфизмы алгебраич. многообразия Z, и η является композицией моноидальных преобразований. Если $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ — бирациональное отображение полных неособых поверхностей, то существует диаграмма (*), в к-рой оба морфизма f и η являются композициями моноидальных преобразований с неособыми центрами (**теорема Зарисского**), т. е. любое бирациональное отображение полных неособых поверхностей раскладывается в композицию моноидальных преобразований с неособыми центрами и обратных к ним отображений. В случае $\dim X \geqslant 3$ аналогичный вопрос о разложении бирационального отображения открыт (1983).

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Hironaka H., «Ann. Math.», 1964, v. 79, № 1—2, p. 109—326. *Вик. С. Куликов.*

РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ алгебраической группы G — линейное представление алгебраич. группы G над алгебраически замкнутым полем k в конечномерном векторном пространстве V над k, являющееся рациональным (и тем самым регулярным) гомоморфизмом группы G в $\mathrm{GL}(V)$. Говорят также, что V — **рациональный G-модуль.** Прямая сумма и тензорное произведение конечного числа Р. п. группы G являются Р. п.; подпредставление и факторпредставление нек-рого Р. п. являются Р. п.; симметрическая или внешняя степень любого Р. п. является Р. п.; представление, контрагредиентное к Р. п., является Р. п.

Если G конечна, то всякое ее линейное представление будет Р. п. и теория Р. п. сливается с теорией представлений конечных групп. В наибольшей степени специфич. методы теории линейных алгебраич. групп используются при исследовании Р. п. в том случае, когда рассматриваемая группа связна, причем наиболее глубоко развита теория Р. п. связных полупростых алгебраич. групп. Далее G — такая группа. Пусть T — ее максимальный тор, $\mathrm{X}(T)$ — его группа рациональных характеров (записываемая аддитивно), Σ — система корней группы G относительно T, W — ее группа Вейля. И пусть $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ есть Р. п. Ограничение представления φ на T разлагается в прямую сумму одномерных представлений, точнее

$$V = \oplus_{\chi \in P_{\varphi}} V(\chi),$$

где $P_{\varphi} \subset \mathrm{X}(T)$ — нек-рое множество характеров тора T, называемых **весами** представления, а

$$V(\chi) = \{v \in V \mid \varphi(t)\, v = \chi(t)\, v \quad \forall t \in T\} \neq 0.$$

Множество весов P_{φ} инвариантно относительно W.

Если $\operatorname{char} k = 0$, то всякое Р. п. группы G вполне приводимо, но если $\operatorname{char} k > 0$, то это уже не так (см. *Мамфорда гипотеза*). Однако при любой характеристике поля k имеется полное описание неприводимых Р. п. Пусть B — борелевская подгруппа в G, содержащая T, и Δ — определяемая ею система простых корней в Σ. Группа $X(B)$ рациональных характеров группы B отождествляется с $X(T)$. В пространстве V любого неприводимого Р. п. $\varphi: G \to GL(V)$ существует единственное одномерное весовое подпространство $V(\delta_\varphi)$, $\delta_\varphi \in P_\varphi$, инвариантное относительно группы B. Характер δ_φ наз. старшим весом неприводимого Р. п. φ; он доминантен, т. е. скалярное произведение $(\delta_\varphi, \alpha) \geqslant 0$ для любого $\alpha \in \Delta$, а всякий другой вес $\chi \in P_\varphi$ имеет вид

$$\chi = \delta_\varphi - \sum\nolimits_{\alpha \in \Delta} m_\alpha \alpha, \quad m_\alpha \in \mathbb{Z}, \quad m_\alpha \geqslant 0.$$

Отображение $\varphi \mapsto \delta_\varphi$ определяет биекцию между классами эквивалентных неприводимых Р. п. и доминантными элементами из $X(T)$. Явная конструкция всех неприводимых Р. п. может быть получена следующим образом. Пусть $k[G]$ — алгебра регулярных функций на G. Для любого $\chi \in X(T) = X(B)$ рассматривается подпространство

$$k[G]_\chi = \{f \in k[G] \mid f(gb) = \chi(b) f(g) \ \forall b \in B, \ g \in G\}.$$

Оно конечномерно и является рациональным G-модулем относительно действия группы G левыми сдвигами. Геометрич. смысл этого пространства таков: оно канонически отождествляется с пространством регулярных сечений одномерного однородного векторного расслоения над G/B, определенного характером $-\chi$. Пусть $w_0 \in W$ — элемент, переводящий положительные корни в отрицательные. Тогда если $k[G]_{-w_0(\chi)} \neq 0$, то χ — доминантный характер и минимальный ненулевой G-подмодуль в $k[G]_{-w_0(\chi)}$ является неприводимым рациональным G-модулем со старшим весом χ. Всякий неприводимый рациональный G-модуль получается при помощи такой конструкции. Если char $k=0$, то уже сам G-модуль $k[G]_{-w_0(\chi)}$ неприводим.

Для получения неприводимых Р. п. часто используются упомянутые выше операции над Р. п. Напр., если φ_i — неприводимое Р. п. со старшим весом χ_i, $i=1, \ldots, d$, то нек-рое факторпредставление $\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_d$ является неприводимым Р. п. со старшим весом $\chi_1 + \ldots + \chi_d$ (оно наз. картановской композицией Р. п. $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$). Если φ — неприводимое Р. п. со старшим весом χ, то нек-рое факторпредставление S^d_φ является неприводимым Р. п. со старшим весом $d\chi$, а φ^* — неприводимо и его старшим весом является $-w_0(\chi)$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Если $\varphi: G \to GL(V)$ есть Р. п., то его дифференциал $d\varphi$ является представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Р. п. φ наз. инфинитезимально неприводимым, если $d\varphi$ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$. Инфинитезимально неприводимое Р. п. неприводимо, а в случае char $k=0$ верно и обратное (что в значительной степени сводит теорию Р. п. группы к теории представлений ее алгебры Ли), однако в случае char $k>0$ это уже не так. Инфинитезимально неприводимые Р. п. в этом случае — это в точности неприводимые Р. п. со старшими весами χ, для к-рых

$$0 \leqslant \frac{2(\chi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} < p \text{ при любом } \alpha \in \Delta.$$

Более того, все неприводимые Р. п. могут быть построены при помощи инфинитезимально неприводимых. Точнее, если G односвязна, т. е. если $X(T)$ совпадает с решеткой весов корневой системы Σ, то всякое неприводимое Р. п. однозначно разлагается в тензорное произведение вида

$$\varphi_0 \otimes \varphi_1^{\mathrm{Fr}} \otimes \ldots \otimes \varphi_d^{\mathrm{Fr}^d},$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_d$ инфинитезимально неприводимы, а $\varphi_i^{\mathrm{Fr}^i}$ — представление, полученное применением к матричным элементам представления φ_i автоморфизма Фробениуса $a \mapsto a^{P^i} (a \in k)$, $P = \mathrm{char}\, k$.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] его же, в кн.: Algebraic geometry, Providence, 1975, p. 421—40 (Proc. Symposia in pure math., v. 29, Arkata, 1974); [3] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980; [4] Семинар по алгебраическим группам, пер. с англ., М., 1973; [5] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [6] его же, «Nagoya math. J.», 1963, v. 22, p. 33—56; [7] Hochschild G., The structure of Lie groups, S. F., 1965; [8] Humphreys J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, N. Y. — [a. o.], 1972.
В. Л. Попов.

РАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО — число, выражаемое рациональной дробью. Формальная теория Р. ч. строится с помощью пар целых чисел. Рациональной дробью $\frac{a}{b}$ наз. упорядоченная пара (a, b) целых чисел a и b, у к-рой $b \neq 0$. Две рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ наз. эквивалентными (равными) тогда и только тогда, когда $ad = bc$. Это соотношение эквивалентности, будучи рефлексивно, симметрично и транзитивно, разбивает множество всех рациональных дробей на классы эквивалентности. Рациональным числом наз. каждый класс эквивалентности рациональных дробей. Разные классы определяют разные Р. ч. Множество Р. ч. счетно. Р. ч., содержащее рациональную дробь вида $\frac{0}{b}$, наз. нулем. Если r есть Р. ч. и $\frac{a}{b} \in r$, то Р. ч., содержащее рациональную дробь $\frac{-a}{b}$, наз. рациональным числом, противоположным Р. ч. r, и обозначается через $-r$. Р. ч. r наз. положительным (отрицательным), если оно содержит рациональную дробь $\frac{a}{b}$, у к-рой a и b одного знака (разных знаков). Если Р. ч. положительно (отрицательно), то противоположное ему число отрицательно (положительно). В множестве Р. ч. вводится упорядоченность: всякое отрицательное Р. ч. считается меньшим всякого положительного, положительное Р. ч. r' считается меньшим положительного Р. ч. r'': $r' < r''$, если существуют такие рациональные дроби $\frac{a}{b} \in r'$ и $\frac{c}{d} \in r''$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, что $ad < bc$; всякое отрицательное (положительное) Р. ч. r считается меньше (больше) нуля: $r < 0$ $(r > 0)$; отрицательное Р. ч. r' считается меньшим отрицательного Р. ч. r'', если положительное Р. ч. $-r'$ больше положительного Р. ч. $-r''$: $-r' > -r''$. Абсолютная величина $|r|$ Р. ч. определяется как обычно: $|r| = r$, если $r \geqslant 0$, и $|r| = -r$, если $r < 0$.

Суммой рациональных дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ наз. рациональная дробь $\frac{ad+bc}{bd}$, а произведением $\frac{ac}{bd}$. Суммой и произведением Р. ч. r' и r'' наз. классы эквивалентных рациональных дробей, содержащие соответственно сумму или произведение рациональных дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, принадлежащих r' и r'': $\frac{a}{b} \in r'$, $\frac{c}{d} \in r''$. Упорядоченность, сумма и произведение Р. ч. r' и r'' не зависят от выбора представителей в соответствующих классах эквивалентности $\frac{a}{b} \in r'$ и $\frac{c}{d} \in r''$, т. е. однозначно определяются самими Р. ч. r' и r''. Р. ч. образуют упорядоченное поле, обозначаемое $\mathbb{Q}$.

Для обозначения Р. ч. r применяются рациональные дроби $\frac{a}{b}$ из класса эквивалентности, задающего это число: $\frac{a}{b} \in r$. Таким образом, одно и то же Р. ч. может быть записано разными, но эквивалентными рациональными дробями.

Если каждому Р. ч., содержащему рациональную дробь вида $\frac{a}{1}$, поставить в соответствие целое число a, то получится изоморфное отображение множества указанных Р. ч. на кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел. Поэтому Р. ч., содержащие рациональные дроби вида $\frac{a}{1}$, обозначают через a.

Всякая функция вида

$$\varphi(r) = |r|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{1}$$

является метрикой в поле Р. ч. $\mathbb{Q}$, то есть удовлетворяет условиям:

$$1)\ \varphi(r) > 0 \text{ при любом } r \neq 0,\ \varphi(0)=0;$$
$$2)\ \varphi(r' + r'') \leqslant \varphi(r') + \varphi(r'');$$
$$3)\ \varphi(r', r'') = \varphi(r')\,\varphi(r'')$$

при любых $r' \in \mathbb{Q}$ и $r'' \in \mathbb{Q}$. Поле Р. ч. не является полным в метрике (1). Пополнением поля Р. ч. по метрике (1) является поле действительных чисел.

Функция

$$\Psi_p(r) = \rho^{\nu(r)}, \tag{2}$$

где p — простое число, r — Р. ч., представимое в виде

$$r = p^{\nu(r)} \frac{a}{b}$$

($\nu(r)$ — целое, $\frac{a}{b}$ — несократимая рациональная дробь, причем числа a и b не делятся на p), а ρ — фиксированное число, $0<\rho<1$, также является метрикой в поле Р. ч. $\mathbb{Q}$. Она наз. p-адической метрикой. Поле Р. ч. $\mathbb{Q}$ с метрикой (2) не является полным. Пополнением поля Р. ч. по метрике (2) является поле *p-адических чисел*. Метрики (1) и (2) (для всех простых чисел) исчерпывают все нетривиальные метрики в поле Р. ч.

В десятичной записи Р. ч. и только они представимы периодическими десятичными дробями.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Пизо Ш., Заманский М., Курс математики. Алгебра и анализ, пер. с франц., М., 1971.

Л. Д. Кудрявцев.

РАЦИОНАЛЬНОСТИ ТЕОРЕМЫ для алгебраических групп — утверждения о рациональности (унирациональности) или нерациональности тех или иных групповых алгебраич. многообразий. Так как абелевы многообразия всегда нерациональны, то основной интерес представляют Р. т. для линейных алгебраич. групп. Здесь проблема рациональности имеет два существенно различных аспекта: геометрический и арифметический, отвечающие соответственно алгебраически замкнутому и незамкнутому основному полю K. Первые Р. т. над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел были фактически доказаны еще Э. Пикаром (E. Picard) и в современной терминологии устанавливают унирациональность многообразий связных комплексных групп. В явной форме проблема рациональности групповых многообразий была поставлена К. Шевалле [1] лишь в 1954. Прогресс в этом направлении тесно связан с достижениями структурной теории алгебраич. групп. Так, разложение Леви позволяет свести проблему рациональности к редуктивным группам, а разложение Брюа — доказать рациональность многообразий редуктивных групп над любым алгебраически замкнутым полем. Таким образом, в геометрич. случае имеется окончательный результат.

Гораздо более сложной оказывается ситуация для незамкнутых полей K. Примеры нерациональных K-многообразий доставляют уже алгебраич. торы; напр., трехмерный норменный тор $T=R^{(1)}_{L/K}(G_m)$, соответствующий биквадратичному расширению $L=K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ поля K (см. [1]). Этот пример минимален, ибо торы размерности $\leqslant 2$ рациональны. В общем случае алгебраич. торы всегда унирациональны. Произвольные связные K-группы не обязательно унирациональны [3], однако, если поле K совершенно или группа G редуктивна, унирациональность имеет место (см. [1] — [4]). Тем самым проблема рациональности групповых многообразий имеет характер *Люрота проблемы* над незамкнутым полем.

Так как произвольная редуктивная группа является почти прямым произведением тора и полупростой группы, то естественно различать два основных случая: 1) G — тор; 2) G — полупростая группа. В первом случае исследование проводится при помощи различных когомологич. инвариантов (для полупростых групп эти инварианты оказываются неэффективными). Достаточно законченные результаты имеются для торов, разложимых над абелевым расширением поля определения (см. [5]). Первый пример нерационального многообразия в классе полупростых групп был неодносвязной группой, конструкция к-рой фактически содержится в [10]. Возникшая при этом гипотеза о том, что многообразия односвязных групп всегда рациональны, была решена отрицательно В. П. Платоновым при помощи развитой им приведенной K-теории (см. [6], [7]). Оказалось, что приведенная группа Уайтхеда $SK_1(D)$ конечномерной центральной простой K-алгебры D тривиальна, если многообразие, определяемое $SL(1, D)$, рационально над K. Эти результаты были перенесены на унитарные группы [12]. Ряд результатов связан с исследованием рациональности спинорных многообразий $\mathrm{Spin}(n, f)$, где f — невырожденная квадратичная форма над K от n переменных ($\mathrm{char}\, K \neq 2$). Спинорные многообразия рациональны, если либо $n \leqslant 5$, либо поле K является недискретным локально компактным или полем рациональных чисел (см. [8], [9], [11]); для $n \geqslant 6$ существуют нерациональные спинорные многообразия [8]. Последний результат удивителен тем, что $\mathrm{Spin}(n, f)$ является двулистным накрытием рационального многообразия $\mathrm{SO}(n, f)$.

Термин «Р. т.» иногда употребляется в теории алгебраич. групп в несколько ином смысле, применительно к утверждениям о свойствах групп над не обязательно алгебраически замкнутым полем. К утверждениям такого типа относится, напр., теорема Розенлихта — Гротендика о том, что любая связная K-группа обладает максимальным тором, определенным над K (см. [4]).

Лит.: [1] Chevalley C., «J. Math. Soc. Japan», 1954, v. 6, № 3/4, p. 303—24; [2] Demazure M., Grothendieck A., Schemas en groupes, B.— [u. a.], 1970; [3] Rosenlicht M., «Ann. mat. pura appl.», 1957, v. 43, p. 25—50; [4] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [5] Воскресенский В. Е., Алгебраические торы, М., 1977; [6] Платонов В. П., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1976, т. 142, с. 198—207; [7] его же, «Докл. АН БССР», 1977, т. 21, № 3, с. 197—98; [8] его же, «Докл. АН СССР», 1979, т. 248, № 3, с. 524—27; [9] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1981, т. 157, с. 161—69; [10] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [11] Черноусов В. И., «Докл. АН БССР», 1981, т. 25, № 4, с. 293—96; [12] Янчевский В. И., «Матем. сб.», 1979, т. 110, № 4, с. 579—96.

А. С. Рапинчук.

РЕАЛИЗУЕМОСТЬ — один из видов неклассич. *интерпретаций* логических и логико математических языков. Различные интерпретации типа Р. определяются по следующей схеме. Для формул логико-математич. языка определяется отношение «объект e реализует замкнутую формулу F», к-рое сокращенно записывается «erF». Определение носит индуктивный характер:

сначала отношение erF определяется для элементарных формул F, а затем для сложных формул в предположении, что для составляющих их более простых формул это отношение уже определено. Замкнутая формула F наз. реализуемой, или истинной при данной интерпретации, если существует такой объект e, что erF. Формула F, содержащая свободные переменные $x_1, \ldots, x_n$, считается реализуемой, если реализуема замкнутая формула $\forall x_1 \ldots \forall x_n F$.

Впервые интерпретация такого вида, известная как *рекурсивная реализуемость*, была предложена С. Клини (см. [1], [2]) с целью уточнения интуиционистской (конструктивной) семантики языка формальной арифметики в терминах *рекурсивных функций*. Другие понятия Р. являются модификациями рекурсивной Р.

Интуитивный смысл отношения erF такой: объект e кодирует информацию об истинности формулы F. Напр., в рекурсивной Р. натуральное число 0 реализует элементарную формулу вида $s=t$ тогда и только тогда, когда эта формула верна (т. е. значения термов s и t совпадают); если число e реализует дизъюнкцию $A \vee B$, то по нему можно выяснить, какой ее член реализуем, и найти число, его реализующее; по числу, реализующему формулу $\forall x A(x)$, можно построить алгоритм, к-рый по любому натуральному числу n строит реализацию формулы $A(n)$. В качестве реализаций, т. е. объектов, реализующих формулы, чаще всего выступают натуральные числа. Однако при интуиционистской интерпретации языка математич. анализа в качестве реализаций могут использоваться и другие объекты, напр. одноместные теоретико-числовые функции (см., напр., [3]).

Для формул логич. языков, напр. для пропозициональных или предикатных формул, Р. определяется обычно через понятие Р. для того или иного логико-математич. языка Ω. Логич. формула $\mathfrak{A}$ считается реализуемой, если реализуема всякая формула языка Ω, получающаяся подстановкой в $\mathfrak{A}$ формул языка Ω вместо предикатных переменных.

Интерпретации типа Р. нашли широкое применение в исследовании неклассических, прежде всего интуиционистских и конструктивных, логических и логико-математич. теорий. Имеется описание различных понятий Р. и их применений в теории доказательств для исследования интуиционистских теорий (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Kleene S. C., «J. Symbolic Logic», 1945, v. 10, p. 109—24; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Клини С., Весли Р., Основания интуиционистской математики..., пер. с англ., М., 1978; [4] Драгалин А. Г., Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979. *В. Е. Плиско.*

РЕБРО многогранника — сторона грани многогранника.

РЕГРЕССИИ КОЭФФИЦИЕНТ — коэффициент при независимой переменной в уравнении *регрессии*. Так, напр., в уравнении линейной регрессии $E(Y|X=x)= =\beta_0+\beta_1 x$, связывающей случайные величины Y и X, Р. к. β_0 и β_1 равны:

$$\beta_0 = m_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1} m_1, \quad \beta_1 = \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

где ρ — *корреляции коэффициент* X и Y, $m_1 = \mathsf{E}X$, $m_2 = \mathsf{E}Y$, $\sigma_1^2 = \mathsf{D}X$, $\sigma_2^2 = \mathsf{D}Y$. Вычисление оценок Р. к. (выборочных Р. к.) — основная задача *регрессионного анализа*. *А. В. Прохоров.*

РЕГРЕССИИ МАТРИЦА — матрица B коэффициентов регрессии β_{ji}, $j=1, \ldots m$, $i=1, \ldots, r$, в многомерной линейной модели *регрессии*

$$X = BZ + \varepsilon. \qquad (*)$$

Здесь X — матрица с элементами X_{jk}, $j=1, \ldots, m$, $k=1, \ldots, n$, X_{jk}, $k=1, \ldots, n$, — наблюдения над j-й компонентой исходной m-мерной случайной величины; Z — матрица известных регрессионных переменных z_{ik}, $i=1, \ldots, r$, $k=1, \ldots, n$; ε — матрица ошибок ε_{jk}, $j=1, \ldots, m$, $n=1, \ldots, n$, с $\mathsf{E}\varepsilon_{jk}=0$. Элементы β_{ji} Р. м. В неизвестны и подлежат оценке. Модель (*) является обобщением на m-мерный случай общей линейной модели *регрессионного анализа.*

Лит.: [1] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976. *А. В. Прохоров.*

РЕГРЕССИИ ПОВЕРХНОСТЬ (гиперповерхность) — общее геометрич. представление уравнения регрессии. Если заданы случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и

$$f(x_2, \ldots, x_n) = \mathsf{E}(X_1 \mid X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

— регрессия X_1 по $X_2, \ldots, X_n$, то уравнение $y=f(x_2, \ldots, x_n)$ задает в n-мерном пространстве соответствующую Р. п. При $n=2$ Р. п. обычно наз. кривой регрессии. Иногда эти термины используются для того, чтобы подчеркнуть, что соответствующие уравнения регрессии не являются линейными. В линейном случае Р. п. наз. соответственно плоскостью регрессии и прямой регрессии. См. *Регрессия.* *А. В. Прохоров.*

РЕГРЕССИИ СПЕКТР — спектр случайного процесса, входящего в регрессионную схему для стационарных временных рядов. Именно, пусть случайный процесс y_t, наблюдаемый при $t=1, \ldots, n$, представляется в виде

$$y_t = m_t + x_t, \tag{1}$$

где x_t — стационарный процесс с $\mathsf{E}x_t=0$, а среднее значение $\mathsf{E}y_t=m_t$ выражено в форме линейной регрессии

$$m_t = \sum\nolimits_{k=1}^{s} \beta_k \varphi_t^{(k)}, \tag{2}$$

где $\varphi^{(k)}=(\varphi_1^{(k)}, \ldots, \varphi_n^{(k)})$, $k=1, \ldots, s$, — известные регрессионные векторы, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — неизвестные *регрессии коэффициенты.* Пусть $M(\lambda)$ — спектральная функция распределения регрессионных векторов $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(s)}$. Спектром регрессии для $M(\lambda)$ наз. множество всех λ таких, что $M(\lambda_2)-M(\lambda_1)>0$ для любого интервала (λ_1, λ_2), содержащего λ, $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$.

Р. с. играет важную роль в задачах оценки коэффициентов регрессии в схеме (1) — (2). В терминах элементов Р. с. выражается, напр., необходимое и достаточное условие асимптотич. эффективности оценок β по методу наименьших квадратов.

Лит.: [1] Grenander U., Rosenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, Stockh., 1956. *А. В. Прохоров.*

РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ — раздел математич. статистики, объединяющий практич. методы исследования регрессионной зависимости между величинами по статистич. данным (см. *Регрессия*). Проблема регрессии в математич. статистике характерна тем, что о распределениях изучаемых величин нет достаточной информации. Пусть, напр., имеются основания предполагать, что случайная величина Y имеет нек-рое распределение вероятностей при фиксированном значении x другой величины, так что

$$\mathsf{E}(Y \mid x) = g(x, \beta),$$

где β — совокупность неизвестных параметров, определяющих функцию $g(x)$, и нужно по результатам наблюдений определить значения параметров. В зависимости от природы задачи и целей анализа результаты эксперимента $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ по-разному интерпретируются в отношении переменной x. Для установления связи между величинами в эксперименте используется модель, основанная на упрощенных допущениях: величина x является контролируемой величиной, значения к-рой заранее задаются при планировании эксперимента, а наблюдаемые значения y представимы в виде

$$y_i = g(x_i, \beta) + \varepsilon_i, \quad i=1, \ldots, n,$$

где величины ε_i характеризуют ошибки, независимые при различных измерениях и одинаково распределенные с нулевым средним и постоянной дисперсией. В случае неконтролируемой переменной результаты наблюдений $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ представляют собой выборку из нек-рой двумерной совокупности. Методы Р. а. одинаковы и в том, и в другом случае, однако интерпретация результатов различается (в последнем случае анализ существенно дополняется методами теории *корреляции*).

Исследование регрессии по экспериментальным данным производится методами, основанными на принципах средней квадратич. регрессии. Р. а. решает следующие основные задачи: 1) выбор модели регрессии, что заключает в себе предположения о зависимости функций регрессии от x и β, 2) оценка параметров β в выбранной модели методом наименьших квадратов, 3) проверка статистич. гипотез о регрессии.

Наиболее естественной с точки зрения единого метода оценки неизвестных параметров является модель регрессии, линейная относительно этих параметров:

$$g(x, \beta) = \beta_0 g_0(x) + \ldots + \beta_m g_m(x).$$

Выбор функций $g_i(x)$ иногда определяется по расположению экспериментальных значений (x, y) на диаграмме рассеяния, чаще — теоретич. соображениями. Предполагается также, что дисперсия σ^2 результатов наблюдений постоянна (или пропорциональна известной функции от x). Стандартный метод оценки регрессии основан на использовании многочлена нек-рой степени m, $1 \leqslant m < n$:

$$g(x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_m x^m$$

или в простейшем случае — линейной функции (*линейная регрессия*)

$$g(x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Существуют критерии линейности и рекомендации по выбору степени аппроксимирующего многочлена.

В соответствии с принципами средней квадратич. регрессии оценка неизвестных *регрессии коэффициентов* $\beta_0, \ldots, \beta_m$ и дисперсии σ^2 осуществляется методом наименьших квадратов. Согласно этому методу в качестве статистич. оценок параметров $\beta_0, \ldots, \beta_m$ выбираются такие значения $\hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_m$, к-рые обращают в минимум выражение

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - g(x_i))^2.$$

Многочлен $\hat{g}(x) = \hat{\beta}_0 + \ldots + \hat{\beta}_m x^m$, построенный методом наименьших квадратов, наз. **эмпирической линией регрессии** и является статистич. оценкой неизвестной истинной линии регрессии. При гипотезе линейности регрессии уравнение эмпирич. прямой регрессии имеет вид

$$\hat{g}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x,$$

где

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}, \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - y)}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_i y_i.$$

Случайные величины $\hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_m$ наз. **выборочными коэффициентами регрессии**. Несмещенная оценка параметра σ^2 дается формулой

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{g}(x_i))^2 / (n - m).$$

Если дисперсия зависит от x, то метод наименьших квадратов применим с нек-рыми видоизменениями.

Если изучается зависимость случайной величины Y от нескольких переменных $x_1, \ldots, x_k$, то общую линейную модель регрессии удобнее записывать в матричной форме: вектор наблюдений y с независимыми компонентами $y_1, \ldots, y_n$ имеет среднее значение и ковариационную матрицу

$$\mathsf{E}(Y \mid x_1, \ldots, x_k) = X\beta, \ \mathsf{D}(Y \mid x_1, \ldots, x_k) = \sigma^2 I, \quad (*)$$

где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ — вектор коэффициентов регрессии, $X = \|x_{ij}\|$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$, — матрица известных величин, связанных друг с другом, вообще говоря, произвольным образом, I — единичная матрица n-го порядка; при этом $n > k$ и $|X^{\mathsf{T}} X| \neq 0$. В более общем случае допускается корреляция между наблюдениями y_i:

$$\mathsf{E}(Y \mid x_1, \ldots, x_k) = X\beta, \ \mathsf{D}(Y \mid x_1, \ldots, x_k) = \sigma^2 A,$$

где матрица A известна, но эта схема сводится к модели (*). Несмещенной оценкой β по методу наименьших квадратов является величина

$$\widehat{\beta} = (X^{\mathsf{T}} X)^{-1} X^{\mathsf{T}} y,$$

а смещенной оценкой для σ^2 служит

$$s^2 = \frac{1}{n-k} (y^{\mathsf{T}} y - \widehat{\beta}^{\mathsf{T}} X^{\mathsf{T}} y).$$

Модель (*) является наиболее общей линейной моделью, поскольку она применима к различным регрессионным ситуациям и включает в себя все виды *параболической регрессии* Y по $x_1, \ldots, x_k$ (в частности, рассмотренная выше параболич. регрессия Y по x порядка m может быть сведена к модели (*), в к-рой m регрессионных переменных функционально связаны). При таком линейном понимании Р. а. задача оценки β и вычисления ковариационной матрицы оценок $\mathsf{D}\widehat{\beta} = \sigma^2 (X^{\mathsf{T}} X)^{-1}$ сводится к задаче обращения матрицы $X^{\mathsf{T}} X$.

Указанный метод построения эмпирич. регрессии в предположении нормального распределения результатов наблюдений приводит к оценкам для β и σ^2, совпадающим с оценками наибольшего правдоподобия. Однако оценки, полученные этим методом, являются в нек-ром смысле наилучшими и в случае отклонения от нормальности, если только объем выборки достаточно велик.

В данной матричной форме общая линейная модель регрессии (*) допускает простое обобщение на тот случай, когда наблюдаемые величины y_i являются векторными случайными величинами. При этом никакой новой статистич. задачи не возникает (см. *Регрессии матрица*).

Задачи Р. а. не ограничиваются построением точечных оценок параметров β и σ^2 общей линейной модели (*). Проблема точности построенной эмпирич. зависимости наиболее эффективно разрешается при допущении, что вектор наблюдений y распределен нормально. Если вектор y распределен нормально и любая оценка $\widehat{\beta}$ является линейной функцией от y, можно заключить, что величина $\widehat{\beta}_i$ распределена нормально со средним β_i и дисперсией $\mathsf{D}\widehat{\beta}_i = \sigma^2 b_{ii}$, где b_{ii} — диагональный элемент матрицы $(X^{\mathsf{T}} X)^{-1}$. Кроме того, оценка s^2 для σ^2 распределена независимо от любой компоненты вектора $\widehat{\beta}$, а величина $(n-k)s^2/\sigma^2$ имеет *«хи-квадрат» распределение* с $(n-k)$ степенями свободы. Отсюда следует, что статистика

$$t = (\widehat{\beta}_i - \beta_i)/[s^2 b_{ii}]^{1/2}$$

подчиняется *Стьюдента распределению* с $n-k$ степенями свободы. Этот факт используется для построения доверительных интервалов для параметров β_i и для проверки гипотез о значениях, к-рые принимает величина β_i. Кроме того, появляется возможность найти доверительные интервалы для $\mathsf{E}(Y|x_1, \ldots, x_k)$ при фиксированных значениях всех регрессионных переменных и доверительные интервалы, содержащие следующее $(n+1)$-е значение величины y (т. н. интервалы предсказания). Наконец, можно на основе вектора выборочных коэффициентов регрессии $\hat{\beta}$ построить доверительный эллипсоид для вектора β или для любой совокупности неизвестных коэффициентов регрессии, а также доверительную область для всей линии или прямой регрессии.

Р. а. является одним из наиболее распространенных методов обработки экспериментальных данных при изучении зависимостей в физике, биологии, экономике, технике и др. областях. На моделях Р. а. основаны такие разделы математич. статистики, как дисперсионный анализ и планирование эксперимента, эти модели широко используются в *многомерном статистическом анализе*.

Лит.: [1] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969; [3] Айвазян С. А., Статистическое исследование зависимостей, М., 1968; [4] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [5] Дрейпер Н., Смит Г., Прикладной регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1973. *А. В. Прохоров.*

РЕГРЕССИЯ — зависимость среднего значения какой-либо случайной величины от нек-рой другой величины или от нескольких величин. Если, например, при каждом значении $x=x_i$ наблюдается n_i значений $y_{i1}, \ldots, y_{in_i}$ случайной величины Y, то зависимость средних арифметических

$$\bar{y}_i=\frac{1}{n_i}(y_{i1}+\cdots+y_{in_i})$$

этих значений от x_i и является Р. в статистич. понимании этого термина. При обнаруженной закономерности изменения $\bar{y}$ с изменением x предполагается, что в основе наблюдаемого явления лежит вероятностная зависимость: при каждом фиксированном значении x случайная величина Y имеет определенное распределение вероятностей с математич. ожиданием, к-рое является функцией x:

$$\mathsf{E}(Y|x)=m(x).$$

Зависимость $y=m(x)$, где x играет роль «независимой» переменной, наз. регрессией (или функцией регрессии) в вероятностном понимании этого термина. График функции $m(x)$ наз. линией регрессии, или кривой регрессии, величины Y по x. Переменная x наз. регрессионной переменной, или регрессором. Точность, с к-рой линия регрессии Y по x передает изменение Y в среднем при изменении x, измеряется дисперсией величины Y, вычисляемой для каждого значения x:

$$\mathsf{D}(Y|x)=\sigma^2(x).$$

Графически зависимость дисперсии $\sigma^2(x)$ от x выражается т. н. скедастической линией. Если $\sigma^2(x)=0$ при всех значениях x, то с вероятностью 1 величины связаны строгой функциональной зависимостью. Если $\sigma^2(x)\neq 0$ ни при каком значении x и $m(x)$ не зависит от x, то регрессия Y по x отсутствует.

В теории вероятностей задача Р. решается применительно к такой ситуации, когда значения регрессионной переменной x соответствуют значениям нек-рой случайной величины X и предполагается известным совместное распределение вероятностей величин X и Y (при этом математич. ожидание $\mathsf{E}(Y|x)$ и дисперсия $\mathsf{D}(Y|x)$ будут соответственно условным математич. ожиданием и условной дисперсией случайной величины

Y при фиксированном значении $X=x$). В этом случае определены две Р.: Y по x и X по y, и понятие Р. может быть использовано также для того, чтобы ввести нек-рые меры взаимосвязанности случайных величин X и Y, определяемые как характеристики степени концентрации распределения около линий Р. (см. *Корреляция*).

Функции Р. обладают тем свойством, что среди всех действительных функций $f(x)$ минимум математич. ожидания $\mathsf{E}(Y-f(x))^2$ достигается для функции $f(x)=m(x)$, то есть регрессия Y по x дает наилучшее (в указанном смысле) представление величины Y. Наиболее важным является тот случай, когда регрессия Y по x линейна, т. е.

$$\mathsf{E}(Y \mid x)=\beta_0+\beta_1(x).$$

Коэффициенты β_0 и β_1, наз. коэффициентами Р., легко вычисляются:

$$\beta_0=m_Y-\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}m_X,\ \beta_1=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

(здесь ρ — *корреляции коэффициент* X и Y, $m_X=\mathsf{E}X$, $m_Y=\mathsf{E}Y$, $\sigma_X^2=\mathsf{D}X$, $\sigma^2=\mathsf{D}Y$), и прямая регрессии Y по x имеет вид

$$y=m_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)$$

(аналогичным образом находится прямая регрессии X по y). Точная линейная Р. имеет место в случае, когда двумерное распределение величин X и Y является нормальным.

В условиях статистич. приложений, когда для точного определения Р. нет достаточных сведений о форме совместного распределения вероятностей, возникает задача приближенного нахождения Р. Решению этой задачи может служить выбор из всех функций $g(x)$, принадлежащих заданному классу, такой функции, к-рая дает наилучшее представление величины Y в том смысле, что минимизирует математич. ожидание $\mathsf{E}(Y-g(X))^2$. Найденная функция наз. средней квадратической Р.

Простейшим будет случай линейной средней квадратической Р., когда отыскивают наилучшую линейную аппроксимацию величины Y посредством величины X, т. е. такую линейную функцию $g(x)=\beta_0+\beta_1 x$, для к-рой выражение $\mathsf{E}(Y-g(X))^2$ принимает наименьшее возможное значение. Данная экстремальная задача имеет единственное решение

$$\beta_0=m_Y-\beta_1 m_X,\quad \beta_1=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X},$$

т. е. вычисление приближенной линии Р. приводит к тому же результату, к-рый получен в случае точной линейной Р.:

$$y=m_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X).$$

Минимальное значение $\mathsf{E}(Y-g(X))^2$ при вычисленных значениях параметров равно $\sigma_Y^2(1-\rho^2)$. Если регрессия $m(x)$ существует, то при любых β_0 и β_1 имеет место соотношение

$$\mathsf{E}[Y-\beta_0-\beta_1 X]^2=\mathsf{E}[Y-m(X)]^2+\mathsf{E}[m(X)-\beta_0-\beta_1 X]^2,$$

откуда следует, что прямая средней квадратич. регрессии $y=\beta_0+\beta_1 x$ дает наилучшее приближение к линии регрессии $m(x)$, если измерять расстояние вдоль оси y. Поэтому если линия $m(x)$ есть прямая, то она совпадает с прямой средней квадратической Р.

В общем случае, когда Р. сильно отличается от линейной, можно поставить задачу нахождения многочлена $g(x)=\beta_0+\beta_1 x+\ldots+\beta_m x^m$ нек-рой степени m, для к-рого среднее значение $\mathsf{E}(Y-g(x))^2$ имеет возможно меньшее значение.

Такое решение задачи соответствует параболической (или полиномиальной) средней квадратической Р. (см. *Параболическая регрессия*) порядка m. Кривая $y=g(x)$ есть парабола m-го порядка, дающая наилучшую аппроксимацию истинной линии Р. Обобщением параболической Р. служит функция Р., выраженная линейной комбинацией тех или иных заданных функций:

$$g(x)=\beta_0\varphi_0(x)+\beta_1\varphi_1(x)+\ldots+\beta_m\varphi_m(x).$$

Наиболее важное значение имеет случай, когда $\varphi_0(x)$, $\ldots$, $\varphi_m(x)$ — ортогональные многочлены соответствующих порядков, построенные по распределению X. Другими примерами нелинейной (криволинейной) Р. являются случаи тригонометрической Р., показательной Р., и т. п.

Понятие Р. естественным образом обобщается на тот случай, когда вместо одной регрессионной переменной рассматривается нек-рое множество переменных. Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют совместное распределение вероятностей, то множественная Р. определяется, напр., как регрессия X_1 по $x_2, \ldots, x_n$:

$$\mathsf{E}(X_1 \mid X_2=x_2, \ldots, X_n=x_n)=m_1(x_2, \ldots, x_n).$$

Соответствующее уравнение определяет поверхность регрессии X_1 по $x_2, \ldots, x_n$. Линейная регрессия X_1 по $x_2, \ldots, x_n$ имеет вид

$$\mathsf{E}(X_1 \mid x_2, \ldots, x_n)=\beta_2x_2+\ldots+\beta_nx_n,$$

где $\beta_2, \ldots, \beta_n$ — коэффициенты Р. (при $\mathsf{E}X_k=0$). Линейная средняя квадратическая Р. величины X_1 по $x_2, \ldots, x_n$ определяется как наилучшая линейная оценка величины X_1 величинами $X_2, \ldots, X_n$ в смысле обращения в минимум выражения

$$\mathsf{E}(X_1-\beta_2X_2-\ldots-\beta_nX_n)^2.$$

Соответствующая плоскость Р. дает наилучшую аппроксимацию поверхности регрессии $x_1=m(x_2, \ldots, x_n)$, если последняя существует. Если поверхность Р. есть плоскость, то она необходимо совпадает с плоскостью средней квадратической Р. (так будет в случае, когда совместное распределение всех n величин нормально).

Простым примером регрессии Y по X является зависимость между Y и X, к-рая выражается соотношением $Y=u(x)+\delta$, где $u(x)=\mathsf{E}(Y \mid X=x)$, а случайные величины X и δ независимы. Это представление полезно, когда планируется эксперимент для изучения функциональной связи $y=u(x)$ между неслучайными величинами y и x. Эта же модель Р. используется во многих приложениях при изучении характера зависимости случайной величины Y от неслучайной величины x. На практике выбор функции $y=u(x)$ и оценку неизвестных коэффициентов Р. по экспериментальным данным производят методами *регрессионного анализа*.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973. *А. В. Прохоров.*

РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МЕТОД — метод построения приближенных решений некорректных задач, состоящий в том, что в качестве приближенных решений некорректных задач [точнее — некорректно поставленных задач (н. п. з.)] берутся значения регуляризирующего оператора с учетом приближенного характера исходной информации (см. *Некорректные задачи*).

Для определенности ниже рассматривается задача нахождения решений функциональных уравнений вида $Az=u$, в к-рых z и u — элементы метрич. пространств

F и U с расстоянием $\rho_F(,)$ и $\rho_U(,)$. Если, напр., A — вполне непрерывный оператор, то решения такого уравнения не обладают свойством устойчивости к малым изменениям правой части u. Пусть вместо точных значений исходной информации $(\bar{A}, \bar{u})$ даны их приближения $(\tilde{A}, \tilde{u})$. В этих условиях речь может идти лишь о нахождении приближений к решению $\bar{z}$ уравнения $\bar{A}z=\bar{u}$. Нельзя в качестве приближенного решения н. п. з. такого вида с приближенной исходной информацией $(\tilde{A}, \tilde{u})$ брать точное решение уравнения $\tilde{A}z=\tilde{u}$, т. к. такого решения может не существовать, а если оно и существует, то не будет устойчивым к малым изменениям исходной информации и, следовательно, такое «решение» может не допускать физич. интерпретации. В дальнейшем полагается для простоты, что приближенной может быть лишь правая часть u, а оператор A задан точно.

Пусть δ — оценка уклонения $\tilde{u}$ от $\bar{u}$, т. е. расстояния $\rho_U(\tilde{u}, \bar{u})$, и $F_0 \subset F$ — заданный класс возможных решений (моделей сравнения). Естественно искать приближенные решения уравнения $Az=\tilde{u}$ среди элементов $z \in F_0$, сопоставимых с исходной информацией, т. е. таких, что $\rho_U(Az, \tilde{u}) \leqslant \delta$. Пусть F_δ — множество всех таких элементов из F_0. Если в выбранном классе F_0 возможных решений нет элементов (напр., функций $z(s)$), сопоставимых с исходными данными, то это значит, что элементы z из F_0 имеют слишком упрощенную (грубую) структуру. В этом случае надо расширять класс F_0, беря, возможно, последовательность расширяющихся классов $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$, пока не найдется класс F_n, содержащий элементы (напр., функции), сопоставимые с исходными данными.

Если F_n не пусто, то оно может содержать существенно отличающиеся друг от друга элементы(функции). В таких случаях одно лишь требование сопоставимости возможных решений с исходными данными не может служить критерием нахождения однозначно определенных приближенных решений уравнений $Az=\tilde{u}$, т. к. нет достаточных оснований для выбора в качестве приближенного решения того или иного сопоставимого элемента из F_n.

Для однозначного определения устойчивых решений необходим нек-рый принцип отбора сопоставимых с $\tilde{u}$ решений. Обычно его формулируют, пользуясь смыслом задачи. Такой отбор может быть произведен, напр., по принципу выбора элемента (функции) из F_n, имеющего минимальную сложность. Понятие сложности элемента z может быть формализовано, напр., с помощью функционалов сложности $\Omega[z]$ — непрерывных, неотрицательных и удовлетворяющих нек-рым специальным условиям (см. [1]). За меру сложности элемента z принимается значение функционала $\Omega[z]$. Так, если элементами z являются непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции $z(s)$ класса W_2^1, то функционал сложности $\Omega[z]$ можно взять, напр., в виде

$$\Omega[z]=\int_a^b \left\{ z^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \right\} ds.$$

Желание искать приближенные решения уравнений $Az=\tilde{u}$ среди простейших элементов (функций), сопоставимых с исходными данными, приводит к задаче нахождения элемента из F_δ, минимизирующего $\Omega[z]$ на F_δ. Если оператор A линейный и функционал $\Omega[z]$ не имеет локальных минимумов на области своего определения F_Ω, то эта задача может быть сведена (см. подробнее в [1]) к задаче нахождения элемента z_α из множества $F_\delta \cap F_\Omega$, минимизирующего функционал

$$M^\alpha[z, A, \tilde{u}]=\rho_U^2(Az, \tilde{u})+\alpha\Omega[z].$$

Значение параметра α (параметра регуляризации) должно быть согласовано с уровнем погрешности исходных данных. Его можно определить, напр., по невязке, т. е. из условия $\rho_U(Az_\alpha, \tilde{u})=\delta$, если известно число δ. Но возможны и др. способы определения α (см. [1]). Таким образом, параметр α должен зависеть от δ и $\tilde{u}$, $\alpha=\alpha(\delta, \tilde{u})$. Элемент $z_{\alpha(\delta,\tilde{u})}$ и принимается за приближенное решение уравнения $Az=\tilde{u}$. Это и есть одна из форм разработанного в [2], [3] Р. м. Аналогично строятся приближенные решения уравнений $\tilde{A}z=\tilde{u}$ с приближенно заданным оператором $\tilde{A}$ и правой частью $\tilde{u}$. При этом минимизируется функционал типа $M^\alpha[z, \tilde{A}, \tilde{u}]$ (см., напр., [1]). Возможны и другие формы Р. м. и применение его к иным классам задач(см. [1]). Р. м. развит и для решения нелинейных задач (см. [1], [4]).

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979; [2] Тихонов А. Н., «Докл. АН СССР», 1963, т. 151, № 3, с. 501—04; [3] его же, там же, т. 153, № 1, с. 49—52; [4] Лаврентьев М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосиб., 1962. *В. Я. Арсенин, А. Н. Тихонов.*

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ — использование той или иной формы отбора допустимых решений при построении устойчивых к исходной информации приближенных решений некорректно поставленных задач (см. также *Некорректные задачи* и *Регуляризации метод*).

В. Я. Арсенин, А. Н. Тихонов.

РЕГУЛЯРНАЯ ГРАНИЧНАЯ ТОЧКА — точка y_0 границы Γ области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, в к-рой для любой непрерывной на Γ функции $f(y)$ обобщенное решение $u(x)$ *Дирихле задачи* в смысле Винера — Перрона (см. *Перрона метод*) принимает граничное значение $f(y_0)$, то есть

$$\lim_{x\to y_0,\, x\in D} u(x)=f(y_0).$$

Р. г. т. для области D образуют множество R, в точках к-рого дополнение $CD=\mathbb{R}^n\setminus D$ не является разреженным множеством; множество $\Gamma\setminus R$ *иррегулярных граничных точек* есть полярное множество типа F_σ. Если все точки Γ суть Р. г. т., то область D наз. регулярной относительно задачи Дирихле.

Для того чтобы точка $y_0\in\Gamma$ была Р. г. т., необходимо и достаточно, чтобы в пересечении $U_0=U\cap D$ области D с нек-рой окрестностью U точки y_0 существовал *барьер*, т. е. супергармонич. функция $\omega(x)>0$ в U_0 такая, что $\lim\limits_{x\to y_0}\omega(x)=0$ (критерий барьера Лебега). А. Лебег (H. Lebesgue, 1912) впервые показал, что при $n\geqslant 3$ вершина достаточно острого входящего в D острия может не быть Р. г. т.

Пусть

$$E_k=\{x\in CD: 2^{-k}\leqslant |x-y_0|\leqslant 2^{-k+1}\},$$

$c_k=C(E_k)$ — *емкость* E_k. Для того чтобы точка $y_0\in\Gamma$ была Р. г. т., необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(n-2)} c_k,\ n\geqslant 3,$$

при $n=2$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k c_k,$$

причем здесь

$$E_k=\left\{x\in CD: 2^k\leqslant \ln\frac{1}{|x-y_0|}\leqslant 2^{k+1}\right\}$$

(критерий Винера).

При $n=2$ точка $y_0\in\Gamma$ является Р. г. т., если существует непрерывный путь $x(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, такой, что $x(1)=y_0$, $x(t)\in CD$ при $0\leqslant t<1$. При $n\geqslant 3$ точка $y_0\in\Gamma$ является Р. г. т., если ее можно коснуться вершиной прямого кругового конуса, принадлежащего CD в достаточно малой окрестности y_0. В случае области D компактифицированного пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$, $n \geqslant 3$, бесконечно удаленная точка $\infty \in \Gamma$ всегда является Р. г. т.; при $n=2$ бесконечно удаленная точка $\infty \in \Gamma$ является Р. г. т., если существует непрерывный путь $x(t)$, $0 \leqslant t < 1$, такой, что $x(t) \in CD$ при $0 \leqslant t < 1$ и $\lim\limits_{t \to 1-0} x(t) = \infty$.

См. также *Иррегулярная граничная точка.*

Лит.: [1] Келдыш М. В., «Успехи матем. наук», 1941, в. 8, с. 171—232; [2] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [3] Хейман У., Кеннеди П., Субгармонические функции, пер. с англ., М., 1980.

Е. Д. Соломенцев.

РЕГУЛЯРНАЯ p-ГРУППА — p-группа G такая, что для любых ее элементов a, b и любого целого $n = p^\alpha$ справедливо равенство

$$(ab)^n = a^n b^n s_1^n \ldots s_t^n,$$

где $s_1, \ldots, s_t$ — нек-рые элементы из *коммутанта* подгруппы, порожденной элементами a и b. Подгруппы и факторгруппы Р. p-г. регулярны. Конечная p-группа регулярна тогда и только тогда, когда для любых ее элементов a и b справедливо равенство

$$a^p b^p = (ab)^p s^p,$$

где s — нек-рый элемент коммутанта подгруппы, порожденной элементами a и b.

Элементы Р. p-г. G, имеющие вид a^{p^α}, $a \in G$, образуют характеристич. подгруппу $C^\alpha(G)$, а элементы порядка, не большего числа p^α,— вполне характеристич. подгруппу $C_\alpha(G)$.

Примерами Р. p-г. являются любая p-группа, класс нильпотентности к-рой меньше p, а также любая p-группа порядка, не большего числа p^p. Для любого p существует нерегулярная p-группа порядка p^{p+1}, а именно, силовская подгруппа S_p симметрич. группы $S(p^2)$ степени p^2 (она изоморфна сплетению циклич. группы порядка p с самой собой).

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

Н. Н. Вильямс.

РЕГУЛЯРНАЯ МЕРА — мера, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(T)$ топологич. пространства T такая, что для любого борелевского множества $X \in \mathfrak{B}(T)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество $G \subset T$, покрывающее $X: X \subset G$ и $\mu(G \setminus X) < \varepsilon$. Равносильное определение: для любого $X \in \mathfrak{B}(T)$ и $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое множество $F \subset X$ такое, что $\mu(X \setminus F) < \varepsilon$.

Р. А. Минлос.

РЕГУЛЯРНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА — понятие теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с комплексным независимым переменным. Точка $a \in \mathbb{C}$ наз. Р. о. т. уравнения

$$y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, y = 0 \qquad (1)$$

или системы

$$\dot{z} = A(t)\, z, \quad z \in \mathbb{C}^n, \qquad (2)$$

с аналитич. коэффициентами, если a — изолированная особенность коэффициентов и все решения уравнения (1) или системы (2) растут не быстрее, чем $|t-a|^d$ для нек-рого $d \in \mathbb{R}$, когда t стремится к a, оставаясь внутри произвольного острого угла с вершиной a. Последнее ограничение вызвано тем, что в окрестности Р. о. т. решения являются неоднозначными аналитич. функциями и при $t \to a$ по произвольной кривой могут расти существенно быстрее, чем при стремлении $t \to a$ по лучу с вершиной a.

Для того чтобы особая точка коэффициентов уравнения (1) или системы (2) была Р. о. т., необходимо, чтобы она была *полюсом*, а не *существенно особой точкой* коэффициентов. Для уравнений (1) имеет место условие Фукса: особая точка $t=0$ коэффициентов $a_j(t)$ регулярна для уравнений (1) тогда и только тогда, когда все функции $(t-a)^j a_j(t)$, $j=1, \ldots, n$, голоморфны в нуле. Для систем (2) справедливо следующее достаточное условие: если элементы матрицы $A(t)$ имеют простой полюс в точке a, то эта точка — Р. о. т. системы (2). Явное условие на матрицу $A(t)$, необходимое и достаточное для того, чтобы точка a была Р. о. т. системы (2), пока (1983) не получено.

Лит.: [1] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950; [2] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, пер. с англ., М., 1958; [3] Levelt A. H. M., «Proc. Koninkl. Nederl. akad. wet. Ser. A», 1961, v. 64, № 4, p. 362—403; [4] Deligne P., Equations différentielles à points singuliers réguliers, B., 1970 (Lect. Notes in Math., № 163); [5] Plemelj J., Problems in the sense of Riemann and Klein, Univ. of Adelaide, 1964. *Ю. С. Ильяшенко.*

РЕГУЛЯРНАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, каждый элемент к-рой регулярен.

Произвольная Р. п. S содержит идемпотенты (см. *Регулярный элемент*), и строение S в значительной степени определяется «строением» и «расположением» в S множества всех ее идемпотентов $E(S)$. Р. п. с единственным идемпотентом — это в точности группы. На $E(S)$ прежде всего можно смотреть как на частично упорядоченное множество относительно естественного частичного порядка (см. *Идемпотент*); известны структурные теоремы, описывающие Р. п. S с нек-рыми естественными ограничениями на множество $E(S)$. Одно из таких ограничений (для полугрупп с нулем) состоит в том, что все ненулевые идемпотенты примитивны (см. *Вполне простая полугруппа*); полугруппа с этим свойством наз. примитивной. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: а) S есть примитивная Р. п., б) S есть Р. п., равная объединению своих 0-минимальных (см. *Минимальный идеал*) правых идеалов, в) S есть 0-*прямое объединение* вполне 0-простых полугрупп. Описано строение Р. п., у к-рых $E(S)$ есть цепь, упорядоченная по типу отрицательных целых чисел [2].

Более информативный взгляд на $E(S)$ состоит в рассмотрении на этом множестве частичной операции $\circ$, заданной следующим образом. Если для e, $f \in E(S)$ хотя бы одно из произведений ef, fe равно одному из элементов e, f, то $ef \in E(S)$; полагают тогда $e \circ f = ef$. Возникающая частичная алгебра может быть охарактеризована аксиомами, использующими два отношения квазипорядка ω^r и ω^l, тесно связанные с заданной частичной операцией (реализация этих отношений в $E(S)$ такова: $e\omega^r f$ означает $fe=e$, $e\omega^l f$ означает $ef=e$; тогда $\omega^r \cap \omega^l$ есть отношение естественного частичного порядка на $E(S)$); такая частичная алгебра наз. биупорядоченным множеством (см. [5]). Произвольная Р. п. может быть определенным образом сконструирована из биупорядоченного множества и групп. Таким образом, в терминах биупорядоченных множеств можно проводить классификацию Р. п. Среди исследованных в этом направлении типов полугрупп — комбинаторные Р. п. (см. [7]), т. е. имеющие лишь одноэлементные подгруппы.

Гомоморфный образ Р. п. будет Р. п. Всякий *нормальный комплекс* Р. п., являющийся подполугруппой, содержит идемпотент. Произвольная конгруэнция на Р. п. однозначно определяется своими классами, содержащими идемпотенты. Конгруэнция на Р. п. S разделяет идемпотенты тогда и только тогда, когда она содержится в отношении $\mathcal{H}$ (см. *Грина отношения эквивалентности*); множество таких конгруэнций составляет модулярную подрешетку с нулем и единицей в решетке всех конгруэнций на S. Р. п. наз. фундаментальной, если эта подрешетка состоит лишь из отношения равенства. Всякая комбинаторная Р. п. будет фундаментальной. Фундаментальные Р. п. важны не только как один из более обозримых типов Р. п., но и в силу определенной «универсальности» их класса для Р. п. А именно, для любого биупорядоченного множества E можно канонич. образом сконструировать фундаментальную Р. п. T_E, для к-рой E будет биупорядоченным множеством всех идемпотентов, причем для любой Р. п. S такой, что $E(S)=E$, существует разделяющий идемпотенты гомоморфизм $\varphi: S \to T_E$, для к-рого $\varphi(S)$ будет подполугруппой в T_E, содержащей E (о различных конструкциях для T_E см. [3], [5], [8], [10]). Р. п. S фундаментальна тогда и только тогда, когда гомоморфизм φ инъективен.

Если S — Р. п., то подполугруппа $\langle E(S) \rangle$, порожденная всеми ее идемпотентами, также будет Р. п. Подполугруппа $\langle E(S) \rangle$ оказывает существенное влияние на строение S. Р. п. идемпотентно порождена тогда и только тогда, когда таков каждый ее главный фактор [10]. В идемпотентно порожденной Р. п. S для произвольного элемента x существует представление $x = e_1 e_2 \ldots e_n$, где $e_i \in E(S)$ и $e_i (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) e_{i+1}$ при $i = 1, \ldots, n-1$ (здесь $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ — отношения эквивалентности Грина) (см. [5]). Последовательность идемпотентов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ с указанным свойством наз. E - цепью. В бипростой идемпотентно порожденной полугруппе любые два идемпотента связаны нек-рой E-цепью, и если они сравнимы в смысле естественного частичного порядка, то длина такой цепи $\geqslant 4$.

Если $\langle E(S) \rangle = E(S)$, т. е. произведение любых двух идемпотентов снова есть идемпотент, то Р. п. S наз. ортодоксальной. Класс ортодоксальных полугрупп содержит, в частности, все инверсные полугруппы. Полугруппа ортодоксальна тогда и только тогда, когда каждый ее главный фактор ортодоксален. Имеются структурные теоремы об ортодоксальных полугруппах (см. [4], [9]).

Отношение естественного частичного порядка на $E(S)$ может быть продолжено на Р. п. S следующим образом: $x \leqslant y$, если существуют идемпотенты e и f такие, что $x = ey = yf$. В случае, когда S инверсна, отношение $\leqslant$ превращается в отношение естественного частичного порядка, для произвольной Р. п. оно также наз. отношением естественного частичного порядка. Отношение $\leqslant$ на Р. п. S согласовано с умножением тогда и только тогда, когда для любого идемпотента e подполугруппа eSe инверсна [6]. Р. п., обладающие таким свойством, наз. псевдоинверсными. Более широкий класс составляют псевдоортодоксальные полугруппы (для любого идемпотента e подполугруппа eSe ортодоксальна). Для указанных классов полугрупп использовались также термины «локально инверсная» и «локально ортодоксальная». Р. п. наз. естественной, если множество всех ее групповых элементов (см. *Регулярный элемент*) есть подполугруппа. Имеются структурные теоремы о псевдоинверсных, псевдоортодоксальных [11] и естественных [12] Р. п.

Многие структурные теоремы о различных типах Р. п. представляют собой (подчас весьма далекие) обобщения и модификации конструкции *рисовской полугруппы матричного типа* или суммы прямого спектра групп (см. *Клиффордова полугруппа*), либо опираются на те или иные представления полугрупп и разложения их в подпрямые произведения (см. [1], [13]). См. также ст. *Полугруппа*.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] Munn W. D., «Glasgow Math. J.», 1968, v. 9, pt. 1, p. 46—66; [3] Clifford A., «Semigroup Forum», 1975, v. 10, p. 84—92; [4] его же, «J. pure and appl. algebra», 1976, v. 8, p. 23—50; [5] Nambooripad K. S. S., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1979, v. 22, № 224; [6] его же, «Proc. Edinburgh Math. Soc.», 1980, v. 23, pt 3, p. 249—60; [7] Nambooripad K. S. S., Rajan A. R., «Quart. J. Math.», 1978, v. 29, № 116, p. 489—504; [8] Grillet P. A., «Semigroup Forum», 1974, v. 8, p. 177—83; p. 254—65; p. 368—73; [9] Hall T. E., «Pacif. J. Math.», 1971, v. 39, p. 677—86; [10] его же, «J. Algebra», 1973, v. 24,

p. 1—24; [11] Meakin J., Nambooripad K. S. S., «J. Austral. Math. Soc.», 1980/1981, v. 30, p. 73—86; [12] Warne R. J., в кн.: Algebraic theory of semigroups, Amst., 1979, p. 685—720; [13] Lallement G., «Semigroup Forum», 1972, v. 4, p. 95—123. *Л. Н. Шеврин.*

РЕГУЛЯРНАЯ РЕШЕТКА, структура регулярная,— условно полная решетка (структура), в к-рой выполняется следующее условие (наз. также аксиомой регулярности): для любой последовательности $\{E_n\}$ ограниченных множеств, для к-рой

$$\sup E_n \xrightarrow{(o)} a, \ \inf E_n \xrightarrow{(o)} b,$$

найдутся конечные подмножества $E_n' \subset E_n$ с тем же свойством ($\xrightarrow{(o)}$ означает сходимость по упорядочению). Такие структуры (в первую очередь регулярные K-пространства и булевы алгебры) чаще всего встречаются в функциональном анализе и теории меры. Они естественно возникают в задаче продолжения гомоморфизмов и линейных положительных операций. В Р. р. выполняются следующие два принципа: а) принцип диагонали (если $x_{nm} \xrightarrow{(o)} x_n$, $x_n \xrightarrow{(o)} x$, то $x_{nm_n} \xrightarrow{(o)} x$ для нек-рой последовательности индексов m_n) и б) принцип счетности типа (всякое бесконечное ограниченное множество содержит счетную часть с теми же гранями). В свою очередь, а) и б) вместе эквивалентны аксиоме регулярности. Примеры Р. р.: всякое KB-пространство и, в частности, всякое L^p, $1 \leqslant p < +\infty$; булева алгебра mod 0 измеримых множеств произвольного пространства с конечной счетно аддитивной мерой. Другие известные примеры регулярных булевых алгебр основываются на отрицании *Суслина гипотезы.*

Лит.: [1] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.— Л., 1950. *Д. А. Владимиров.*

РЕГУЛЯРНАЯ СХЕМА — схема $(X, \mathcal{O}_X)$, локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ любой точки x к-рой регулярно. Для схем конечного типа над алгебраически замкнутым полем k регулярность эквивалентна тому, что пучок дифференциалов $\Omega^1_{X/k}$ локально свободен. Регулярные локальные кольца факториальны, поэтому любая замкнутая приведенная неприводимая подсхема коразмерности 1 на Р. с. $(X, \mathcal{O}_X)$ локально задается одним уравнением (см. [2]). Важной задачей является построение Р. с. $(X, \mathcal{O}_X)$ с заданным полем K рациональных функций, снабженной собственным морфизмом $X \to S$ на нек-рую базисную схему S. Эта задача решена в случае, когда S — спектр поля характеристики 0 (см. [3]), а для малых размерностей схемы и в случае простой характеристики, а также в случае, когда S — спектр дедекиндовой области и $\dim X/S \leqslant 1$ (см. [1]).

Лит.: [1] Abhyankar Sh. Sh., в кн.: Тр. Международного конгресса математиков (Москва — 1966), М., 1968, с. 469—481; [2] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [3] Хиронака Х., «Математика», 1965, т. 9, № 6, с. 2—70; 1966, т. 10, № 1, с. 3—89; № 2, с. 3—58. *С. Г. Танкеев.*

РЕГУЛЯРНАЯ ФУНКЦИЯ, правильная функция, в области — функция $f(z)$ комплексного переменного z, однозначная в этой области и имеющая в каждой ее точке конечную производную (см. *Аналитическая функция*). Р. ф. в точке a — это Р. ф. в нек-рой окрестности a. *Ю. Д. Максимов.*

РЕГУЛЯРНАЯ ФУНКЦИЯ МНОЖЕСТВА — аддитивная функция μ, определенная на системе множеств топологич. пространства, полная вариация к-рой $|\mu|$ удовлетворяет условию

$$|\mu|(E) = \inf |\mu|(G) = \sup |\mu|(F), \ \mathring{G} \supset E \supset \overline{F},$$

$\mathring{G}$ — внутренность множества G, $\overline{F}$ — замыкание множества F (E, G, F — из области определения μ). Ограниченная аддитивная Р. ф. м., определенная на полукольце множеств бикомпактного топологич. пространства, является счетно аддитивной функцией (теорема Александрова).

Свойство регулярности можно относить и к мере как частному случаю функции множества и говорить о регулярной мере, заданной на топологич. пространстве. Примером регулярной меры является *Лебега мера*.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [2] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1941, т. 9, с. 563—628. *А. П. Терехин.*

РЕГУЛЯРНАЯ ЭКСТРЕМАЛЬ, неособенная экстремаль,— экстремаль $y(x)$, во всех точках к-рой выполняется условие

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0, \qquad (1)$$

где $F(x, y, y')$ — подинтегральная функция, входящая в минимизируемый функционал

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx.$$

Как всякая экстремаль, Р. э. есть, по определению, гладкое решение *Эйлера уравнения*

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Точки экстремали, в к-рых выполнено условие (1), наз. регулярными точками. Доказано, что в каждой регулярной точке экстремаль имеет непрерывную 2-ю производную $y''(x)$. На Р. э. 2-я производная $y''(x)$ непрерывна. Для Р. э. уравнение Эйлера

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

можно записать в виде, разрешенном относительно старшей производной

$$y'' = f(x, y, y').$$

Свойство регулярности (1) непосредственно связано с необходимым *Лежандра условием* (в усиленной форме), согласно к-рому во всех точках экстремали должно выполняться неравенство

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) < 0.$$

Регулярность существенно используется при доказательстве возможности включения экстремали $y(x)$ в окружающее ее поле экстремалей. Если хотя бы в одной точке условие (1) нарушается, то экстремаль не всегда может быть включена в поле. Условие включения экстремали в поле является одним из достаточных условий экстремума.

Приведенное определение Р. э. дано для простейшей задачи вариационного исчисления, в к-рой рассматривается функционал, зависящий от одной неизвестной функции. Для функционалов, зависящих от n неизвестных функций:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx,$$

Р. э. наз. такая экстремаль, во всех точках к-рой определитель n-го порядка

$$\left| F_{y_i' y_j'} \right| \neq 0. \qquad (2)$$

Для более общих задач вариационного исчисления на условный экстремум (см. *Больца задача*) Р. э. определяется аналогично: только вместо F в (2) следует подставить *Лагранжа функцию* L.

Экстремаль, у к-рой на нек-ром участке условие регулярности ((1) или (2)) нарушается во всех точках, наз. особой экстремалью, а указанный участок наз. участком особого режима. Для особых режимов выведены необходимые условия, дополняющие известные классические необходимые условия экстремума (см. *Оптимальный режим особый*).

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950. *И. Б. Вапнярский.*

РЕГУЛЯРНОЕ КОЛЬЦО в коммутативной алгебре — нётерово кольцо A, все локализации $A_{\mathfrak{p}}$ к-рого регулярны; здесь $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A. При этом локальное нётерово кольцо A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ наз. регулярным, если $\mathfrak{m}$ порождается n элементами, где $n = \dim A$, т. е. если касательное пространство $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ (как векторное пространство над полем вычетов) имеет размерность, равную $\dim A$. Это равносильно отсутствию особенностей у схемы Spec A. Локальное Р. к. A всегда целостно и нормально, а также факториально (теорема Аусландера — Буксбаума), глубина его равна $\dim A$. Ассоциированное градуированное кольцо

$$G_{\mathfrak{m}}(A) = \oplus_{i \geqslant 0} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$$

изоморфно кольцу многочленов $k[X_1, \ldots, X_n]$. Локальное нётерово кольцо A регулярно тогда и только тогда, когда регулярно его пополнение $\hat{A}$; вообще, если $A \subset B$ — плоское расширение локальных колец и B регулярно, то и A регулярно. Для полных локальных Р. к. имеет место структурная теорема Коэна: они имеют вид $R[[X_1, \ldots, X_n]]$, где R — поле или кольцо дискретного нормирования. Любой модуль конечного типа над локальным Р. к. обладает конечной свободной резольвентой (см. *Гильберта теорема* о сизигиях); верно и обратное (см. [2]).

Р. к. являются любое поле и любое дедекиндово кольцо. Если A регулярно, то регулярно кольцо многочленов $A[X_1, \ldots, X_n]$ и кольцо формальных степенных рядов $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ над A. Если $a \in A$ — необратимый элемент локального Р. к., то A/aA регулярно тогда и только тогда, когда $a \notin \mathfrak{m}^2$.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [2] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93; [3] Grothendieck A., Dieudonné J. (red.), Eléments de géométrie algébrique, chap. 4, P., 1964. *В. И. Данилов.*

РЕГУЛЯРНОЕ КОЛЬЦО (в смысле Неймана) — ассоциативное кольцо (обычно с единицей), в к-ром уравнение $axa = a$ разрешимо для любого a. Следующие свойства ассоциативного кольца R с единицей равносильны: а) R есть Р. к.; б) каждый главный левый идеал кольца R порождается идемпотентом; в) главные левые идеалы кольца R образуют подрешетку в решетке всех его левых идеалов, являющуюся дедекиндовой решеткой с дополнениями; г) каждый главный левый идеал кольца R имеет дополнение в структуре всех его левых идеалов; д) все левые R-модули плоские; е) имеют место правые аналоги свойств б) — д) (см. [3], [4], [5], [8], [10]). Ввиду д) Р. к. иногда наз. абсолютно плоскими. Коммутативное кольцо регулярно тогда и только тогда, когда инъективны все простые модули над ним (см. [5]). Любой конечно порожденный левый (правый) идеал Р. к. оказывается главным и, следовательно, выделяется прямым слагаемым. Всякий неделитель нуля в Р. к. обратим. Радикал Джекобсона Р. к. равен нулю. Кольцо матриц над Р. к. оказывается Р. к. Класс Р. к. замкнут относительно перехода к прямым произведениям и факторкольцам. Идеал Р. к. является Р. к. (возможно, без единицы). Если Р. к. нётерово или совершенно (слева или справа), то оно оказывается классически полупростым кольцом. Всякое классически полупростое кольцо регулярно. Более того, регулярным оказывается кольцо эндоморфизмов векторного пространства над телом (даже бесконечномерного), а также факторкольцо кольца эндоморфизмов инъективного левого (правого) модуля над любым кольцом по его радикалу Джекобсона (см. [3]). В частности, всякое самоинъективное слева (справа) кольцо с нулевым радикалом Джекобсона регулярно.

Групповое кольцо группы G над Р. к. регулярно тогда и только тогда, когда любая конечно порожденная подгруппа в G конечна и порядок каждой из таких подгрупп обратим в исходном Р. к. (см. [3]). Кольца эндоморфизмов всех свободных левых R-модулей регулярны в том и только в том случае, когда R классически полупросто [6]. Счетно порожденные односторонние идеалы Р. к. проективны [8].

Если R есть Р. к., то конечно порожденные подмодули левого R-модуля R^n n-мерных строк над R образуют дедекиндову решетку L с дополнениями, являющуюся подрешеткой решетки всех подмодулей модуля R^n. Решетка L содержит однородный базис $a_1, \ldots, a_n$, то есть эти элементы независимы (см. *Дедекиндова решетка*), их сумма равна наибольшему элементу из L (а именно, R^n) и любые a_i и a_j перспективны, что означает существование для них общего дополнения. Наоборот, всякая дедекиндова решетка с дополнениями, обладающая однородным базисом, содержащим не менее четырех элементов, изоморфна решетке L для подходящего Р. к. R. Решетка L изоморфна решетке главных левых идеалов кольца всех $(n \times n)$-матриц над R (см. [4], [10]).

Важный частный случай Р. к. — строго регулярное кольцо, в к-ром, по определению, разрешимо уравнение $a^2x=a$. Равносильны следующие свойства Р. к. R: а) R строго регулярно; б) R не содержит ненулевых нильпотентных элементов; в) все идемпотенты кольца R центральны; г) каждый левый (или каждый правый) идеал кольца R является двусторонним; д) решетка главных левых (правых) идеалов кольца R дистрибутивна; е) мультипликативная полугруппа кольца R является инверсной полугруппой (см. [7], [8]).

Другой подкласс класса Р. к. образуют u-регулярные кольца, где, по определению, уравнение $axa=a$ имеет в качестве решения обратимый элемент. В классе Р. к. u-регулярные кольца характеризуются транзитивностью перспективности в решетке конечно порожденных подмодулей суммы двух экземпляров основного кольца, а также возможностью сокращать прямую сумму на конечно порожденный проективный модуль (см. [4], [8]).

Р. к. наз. непрерывным слева, если непрерывна решетка его главных левых идеалов. Непрерывное Р. к. u-регулярно и разлагается в прямую сумму строго Р. к. и самоинъективного кольца. На Р. к. может быть определена псевдоранг-функция, являющаяся аналогом меры на булевой алгебре. Она определяет псевдометрику. Пополнение Р. к. по этой метрике оказывается самоинъективным Р. к. (см. [8]).

Р. к. являются частным случаем π-регулярных колец, в к-рых, по определению, для каждого элемента a найдутся элемент x и натуральное число n такие, что $a^n x a^n = a^n$.

Как двусторонний аналог Р. к. можно рассматривать бирегулярные кольца, в к-рых, по определению, каждый главный двусторонний идеал порождается центральным идемпотентом. Каждый двусторонний идеал бирегулярного кольца является пересечением его максимальных двусторонних идеалов. Всякое бирегулярное кольцо с единицей изоморфно кольцу глобальных сечений с бикомпактными носителями пучка простых колец с единицей над бикомпактным вполне несвязным хаусдорфовым топологич. пространством, и всякое такое кольцо глобальных сечений бирегулярно (см. [2]). В коммутативном случае классы бирегулярных, строго Р. к. и Р. к. совпадают, и простые кольца в последней теореме заменяются полями.

Близки к Р. к. бэровские кольца, определяемые тем условием, что каждый левый (или, что при наличии единицы равносильно, каждый правый) аннулятор порождается идемпотентом. Примерами бэровских колец служат кольцо эндоморфизмов векторного пространства над телом и кольцо ограниченных операторов гильбертова пространства. Бэровское кольцо наз. **абелевым**, если все его идемпотенты центральны, и **конечным** (**по Дедекинду**), если $xy=1$ влечет за собой $yx=1$. Идемпотент e бэровского кольца R наз. **абелевым** (**конечным**), если кольцо eRe абелево (конечно по Дедекинду). Различаются следующие типы бэровских колец: $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$ — конечные кольца, содержащие абелев идемпотент, не принадлежащий никакому собственному прямому слагаемому; $\mathrm{I}_{\mathrm{inf}}$ — бесконечные по Дедекинду (т. е. не содержащие ненулевых конечных центральных идемпотентов) кольца, содержащие абелев идемпотент, не принадлежащий никакому собственному прямому слагаемому; $\mathrm{II}_{\mathrm{fin}}$ (или II_1) — конечные по Дедекинду кольца без ненулевых абелевых идемпотентов, содержащие конечный идемпотент, не принадлежащий никакому собственному прямому слагаемому; $\mathrm{II}_{\mathrm{inf}}$ — бесконечные по Дедекинду кольца с условием, указанным в $\mathrm{II}_{\mathrm{fin}}$; III — кольца без ненулевых конечных идемпотентов. Каждое бэровское кольцо единственным способом разлагается в прямую сумму колец перечисленных типов (см. [9]).

Р. к. были введены для координатизации непрерывных геометрий, бирегулярные — в связи с исследованием функциональных представлений колец, бэровские (и риккартовы) — при исследовании колец операторов.

Рассматривались неассоциативные Р. к. См. также **-регулярное кольцо, риккартово кольцо.*

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Даунс Дж., Гофман К., «Математика», 1968, т. 12, № 4, с. 3—24; [3] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [4] Скорняков Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961; [5] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [6] Цукерман Г. М., «Сиб. матем. ж.», 1966, т. 7, № 5, с. 1161—67; [7] Шайн Б. М., «Изв. ВУЗов. Математика», 1966, № 2, с. 111—22; [8] Goodearl K. R., Von Neumann regular rings, L.— [a. o.], 1979; [9] Kaplansky I., Rings of operators, N. Y.— Amst., 1968; [10] Neumann J., Continuous geometry, Princeton, 1960.

Л. А. Скорняков.

***-РЕГУЛЯРНОЕ КОЛЬЦО** — регулярное кольцо, допускающее инволюционный антиавтоморфизм $\alpha\mapsto\alpha^*$ такой, что $\alpha\alpha^*=0$ влечет за собой $\alpha=0$. Идемпотент e из *-Р. к. наз. **проекцией**, если $e^*=e$. Каждый левый (правый) идеал *-Р. к. порождается однозначно определенной проекцией. Поэтому можно говорить о решетке проекций *-Р. к. Если эта решетка полна, то она является непрерывной геометрией. Дедекиндова решетка с дополнениями, обладающая однородным базисом $a_1, \ldots, a_n$, где $n\geqslant 4$ (см. *Регулярное кольцо*), является решеткой с ортодополнениями тогда и только тогда, когда она изоморфна решетке проекций нек-рого *-Р. к.

Лит.: [1] Скорняков Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961; [2] Berberian S. K., Baer *-rings, B.— [a. o.], 1972; [3] Kaplansky I., Rings of operators, N. Y.— Amst., 1968.

Л. А. Скорняков.

РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — 1) Р. п. (**левое**) **алгебры** A — линейное представление L алгебры A в векторном пространстве $E=A$, определяемое формулой $L(a)b=ab$ для всех $a, b\in A$; аналогично, формула $R(a)b=ba$, $a, b\in A$, определяет (анти)-представление алгебры A в пространстве $E=A$, наз. (правым) Р. п. A. Если A — топологич. алгебра (с умножением, непрерывным по совокупности переменных), то L и R — непрерывные представления. Если A — алгебра с единицей или полупростая алгебра, то все ее Р. п.— точные.

2) Р. п. (**правое**) **группы** G — линейное представление R группы G в пространстве E комплекснозначных функций на G, определенное формулой

$$(R(g)f)(g_1)=f(g_1 g),\ g, g_1\in G,\ f\in E,$$

причем пространство E разделяет точки группы G и обладает тем свойством, что функция $g_1 \to f(g_1 g)$, $g_1 \in G$, принадлежит пространству E для всех $f \in E$, $g \in G$. Аналогично, формула

$$(L(g) f)(g_1) = f(g^{-1} g_1),\ g,\ g_1 \in G,\ f \in E,$$

определяет (левое) Р. п. группы G в пространстве E, если функция $g_1 \to f(g^{-1} g_1)$, $g_1 \in G$, принадлежит E для всех $g \in G$, $f \in E$. Если G — топологич. группа, то в качестве пространства E часто рассматриваются пространства непрерывных функций на G. Если G — локально компактная группа, то (правым) Р. п. группы G наз. (правое) Р. п. группы G в пространстве $L^2(G)$, построенном по правоинвариантной мере Хаара на G; Р. п. локально компактной группы является ее непрерывным унитарным представлением, причем левое и правое Р. п. унитарно эквивалентны. *А. И. Штерн.*

РЕГУЛЯРНОЕ ПРОСТОЕ ЧИСЛО — простое нечетное число p, для к-рого число классов идеалов кругового поля $R(e^{2\pi i/p})$ не делится на p. Все остальные простые нечетные числа наз. иррегулярными (см. *Иррегулярное простое число*). *О. А. Иванова.*

РЕГУЛЯРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в к-ром для каждой точки x и каждого не содержащего ее замкнутого множества A найдутся непересекающиеся множества U и V такие, что $x \in U$ и $A \in V$. Регулярными являются все *вполне регулярные пространства* и, в частности, все *метрические пространства*.

Если в Р. п. все одноточечные подмножества замкнуты (а это выполняется не всегда!), то оно наз. T_3-пространством. Не всякое Р. п. вполне регулярно: существует бесконечное T_3-пространство, на к-ром каждая непрерывная действительная функция постоянна. Тем более, не каждое Р. п. является нормальным пространством. Однако если пространство регулярно и из каждого его открытого покрытия можно выделить счетное подпокрытие, то оно нормально. Пространство со счетной базой метризуемо в том и только в том случае, если оно является T_3-пространством. Регулярность наследуется любыми пространствами и мультипликативна.

Лит.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974. *А. В. Архангельский.*

РЕГУЛЯРНОЕ СОБЫТИЕ — множество слов конечного алфавита, к-рое на алгебраич. языке может быть задано с использованием выражений специального вида — регулярных выражений. Пусть A — конечный алфавит и $\cup$, $\circ$, $*$ — символы операций, наз. объединением, конкатенацией и итерацией соответственно. Регулярные выражения в алфавите A задаются индуктивно: 1) каждая буква из алфавита A есть регулярное выражение, 2) если R_1, R_2 и R — регулярные выражения, то $(R_1 \cup R_2)$, $(R_1 \circ R_2)$ и R^* суть также регулярные выражения. Язык регулярных выражений интерпретируется следующим образом.

Пусть A^* — множество всех слов в алфавите A, $\mathfrak{A}_1 \subseteq A^*$, $\mathfrak{A}_2 \subseteq A^*$. Символ любой буквы из A понимается как множество, состоящее из одной буквы, а $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ — как обычное теоретико-множественное объединение. Множество $\mathfrak{A}_1 \circ \mathfrak{A}_2$ состоит из всех слов, к-рые представимы в виде $\alpha_1 \alpha_2$, где $\alpha_1 \in \mathfrak{A}_1$, $\alpha_2 \in \mathfrak{A}_2$, причем если $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ содержат пустое слово Λ, то $\Lambda \alpha_2 = \alpha_2$, $\alpha_1 \Lambda = \alpha_1$, $\Lambda\Lambda = \Lambda$. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq A^*$ и для любого $n \geqslant 2$ имеет место обозначение $\mathfrak{A}^n = \mathfrak{A} \circ \ldots \circ \mathfrak{A}$ (n раз). Тогда $\mathfrak{A}^*$ совпадает с $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^2 \cup \mathfrak{A}^3 \cup \ldots$, т. е. если $\alpha \in \mathfrak{A}^*$, то существует $m \geqslant 1$ такое, что α представимо в виде $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$, где $\alpha_i \in \mathfrak{A}$ для любого $i = 1, \ldots, m$. Таким образом, множество слов конечного алфавита является регулярным событием тогда и только тогда, когда оно может быть получено из однобуквенных множеств с помощью применения конечного числа операций объединения, конкатенации и итерации. Р. с. могут быть заданы и с помощью других операций, сохраняющих регулярность (напр., пересечение, дополнение и т. п.), а также путем задания множества слов, выводимых в формальных системах типа систем полу-Туэ (см. *Туэ система*), грамматик и т. д.

Понятие «Р. с.» возникло при исследовании поведения *автомата конечного*, рассматриваемого в качестве акцептора. Одной из основных для конечных автоматов является теорема: событие представимо в конечном автомате тогда и только тогда, когда оно регулярно. В связи с этим в теории автоматов рассматривают две задачи: задачу анализа — по данному автомату, представляющему нек-рое событие, построить регулярное выражение, задающее это событие; и задачу синтеза — имея нек-рое регулярное выражение, построить автомат, представляющий соответствующее событие.

Множество всех подмножеств слов в конечном алфавите A (событий) вместе с введенными на этом множестве операциями образуют нек-рую алгебру событий; важнейшими среди таких алгебр являются алгебры Р. с. с операциями, позволяющими все Р. с. получить из однобуквенных множеств. Наибольший интерес представляет вопрос о конечно-аксиоматизируемости алгебр Р. с., то есть вопрос о существовании в таких алгебрах конечных полных систем тождеств. В самой общей постановке ответ на этот вопрос отрицателен, хотя существуют важные подалгебры алгебр Р. с., в к-рых конечная полная система тождеств существует.

См. также *Автомат*, *Автоматов способы задания*, *Синтеза задачи*.

Лит.: [1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., Элементы теории автоматов, М., 1978; [2] Саломаа А., «Проблемы кибернетики», 1966, в. 17, с. 237—246; [3] Янов Ю. И., там же, 1964, в. 12, с. 253—58; 1966, в. 17, с. 255—58; [4] Ушчумлич Ш., «Докл. АН СССР», 1979, т. 247, № 3, с. 561—65. *В. А. Буевич.*

РЕГУЛЯРНОСТИ ПРИЗНАКИ для методов суммирования — условия регулярности *суммирования метода*.

Для *матричного метода суммирования*, определенного преобразованием последовательности в последовательность посредством матрицы $\|a_{nk}\|$, $n, k=1, 2, \ldots$, условия:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant M, \\ 2) & \lim\limits_{n \to \infty} a_{nk}=0, \\ 3) & \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}=1, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

являются необходимыми и достаточными для регулярности метода суммирования. Для матричного метода суммирования, определенного преобразованием ряда в последовательность посредством матрицы $\|g_{nk}\|$, n, $k=1, 2, \ldots$, необходимыми и достаточными условиями регулярности являются:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \sum_{k=1}^{\infty} |g_{n,k}-g_{n,k-1}| \leqslant M, \\ 2) & \lim\limits_{n \to \infty} g_{nk}=1. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Условия (1) первоначально были установлены О. Тёплицем [1] для треугольных методов суммирования, а затем Х. Штейнхаузом [2] распространены на произвольные матричные методы суммирования. В связи с этим матрицу, удовлетворяющую условиям (1), наз. матрицей Тёплица, или Т-матрицей.

Для *полунепрерывных методов суммирования*, определенных преобразованием последовательности в функцию посредством полунепрерывной матрицы $\|a_k(\omega)\|$ или преобразованием ряда в функцию посредством полунепрерывной матрицы $\|g_k(\omega)\|$, Р. п. подобны соответственно условиям (1) и (2).

Регулярный матричный метод суммирования является вполне регулярным, если все элементы матрицы преобразования неотрицательны. Это условие в общем случае не является необходимым для полной регулярности.

Лит.: [1] Toeplitz O., «Prace mat.-fizyczne», 1911, v. 22, p. 113—19; [2] Steinhaus H., там же, p. 121—34; [3] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [4] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960. *И. И. Волков.*

РЕГУЛЯРНЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ, перманентные методы суммирования,— методы суммирования рядов (последовательностей), суммирующие каждый сходящийся ряд (последовательность) к той же сумме, к к-рой этот ряд (последовательность) сходится. Р. м. с. являются частным случаем консервативных методов суммирования — методов, к-рые каждый сходящийся ряд (последовательность) суммируют к конечной сумме, хотя быть может и отличной от той, к к-рой он сходится. Если Р. м. с. определен преобразованием последовательности $\{s_n\}$ в последовательность $\{\sigma_n\}$ посредством бесконечной матрицы $\|a_{nk}\|$:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (*)$$

(см. *Матричные методы суммирования*), то преобразование (*) и матрицу этого преобразования $\|a_{nk}\|$ наз. регулярными.

Наиболее распространенные методы суммирования, как правило, регулярны. Напр., регулярными являются *Чезаро метод суммирования* (C, k) при $k \geqslant 0$, *Гёльдера методы суммирования*, *Абеля метод суммирования* и др. Существуют нерегулярные методы суммирования. Напр., метод суммирования Чезаро (C, k) при $k < 0$, *Римана метод суммирования* не являются регулярными.

Метод суммирования наз. вполне регулярным методом суммирования, если он регулярен и каждый ряд (последовательность) с действительными членами, сходящийся к $+\infty$ (или $-\infty$), суммируется этим методом также к $+\infty$ (соответственно $-\infty$). Р. м. с., определенный положительной матрицей, является вполне регулярным (см. также *Регулярности признаки*).

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Кангро Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [4] Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977. *И. И. Волков.*

РЕГУЛЯРНЫЙ АВТОМОРФИЗМ — автоморфизм φ группы G такой, что $g\varphi \neq g$ ни для какого неединичного элемента g группы G (т. е. образы всех неединичных элементов группы при Р. а. должны быть отличны от своих прообразов). Если φ — Р. а. конечной группы G, то для каждого простого p, делящего порядок группы, он оставляет инвариантной (т. е. отображает в себя) единственную силовскую p-подгруппу S_p и любая инвариантная относительно φ p-подгруппа группы G содержится в S_p. Конечная группа, допускающая Р. а. простого порядка, нильпотентна [2], однако существуют разрешимые ненильпотентные группы, допускающие Р. а. составного порядка.

Лит.: [1] Gorenstein D., Finite groups, N. Y., 1968; [2] Thompson J. G., «Proc. Nac. Res. Acad. Sci.», 1959, v. 45, p. 578—81. *Н. Н. Вильямс.*

РЕГУЛЯРНЫЙ ИДЕАЛ — то же, что и *модулярный идеал.*

РЕГУЛЯРНЫЙ ТОР — *алгебраический тор* в связной алгебраич. группе G, содержащийся лишь в конечном числе борелевских подгрупп. Максимальные торы в G всегда регулярны. В общем случае тор $S \subset G$ является регулярным тогда и только тогда, когда его централизатор $C_G(S)$ — разрешимая группа. В теории алгебраич. групп важную роль играют одномерные Р. т. S и соответствующие им однопараметрич. подгруппы $\lambda: G_m \to S$ (т. н. регулярные параметры). Тор, не являющийся регулярным, наз. сингулярным. Для редуктивной группы G можно дать критерий сингулярности тора $S \subset G$ в терминах системы корней. А именно, если T — максимальный тор в G, содержащий S, и $\Phi(T, G)$ — соответствующая система корней, то S сингулярен в том и только в том случае, если $S \subset \operatorname{Ker} \alpha$ для нек-рого $\alpha \in \Phi(T, G)$.

Иногда под Р. т. в G понимают тор S, содержащий регулярный элемент (элемент $s \in S$ регулярен, если размерность централизатора $C_G(s)$ в G минимальна), и называют полурегулярным тор, являющийся регулярным в смысле первоначального определения (см., напр., [1]). Для редуктивных групп оба эти определения эквивалентны.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980. *В. П. Платонов.*

РЕГУЛЯРНЫЙ ЭЛЕМЕНТ полугруппы — элемент a такой, что $a=axa$ для нек-рого элемента x данной полугруппы; если при этом $ax=xa$, то a наз. вполне регулярным. Если a — Р. э. полугруппы S, то главный правый (левый) идеал в S, порожденный a, порождается нек-рым идемпотентом; обратно, каждое из этих двух симметричных свойств влечет регулярность a. Если $aba=a$ и $bab=b$, то элементы a и b наз. инверсными друг к другу (а также обобщенно обратными, регулярно сопряженными). Всякий Р. э. имеет инверсный к нему элемент, вообще говоря, не обязательно единственный (ср. *Инверсная полугруппа.*) Полугруппы, в к-рых всякие два элемента инверсны друг к другу,— это в точности прямоугольные полугруппы (см. *Идемпотентов полугруппа).* Всякий вполне Р. э. a имеет инверсный к нему элемент, перестановочный с a. Элемент вполне регулярен тогда и только тогда, когда он групповой, т. е. принадлежит нек-рой подгруппе полугруппы (ср. *Клиффордова полугруппа*). О регулярных $\mathcal{D}$-классах см. *Грина отношения эквивалентности.*

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960. *Л. Н. Шеврин.*

РЕГУЛЯТОР поля K алгебраических чисел — число R_K, к-рое, по определению, равно 1, если K есть поле $\mathbb{Q}$ или мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, а в остальных случаях равно $\frac{v}{\sqrt{r+1}}$, где r — ранг группы E единиц поля K (см. *Алгебраическое число, Алгебраическая теория чисел*), а v—r-мерный объем основного параллелепипеда r-мерной решетки в $\mathbb{R}^{r+1}$, являющейся образом группы E при ее логарифмическом изображении l в $\mathbb{R}^{r+1}$. При этом гомоморфизм l определяется следующим образом. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ — все вещественные, а $\sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{s+t}$ — комплексные попарно несопряженные изоморфизмы K в $\mathbb{C}$; $s+2t=\dim_{\mathbb{Q}} K$ (см. *Дирихле теорема* о единицах). Тогда $r+1=s+t$, а гомоморфизм $l: E \to \mathbb{R}^{r+1}$ определяется формулой

$$l(\alpha)=(l_1(\alpha), \ldots, l_{s+t}(\alpha)),$$

где

$$l_i(\alpha)=\begin{cases} \ln|\sigma_i(\alpha)| & \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \\ \ln|\sigma_i(\alpha)|^2 & \text{при} \quad s+1 \leqslant i \leqslant s+t. \end{cases}$$

Образом гомоморфизма l является r-мерная решетка в $\mathbb{R}^{r+1}$, лежащая в плоскости $\sum_{i=0}^{r+1} x_i=0$ (x_i—канонич. координаты).

Единицы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$, для к-рых $l(\varepsilon_1), \ldots, l(\varepsilon_r)$ является базисом решетки $l(E)$, наз. **основными единицами** поля K и

$$R_K = |\det(l_i(\varepsilon_j))_{i, j=1, \ldots, r}|.$$

Имеются и другие формулы, связывающие Р. с другими инвариантами поля K (см., напр., *Дискриминант*, 3)).

Если вместо E рассматривать пересечение этой группы с каким-либо порядком $\mathfrak{G}$ поля K, то аналогично можно определить регулятор $R_{\mathfrak{G}}$ порядка $\mathfrak{G}$.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Ленг С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966. *В. Л. Попов.*

РЕДУКТИВНАЯ ГРУППА — линейная алгебраич. группа G, удовлетворяющая одному из следующих эквивалентных условий: 1) радикал связной компоненты единицы G^0 группы G есть *алгебраический тор*, 2) унипотентный радикал группы G^0 тривиален, 3) группа G^0 разлагается в произведение замкнутых нормальных подгрупп S и T, являющихся соответственно *полупростой алгебраической группой* и алгебраич. тором. При этом S — коммутант группы G^0, а T совпадает с радикалом группы G^0, а также со связной компонентой единицы ее центра; $S \cap T$ конечно, любая полупростая, а также любая унипотентная подгруппа группы G^0 содержится в S.

Линейная алгебраич. группа G наз. **линейно редуктивной**, если выполнено любое из следующих двух эквивалентных условий: а) каждое рациональное линейное представление группы G вполне приводимо, б) для каждого рационального линейного представления $\rho: G \to GL(W)$ и любого $\rho(G)$-инвариантного вектора $w \in W \setminus \{0\}$ существует такая $\rho(G)$-инвариантная линейная функция f на W, что $f(w) \neq 0$. Всякая линейно Р. г. является Р. г. Если характеристика основного поля K равна 0, то верно и обратное. В случае char $K > 0$ это не так — всякая связная линейно Р. г. является алгебраич. тором. Однако и в общем случае Р. г. могут быть охарактеризованы в терминах теории представлений. Линейная алгебраич. группа G наз. **геометрически редуктивной** (или **полуредуктивной**), если для каждого рационального линейного представления $\rho: G \to GL(W)$ и любого $\rho(G)$-инвариантного вектора $w \in W \setminus \{0\}$ существует такая $\rho(G)$-инвариантная полиномиальная функция f на W, что $f(w) \neq 0$. Линейная алгебраич. группа тогда и только тогда является Р. г., когда она геометрически редуктивна (см. *Мамфорда гипотеза*).

Для Р. г. справедлива обобщенная *Гильберта теорема* об инвариантах. Верно и обратное: если G — линейная алгебраич. группа над алгебраически замкнутым полем K и при любом ее локально конечномерном рациональном представлении автоморфизмами произвольной конечно порожденной ассоциативно-коммутативной K-алгебры A с единицей алгебра инвариантов A^G конечно порождена, то G есть Р. г. (см. [4]).

Каждая конечная линейная группа является Р. г., а если ее порядок не делится на char K, то и линейно Р. г. Связные Р. г. допускают структурную теорию, во многом аналогичную структурной теории редуктивных алгебр Ли (система корней, группа Вейля и т. п., см. [2]). Эта теория распространяется и на группы вида G_k, где G — связная Р. г., определенная над нек-рым подполем $k \subset K$, а G_k— группа ее k-рациональных точек (см. [3]). При этом роль борелевских подгрупп, максимальных торов, групп Вейля играют соответственно минимальные определенные над k параболич. подгруппы, максимальные разложимые над k торы, относительные группы Вейля (см. *Вейля группа*). Любые две минимальные определенные над k параболич. подгруппы группы G сопряжены над k, т. е. при помощи элемента группы G_k; то же верно и для любых двух максимальных k-разложимых торов группы G.

Если G — связная Р. г., определенная над полем k, то G — разложимая группа над нек-рым сепарабельным расширением конечной степени поля k; если, кроме того, поле k бесконечно, то G_k плотна в G в смысле топологии Зариского. Если G — Р. г. и H — ее замкнутая подгруппа, то факторпространство G/H аффинно тогда и только тогда, когда H — Р. г. Линейная алгебраич. группа над полем характеристики 0 редуктивна тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли является *Ли редуктивной алгеброй* или когда она является комплексификацией нек-рой компактной группы Ли (см. *Комплексификация группы Ли*).

Лит.: [1] Спрингер Т., Теория инвариантов, пер. с англ., М., 1981; [2] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980; [3] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; № 2, с. 3—31; [4] Попов В. Л., «Докл. АН СССР», 1979, т. 249, № 3, с. 551—55.

В. Л. Попов.

РЕДУКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО — такое однородное пространство G/H связной группы Ли G, что в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G существует $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантное подпространство, дополнительное к подалгебре $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$, являющейся алгеброй Ли группы H. Выполнение любого из следующих условий достаточно для того, чтобы однородное пространство G/H было Р. п.: 1) линейная группа $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ вполне приводима, 2) на $\mathfrak{g}$ существует $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантная билинейная форма, сужение к-рой на $\mathfrak{h}$ невырождено. В частности, всякое однородное риманово пространство является Р. п. Если $M=G/H$ — Р. п. и группа G действует эффективно на M, то линейное представление изотропии группы H в касательном пространстве M_o к многообразию M в точке $o=eH\in M$ точно. С каждым $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантным подпространством $\mathfrak{m}\subset\mathfrak{g}$, дополнительным к $\mathfrak{h}$, связаны две важные G-инвариантные аффинные связности на M: каноническая связность и естественная связность без кручения. Канонич. связность на Р. п. $M=G/H$ с фиксированным $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантным разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ — единственная G-инвариантная аффинная связность на M, обладающая тем свойством, что для любого вектора $X\in\mathfrak{m}$ и любого репера u в точке o кривая $(\exp tX)u$ в главном расслоении реперов над M горизонтальна. Канонич. связность полна и множество ее геодезических, проходящих через точку o, совпадает с множеством кривых вида $(\exp tX)\,o$, где $X\in\mathfrak{m}$. После естественного отождествления пространств $\mathfrak{m}$ и M_o тензор кривизны R и тензор кручения T канонич. связности определяются формулами $(R(X,Y)Z)_o=-[[X,Y]_{\mathfrak{h}},Z]$ и $T(X,Y)_o=-[X,Y]_{\mathfrak{m}}$, где X, Y, $Z\in\mathfrak{m}$, а через $W_{\mathfrak{h}}$ и $W_{\mathfrak{m}}$ обозначены проекции вектора $W\in\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Тензорные поля R и T параллельны относительно канонич. связности так же, как и любое другое G-инвариантное тензорное поле на M. Алгебра Ли линейной группы голономии (см. *Голономии группа*) канонич. связности на M с опорной точкой o порождается множеством $\{\lambda([X,Y]_{\mathfrak{h}})\mid X,Y\in\mathfrak{m}\}$, где λ — линейное представление изотропии алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в пространстве M_o. Всякое связное односвязное многообразие, снабженное полной аффинной связностью с параллельными полями кривизны и кручения, может быть представлено в виде Р. п., канонич. связность к-рого совпадает с заданной аффинной связностью. На Р. п. $M=G/H$ с фиксированным $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантным разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ существует единственная G-инвариантная аффинная связность с нулевым кручением, имеющая те же геодезические, что и канонич. связность. Эта связность наз. **естественной связностью без кручения** на M (относительно разложения $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\dot{+}\mathfrak{m}$). Однородное риманово или псевдориманово пространство $M=G/H$ наз. **естественно редуктивным**, если оно допускает такое $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантное разложение $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\dot{+}\mathfrak{m}$, что

$$B(X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}})+B([Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y)=0 \qquad (*)$$

для всех X, Y, $Z\in\mathfrak{m}$, где B — невырожденная симметрическая билинейная форма на $\mathfrak{m}$, индуцированная римановой (псевдоримановой) структурой на M при естественном отождествлении пространств $\mathfrak{m}$ и M_o. Если $M=G/H$ — естественно редуктивное риманово или псевдориманово пространство с фиксированным $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантным разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\dot{+}\mathfrak{m}$, удовлетворяющим условию (*), то естественная связность без кручения совпадает с соответствующей римановой или псевдоримановой связностью на M. Если M — односвязное естественно редуктивное однородное риманово пространство и $M=M_0\times M_1\times\ldots\times M_r$ — его разложение де Рама, то M может быть представлено в виде $M=G/H$, причем $G=G_0\times G_1\times\ldots\times G_r$, $H=H_0\times H_1\times$ $\times\ldots\times H_r$ и $M_i=G_i/H_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, r)$.

Важным обобщением Р. п. являются ν-редуктивные однородные пространства [4]. Однородное пространство G/H наз. **ν-редуктивным**, если его стационарная подалгебра $\mathfrak{h}$ допускает разложение в прямую сумму подпространств $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\dot{+}\mathfrak{h}_2\dot{+}\ldots\dot{+}\mathfrak{h}_\nu$, где $\mathfrak{h}_\nu\neq\{0\}$, причем в $\mathfrak{h}$ существует такое дополнительное к $\mathfrak{h}$ подпространство $\mathfrak{m}$, что $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{m}]\subset\mathfrak{h}_{i-1}$, $i=$ $=1, 2, \ldots, \nu$, где $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{m}$. При этом 1-редуктивные однородные пространства — это в точности Р. п.; примерами 2-редуктивных однородных пространств являются проективное и конформное пространства, на к-рых действуют группа проективных преобразований и группа конформных преобразований соответственно. Если $M=G/H$ есть ν-редуктивное однородное пространство и $\nu>1$, то линейное представление изотропии алгебры Ли $\mathfrak{h}$ не является точным (так как $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{m}]\subset\mathfrak{h}$ при $i>1$) и, следовательно, на M не существует G-инвариантной аффинной связности. Однако на ν-редуктивном однородном пространстве существует каноническая G-инвариантная связность, слоем к-рой является однородное пространство нек-рой транзитивно-дифференциальной группы порядка ν (см. [4]).

Наряду с Р. п. рассматриваются также **частично редуктивные пространства**, т. е. такие однородные пространства G/H, что существует разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в прямую сумму двух ненулевых $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантных подпространств, одно из к-рых содержит подалгебру $\mathfrak{h}$ (см. [5]).

Лит.: [1] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1981; [2] Рашевский П. К., «Тр. Семинара по вект. и тенз. анализу», 1952, в. 9, с. 49—74; [3] Nomizu K., «Amer. J. Math.», 1954, v. 76, № 1, p. 33—65; [4] Кантор И. Л., «Тр. Семинара по вект. и тенз. анализу», 1966, в. 13, с. 310—98; [5] Винберг Э. Б., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1960, т. 9, с. 191—210.

Д. В. Алексеевский.

РЕЗИДУАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — изотонное отображение φ частично упорядоченного множества P в частично упорядоченное множество P', для к-рого существует изотонное отображение φ' из P' в P такое, что $\varphi'(\varphi(x))\geqslant x$ для всех $x\in P$ и $\varphi(\varphi'(x'))\leqslant x'$ для всех $x'\in P'$. Если P и P' — полные решетки и φ сюръективно, то это равносильно равенству

$$\varphi(\sup A)=\sup\varphi(A)$$

для всякого подмножества A из P. Совокупность Р. о. частично упорядоченного множества P в себя образует полугруппу, к-рую можно сделать частично упорядоченной (см. *Упорядоченная полугруппа)*, полагая $\varphi \leqslant \psi$, если $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ для всех $x \in P$. Свойства этой частично упорядоченной полугруппы тесно связаны со свойствами частично упорядоченного множества P (см. *Решетка*). *Л. А. Скорняков.*

РЕЗНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, образованная из ортогональных траекторий однопараметрич. семейства плоскостей. Р. п. имеет одно семейство плоских линий кривизны, к-рые одновременно являются для Р. п. геодезическими. Если семейство плоскостей вырождается в пучок, то Р. п. будет поверхностью вращения. Сечения Р. п. плоскостями семейства наз. меридианами, а ортогональные траектории — параллелями Р. п. Все меридианы конгруэнтны, так что Р. п. можно образовать движением плоской линии L (меридиана), плоскость к-рой катится без скольжения по нек-рой развертывающейся поверхности, называемой направляющей поверхностью Р. п. и являющейся одной из полостей ее эволюты.

Если $\rho(s)$ — радиус-вектор одной параллели, то радиус-вектор Р. п. есть

$$r = \rho(s) + \eta(v)\, p(s) + \zeta(v)\, q(s),$$

где $p = \nu \cos\theta + \beta \sin\theta$, $q = -\nu \sin\theta + \beta \cos\theta$, ν — главная нормаль, β-бинормаль, x — кручение кривой Γ, а $\theta = -\int x\, ds$. Ее линейный элемент:

$$ds^2 = [1 + k(\zeta \sin\theta - \eta \cos\theta)]^2\, ds^2 + (\eta'^2 + \zeta'^2)\, dv^2,$$

где $\eta(v)$, $\zeta(v)$ — уравнения Γ, а k — кривизна. *И. Х. Сабитов.*

РЕЗОЛЬВЕНТА — 1) Р. алгебраического уравнения $f(x)=0$ степени n — алгебраическое уравнение $g(y)=0$ с коэффициентами, рационально зависящими от коэффициентов $f(x)$, такое, что знание корней этого уравнения позволяет найти корни данного уравнения $f(x)=0$ в результате решения более простых уравнений, степеней не больших n. Иногда Р. называют само рациональное выражение $y = y(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть $f(x)$ — сепарабельный многочлен над полем k с группой Галуа G и H — нормальный делитель группы G. Пусть $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ — рациональное выражение от $x_1, \ldots, x_n$, остающееся инвариантным при всех подстановках корней $x_1, \ldots, x_n$ из группы H, и $y \notin k$. Тогда y является корнем нек-рого уравнения $g(y)=0$ с коэффициентами из k, группа Галуа к-рого является собственной факторгруппой группы G. Таким образом, решение уравнения $f(x)=0$ сводится к решению уравнения $g(y)=0$ и решению уравнения $f(x)=0$ над полем $k(y_1, \ldots, y_s)$.

Напр., для решения уравнения 4-й степени

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

(любое уравнение 4-й степени приводится к такому виду) используют кубич. Р.

$$y^3 - 2py^2 + (p^2 - 4r^2)\, y + q^2 = 0,$$

корни к-рой y_1, y_2, y_3 связаны с корнями x_1, x_2, x_3, x_4 соотношениями $y_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, $y_2 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$, $y_3 = (x_2 + x_4)(x_2 + x_3)$. Корни y_1, y_2, y_3 определяются с помощью формулы Кардано, что позволяет определить и корни x_1, x_2, x_3, x_4.

Последовательное применение метода Р. позволяет свести решение любого уравнения с разрешимой группой Галуа к решению цепочки уравнений с циклич. группой Галуа. Для решения последних используются резольвенты Лагранжа.

Пусть $f(x)=0$ — уравнение над полем k с циклич. группой Галуа G порядка n и пусть k содержит первообразный корень из единицы ζ_n степени n. Для элемента α, принадлежащего полю разложения многочлена $f(x)$, и характера χ группы G в группу корней из единицы степени n резольвента Лагранжа $\rho(\chi, \alpha)$ определяется формулой

$$\rho(\chi, \alpha)=\sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma)^{-1} \sigma(\alpha). \qquad (*)$$

Пусть $\alpha=x_1$ — один из корней многочлена $f(x)$ и χ пробегает все характеры группы G. Тогда система линейных уравнений (*) позволяет определить корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если известны резольвенты Лагранжа для всех характеров χ группы G.

Для $\tau \in G$ выполняется соотношение

$$\tau\rho(\chi, \alpha)=\chi(\tau)\rho(\chi, \alpha),$$

к-рое показывает, что элементы $a=\rho(\chi, \alpha)^n$ и $b_i=\rho(\chi, \alpha)^{-i}\rho(\chi^i, \alpha)$ при любом целом i инвариантны относительно G и, следовательно, являются однозначно определенными рациональными выражениями от коэффициентов многочлена $f(x)$ и корня ζ_n. Если χ порождает группу характеров группы G, то имеют место равенства $\rho(\chi, \alpha)=\sqrt[n]{a}$ и $\rho(\chi', \alpha)=b_i\rho(\chi, \alpha)^i$ для $\chi'=\chi^i$.

Резольвентой Галуа уравнения $f(x)=0$ наз. такое неприводимое над данным полем алгебраич. уравнение $y(x)=0$ (см. *Галуа теория*), что в результате присоединения одного из его корней к этому полю получается поле, содержащее все корни уравнения $f(x)=0$.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979. *Л. В. Кузьмин.*

2) В теории интегральных уравнений под Р. (разрешающим ядром) уравнения

$$\varphi(s)+\lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\, dt=f(s) \qquad (**)$$

понимают функцию $\Gamma(s, t; \lambda)$ переменных s, t и параметра λ, при помощи к-рой решение уравнения (**) представляют в виде

$$f(s)+\lambda \int_a^b \Gamma(s, t, \lambda) f(t)\, dt,$$

если λ не есть собственное значение уравнения (**), напр. для ядра $K(s, t)=s+t$ резольвентой является функция

$$\Gamma(s, t; \lambda)=\frac{s+t-\left(\frac{s+t}{2}-st-\frac{1}{3}\right)\lambda}{1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12}}.$$

БСЭ-3.

3) **Р. оператора** — оператор R_λ, обратный к $T_\lambda=A-\lambda T$, где A — замкнутый линейный оператор, определенный на плотном множестве D_A банахова пространства X со значениями в том же пространстве, при условии, что λ таково, что T_λ^{-1} есть линейный непрерывный оператор, определенный на всем X. Точки λ, для к-рых Р. существует, наз. **регулярными точками** оператора A, а совокупность всех регулярных точек — **резольвентным множеством** $\rho(A)$ этого оператора. Множество $\rho(A)$ — открытое и на каждой его связной компоненте оператора R_λ является аналитич. функцией параметра λ.

Свойства Р.:

1) $R_\lambda-R_\mu=(\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu$ для любых двух точек λ, $\mu \in \rho(A)$;

2) из $R_\lambda x=0$ следует $x=0$;

3) если X — гильбертово пространство, то $R_{\bar\lambda}=R_\lambda^*$.

Лит.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977. *В. И. Соболев.*

4) В гомологической алгебре Р. модуля — *комплекс* C, определенный для положительных степеней и снабженный пополняющим гомоморфизмом $A \to C$ (мо-

дуль A рассматривается как комплекс, равный нулю в ненулевых степенях) таким образом, что последовательность $0 \to A \to C^0 \to C^1 \to \ldots$ точна. Р. наз. **инъективной**, если все C^i инъективны. Двойственным образом определяется **проективная резольвента**. Р. является основным средством вычисления *производных функторов*. В частных случаях удобно использовать специальные виды Р. Напр., для кольца многочленов $R=k[x_1, \ldots, x_n]$ *внешняя алгебра* $E_R(u_1, \ldots, u_n)$ превращается в Р. тривиального R-модуля k, если задать дифференциал $\partial(u_i)=x_i$ и пополняющий гомоморфизм $\varepsilon(u_i)=0$. Эта конструкция применима к кольцам степенных рядов (как сходящихся, так и формальных) и носит название **комплекса Козюля**.

В. Е. Говоров.

РЕЗОЛЬВЕНТНОЕ МНОЖЕСТВО — множество $\rho(T)$, где T — линейный оператор в банаховом пространстве, такое, для к-рого существует оператор $R_z=(T-zI)^{-1}$, ограниченный и имеющий область определения, плотную в X. Дополнительное к Р. м. множество есть спектр оператора T.

Лит.: [1] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979.

М. И. Войцеховский.

РЕЗОНАНС — явление увеличения амплитуды *вынужденных колебаний* при приближении частоты внешнего воздействия к одной из частот *собственных колебаний* динамич. системы. Явление Р. имеет наиболее простой характер в линейной динамич. системе. Дифференциальное уравнение движения линейной системы с одной степенью свободы в среде с вязким трением при гармонич. воздействии имеет вид

$$a\ddot{q}+b\dot{q}+cq=H\sin(pt+\delta),$$

где q — обобщенная координата; a, b, c — постоянные параметры, характеризующие систему; H, p, δ — соответственно амплитуда, частота, начальная фаза внешнего воздействия. Установившиеся вынужденные колебания происходят по гармонич. закону с частотой p и амплитудой

$$D=\frac{H}{a\sqrt{(k^2-p^2)^2+\frac{b^2}{a^2}p^2}},$$

где $k=\sqrt{c/a}$ — частота собственных колебаний при отсутствии рассеивания энергии ($b=0$). Амплитуда D имеет максимальное значение при $\frac{p}{k}=\sqrt{1-\frac{b^2}{2ac}}$ и при малом рассеивании энергии близка к ее значению при $p=k$. Принято называть **резонансом** тот случай, когда $p=k$. Если $b=0$, то при $p=k$ амплитуда вынужденных колебаний возрастает пропорционально времени.

Если линейная система имеет n степеней свободы, то Р. наступает при совпадении частоты внешней силы с одной из собственных частот системы. При негармонич. воздействии Р. может иметь место лишь при совпадении частот его гармонич. спектра с частотами собственных колебаний.

Лит.: [1] Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, М.—Л., 1951.

Н. В. Бутенин.

РЕЗОНАНСНЫЕ ЧЛЕНЫ — те члены $f_{PQ}X^P \times \exp\{i\langle Q, Y\rangle\}$ ряда Тейлора — Фурье

$$f(X, Y)=\sum f_{PQ}X^P\exp\{i\langle Q, Y\rangle\}, \tag{1}$$

$$P\in\mathbb{Z}^m,\ P\geqslant 0,\ Q\in\mathbb{Z}^n,$$

$$X^P=x_1^{p_1}\ldots x_m^{p_m},$$

у к-рых показатели P и Q удовлетворяют линейному соотношению вида

$$\langle P, \Lambda\rangle+i\langle Q, \Omega\rangle=c. \tag{2}$$

Здесь f_{PQ} — постоянные коэффициенты, $\langle Q, Y\rangle$ —

скалярное произведение Q и Y; постоянные $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)=\Lambda$ и $(\omega_1, \ldots, \omega_n)=\Omega$ — обычно собственные значения и базис частот нек-рой системы обыкновенных дифференциальных уравнений; константа c не зависит от P и Q, она определяется ролью ряда (1) в рассматриваемой задаче.

Если в линейной системе

$$\dot{x}_j=\lambda_j x_j,\ j=1, \ldots, m,\ \dot{y}_k=\omega_k,\ k=1, \ldots, n, \qquad (3)$$

все λ_j чисто мнимые и в (2) $c=0$, то сумма Р. ч. ряда (1) совпадает с осреднением этого ряда вдоль решений системы (3). Систему обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности нек-рых инвариантных многообразий можно привести к *нормальной форме*, в к-рой ряды содержат только Р. ч. (см. [1]). Так, для *гамильтоновой системы* в окрестности неподвижной точки гамильтониан может быть приведен к виду (1), где $n=0$, и выполнено (2) с $c=0$, причем $\Lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_l, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_l)$ — вектор из собственных значений линеаризованной системы (см. [2]). В этом случае иногда члены с $p_j=p_{j+l}$, $j=1, \ldots, l$, наз. **вековыми** (для них (2) выполняется тривиально), а резонансными наз. остальные члены ряда (1), для к-рых выполнено (2).

Выделение Р. ч., производимое в задачах с малым параметром, зачастую также может быть обосновано с помощью нормальной формы (см. [1]). Для точечного преобразования с мультипликаторами $(\mu_1, \ldots, \mu_m)=M$ показатели Р. ч. ряда (1) с $n=0$ удовлетворяют соотношению $M^P=1$; если положить $\Lambda=\ln M$ и $\omega_1=1$, то получится соотношение (2) с $c=0$.

Лит.: [1] Брюно А. Д., Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979; [2] его же, «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 25, с. 119—262; 1972, т. 26, с. 199—239.

А. Д. Брюно.

РЕЗУЛЬТАНТ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ — элемент поля Q, определяемый формулой

$$R(f, g)=a_0^s b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i-\beta_j), \qquad (1)$$

где Q — поле разложения многочлена fg, α_i, β_j — корни многочленов

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

и

$$g(x)=b_0x^s+b_1x^{s-1}+\ldots+b_s$$

соответственно. Если $a_0b_0\neq0$, то многочлены тогда и только тогда имеют хотя бы один общий корень, когда их Р. равен нулю. Имеет место равенство

$$R(g, f)=(-1)^{ns} R(f, g).$$

Р. можно записать в любом из следующих видов:

$$R(f, g)=a_0^s \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i), \qquad (2)$$

$$R(f, g)=(-1)^{ns} b_0^n \prod_{j=1}^{s} f(\beta_j). \qquad (3)$$

Выражения (1), (2) и (3) неудобны для вычисления Р., так как они содержат корни многочленов. Через коэффициенты многочленов Р. можно выразить в виде следующего определителя порядка $n+s$:

$$R(f, g)=\begin{vmatrix} a_0 a_1 & \ldots & a_{n-1} a_n & & & \\ & a_0 & \ldots & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_0 & a_1 \ldots a_{n-1} & a_n \\ b_0 b_1 & \ldots & b_{s-1} b_s & & & \\ & b_0 & \ldots & \ldots & b_{s-1} & b_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & b_0 & b_1 \ldots b_{s-1} & b_s \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Этот определитель в первых s строках содержит коэффициенты многочлена $f(x)$, в последних n строках — коэффициенты многочлена $g(x)$, а на свободных местах — нули.

Р. многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с числовыми коэффициентами можно представить в виде определителя порядка n (или s). Для этого находят остаток от деления $x^k g(x)$ на $f(x)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Пусть это будет

$$a_{k0}+a_{k1}x+\ldots+a_{kn-1}x^{n-1}.$$

Тогда

$$R(f, g)=\begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0\,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1\,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1\,0} & a_{n-1\,1} & \ldots & a_{n-1\,n-1} \end{Vmatrix}.$$

Дискриминант $D(f)$ многочлена

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}\ldots a_n,\ a_0\neq 0,$$

выражается через Р. многочлена $f(x)$ и его производной $f'(x)$ следующим образом:

$$D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{-1} R(f, f').$$

Применение к решению систем уравнений. Пусть дана система двух алгебраич. уравнений с коэффициентами из поля P:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y)=0, \\ g(x, y)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Многочлены f и g записывают по степеням x:

$$f(x, y)=a_0(y)x^k+a_1(y)x^{k-1}+\ldots+a_k(y),$$
$$g(x, y)=b_0(y)x^l+b_1(y)x^{l-1}+\ldots+b_l(y),$$

и по формуле (4) вычисляют Р. этих многочленов как многочленов от x. Получается многочлен, зависящий только от y:

$$R(f, g)=F(y).$$

Говорят, что многочлен $F(y)$ получен путем исключения x из многочленов $f(x,y)$ и $g(x, y)$. Если $x=\alpha$, $y=\beta$ — решение системы (5), то $F(\beta)=0$, и обратно, если $F(\beta)=0$, то или многочлены $f(x, \beta)$, $g(x, \beta)$ имеют общий корень (к-рый надо искать как корень их наибольшего общего делителя), или $a_0(\beta)=b_0(\beta)=0$. Тем самым решение системы (5) сводится к вычислению корней многочлена $F(y)$ и общих корней многочленов $f(x, \beta)$, $g(x, \beta)$ с одним неизвестным.

Аналогично можно решать и системы уравнений с любым числом неизвестных, но эта задача приводит к весьма громоздким вычисл ниям (см. также *Исключения теория*).

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [2] Окунев Л. Я., Высшая алгебра, 4 изд., М.—Л., 1949; [3] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [4] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1—3, М., 1954—55.

И. В. Проскуряков.

РЕЙДЕМЕЙСТЕРА КРУЧЕНИЕ, кручение де Рама, кручение Франца,— инвариант, позволяющий различать многие структуры в дифференциальной топологии, напр. узлы, гладкие структуры на многообразиях, в частности на линзовых пространствах. Впервые Р. к. введено К. Рейдемейстером (см. [1]) при изучении трехмерных линз, обобщения для n-мерных линз были независимо получены в [2] и [3].

Пусть C — свободный комплекс левых A-модулей, где A — ассоциативное кольцо с единицей. Пусть, далее, h — матричное представление кольца A, т. е. гомоморфизм кольца A в кольцо $R^{n\times n}$ всех действительных $(n\times n)$-матриц. И пусть в модулях C_k комплекса C отмечены базисы c_k, а комплекс $C'=R^{n\times n}\otimes_A C$ $R^{n\times n}$-модулей ацикличен; тогда определено *Уайтхеда кручение* $\tau(C')\in \overline{K}_1 R^{n\times n}=\overline{K}_1 R=R_+$, где R_+ — мультипликативная группа поля действительных чисел. Число $\tau(C')$ наз. кручением Рейдемейстера комплекса C', а также действительным Р. к.

Эффективность замены кручения Уайтхеда на Р. к. основывается на теореме Басса [4]: если π — конечная группа, то элемент $\omega \in Wh(\pi)$ имеет конечный порядок, если $h_*(\omega)=1$ для любого представления h, где $h_*(\omega)$ — Р. к., индуцированное элементом ω.

Лит.: [1] Reidemeister K., «Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg», 1935, Bd 11, S. 102—09; [2] Franz W., «J. für r. und ang. Math.», 1935, Bd 173, S. 176—84; [3] Rham G. de, «Матем. сб.», 1936, т. 1, № 5, с. 737—43; [4] Bass H., «Publ. math.», 1964, № 22, р. 5—60 [IHES]. *А. С. Мищенко.*

РЕЙНОЛЬДСА ЧИСЛО — один из критериев подобия для течений вязких жидкостей и газов, характеризующий соотношение между инерционными силами и силами вязкости:

$$\mathrm{Re} = \rho v l/\mu,$$

где ρ — плотность, μ — динамич. коэффициент вязкости жидкости или газа, v — характерная скорость потока, l — характерный линейный размер.

От Р. ч. зависит также режим течения жидкости, характеризуемый критическим Р. ч. $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ возможно лишь ламинарное течение жидкости, а при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ течение может стать турбулентным.

Р. ч. названо по имени О. Рейнольдса (O. Reynolds).

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

РЕКУРРЕНТНАЯ ТОЧКА динамической системы — точка x динамич. системы f^t (или, в иных обозначениях, $f(t, \cdot)$, см. [2]), заданной на метрич. пространстве S, удовлетворяющая условию: для всякого $\varepsilon>0$ найдется $T>0$ такое, что все точки траектории $f^t x$ содержатся в ε-окрестности всякой дуги временно́й длины T этой траектории (иными словами, при любом $\tau \in \mathbb{R}$ ε-окрестность множества

$$\{f^t x\},\ t \in [\tau, \tau+T],$$

содержит всю траекторию $f^t x$). В этом случае $f^t x$ наз. рекуррентной траекторией.

Теорема Биркгофа: если пространство S полное (напр., $S=\mathbb{R}^n$), то 1) для того чтобы точка была рекуррентной, необходимо и достаточно, чтобы замыкание ее траектории было *минимальным множеством*; 2) для того чтобы существовала Р. т., достаточно, чтобы существовала точка, устойчивая по Лагранжу (см. *Устойчивость по Лагранжу*).

Р. т. устойчива по Лагранжу и по Пуассону (см. *Устойчивость по Пуассону*). Почти периодическая (в частности, неподвижная или периодическая) точка динамич. системы рекуррентна. Вообще, всякая точка строго эргодической динамич. системы рекуррентна, но сужение динамич. системы на замыкание рекуррентной траектории (минимальное множество) может не быть строго эргодической динамич. системой (пример Маркова, см. [2]).

Лит.: [1] Биркгоф Д. Д., Динамические системы, пер. с англ., М., 1941; [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949. *В. М. Миллионщиков.*

РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА — то же, что *рекуррентное соотношение.*

РЕКУРРЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, являющаяся *рекуррентной точкой* сдвигов динамич. системы. Эквивалентное определение: функция $\varphi: \mathbb{R} \to S$, где S — метрич. пространство, наз. рекуррентной, если она имеет предкомпактное множество значений, равномерно непрерывна и для всякой последовательности чисел $t_k \in \mathbb{R}$ такой, что существует предел

$$\tilde{\varphi}(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi(t_k + t)$$

(предел в компактно открытой топологии, т. е. равномерный на каждом отрезке), найдется последовательность чисел $\tau_k \in \mathbb{R}$ такая, что

$$\varphi(t) = \lim_{k \to \infty} \tilde{\varphi}(\tau_k + t)$$

в компактно открытой топологии.

Если $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — ограниченная равномерно непрерывная функция, то найдутся $t_k \in \mathbb{R}$ такие, что предел

$$\tilde{\varphi}(t) = \lim_{k \to \infty} \varphi(t_k + t)$$

(в компактно открытой топологии) существует и является Р. ф. Всякая почти периодич. функция и, в частности, всякая периодич. функция являются Р. ф.

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146. *В. М. Миллионщиков.*

РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ, рекуррентная формула, — соотношение вида

$$a_{n+p} = F(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+p-1}),$$

к-рое позволяет вычислять все члены последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если заданы ее первые p членов. Примеры Р. с.: 1) $a_{n+1} = q \cdot a_n$ $(q \neq 0)$ — геометрич. прогрессия, 2) $a_{n+1} = a_n + d$ — арифметич. прогрессия, 3) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ — последовательность чисел Фибоначчи.

В случае, когда Р. с. линейно (см. *Возвратная последовательность*), задача описания множества всех последовательностей, удовлетворяющих данному Р. с., имеет аналогии с решением обыкновенного однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Возвратные последовательности, 2 изд., М., 1975. *С. Н. Артемов.*

РЕКУРРЕНТНЫЕ СОБЫТИЯ в последовательности повторных испытаний со случайными исходами — ряд событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ таких, что наступление события A_n определяется исходами первых n испытаний, $n = 1, 2, \ldots$, а при условии, что наступило событие A_n, наступление события A_m, $m > n$, определяется исходами $(n+1)$-го, $(n+2)$-го и т. д. до m-го испытаний, причем при условии одновременного наступления событий A_n и A_m $(m > n)$ исходы первых n и последующих $m-n$ испытаний условно независимы.

Более точно, пусть X — совокупность (конечная или счетная) всех исходов отдельного испытания, $X^{[1, n]}$ — пространство последовательностей $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$, исходов при n испытаниях, $n = 1, 2, 3, \ldots$, и $X^{[1, \infty]}$ — пространство бесконечных последовательностей $(x_1, \ldots, x_n \ldots)$, $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, исходов, в к-ром задано нек-рое распределение вероятностей p. Пусть в каждом пространстве $X^{[1, n]}$, $n = 1, 2, \ldots$, выделено нек-рое подмножество $\varepsilon_n \subseteq X^{[1, n]}$ так, что для любых n и m, $1 \leq n < m < \infty$, последовательность $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) \in X^{[1, m]}$ такая, что $\bar{x}|_1^n \equiv (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in \varepsilon_n$, принадлежит ε_m в том и только в том случае, когда последовательность

$$\bar{x}\,|_{n+1}^m \equiv (\bar{x}_{n+1}, \ldots, \bar{x}_m) \in \varepsilon_{m-n}.$$

Если последнее условие выполнено и $\bar{x} \in \varepsilon_m$, то

$$p\left\{x \in X^{[1, \infty]} : x\,|_1^m = \bar{x}\right\} = p\left\{x \in X^{[1, \infty]} : x\,|_1^n = \bar{x}\,|_1^n\right\} p\left\{x \in X^{[1, \infty]} : x\,|_{n+1}^m = \bar{x}\,|_{n+1}^m\right\},$$

где для последовательности $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in X^{[1, \infty]}$ через $x\,|_i^j$ обозначена последовательность

$$x\,|_i^j = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j),\ i \leq j,\ (i, j) = 1, 2, \ldots$$

Событие

$$A_n = \left\{x \in X^{[1, \infty]} : x\,|_1^n \in \varepsilon_n\right\}$$

наз. рекуррентным событием, наступившим после n испытаний.

Примеры. 1) В последовательности независимых бросаний монеты — события, состоящие, соответственно, в том, что при n испытаниях герб и решка выпадут одинаковое число раз (такое событие возможно только при четных n).

2) При случайном блуждании точки по одномерной решетке Z^1, начинающемся в нуле (с независимыми при разных шагах переходами в соседние точки с вероятностями p и q, $p+q=1$), события, состоящие, соответственно, в том, что блуждающая точка окажется в нуле после n-го шага, $n=2,4,\ldots$, являются рекуррентными.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967.

Т. Ю. Попова.

РЕКУРСИВНАЯ ИГРА — *стохастическая игра* с терминальным выигрышем (см. также *Динамическая игра*). Ввиду того, что Р. и. может никогда не закончиться, необходимо определять выигрыши игроков в случае бесконечных партий. Анализ любой игры Шепли может быть сведен к анализу нек-рой Р. и., но из-за возможности бесконечных партий исследование Р. и. в общем случае сложнее, чем исследование стохастич. игр. Любая антагонистическая конечная Р. и. обладает значением, и оба игрока имеют стационарные ε-оптимальные стратегии. X. Эверетт [1] указал метод нахождения как значений игры, так и оптимальных стратегий.

Лит.: [1] Everett H., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 3, Princeton, 1957, p. 47—78. *В. К. Доманский.*

РЕКУРСИВНАЯ РЕАЛИЗУЕМОСТЬ — уточнение интуиционистской семантики арифметич. суждений на основе понятия частично рекурсивной функции, предложенное С. Клини (см. [1], [2]). Для всякой замкнутой арифметич. формулы F определяется отношение «натуральное число e реализует формулу F», обозначаемое erF. Отношение erF определяется индуктивно в соответствии с построением формулы F.

1) Если F — элементарная формула без свободных переменных, т. е. формула вида $s=t$, где s и t — постоянные термы, то erF тогда и только тогда, когда $e=0$ и значения термов s и t совпадают.

Пусть A и B — формулы без свободных переменных.

2) $er(A\&B)$ тогда и только тогда, когда $e=2^a\cdot 3^b$, где arA, brB.

3) $er(A\vee B)$ тогда и только тогда, когда $e=2^0\cdot 3^a$ и arA или $e=2^1\cdot 3^b$ и brB.

4) $er(A\supset B)$ тогда и только тогда, когда e — гёделев номер такой одноместной частично рекурсивной функции φ, что для любого натурального числа a, если arA, то φ применима к a и $\varphi(a)rB$.

5) $er(\neg A)$ тогда и только тогда, когда $er(A\supset 1=0)$.

Пусть $A(x)$ — формула без свободных переменных, отличных от x; если n — натуральное число, то $\overline{n}$ — терм, изображающий в формальной арифметике число n.

6) $er(\exists xA(x))$ тогда и только тогда, когда $e=2^n\cdot 3^a$ и $arA(\overline{n})$.

7) er $(\forall xA(x))$ тогда и только тогда, когда e — гёделев номер такой общерекурсивной функции f, что для любого натурального n число $f(n)$ реализует $A(\overline{n})$.

Замкнутая формула F называется *реализуемой*, если существует число e, реализующее F. Формула $A(y_1,\ldots,y_m)$, содержащая свободные переменные $y_1,\ldots,y_m$, может рассматриваться как предикат от $y_1,\ldots,y_m$ («формула $A(y_1,\ldots,y_m)$ реализуема»). Если формула F выводима из реализуемых формул в интуиционистском арифметическом исчислении, то F реализуема (см. [3]). В частности, всякая формула, доказуемая в интуиционистской арифметике, реализуема.

Можно указать такую формулу $A(x)$, что формула $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ не реализуема. Соответственно, в этом случае формула $\neg\forall x(A(x) \vee A(x))$ реализуема, хотя является классически ложной.

Всякая предикатная формула $\mathfrak{A}$, доказуемая в интуиционистском исчислении предикатов, обладает тем свойством, что каждая арифметич. формула, получающаяся из $\mathfrak{A}$ подстановкой, реализуема. Предикатные формулы, обладающие этим свойством, наз. реализуемыми. Было показано [4], что пропозициональная формула

$$((\neg\neg D \supset D) \supset (\neg\neg D \vee \neg D)) \supset (\neg\neg D \vee \neg D),$$

где D обозначает формулу $\neg p \vee \neg q$, реализуема, но не выводима в интуиционистском исчислении высказываний.

Лит.: [1] Kleene S. C., «J. Symbolic Logic», 1945, v. 10, p. 109—24; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Nelson D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 61, p. 307—68; [4] Rose G. F., там же, 1953, v. 75, p. 1—19; [5] Новиков П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977.

В. Е. Плиско.

РЕКУРСИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ — раздел теории *рекурсивных функций*, в к-ром рассматриваются и классифицируются подмножества натуральных чисел с алгоритмич. точки зрения, а также исследуются структуры, возникающие в результате такой классификации. Для каждого множества A, к-рое является подмножеством множества всех натуральных чисел N, можно сформулировать следующую проблему разрешимости: существует ли алгоритм, позволяющий для любого $x \in N$ ответить на вопрос о принадлежности x к A?

Математическая постановка проблем такого рода, как и развитие Р. т. м., стала возможна лишь в 40-х гг. 20 в. после успешной формализации интуитивного понятия (алгоритмически) *вычислимой функции*. Области значений таких функций образуют семейство рекурсивно перечислимых множеств (р. п. м.). Множества, для к-рых сформулированная выше проблема разрешима, наз. рекурсивными. Точнее, A рекурсивно тогда и только тогда, когда A и $N \diagdown A$ оба являются р. п. м. Первыми примерами нерекурсивных р. п. м. оказались т. н. креативные (творческие) множества. Именно, р. п. м. K наз. креативным, если существует вычислимая функция, к-рая по номеру любого р. п. м. A, не пересекающегося с K, выдает число, принадлежащее $N \diagdown (K \cup A)$. Одновременно с креативными множествами были обнаружены и другие нерекурсивные р. п. м., в частности простые. Р. п. м. наз. простым, если оно имеет бесконечное дополнение, к-рое не содержит бесконечных р. п. м. Таким образом, уже для р. п. м. возникает тонкая проблема классификации их проблем разрешимости. Одним из инструментов для такой классификации служит понятие сводимости. На интуитивном уровне множество A сводимо к множеству B, если существует алгоритм, к-рый решал бы проблему вхождения элементов для множества A при условии, что есть возможность по мере надобности пользоваться информацией о принадлежности тех или иных натуральных чисел множеству B. В этом случае A оказывается в определенном смысле «рекурсивным» относительно B, а обычные рекурсивные множества — «рекурсивными» относительно любого множества. Такая сводимость в самом общем виде (точная формулировка к-рой достаточно сложна) наз. тьюринговой, или T-сводимостью. Накладывая те или иные ограничения на алгоритм, участвующий в понятии сводимости, приходят к определению других сводимостей, напр. 1-, m-, btt- или tt-сводимости. В частности, A m-сводимо к B, если существует всюду определенная вычислимая функция f такая, что для всех x из N

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Если f можно выбрать разнозначной, то говорят, что A 1-сводимо к B.

Обобщением m-сводимости является табличная (tt-) сводимость. Множество A tt-сводимо к множеству B, если существует алгоритм, к-рый для каждого x дает набор чисел $\langle t_1^x, t_2^x, \ldots, t_{n(x)}^x \rangle$ и булеву функцию $\beta_x(y_1, \ldots, y_{n(x)})$, причем

$$x \in A \Leftrightarrow \beta_x(\chi(t_1^x), \ldots, \chi(t_{n(x)}^x)) = 1,$$

где $\chi(t)=1$, если $t \in B$, и $\chi(t)=0$ в противном случае. Если A можно таблично свести к B так, что $n(x)$ будет ограничено нек-рой константой, то говорят, что A ограниченно таблично (btt-) сводится к B.

Пусть r — нек-рая сводимость. Пишут $A \leqslant_r B$, если множество A r-сводимо к B. Отношение $\leqslant_r$ должно быть предпорядком. Если положить

$$A \equiv_r B \Leftrightarrow (A \leqslant_r B \;\&\; B \leqslant_r A),$$

то $\equiv_r$ будет отношением эквивалентности, отдельный класс к-рой наз. r-степенью (и рекурсивно перечислимой r-степенью, если этот класс содержит р. п. м.). Тьюринговы степени известны в литературе и как степени неразрешимости. Отношение $\leqslant_r$ порождает частичное упорядочение всех r-степеней. Сводимость r' слабее, чем r, если $A \leqslant_r B$ влечет $A \leqslant_{r'} B$. Частично упорядоченные множества r-степеней для m- и более слабых сводимостей образуют верхние полурешетки (что неверно для 1-степеней), имеющие наименьший элемент $\mathbf{0}$—r-степень рекурсивных множеств. Если ограничиться изучением только рекурсивно перечислимых r-степеней, то они имеют также и наибольший элемент $\mathbf{1}$, к-рый наз. полной r-степенью. Р. п. м., содержащиеся в полной r-степени, наз. r-полными. Минимальными r-степенями наз. такие, к-рые имеют лишь единственную строго меньшую r-степень, а именно $\mathbf{0}$.

После определения той или иной сводимости ее изучение развивается в основном в двух направлениях. Первое связано с вопросами описания верхней полурешетки степеней относительно введенной сводимости. Известным примером проблемы такого типа явилась проблема Поста [1]: верно ли, что все рекурсивно перечислимые нерекурсивные множества имеют одну и ту же степень неразрешимости? Или, другими словами, верно ли, что полурешетка рекурсивно перечислимых степеней неразрешимости состоит лишь из двух элементов? Получено отрицательное решение этой проблемы [2]. Решения этих вопросов о строении верхних полурешеток рекурсивно перечислимых m-, tt- и T-степеней являются определенными вехами в изучении сводимостей. В нач. 1960-х гг. было доказано, что полурешетка T-степеней (везде ниже подразумеваются полурешетки рекурсивно перечислимых степеней) не является решеткой и не имеет минимальных элементов; тогда же было отмечено существование минимальных m-степеней и показано, что полная m-степень не является точной верхней гранью двух несравнимых m-степеней. Позднее выяснилось, что этот факт не имеет места для btt- и более слабых сводимостей. Ю. Л. Ершов [4] доказал, что верхняя полурешетка m-степеней не является решеткой и что под нек-рыми ее элементами нет минимальных. Аналогичные результаты, а также существование минимальных элементов, были получены для полурешеток btt- и tt-степеней [5]. Установлено, что элементарные теории полурешеток m-, btt-, tt-, T- и нек-рых других степеней попарно различны.

Второе направление связано с вопросами о том, какие r-степени, сколько их и как они расположены в степенях относительно более слабой сводимости, чем r. В частности, полная T (tt-, btt-)-степень содержит счетное число рекурсивно перечислимых tt (соответственно btt-, m-)-степеней. С другой стороны, существуют нерекурсивные T (btt-)-степени, состоящие из одной tt (m-)-степени, но каждая нерекурсивная tt-степень содержит, по крайней мере, две btt-степени.

К изучению р. п. м. имеются и другие подходы, не связанные с понятием сводимости. Один из них заключается в следующем. Все р. п. м. вместе с операциями объединения и пересечения образуют решетку $\mathscr{E}$. Нек-рое свойство р. п. м. наз. теоретико-решеточным, если оно сохраняется при всех автоморфизмах $\mathscr{E}$. Такими, напр., являются свойства «быть рекурсивным», «быть простым» или «быть максимальным» множеством. Р. п. м. A наз. максимальным (r-максимальным), если его дополнение бесконечно и не может быть разбито р. п. м. (соответственно рекурсивным множеством) на две бесконечные части. Классич. результатами, связанными с изучением $\mathscr{E}$, могут служить теоремы о существовании максимальных множеств и о возможности разбиения любого нерекурсивного р. п. м. на два нерекурсивных р. п. м. (см. [2]) и теорема о существовании r-максимального множества без максимальных надмножеств (см. [3]).

Понятие максимального множества возникло в связи с надеждой, что они окажутся не T-полными. Это было бы естественным решением проблемы Поста. Сам Э. Пост, накладывая все более жесткие ограничения на дополнения р. п. м., определил классы гиперпростых и гипергиперпростых множеств, показав, что гиперпростые множества не могут быть tt-полными. При этом р. п. м. A с бесконечным дополнением наз. гиперпростым (гипергиперпростым), если не существует вычислимой последовательности попарно непересекающихся конечных (соответственно рекурсивно перечислимых) множеств, каждое из к-рых имеет непустое пересечение с дополнением A. Определение этих классов множеств дается не в теоретико-решеточных терминах, и в действительности удалось показать, что «быть гиперпростым» не является теоретико-решеточным свойством. Однако доказано, что р. п. м. A с бесконечным дополнением является гипергиперпростым тогда и только тогда, когда для любого р. п. м. B существует рекурсивное множество R такое, что $R \subseteq B$ и $(B \setminus A) \subseteq R$, т. е. свойство «быть гипергиперпростым» оказалось теоретико-решеточным. Было построено гипергиперпростое множество без максимальных надмножеств, а также доказано, что для любого нерекурсивного р. п. м. A существует автоморфизм Φ решетки $\mathscr{E}$ такой, что $\Phi(A)$ является T-полным множеством [6]. Таким образом, надежда найти теоретико-решеточное свойство, к-рым не обладали бы рекурсивные и T-полные множества, не оправдалась.

Имеется также концепция (в духе [7]), согласно к-рой Р. т. м. должна изучать свойства подмножеств N, сохраняющиеся при рекурсивных перестановках. В соответствии с этим говорят, что множества A и B имеют один и тот же тип рекурсивной эквивалентности, если существует разнозначная вычислимая функция f такая, что $f(A)=B$ и $f^{-1}(B)=A$. Типы рекурсивной эквивалентности, не содержащие множеств, имеющих бесконечные рекурсивно перечислимые подмножества, наз. изолями. После определения для изолей подходящим образом операции сложения и умножения стала развиваться «арифметика» изолей.

Изучение свойств р. п. м. и сводимостей не только взаимосвязано с другими направлениями теории рекурсивных функций, но и находит применение в логике, теории моделей и алгебре. Р. т. м. имеет в своем арсенале собственные, присущие пока только ей методы исследований. Наиболее известным является т. н. *приоритета метод*, с помощью к-рого получаются особенно глубокие результаты.

Лит.: [1] Post E. L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1944, v. 50, p. 284—316; [2] Friedberg R. M., «J. Symbolic Logic», 1958, v. 23, p. 309—16; [3] Lachlan A. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 130, № 1, p. 1—37; [4] Ершов Ю. Л., «Алгебра и логика», 1969, т. 8, № 5, с. 523—52; [5] Дегтев А. Н., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 3, с. 137—68; [6] Soare R. I., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 84, № 6, p. 1149—81; [7] Dekker J. C. E., Myhill J., «Univ. Calif. publ. math.», 1960, v. 3, № 3, p. 67—213; [8] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [9] Роджерс X., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972. *А. Н. Дегтев.*

РЕКУРСИВНАЯ ФУНКЦИЯ, частично рекурсивная функция,— одно из математич. уточнений интуитивного понятия *вычислимой функции*, определяемое следующим образом. Рассматриваются функции, заданные на натуральных числах и с натуральными значениями. Функции предполагаются частичными, т. е. определенными, вообще говоря, не для всех значений аргументов. Следующие функции наз. простейшими: $S(x)=x+1$, $o(x)=0$, $I_m^n(x_1, \ldots, x_n)=x_m (1 \leqslant m \leqslant n)$. Будем говорить, что n-местная функция ψ получена из m-местной функции φ и n-местных функций $f_1, \ldots, f_m$ с помощью оператора суперпозиции, если для всех $x_1, \ldots, x_n$ имеет место равенство

$$\psi(x_1, \ldots, x_n)=\varphi(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Скажем, что $(n+1)$-местная функция f получается из n-местной функции φ и $(n+2)$-местной функции ψ с помощью оператора примитивной рекурсии, если при любых значениях $x_1, \ldots, x_n, y$ выполняются равенства

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0)=\varphi(x_1, \ldots, x_n),$$
$$f(x_1, \ldots, x_n, y+1)=\psi(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

Будем говорить, что n-местная функция f получается из $(n+1)$-местной функции φ с помощью оператора минимизации, или *наименьшего числа оператора*, если для любых $x_1, \ldots, x_n, y$ выполнено условие $f(x_1, \ldots, x_n)=y$ тогда и только тогда, когда значения $\varphi(x_1, \ldots, x_n, 0), \ldots, \varphi(x_1, \ldots, x_n, y-1)$ определены и не равны 0, а $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)=0$. Частичная функция f наз. рекурсивной, если она может быть получена из простейших функций с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Иными словами, f является Р. ф., если существует такая конечная последовательность частичных функций $g_1, \ldots, g_k$, что $g_k=f$ и каждая функция этой последовательности либо является простейшей, либо получается из предыдущих с помощью операторов суперпозиции, примитивной рекурсии или минимизации. С помощью метода *арифметизации* можно получить пересчет всех таких описаний Р. ф., а именно, можно указать алгоритм, к-рый каждому натуральному числу x сопоставляет нек-рое описание Р. ф. Задаваемую этим описанием Р. ф. обычно обозначают φ_x, а x наз. ее гёделевым номером.

Всюду определенные Р. ф. наз. общерекурсивными. Существуют Р. ф., к-рые не могут быть продолжены до общерекурсивных.

Для любой Р. ф. можно указать алгоритм вычисления ее значений, т. е. все Р. ф. суть вычислимые функции. Распространенная гипотеза, известная под названием тезиса Чёрча, состоит в том, что всякая вычислимая функция является Р. ф. Эта гипотеза подтверждается рядом фактов. Так, все рассматривавшиеся в математике конкретные функции, признаваемые вычислимыми в интуитивном смысле этого слова, оказывались рекурсивными. Понятие Р. ф. оказывается совпадающим по объему с другими математич. уточнениями понятия вычислимой функции (напр., с понятиями функции, вычислимой на машине Тьюринга, вычислимой с помощью нормального алгорифма Маркова и др.).

Возможны различные определения класса всех Р. ф. через исходные функции и порождающие операции. В частности, всякая Р.ф. может быть получена из функций

$$a(x, y) = x + y, \ m(x, y) = x \cdot y, \ I_m^n$$

и

$$k(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < y, \\ 1, & \text{если } x \geqslant y, \end{cases}$$

с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции и минимизации.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [2] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

В. Е. Плиско.

РЕКУРСИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ — часто применяемый в математике способ задания функций, при к-ром значение искомой функции в данной точке определяется через ее значения в предшествующих точках (при подходящем отношении предшествования). Р. о. теоретико-числовых функций являются объектами изучения в теории алгоритмов (см. *Рекурсия*). В теории множеств постоянно используется для определения функций на ординалах *трансфинитная рекурсия.* В более общем плане Р. о. рассматриваются в теории допустимых множеств, в основе к-рой лежит некий синтез идей теории множеств и теории алгоритмов (см. [2]).

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [2] Barwise J., Admisible sets and structures, B., 1975.

Н. В. Белякин.

РЕКУРСИВНОЕ ОТНОШЕНИЕ — такое отношение $R \subseteq \mathbb{N}^n$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, что функция f, определенная на $\mathbb{N}^n$ условием

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in R, \\ 0, & \text{если } \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin R, \end{cases}$$

является *рекурсивной функцией.* В частности, при любом n универсальное отношение $\mathbb{N}^n$ и нуль-отношение $\varnothing$ являются Р. о. Если R и S суть n-местные Р. о., то отношения $R \cup S$, $R \cap S$, $R' = \mathbb{N}^n \setminus R$, $R \setminus S$ также будут Р. о. Относительно операций $\cup$, $\cap$, $'$ система всех n-местных Р. о. образует булеву алгебру. *В. Е. Плиско.*

РЕКУРСИВНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ТИП — класс эквивалентности для отношения рекурсивной эквивалентности, т. е. совокупность всех подмножеств натурального ряда, каждые два из к-рых могут быть приведены во взаимно однозначное соответствие с помощью *частично рекурсивной функции.* Таким образом, понятие Р. э. т. служит в *рекурсивной теории множеств* аналогом понятия мощности в классич. теории множеств. Так как любые два конечных множества рекурсивно эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов, то Р. э. т. конечного множества полностью характеризуется мощностью этого множества. Для бесконечных множеств натуральных чисел, несмотря на их равномощность, это не так: совокупность всех таких множеств распадается на множество континуальной мощности различных Р. э. т. При этом всякий Р. э. т. (кроме Р. э. т. пустого множества) сам является счетным множеством. Множества, принадлежащие одному Р. э. т., сходны в отношении нек-рых алгоритмич. свойств. Так, бесконечные рекурсивно перечислимые множества (как рекурсивные, так и нерекурсивные) образуют один Р. э. т. Так как множество, рекурсивно эквивалентное продуктивному, само является продуктивным, всякий Р. э. т., содержащий *продуктивное множество*, состоит только из продуктивных множеств; так же обстоит дело с *иммунными множествами*. Теория Р. э. т. иммунных множеств, называемых вместе с Р. э. т. конечных множеств *изолями*, разрабатывалась особенно интенсивно.

Над Р. э. т. определяются алгебраич. операции, важнейшими из к-рых являются сложение и умножение: если A и B суть Р. э. т., $\alpha \in A$, $\beta \in B$, причем α состоит из четных чисел, а β — из нечетных, то $A+B$ есть Р. э. т. множества $\alpha \cup \beta$; $A \cdot B$ есть Р. э. т. множества $j(\alpha \times \beta)$, где j — общерекурсивная функция, взаимно однозначно отображающая декартов квадрат натурального ряда на натуральный ряд. Алгебра Р. э. т. тесно связана с алгеброй кардинальных чисел, развиваемой без аксиомы выбора. Совокупность изолей замкнута относительно указанных операций.

Предпринимались попытки перенесения понятия Р. э. т. на классы множеств.

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [2] Dekker J. C. E., Myhill J., Recursive equivalence types, Berk.— Los Ang., 1960. *В. А. Душский.*

РЕКУРСИВНЫЙ ОПЕРАТОР — всюду определенный *частично рекурсивный оператор*. *В. Е. Плиско.*

РЕКУРСИВНЫЙ ПРЕДИКАТ — предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$, определенный на натуральных числах и такой, что функция f, заданная на натуральных числах условием

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } P(x_1, \ldots, x_n) \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если } P(x_1, \ldots, x_n) \text{ ложно,} \end{cases}$$

является *рекурсивной функцией*. *В. Е. Плиско.*

РЕКУРСИИ ВЫСШИХ СТУПЕНЕЙ — *рекурсивные определения*, в к-рых в качестве вспомогательных объектов наряду с числовыми функциями используются нек-рые функционалы более высоких типов. Напр., для случая рекурсии второй ступени таковыми являются «подстановочные» функционалы вида

$$V_{x_1 \ldots x_n}(a_1, \ldots, a_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = f(a_1, \ldots, a_n),$$

а также функционалы, получаемые из них посредством этой рекурсии. Интересное свойство Р. в. с. заключается в том, что *многократную рекурсию* можно свести к однократной за счет перехода к более высокой ступени. На этом основан метод приведения многократных рекурсий к нормальной форме. Следует иметь в виду, что терминологию в этой области нельзя считать окончательно установившейся. В частности, под термином «Р. в. с.» иногда понимают нормальные формы многократных рекурсий.

Лит.: [1] Петер Р., Рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1954. *Н. В. Белякин.*

РЕКУРСИЯ — способ определения функций, являющийся объектом изучения в теории алгоритмов и других разделах математич. логики. Этот способ давно применяется в арифметике для определения числовых последовательностей (прогрессии, чисел Фибоначчи и пр.). Существенную роль играет Р. в вычислительной математике (рекуррентные методы). Наконец, в теории множеств часто используется трансфинитная Р.

Долгое время термин «Р.» употреблялся математиками, не будучи точно определенным. Его приблизительный интуитивный смысл можно описать следующим образом. Значение искомой функции f в произвольной точке $\bar{x}$ (под точкой подразумевается набор значений аргументов) определяется, вообще говоря, через значения этой же функции в других точках $\bar{y}$, к-рые в каком-то смысле «предшествуют» $\bar{x}$. (Само слово «рекурсия» означает «возвращение».) Конечно, в нек-рых «исходных» точках значения f должны задаваться непосредственно. Иногда при помощи Р. определяются одновременно несколько функций; тогда вышеприведенные разъяснения нуждаются в соответствующей модификации. Примеры разнообразных Р. будут даны ниже. Отношение «$\overline{x}_1$ предшествует $\overline{x}_2$» (где $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ принадлежат области определения искомой функции) в разных видах Р. («рекурсивных схемах») может иметь разный смысл, однако оно должно быть «фундированным» (т. е. не должно существовать бесконечной последовательности точек $\overline{x}_n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, такой, что $\overline{x}_{n+1}$ предшествует $\overline{x}_n$). Кроме того, неявно подразумевается, что оно является «достаточно естественным» (напр., желательно, чтобы это отношение усматривалось из самого описания рекурсивной схемы, а не из процесса ее применения). Последнее условие имеет чисто эвристич. значение (напр., для определения каких-нибудь специальных, сравнительно простых видов Р.). Уточнение этого условия по существу неотделимо от уточнения самого понятия Р., а для этого необходимо установить, какого рода формальные выражения могут быть признаны в качестве рекурсивных определений.

В тех случаях, когда речь идет о рекурсивных описаниях числовых функций (т. е. функций от натуральных аргументов и с натуральными значениями), обычно подразумевается, что такие описания задают способ вычисления определяемых функций. Ниже всюду (кроме заключительных замечаний) термин «Р.» будет пониматься именно в таком смысле. Простейшей и наиболее употребительной рекурсивной схемой является п р и м и т и в н а я Р.:

$$f(0, x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n),$$
$$f(y+1, x_1, \ldots, x_n) = h(y, f(y, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n),$$

где функции g, h предполагаются известными, f — определяемая функция, y — переменная, по к-рой ведется Р., $x_1, \ldots, x_n$ — параметры, не участвующие в Р. Ближайшим обобщением этой схемы является т. н. в о з в р а т н а я Р., охватывающая такие виды рекурсивных определений, у к-рых, подобно примитивной Р., только одна переменная участвует в Р., а соответствующее отношение предшествования совпадает с обычным упорядочением натуральных чисел (иногда, впрочем, этот термин употребляется и в более широком смысле). Наиболее типичная разновидность в о з в р а т н о й Р. такова:

$$f(0, x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n),$$
$$f(y+1, x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= h(y, f(\alpha_1(y), x_1, \ldots, x_n), \ldots, f(\alpha_k(y), x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n),$$

где $\alpha_i(y) \leqslant y$, $i=1, \ldots, k$. Представляет интерес тот факт, что возвратную Р. можно заменить конечным числом примитивных Р. и подстановок. Другой пример рекурсивной схемы, сводящейся к примитивной Р., дает о д н о в р е м е н н а я Р. вида

$$f_i(0, x_1, \ldots, x_n) = g_i(x_1, \ldots, x_n),$$
$$f_i(y+1, x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= h_i(y, f_1(y, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(y, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n),$$

где $i=1, \ldots, k$. Математич. логика часто имеет дело с п р и м и т и в н о р е к у р с и в н ы м и ф у н к ц и я м и, т. е. с такими, к-рые можно получить за конечное число шагов при помощи подстановок и примитивных Р., исходя из нек-рого фиксированного запаса совсем простых функций (напр., $f(x)=x+1$, $f(x, y)=y$ и т. п.).

Последовательность функциональных равенств, описывающая такое построение, наз. п р и м и т и в н о р е к у р с и в н ы м о п и с а н и е м соответствующей функции. Эти описания суть синтаксич. объекты (т. е. цепочки символов), обладающие определенной эффективно распознаваемой структурой. Практически все числовые функции, употребляемые в математике по какому-либо конкретному поводу, оказываются примитивно рекурсивными. Этим в значительной мере объясняется интерес к данному классу функций.

Более сложные виды рекурсивных определений получаются, когда Р. идет сразу по нескольким переменным. Такие определения, вообще говоря, выводят из класса примитивно рекурсивных функций, хотя соответствующее отношение предшествования может выглядеть как вполне естественное. Напр., в определении $f(x, y)$ могут участвовать значения $f(u, v)$, где $u<x$ или $u=x$, $v<y$, как это имеет место в следующей схеме двукратной Р.:

$$f(x, y)=g(x, y), \text{ если } x=0 \text{ или } y=0,$$

$$f(x+1, y+1)=$$
$$=h(x, y, f(x, \alpha(x, y, f(x+1, y))), f(x+1, y)).$$

Эта схема уже не сводится к примитивной Р. С другой стороны, к ней сводимы многие более сложные рекурсивные определения (см. [1]).

Перечисленные частные виды Р. имеют точные математич. определения — в отличие от расплывчатых «около математических» представлений о «рекурсии вообще». Уточнение этих представлений естественно мыслить как отыскание подходящего алгоритмич. языка (т. е. формального языка для описания вычислительных процедур), включающего все вообразимые виды Р., но и не слишком широкого. Правомерно ожидать, что выработка такого уточнения может потребовать дополнительных соглашений, вносящих нечто новое в интуитивное понимание Р. В этой связи небезинтересно отметить, что все рассмотренные выше рекурсивные схемы ориентированы на порождение тотальных (всюду определенных) функций. Так, если в схеме примитивной рекурсии g, h тотальны, то такова же и f. И вообще, рекурсивные определения, задающие частичные функции, с интуитивной точки зрения выглядят несколько искусственно. Однако есть причины привлечь такие Р. к рассмотрению. Это связано с т. н. диагональным методом. Именно, пусть дан алгоритмич. язык L, в к-ром определимы лишь тотальные функции, и пусть синтаксич. конструкции L не выводят за пределы интуитивно понимаемой рекурсивности. Конечно подразумевается, что выражения языка L (являющиеся описаниями функций) алгоритмически распознаваемы и что имеется единообразный способ вычисления функций, представимых в L, по их описаниям. Если рассматривать выражения в L просто как цепочки символов, то каждую такую цепочку можно считать изображением натурального числа в подходящей системе счисления, являющегося «кодом» данного выражения. Пусть теперь функция $G(m, x)$ определена так. Если m есть код описания (в языке L) нек-рой одноместной функции f_m, то $G(m, x)=f_m(x)$. В противном случае $G(m, x)=\varphi(x)$, где φ — какая-нибудь фиксированная функция, представимая в L. Ясно, что $G(m, x)$ вычислима и тотальна и такова же функция $F(x)=G(x, x)+1$. Но F невыразима в L, ибо ни при каком m невозможно равенство $F(m)=f_m(m)$. (В этом рассуждении существенно использована тотальность F.) Возникает вопрос: является ли данное описание F рекурсивным? Если в качестве L взять язык примитивно рекурсивных описаний, то оно оказывается сводимым к двукратной Р. В общем случае ситуация неясна из-за расплывчатости интуитивных представлений о Р., так что положительный ответ на поставленный вопрос представляет собой дополнительное соглашение. Если принять его (как это неявно делает современная логика), то язык L, описывающий в точности все виды «тотальной» Р., оказывается невозможным.

Между тем, если в L выразимы также частичные функции (и их описания признаются рекурсивными), то диагонализация не обязательно выводит за пределы L, так что такой язык в принципе может быть пригодным для адекватного уточнения рекурсивности. Правда, это связано с нек-рым переосмыслением самого понятия Р., и современное строгое определение этого понятия не вполне согласовано с имевшимися ранее интуитивными представлениями. В новом уточненном смысле Р. есть нек-рая синтаксич. операция (с фиксированной интерпретацией), употребляемая для построения выражений в различных алгоритмич. языках. Если L—один из таких языков, то естественно предполагать, что в нем есть и другие синтаксич. операции, от к-рых зависит конкретный вид рекурсивных описаний в L. Вообще говоря, выражения языка L не обязательно описывают только числовые функции. Нек-рые из них могут задавать функциональные операторы и другие объекты. Это нужно, в частности, для определения Р. Рекурсивные описания в L — это системы функциональных уравнений вида $f_i = T_i(f_1, \ldots, f_n)$, $i=1, \ldots, n$, где f_i — определяемые функции, а T_i — выражения в L, задающие в совокупности нек-рый оператор. Но все выразимые в L операторы должны быть эффективными (поскольку L — алгоритмич. язык) и потому монотонными (т. е. они сохраняют отношение $\varphi \prec \psi$, означающее, что ψ доопределяет φ). В силу этого всякая система указанного вида обладает минимальным (в смысле отношения $\prec$) решением и, по определению, является рекурсивным описанием функций, составляющих это решение. Исходя из данного описания, искомое минимальное решение можно получить посредством следующего процесса. Для $i=1, \ldots, n$ пусть f_i^0— нигде не определенная функция и $f_i^{k+1} = T_i(f_1^k, \ldots, f_n^k)$, так что $f_i^k \prec f_i^{k+1}$. Нетрудно убедиться, что искомые функции f_i получаются «объединением» f_i^k $(k=0, 1, 2, \ldots)$. Тем самым задан способ совместного вычисления f_i. Этот же процесс задает более или менее естественное отношение предшествования на аргументах, к-рое и оправдывает (в удовлетворительной мере) употребление термина «Р.» в данной связи.

Для того чтобы приведенные ранее рекурсивные схемы подходили под такое определение, необходимо, чтобы язык L был не слишком беден. Так, уже в случае примитивной Р. нужны подстановка и «кусочное» определение (т. е. задание функции несколькими равенствами). Вместе с тем этих двух синтаксич. операций, в сочетании с только что определенной Р., уже достаточно для получения всех вычислимых функций (исходя из простейших). При соответствующих предположениях об L можно также достаточно уверенно утверждать, что данное определение Р. охватывает все интуитивно мыслимые рекурсивные описания. В то же время введенное общее определение обладает характерными чертами неформально понимаемой рекурсивности, к-рые признаются существенными в современной математике.

Плодотворность данного определения Р. заключается не только в его значении для теории алгоритмов, но и в том, что оно позволяет взглянуть с «алгоритмической» (в обобщенном смысле) точки зрения также и на нек-рые конструкции абстрактной математики, имеющие определенное сходство с «числовыми» Р. (трансфинитная Р., индуктивные определения, рекурсивные иерархии и т. п.).

Лит.: [1] Петер Р., Рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1954; [2] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [3] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [4] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [5] Moschovakis Y. N., Elementary induction on abstract structures, Amst.,— [a. o.], 1974.

Н. В. Белякин.

РЕЛАКСАЦИИ МЕТОД, ослабления метод,— метод итерационного решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax=b$, элементарный шаг к-рого состоит в изменении только одной компоненты вектора неизвестных, причем номера изменяемых компонент выбираются в нек-ром циклич. порядке. Наиболее часто Р. м. используется для решения систем с положительно определенной матрицей A.

Если изменение одной компоненты вектора неизвестных x^k осуществляется так, что для нового приближения x^{k+1} квадратичная форма $(A(x^{k+1}-x),\ x^{k+1}-x)$ минимизируется, то Р. м. наз. методом полной релаксации. Если же за один элементарный шаг значение квадратичной формы лишь уменьшается, но не минимизируется, то Р. м. наз. методом неполной релаксации.

Наиболее полно исследован метод последовательной верхней релаксации, когда матрица A обладает т. н. свойством (A) и согласованно упорядочена. Матрица A наз. матрицей, обладающей свойством (A), если существует матрица перестановок P такая, что матрица PAP^T имеет форму $\left\|\begin{matrix} D_1 & H \\ K & D_2\end{matrix}\right\|$, где D_1 и D_2 — квадратные диагональные матрицы.

Итерационная схема Р. м. имеет следующий вид:

$$(D+\omega L)\, x^{k+1}=((1-\omega)\, D-\omega U)\, x^k+\omega b, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

где ω — параметр релаксации, D — диагональная, L — нижняя треугольная и U — верхняя треугольная матрицы из разложения $A=D+L+U$. Если $\omega>1$, то метод наз. методом верхней релаксации (сверхрелаксации), если $\omega\leqslant 1$ — методом нижней релаксации. Параметр ω выбирается из условия минимизации спектрального радиуса матрицы S перехода от итерации к итерации:

$$S=(D+\omega L)^{-1}((1-\omega)\, D-\omega U).$$

Если A — симметричная матрица с положительными диагональными элементами и λ_i — корни детерминантного уравнения $\det(L+\lambda D+U)=0$, то оптимальное значение параметра ω дается формулой

$$\omega=\omega_0=\frac{2}{1+\sqrt{1-\lambda_0^2}},$$

где $\lambda_0^2=\max \lambda_i^2$. Для $\omega=\omega_0$ спектральный радиус матрицы S равен

$$\omega_0-1=\frac{1-\sqrt{1-\lambda_0^2}}{1+\sqrt{1-\lambda_0^2}}<1.$$

Рассмотрены случаи, когда нек-рые λ_i комплексны. Разработаны методы блочной релаксации.

Лит.: [1] Young D. M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1954, v. 76, № 1, p. 92—111; [2] его же, Iterative solution of large linear systems, N. Y.—L., 1971; [3] Вазов В., Форсайт Дж., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, пер. с англ., М., 1963; [4] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1960. *Е. С. Николаев.*

РЕЛАКСАЦИОННОЕ КОЛЕБАНИЕ — периодический процесс, при к-ром медленное, плавное изменение состояния объекта в течение конечного промежутка времени чередуется с быстрым, скачкообразным изменением его состояния за бесконечно малое время. Такие колебательные процессы наблюдаются во многих реальных механических, радиотехнических, биологических и др. объектах (см., напр., [1]—[3]).

Математич. моделью, описывающей Р. к., являются *автономные системы* обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных:

$$\varepsilon\dot{x}=f(x,\ y), \quad \dot{y}=g(x,\ y), \quad \dot{}=d/dt, \tag{1}$$
$$x\in\mathbb{R}^k, \quad y\in\mathbb{R}^m, \quad 0<\varepsilon\ll 1.$$

Периодическое по времени t решение такой системы и наз. релаксационным колебанием. Классич. примером системы с одной степенью свободы, имеющей Р. к., служит *Ван дер Поля уравнение*

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}-\lambda(1-x^2)\frac{dx}{d\tau}+x=0 \qquad (2)$$

при больших положительных значениях параметра λ (с этой точки зрения уже значение $\lambda=10$ можно считать большим). Если положить

$$y=\int_0^x (x^2-1)\,dx+\frac{1}{\lambda}\frac{dx}{d\tau},\quad t=\frac{\tau}{\lambda},\quad \varepsilon=\frac{1}{\lambda^2},$$

то уравнение (2) приводится к системе типа (1):

$$\varepsilon\dot{x}=y-\frac{x^3}{3}+x,\quad \dot{y}=-x.$$

Вопрос о существовании и числе Р. к. системы (1) решается в терминах вырожденной системы

$$f(x,\ y)=0,\quad \dot{y}=g(x,\ y), \qquad (3)$$

являющейся гибридной системой уравнений. Траектории системы (3) в фазовом пространстве $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m$ естественно трактовать как пределы фазовых траекторий невырожденной системы (1) при $\varepsilon\to0$. В частности, траектория Р. к. системы (1) при $\varepsilon\to0$ стремится к замкнутой траектории системы (3), состоящей из чередующихся участков двух типов: участков, проходимых фазовой точкой системы (3) за конечное время (каждый из них лежит на поверхности $f(x,\ y)=0$), и участков, проходимых фазовой точкой системы (3) мгновенно (каждый из них начинается в точке срыва, т. е. в точке, где

$$f(x,\ y)=0,\quad \det\|\partial f/\partial x\|=0,$$

лежит в плоскости, параллельной $\mathbb{R}^k$, и кончается на поверхности $f(x,\ y)=0$). Решение системы (3), соответствующее такой замкнутой траектории, наз. разрывным периодическим решением, а потому Р. к. системы (1) часто наз. периодическим решением, близким к разрывному, или даже просто разрывным колебанием. (Система (3) может иметь замкнутую траекторию, целиком лежащую на поверхности $f(x,\ y)=0$ и не проходящую через точки срыва. В таком случае система (1) имеет близкую к ней замкнутую траекторию, однако соответствующее ей периодич. решение системы (1) не будет Р. к.; см. [6].)

Важной задачей является асимптотич. (при $\varepsilon\to0$) вычисление фазовой траектории Р. к. системы (1), а также получение асимптотич. формул для характеристик этого колебания — его периода, амплитуды и т. д. Вычисление траектории Р. к. уравнения Ван дер Поля (2) проводил А. А. Дородницын [7], построивший асимптотич. приближения при $\lambda\to\infty$ для амплитуды

$$a=2+0{,}77937\lambda^{-4/3}-\frac{16}{27}\frac{\ln\lambda}{\lambda^2}-0{,}8762\lambda^{-2}+O(\lambda^{-8/3})$$

и для периода (см. также [8])

$$T=1{,}613706\lambda+7{,}01432\lambda^{-1/3}-\frac{2}{3}\frac{\ln\lambda}{\lambda}-1{,}3233\lambda^{-1}+$$
$$+O(\lambda^{-5/3}).$$

В случае системы (1) 2-го порядка (т. е. при $k=m=1$) с точками срыва общего положения проблема асимптотич. вычисления Р. к. решена полностью [9]. В частности, выяснена структура асимптотич. разложения при $\varepsilon\to0$ периода Р. к.:

$$T=T_0+\sum_{n=2}^{\infty}\varepsilon^{n/3}\sum_{\nu=0}^{\chi(n-2)}K_{n,\nu}\ln^{\nu}\frac{1}{\varepsilon},$$

где

$$\chi(n)=\frac{n}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{tg}\frac{\pi n}{3},\quad n\in\mathbb{Z};$$

а $K_{n,\nu}$ — коэффициенты, эффективно вычисляемые непосредственно по функциям $f(x, y)$ и $g(x, y)$ (см. [10]). Для общей системы (1) произвольного порядка остается (1983) не перекрытым результат Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко, вычисливших асимптотику Р. к. с точностью до $O(\varepsilon)$ (см. [11], [12], [9]).

Изучался также вопрос о периодич. решениях типа Р. к. неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см., напр., [13]).

Лит.: [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [2] Ланда П. С., Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы, М., 1980; [3] Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С., Математическое моделирование в биофизике, М., 1975; [4] Van der Pol B., «Phil. Mag. Ser. 7», 1926, v. 2, № 11, p. 978—92; [5] Железцов Н. А., Родыгин Л. В., «Докл. АН СССР», 1951, т. 81, № 3, с. 391—94; [6] Аносов Д. В., «Матем. сб.», 1960, т. 50, № 3, с. 299—334; [7] Дородницын А. А., «Прикл. матем. и механ.», 1947, т. 11, № 3, с. 313—28; [8] Жаров М. И., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., «Докл. АН СССР», 1981, т. 261, № 6, с. 1292—96; [9] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975; [10] Розов Н. Х., «Докл. АН СССР», 1962, т. 145, № 1, с. 38—40; [11] Понтрягин Л. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, № 5, с. 605—26; [12] Мищенко Е. Ф., там же, с. 627—54; [13] Levi M., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1981, v. 32, № 244. *Н. Х. Розов.*

РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНАЯ СХЕМА — математическая модель электротехнич. устройств, состоящих из контактов и промежуточных реле, функционирующих в дискретные моменты времени. Р.-к. с.— один из первых классов *управляющих систем*, рассмотренных с математич. точки зрения, а также один из первых вариантов понятия *автомата конечного.* Первые описания Р.-к. с. появились в 1938—44 (см. [1]—[3]).

Математически Р.-к. с. представляет собой конечный граф, всем ребрам и нек-рым выделенным вершинам к-рого приписаны символы из алфавитов

$$x=\{x_1, \bar{x}_1, \ldots, x_n, \bar{x}_n\},\ Y=\{Y_1, \ldots, Y_m\},$$
$$y=\{y_1, \bar{y}_1, \ldots, y_m, \bar{y}_m\},\ a=\{a_+, a_-, a_1, \ldots, a_s\}$$

следующим образом. Каждой выделенной вершине графа (эти вершины наз. полюсами) приписан символ из алфавита a так, что различным полюсам приписаны различные символы. Множество ребер графа разбито на три непересекающиеся подмножества: R, K_1, K_2. Ребрам каждого из этих подмножеств приписаны символы из Y, x, y следующим образом. Каждому ребру из R приписан символ из Y, всем ребрам из R приписаны различные символы, и все символы из Y приписаны ребрам из R. Каждому ребру множества K_1 (соответственно K_2) приписаны символы из x (соответственно y) так, что каждый символ может быть приписан нескольким ребрам, нек-рые символы могут быть не приписаны никаким ребрам. Если множество Y пусто, то пусто и множество K_2. В таком случае (если непусто только K_1) Р.-к. с. является *контактной схемой.* Две Р.-к. с. наз. изоморфными, если изоморфны их графы и соответствующим ребрам и полюсам приписаны одинаковые символы.

Полюс a_+ наз. входным, полюсы $a_1, \ldots, a_s$ наз. выходными, полюс a_- может иногда также быть выходным. Ребра, к-рым приписаны символы из x, наз. контактами основных реле (или основными контактами); множество всех ребер, помеченных символами Y_i, y_i, $\bar{y}_i$, наз. i-м промежуточным реле, $i=1, \ldots, m$; ребра, помеченные символами из y, наз. контактами промежуточных реле; ребра, помеченные символами из Y, наз. обмотками. Последовательность контактов и обмоток между нек-рыми вершинами Р.-к. с., соответствующая простой цепи графа, наз. цепью.

Функционирование Р.-к. с. происходит в дискретные моменты времени 1, 2, ... , t, ... и рассматривается в терминах проводимостей, к-рые в каждый момент представляют собой (в рассматриваемой модели) функции алгебры логики. Проводимость контактов x_j, $\bar{x}_j$, $j=1, \ldots, n$, в любой момент t равна значению соответствующей переменной (x_j или $\bar{x}_j$). Проводимость контакта y_i, $i=1, \ldots, m$, промежуточного реле в момент 1 равна нулю, проводимость контакта $\bar{y}_i$ в момент 1 равна единице; проводимость обмотки всегда равна единице. Всякая обмотка в момент t может находиться в различных состояниях. Состояние обмотки в момент t (в рассматриваемой двузначной модели — 1 и 0 — «возбуждена» и «не возбуждена») может определяться по-разному. Напр., обмотка Y_i находится в состоянии 1 в момент времени t тогда и только тогда, когда либо а) существует цепь σ между полюсами a_+ и a_-, проходящая через Y_i и имеющая в момент t проводимость 1; либо б) выполнено условие а) и не существует цепи, состоящей только из контактов, имеющей в момент t проводимость 1 и соединяющей некоторые вершины цепи σ, расположенные по разные стороны от Y_i.

Проводимость промежуточного контакта y_i ($\bar{y}_i$) в момент t зависит от состояния обмотки Y_i в момент $t-1$, а именно: проводимость y_i с ним совпадает, проводимость $\bar{y}_i$ — противоположна. Проводимость цепи Р.-к. с. между двумя вершинами в момент t равна конъюнкции проводимостей в момент t образующих ее контактов и обмоток. Состояния обмоток, таким образом, в момент t, вообще говоря, зависят от последовательности наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ в предыдущие моменты времени. При подаче в последовательные моменты времени на переменные $x_1, \ldots, x_n$ последовательности наборов значений между парой полюсов a_+ и a_k, $k=1, \ldots, s$, а в частном случае и между a_+ и a_-, реализуется *ограниченно-детерминированная функция*. Изоморфные Р.-к. с. реализуют одну и ту же ограниченно-детерминированную функцию. Если Р.-к. с. такова, что при подаче на переменные $x_1, \ldots, x_n$ одного и того же набора значений $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, начиная с нек-рого момента t, обмотки промежуточных реле не меняют своих состояний (и так для каждого набора значений переменных $x_1, \ldots, x_n$), то говорят об «установившихся» состояниях обмоток, и посредством Р.-к. с. реализуются функции алгебры логики. Если стабилизация обмоток с момента t наступает сразу для всех наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, то Р.-к. с. наз. однотактной; если стабилизация наступает в момент $t+\tau$, то Р.-к. с. наз. τ-тактной.

Сложность Р.-к. с. определяется как сумма весов (или индексов сложности) всех основных контактов, промежуточных контактов и обмоток Р.-к. с. Асимптотич. выражение для сложности самой простой Р.-к. с., реализующей самую сложно реализуемую функцию алгебры логики, имеет вид $\rho 2^n/n$, где ρ — константа, зависящая от выбранного способа функционирования, топологии схем и сложности контактов и обмоток реле.

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 9—45; [2] Гаврилов М. А., Теория релейно-контактных схем, 2 изд., Минск, [illegible]; [3] Шестаков В. И., «Уч. зап. МГУ. Математика», [illegible], в. 73, кн. 5, с. 45—48; [4] Лупанов О. Б., «Проблемы кибернетики», 1964, в. 11, с. 25—47.
Н. А. Карпова.

РЕЛЬЕФ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ — то же, что *аналитический ландшафт.*

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА — раздел частной теории относительности, посвященный изучению движения материальных тел под действием приложенных к ним сил.

В теории относительности свободные, т. е. не подверженные действию сил, материальные точки имеют в качестве своих мировых линий времениподобные или изотропные геодезические. Этот факт является выражением закона инерции в теории относительности.

Если на частицу действуют силы, то ее мировая линия не совпадает с геодезической. Для описания движения частицы вводятся понятия четырехмерного вектора энергии-импульса p^i и вектора четырехмерной силы g^i. Именно,

$$p^i = (\boldsymbol{E}/c;\ \boldsymbol{p}), \tag{1}$$

где E — энергия частицы, m — масса покоя, $\boldsymbol{p}$ — трехмерный импульс частицы. Вектор g^i определяется соотношением

$$g^i = \left(\frac{\boldsymbol{FV}}{c^2 \sqrt{1 - V^2/c^2}};\ \frac{\boldsymbol{F}}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right),$$

где $\boldsymbol{F}$ — трехмерная сила, V — скорость. С использованием этих векторов основные уравнения Р. д. могут быть записаны в виде, аналогичном виду уравнений второго закона Ньютона:

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc \frac{du^i}{ds}. \tag{2}$$

Конкретный вид силы g^i устанавливается в тех разделах теории относительности, к-рые изучают конкретные свойства различных взаимодействий. Напр., сила, действующая на частицу в электромагнитном поле — сила Лоренца, имеет вид

$$g^i = \frac{e}{c} F^{ik} u_k,$$

где e — заряд частицы, F^{ik} — тензор электромагнитного поля, u_k — четырехмерная скорость.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973.
Д. Д. Соколов.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ — свойство физич. законов сохранять свой вид при преобразованиях Лоренца, описывающих переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. Это свойство физич. законов наз. лоренц-инвариантностью. В тех случаях, когда необходимо подчеркнуть, что Р. и. включает и инвариантность при параллельных переносах во времени и пространстве, говорят о пуанкаре-инвариантности. Лоренц-инвариантность означает равноправие всех инерциальных систем и однородность пространства-времени.

В общей теории относительности инвариантность физич. законов при переходе от одной локальной инерциальной системы отсчета к другой наз. локальной лоренц-инвариантностью. В нек-рых случаях в общей теории относительности рассматривают также величины, к-рые определены при задании конгруэнции линий времени (т. е. задании системы отсчета) и инвариантны относительно выбора пространственных сечений. Эти величины наз. хронометрическими инвариантами.

Лит.: [1] Фок В. А., Теория Эйнштейна и физическая относительность, М., 1967.
Д. Д. Соколов.

РЕЛЯТИВИСТСКОЙ АСТРОФИЗИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, возникающие при изучении астрофизич. явлений, в к-рых существенны релятивистские эффекты, т. е. эффекты специальной или общей теории относительности.

Принято разделять Р. а. м. з. на задачи, относящиеся к космологии — науке о строении и эволюции Вселенной, и задачи релятивистской астрофизики отдельных небесных тел. Примером космологич. решения, описывающего расширение (или сжатие) однородной и изотропной Вселенной, является решение А. А. Фридмана. Однородные анизотропные космологич. решения классифицированы (выделено 9 типов по Бианки) и хорошо изучены. Детально изучены анизотропные и не-однородные решения, представляющие собой малые отклонения от решения Фридмана (линейное приближение), и построены некоторые простые нелинейные решения.

Особое место занимает проблема, связанная с наличием особой точки в общем космологич. решении, в к-рой достигается бесконечная плотность вещества и бесконечная кривизна пространства-времени. Показано, что сингулярность неизбежна в прошлом в условиях, имеющих место в реальной Вселенной, и построено общее решение уравнений общей теории относительности с сингулярностью. Активно исследуется возможность построения космологич. решений без сингулярности, связанная с выходом за рамки классической общей теории относительности.

Большой класс Р. а. м. з. связан с изучением взаимодействия реликтового излучения, заполняющего пространство, с веществом в ходе расширения Вселенной и физич. процессов, способных породить такое излучение.

Р. а. м. з. для отдельных небесных тел касаются равновесия и устойчивости звезд и звездных скоплений. Найдены равновесные массы белых карликов и нейтронных звезд и изучен релятивистский коллапс более массивных звезд, превращающихся в т. н. «черные дыры» — объекты, к-рые можно обнаружить лишь по проявлению их гравитационного поля. В связи с задачей поиска и изучения релятивистских объектов (нейтронных звезд, «черных дыр» и др.) рассматривается задача об аккреции на них вещества с магнитным полем.

К Р. а. м. з. относится также исследование гравитационного излучения. В слабом гравитационном поле в пустоте возмущения, напр. инварианта кривизны, подчиняются волновому уравнению, и поле тяготения распространяется в пространстве подобно электромагнитным волнам.

Лит.: [1] **Зельдович Я. Б.**, Новиков И. Д., Релятивистская астрофизика, М., 1967; [2] их же, Теория тяготения и эволюция звезд, М., 1971; [3] их же, Строение и эволюция Вселенной, М., 1975; [4] Пиблс П., Физическая космология, пер. с англ., М., 1975; [5] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, т. 2–3, пер. с англ., М., 1977; [6] Лифшиц Е. М., «Ж. экспериментальной и теоретич. физики», 1946, т. 16, с. 587—602; [7] Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М., «Успехи физ. наук», 1970, т. 102, с. 463—500; [8] Брагинский В. Б., там же, 1965, т. 86, с. 433—46.

А. А. Рузмайкин.

РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи для системы уравнений, описывающей течения жидкости со скоростями, близкими к скорости света c, и ее взаимодействие с сильными гравитационными полями. В предельном случае малых скоростей $v \ll c$ и слабых гравитационных полей $\varphi \ll c^2$, где φ — гравитационный потенциал, Р. г. м. з. сводятся к *гидродинамики математическим задачам*. Система уравнений релятивистской гидродинамики образуется путем приравнивания к нулю ковариантных дивергенций тензора энергии-импульса и вектора плотности потока вещества:

$$T_{ik} = (\varepsilon + p)\, u_i u_k - p g_{ik} + \tau_{ik}, \qquad (1)$$

$$n_i = n u_i + \nu_i, \quad i, \ k = 1, \ 2, \ 3, \ 4, \qquad (2)$$

где ε, p и n — плотность энергии, давление и плотность числа частиц в системе отсчета, покоящейся относительно рассматриваемого элемента жидкости, g_{ik} — метрич. тензор, u_i — четырехмерная скорость, τ_{ik} и ν_i — части тензора энергии-импульса и вектора потока вещества, описывающие эффекты, связанные с вязкостью (см. [1]).

Пример решений Р. г. м. з.: распространение звука в веществе с ультрарелятивистским уравнением состояния $p = \varepsilon/3$, для возмущения давления или плотности энергии получается волновое уравнение со скоростью звука $u = c\sqrt{3}$.

Р. г. м. з. возникают, напр., при рассмотрении физич. процессов, протекающих в окрестности звезд, обладающих сильными гравитационными полями (нейтронные звезды и т. н. «черные дыры») и расширяющейся Вселенной, заполненной излучением и веществом.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954; [2] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Теория тяготения и эволюция звезд, М., 1971; [3] их же, Строение и эволюция Вселенной, М., 1975; [4] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, пер. с англ., т. 2, М., 1977. *А. А. Рузмайкин.*

РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — установление соотношений между величинами, характеризующими макроскопич. состояния тел (термодинамич. величинами), при наличии сильных гравитационных полей и скоростей, сравнимых со скоростью света.

Обычно рассматривается равновесная термодинамика идеальной жидкости с заданным химич. составом. Установленные в нерелятивистской термодинамике соотношения между термодинамич. величинами сохраняются как при релятивистском макроскопич. движении частиц, составляющих тело, так и релятивистском движении самого тела, а также в сильных гравитационных полях, если значения термодинамич. величин взяты в системе отсчета, покоящейся относительно рассматриваемого элемента объема жидкости или тела, и в энергию и химич. потенциал включены все формы энергии (в частности, энергия покоя).

Основные уравнения релятивистской термодинамики формулируются в следующем виде:

$(nu^i)_{,i}=0$ — закон сохранения барионов,

$d\varepsilon=\mu dn+nTd\sigma$ — первый закон термодинамики,

$(\sigma u^i)_{,i}=0$ — условие адиабатичности,

где u^i — четырехмерная скорость (величины n — плотность барионов, ε — плотность энергии, T — температура, $\mu=\frac{\varepsilon+p}{n}$ — химич. потенциал, p — давление, σ — плотность энтропии относятся к системе отсчета, покоящейся относительно рассматриваемого элемента объема). При этом давление и плотность энергии связаны соотношением $p\leq\varepsilon/3$. При переходе к движущейся относительно элемента объема системе отсчета или к локализованному наблюдателю (при наличии гравитационных полей) нек-рые величины (напр., плотность барионов n или энтропия S) не изменяются, т. е. являются скалярами, другие преобразуются, напр.

$$\tilde{T}=Tu^0,\ \tilde{\mu}=\mu u^0,$$

где компонента четырехмерной скорости u^0 берется вдоль мировой линии, описываемой данной точкой тела. Следствием этого является, напр., тот факт, что в постоянном гравитационном поле условие теплового равновесия требует постоянства вдоль тела не температуры, а величины $T\sqrt{g_{00}}=\text{const}$, где g_{00} — компонента метрич. тензора, $g_{00}=1-2\varphi/c^2$ в слабом гравитационном поле (φ — гравитационный потенциал, c — скорость света). А температура, измеренная наблюдателем, относительно к-рого тело движется со скоростью v, равна

$$\tilde{T}=T/(1-v^2/c^2)^{1/2}.$$

Релятивистская инвариантность энтропии S позволяет записать второй закон термодинамики в форме, принятой в нерелятивистской термодинамике:

$$dS\geqslant\delta Q/T,$$

где изменение тепла δQ и T преобразуются по одинаковому закону. Равенство достигается для обратимых процессов.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, 2 изд., М., 1964; [2] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, пер. с англ., т. 2—3, М., 1977; [3] Мёллер К., Теория относительности, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *А. А. Рузмайкин.*

РЕЛЯТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — геометрия конфигурации, состоящей из двух поверхностей $S_0 : \boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(u^1, u^2)$ и $S : \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$, находящихся в *Петерсона соответствии*. Аналогия между этим соответствием и *сферическим отображением* позволила ввести понятия релятивной площади, полной и средней кривизны и т. д., в частности релятивно минимальной поверхности (см. [1]).

Рассмотрение деривационных уравнений для репера $\frac{\partial r}{\partial u^1}, \frac{\partial r}{\partial u^2}, \boldsymbol{n}$ привело к понятию внутренней Р. г. поверхности S (см. [2]). Это есть геометрия аффинной связности (точнее эквиаффинной) без кручения. Было введено понятие геометрии 2-го рода, аналогичной геометрии сферич. отображения (см. [3]).

Р. г. позволяет включить в общую схему, кроме геометрии поверхностей евклидова и псевдоевклидова пространств, также и геометрию аффинной дифференциальной геометрии. Вектор $\boldsymbol{n}$ аффинной нормали характеризуется тем, что асимптотич. сеть поверхности S — чебышевская (см. [3]).

Дальнейшим обобщением Р. г. является теория нормализованных поверхностей (см. [4]). С каждой точкой поверхности S проективного пространства связываются две прямые: нормаль 1-го рода, проходящая через точку поверхности A, но не имеющая с касательной плоскостью α других общих точек и нормаль 2-го рода, принадлежащая α, но не проходящая через A. На поверхности S определяются при этом две внутренние геометрии, сопряженные относительно асимптотич. сети. Построения Р. г. допускают многомерное обобщение (см. [4]).

Лит.: [1] Müller E., «Monatsh. Math. und Physik», 1921, Bd 31, S. 3—19; [2] Norden A. P. (Норден А. П.), «C. r. Acad. sci.», 1931, t. 192, p. 135—37; [3] его же, «Изв. ВУЗов. Математика», 1958, № 4, с. 172—83; [4] его же, Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976. *А. П. Норден.*

РЕНЬИ КРИТЕРИЙ — статистический критерий, применяемый для проверки простой непараметрич. гипотезы H_0, согласно к-рой независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют заданную непрерывную функцию распределения $F(x)$, против альтернатив следующего вида:

$$H_1^+ : \sup_{|x|<\infty} \psi[F(x)](\mathsf{E}F_n(x)-F(x))>0,$$

$$H_1^- : \inf_{|x|<\infty} \psi[F(x)](\mathsf{E}F_n-(x)F(x))<0,$$

$$H_1 : \sup_{|x|<\infty} \psi[F(x)]\,|\mathsf{E}F_n(x)-F(x)|>0,$$

где $F_n(x)$ — функция эмпирич. распределения, построенная по выборке $X_1, \ldots, X_n$, $\psi(F)$, $\psi\geqslant 0$, — весовая функция. В случае, если

$$\psi[F(x)]=\begin{cases}1/F(x) & \text{при } F(x)\geqslant a,\\ 0 & \text{при } F(x)<a,\end{cases}$$

где a — любое фиксированное число из отрезка $[0, 1]$, то Р.к., предназначенный для проверки H_0 против указанных альтернатив H_1^+, H_1^-, H_1, основан на соответствующих им статистиках Реньи:

$$R_n^+(a, 1)=\sup_{F(x)\geqslant a}\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}=\max_{F(X_{(m)})\geqslant a}\frac{\frac{m}{n}-F(X_{(m)})}{F(X_{(m)})},$$

$$R_n^-(a, 1)=-\inf_{F(x)\geqslant a}\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}=$$

$$=\max_{F(X_{(m)})\geqslant a}\frac{F(X_{(m)})-\frac{m-1}{n}}{F(X_{(m)})},$$

$$R_n(a, 1)=\sup_{F(x)\geqslant a}\frac{|F_n(x)-F(x)|}{F(x)}=$$

$$=\max\left\{R_n^+(a, 1),\ R_n^-(a, 1)\right\},$$

где $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ — члены вариационного ряда

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)},$$

построенного по наблюдениям $X_1, \ldots, X_{(n)}$.

Статистики $R_n^+(a, 1)$ и $R_n^-(a, 1)$ подчиняются одному и тому же вероятностному закону, и если $0<a\leqslant 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{na}{1-a}}\, R_n^+(a, 1) < x\right\} = 2\Phi(x)-1, \quad x>0, \quad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{na}{1-a}}\, R_n(a, 1) < x\right\} = L(x), \quad x>0, \quad (2)$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона, $L(x)$ — функция распределения Реньи, определяемая формулой:

$$L(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\left\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8x^2}\right\}.$$

В случае, если $a=0$, то

$$\mathsf{P}\left\{R_n^+(0, 1) \geqslant x\right\} = 1-\frac{x}{1+x}, \quad x>0.$$

Из (1) и (2) следует, что при больших значениях n для вычисления Q-процентных критич. значений ($0\%<Q<<50\%$) для статистик $R_n^+(a, 1)$ и $R_n(a, 1)$ можно воспользоваться следующими приближенными значениями:

$$\sqrt{\frac{1-a}{na}}\,\Phi^{-1}(1-0{,}005Q) \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{1-a}{na}}\,L^{-1}(1-0{,}01Q)$$

соответственно, где $\Phi^{-1}(x)$ и $L^{-1}(x)$ функции, обратные $\Phi(x)$ и $L(x)$ соответственно, при этом имеют в виду, что если $0\%<Q<10\%$, то $\Phi^{-1}(1-0{,}005Q)\approx L^{-1}(1-0{,}02Q)$.

Кроме того, если $x>2{,}99$, то при вычислении значений функции распределения Реньи $L(x)$ рекомендуется пользоваться приближенным равенством

$$L(x) \approx 4\Phi(x)-3,$$

погрешность к-рого не превосходит $5\cdot 10^{-7}$.

Кроме рассмотренных Р. к., существуют аналогичные критерии, отвечающие весовой функции

$$\psi[F(x)] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-F(x)}, & \text{если } F(x)\leqslant a, \\ 0, & \text{если } F(x)>a, \end{cases}$$

где a — любое фиксированное число из отрезка $[0, 1]$.

Лит.: [1] Rényi A., «Acta math. Acad. scient. hung.», 1953, v. 4, p. 191—231; [2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968. *М. С. Никулин.*

РЕПЕР — совокупность линейно независимых векторов, взятых в определенном порядке и отложенных от общего начала. Для векторов в пространстве Р. может служить любая тройка непараллельных одной плоскости векторов. Если векторы, составляющие Р., попарно ортогональны, то Р. наз. ортогональным; если при этом векторы имеют длину, равную единице, то Р. наз. ортонормированным. *БСЭ-3.*

РЕПЛИКА алгебраической системы A в заданном классе $\mathfrak{K}$ алгебраических систем той же сигнатуры — алгебраическая система K_0 из $\mathfrak{K}$, обладающая следующими свойствами: 1) существует сюръективный гомоморфизм φ_0 системы A на K_0; 2) если $K\in\mathfrak{K}$ и φ — гомоморфизм системы A в K, то $\varphi=\varphi_0\psi$ для нек-рого сюръективного гомоморфизма ψ системы K_0 на K. Р. системы A в классе $\mathfrak{K}$ (если она существует) определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Класс $\mathfrak{K}$ наз. реплично полным, если он содержит Р. любой алгебраич. системы той же сигнатуры. Класс алгебраич. систем фиксированной сигнатуры реплично полон тогда и только тогда, когда он содержит одноэлементную систему и замкнут относительно подсистем и прямых произведений. Аксиоматизируемыми реплично полными классами являются квазимногообразия и только они.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970. *Л. А. Скорняков.*

РЕПЛИКА эндоморфизма X конечномерного векторного пространства V над полем k характеристики 0 — элемент наименьшей, содержащей X, алгебраич. подалгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ (см. *Ли алгебраическая алгебра*). Эндоморфизм $X' \in \mathfrak{gl}(V)$ является Р. эндоморфизма X тогда и только тогда, когда всякий тензор на V, аннулируемый эндоморфизмом X, аннулируется также и эндоморфизмом X'.

Каждая Р. эндоморфизма X может быть представлена в виде многочлена от X с коэффициентами из поля k с нулевым свободным членом. Полупростая и нильпотентная компоненты эндоморфизма X (см. *Жордана разложение*, 2) являются его Р. Подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ тогда и только тогда алгебраична, когда она содержит все Р. любого своего элемента. Эндоморфизм X пространства V тогда и только тогда нильпотентен, когда $\operatorname{Tr} XX'=0$ для любой реплики X' эндоморфизма X.

Пусть k алгебраически замкнуто, φ — автоморфизм поля k, X — полупростой эндоморфизм пространства V, а $\varphi(X)$ — такой эндоморфизм пространства V, что всякий собственный вектор эндоморфизма X, отвечающий собственному значению λ, является собственным вектором и для $\varphi(X)$, но отвечающим собственному значению $\varphi(\lambda)$. Эндоморфизм $X' \in \mathfrak{gl}(V)$ тогда и только тогда является Р. эндоморфизма X, когда $X'=\varphi(X)$ для нек-рого автоморфизма φ поля k.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [2] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, пер. с франц., М., 1962; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 2, М., 1958. *В. Л. Попов.*

РЕПРЕЗЕНТАТИВНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО — подпространство X топологич. пространства Y такое, что включение $X \subset Y$ является слабой гомотопич. эквивалентностью. *А. Ф. Харшиладзе.*

РЕТРАКТ объекта категории — понятие, обобщающее соответствующие понятия алгебры и топологии. Объект R категории $\mathfrak{K}$ наз. ретрактом объекта A, если существуют такие морфизмы

$$\mu : R \longrightarrow A \text{ и } \nu : A \longrightarrow R,$$

что $\mu\nu=1_R$. Морфизм μ при этом оказывается мономорфизмом и, более того, ядром пары морфизмов 1_A, $\nu\mu$. Двойственно, морфизм ν — эпиморфизм и, более того, коядро пары морфизмов 1_A, $\nu\mu$. Иногда μ наз. сечением, а ν — расслоением.

Если R есть Р. объекта A и объект R' изоморфен R, то R' есть ретракт A. Поэтому изоморфные Р. образуют один подобъект объекта A. Каждому ретракту R, определяемому морфизмами $\mu : R \to A$ и $\nu : A \to R$, соответствует идемпотентный морфизм $\varphi=\nu\mu : A \to A$. Два ретракта R и R' объекта A принадлежат одному и тому же подобъекту тогда и только тогда, когда им соответствует общий идемпотент. Р. любого объекта произвольной категории образуют множество. *М. Ш. Цаленко.*

РЕТРАКТ топологического пространства X — подпространство A этого пространства, для к-рого существует *ретракция* X на A. Если пространство X хаусдорфово, то всякий Р. пространства X замкнут в X. Всякое непустое замкнутое множество канторова совершенного множества является его Р. При переходе от пространства к его Р. сохраняются многие важные свойства. В частности, всякое свойство, сохраняющееся при переходе к непрерывному образу, равно как и любое свойство, наследуемое замкнутыми подпространствами, устойчиво относительно перехода к Р. Поэтому компактность, связность, линейная связность, сепарабельность, ограничение сверху на размерность, паракомпактность, нормальность, локальная компактность, локальная связность сохраняются при переходе к Р. В то же время Р. пространства может быть устроен гораздо проще его самого, более обозрим, более удобен для конкретного исследования. Так, одноточечное множество является Р. отрезка, прямой, плоскости и т. д. Если пространство X имеет свойство неподвижной точки, т. е. для каждого непрерывного отображения $f: X \to X$ существует точка $x \in X$ такая, что $f(x)=x$, то и каждый Р. пространства X обладает свойством неподвижной точки. В частности, n-мерная сфера не является Р. $(n+1)$-мерного шара евклидова пространства, где $n=0, 1, \ldots$, так как замкнутый шар обладает свойством неподвижной точки (теорема Брауэра), а сфера этого свойства не имеет. Подпространство A пространства X наз. окрестностным Р. этого пространства, если существует в X открытое подпространство, содержащее A, ретрактом к-рого A является. Понятие Р. имеет прямое отношение к вопросу о продолжаемости непрерывных отображений. Так, подпространство A пространства X является его Р. в том и только в том случае, если всякое непрерывное отображение пространства A в произвольное топологич. пространство Y можно продолжить до непрерывного отображения всего пространства X в Y.

Метризуемое пространство X наз. абсолютным Р. (абсолютным окрестностным Р.), если оно является Р. (соответственно окрестностным Р.) всякого метризуемого пространства, содержащего X в качестве замкнутого подпространства. Для того чтобы метризуемое пространство X было абсолютным Р., необходимо, чтобы оно было Р. нек-рого выпуклого подпространства линейного нормированного пространства, и достаточно, чтобы X было Р. выпуклого подпространства локально выпуклого линейного пространства.

Таким образом, все выпуклые подпространства локально выпуклых линейных пространств являются абсолютными Р.; в частности, таковы точка, отрезок, шар, прямая и т. д. Из приведенной характеристики вытекают следующие свойства абсолютных Р. Всякий Р. абсолютного Р. снова есть абсолютный Р. Каждый абсолютный Р. стягиваем по себе и локально стягиваем. Все гомологические, когомологические, гомотопические и когомотопич. группы абсолютного Р. тривиальны. Метризуемое пространство Y является абсолютным Р. в том и только в том случае, если, каковы бы ни были метризуемое пространство X, его замкнутое подпространство A и непрерывное отображение пространства A в Y, его можно продолжить до непрерывного отображения всего пространства X в Y. Абсолютные окрестностные Р. характеризуются как Р. открытых подмножеств выпуклых подпространств линейных нормированных пространств. К их числу относятся все компактные полиэдры. Существенным их свойством является локальная стягиваемость.

Если ретракция пространства X на его подпространство A гомотопна тождественному отображению пространства X на себя, то A наз. деформационным Р. пространства X. Деформационный Р. пространства гомотопически эквивалентен этому пространству, т. е. имеет с ним один и тот же гомотопич. тип. Обратно, два гомотопически эквивалентных пространства всегда можно вложить в нек-рое третье пространство таким образом, что оба они будут его деформационными Р.

Лит.: [1] Борсук К., Теория ретрактов, пер. с англ., М., 1971. *А. В. Архангельский.*

РЕТРАКЦИЯ — непрерывное отображение f топологич. пространства X на его подпространство A, тождественное на A, то есть такое, что $f(x)=x$ при всех $x \in A$. *М. И. Войцеховский.*

РЕФАЛ, алгоритмический язык рекурсивных функций, — *алгоритмический язык*, ориентированный на задачи преобразования символьной информации; в первоначальном варианте назывался «метаалгоритмическим языком» (см. [1]). Р. был создан как универсальный метаязык для описания преобразований языковых объектов. Он используется для трансляции с одного алгоритмич. языка на другой, для машинного выполнения аналитич. выкладок, доказательства теорем, перевода с естественных языков и т. п.

Запись алгоритма на Р. представляет описание нек-рого числа рекурсивных функций на множестве выражений (т. е. последовательностей символов и скобок), правильно построенных (в обычном смысле) относительно скобок. Значение функции φ при аргументе $\mathscr{E}$ изображается на Р. в виде $\boldsymbol{K}\varphi\mathscr{E}\dot{-}$, где $\boldsymbol{K}$ — знак конкретизации, служащий для явного указания на необходимость вычисления значения функции, а символ $\dot{-}$ означает закрывающую скобку для $\boldsymbol{K}$. Описание функции распадается на несколько предложений (правил конкретизации), относящихся к случаям, когда аргумент имеет тот или иной частный вид. Напр., функция сложения в рекурсивной арифметике описывается на Р. двумя предложениями:

1) $\boldsymbol{K}+(\boldsymbol{E}A)\,(0) \supseteq \boldsymbol{E}A,$

2) $\boldsymbol{K}+(\boldsymbol{E}A)\,(\boldsymbol{E}B1) \supseteq \boldsymbol{K}+(\boldsymbol{E}A)\,(\boldsymbol{E}B)\dot{-}1.$

Предложение состоит из левой и правой частей, разделяемых знаком $\supseteq$, и может включать свободные переменные (в примере это — $\boldsymbol{E}A$ и $\boldsymbol{E}B$). Оно считается применимым для конкретизации выражения вида $\boldsymbol{K}\varphi\mathscr{E}\dot{-}$, если это последнее может быть отождествлено с левой частью предложения при нек-рых значениях входящих в нее свободных переменных. Применение предложения состоит в замене конкретизируемого выражения на правую часть предложения, в к-рой свободные переменные замещены их значениями. Для вычисления значения функции предложения рассматриваются последовательно, и применяется первое из них, оказавшееся подходящим. Этот процесс повторяется, пока в объект работы входят знаки $\boldsymbol{K}$.

Для реализации программ на Р. разработаны эффективные трансляторы (см. [3], [4]; пример использования Р. для машинного выполнения выкладок в теоретич. физике см. в [5]).

Лит.: [1] Турчин В. Ф., «Кибернетика», 1968, № 4, с. 45—54; [2] Турчин В. Ф., Сердобольский В. И., «Кибернетика», 1969, № 3, с. 58—62; [3] Флоренцев С. Н., Олюнин В. Ю., Турчин В. Ф., «Тр. 1 Всесоюзн. конференции по программированию», К., 1968, с. 114—33; [4] Романенко С. А., Турчин В. Ф., «Тр. 2-й Всесоюзн. конференции по программированию», Новосиб., 1970, с. 31—42; [5] Будник А. П. [и др.], «Ядерная физика», 1971, т. 14, с. 304—13.
В. Ф. Турчин.

РЕФЛЕКСИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО — банахово пространство X, совпадающее при каноническом вложении со своим вторым сопряженным X^{**}. Подробнее, пусть X^* — пространство, сопряженное с X, то есть совокупность всех непрерывных линейных функционалов, определенных на X. Если $\langle x, f\rangle$ — значение функционала $f \in X^*$ на элементе $x \in X$, то при фиксированном x и f, пробегающем X^*, выражение $\langle x, f\rangle = \mathscr{F}_x(f)$ будет линейным функционалом на X^*, то есть элементом пространства X^{**}. Пусть $\tilde{X} \subset X^{**}$ — множество таких функционалов. Соответствие $x \to \mathscr{F}_x$ есть изоморфизм, не меняющий нормы $\|x\| = \|\mathscr{F}_x\|$. Если $\tilde{X} = X^{**}$, то пространство X наз. рефлексивным. Пространства l_p и $L_p(a, b)$, $p > 1$, рефлексивны, пространство $C\,[a, b]$ не рефлексивно.

Пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда X^* рефлексивно. Другим критерием рефлексивности банахова пространства X является слабая компактность единичного шара этого пространства.

Р. п. слабо полно, и замкнутое подпространство Р. п. рефлексивно.

Понятие рефлексивности естественным образом распространяется на *локально выпуклые пространства*.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, ч. 1 — Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [2] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977. *В. И. Соболев.*

РЕФЛЕКСИВНОСТЬ — одно из свойств *бинарных отношений*. Отношение R на множестве A наз. рефлексивным, если aRa для любого $a \in A$. Примерами рефлексивных отношений являются равенство, эквивалентность, порядок. *Т. С. Фофанова.*

РЕФЛЕКТИВНАЯ ПОДКАТЕГОРИЯ — подкатегория, содержащая «наибольшую» модель любого объекта категории. Точнее, полная подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$ наз. рефлективной, если $\mathfrak{C}$ содержит $\mathfrak{C}$-рефлектор (см. *Рефлектор*) для любого объекта категории. Полная подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$ рефлективна тогда и только тогда, когда функтор вложения $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}, \mathfrak{K}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ обладает сопряженным слева функтором $S : \mathfrak{K} \to \mathfrak{C}$. Функтор S сопоставляет каждому объекту A из $\mathfrak{K}$ его $\mathfrak{C}$-рефлектор $S(A)$; морфизмы $\pi_A : A \to S(A)$, входящие в определение $\mathfrak{C}$-рефлектора, определяют естественное преобразование тождественного функтора $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}$ в композицию функторов $S\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}, \mathfrak{K}}$. Двойственным к понятию Р. п. является понятие корефлективной подкатегории.

Р. п. $\mathfrak{C}$ наследует многие свойства объемлющей категории $\mathfrak{K}$. Напр., морфизм $\mu \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{C}$ тогда и только тогда является мономорфизмом в $\mathfrak{C}$, когда он мономорфизм в $\mathfrak{K}$. Поэтому всякая Р. п. локально малой слева категории локально мала слева. Р. п. обладает произведениями тех семейств объектов, для к-рых произведение существует в самой категории, при этом оба произведения оказываются изоморфными. То же самое справедливо и для любых пределов. С другой стороны, функтор S переводит копределы из $\mathfrak{K}$ в копределы в $\mathfrak{C}$. Поэтому Р. п. полной (слева) категории является полной (слева) категорией.

Пусть $\mathfrak{K}$ — полная локально малая категория. Всякая полная подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$, замкнутая относительно произведений и подобъектов своих объектов и содержащая правый нуль, является Р. п. В частности, всякое многообразие категории $\mathfrak{K}$ есть Р. п.

$\mathfrak{C}$-рефлектор произвольного объекта A строится следующим образом. Выбираются представители (ν_i, A_i), $i \in I$, таких факторобъектов объекта A, что $A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$. Произведение

$$P = \Pi_{i \in I} A_i\,(\pi_i)$$

принадлежит $\mathfrak{C}$, и $\mathfrak{C}$-рефлектор $S(A)$ является образом однозначно определенного морфизма $\gamma : A \to P$, для к-рого $\gamma\pi_i = \nu_i$, $i \in I$.

Примеры. 1) Пусть R — область целостности. Полная подкатегория инъективных модулей без кручения является Р. п. категории R-модулей без кручения: рефлекторами являются инъективные оболочки модулей. В частности, подкатегория полных абелевых групп без кручения есть Р. п. категории абелевых групп без кручения.

2) Полная подкатегория нормальных топологич. пространств есть Р. п. категории вполне регулярных топологич. пространств: рефлекторы строятся с помощью компактификации Чеха.

3) Полная подкатегория пучков есть Р. п. категории предпучков: рефлекторы определяются функтором ассоциированного пучка. *М. Ш. Цаленко.*

РЕФЛЕКТОР объекта категории — понятие, описывающее «наибольшую» модель данного объекта в нек-ром классе объектов. А именно, пусть $\mathfrak{C}$ — подкатегория категории $\mathfrak{K}$; объект $B \in \mathfrak{C}$ наз. рефлектором объекта $A \in \mathfrak{K}$ в $\mathfrak{C}$, или $\mathfrak{C}$-рефлектором, если существует такой морфизм $\pi : A \to B$, что для любого объекта X из $\mathfrak{C}$ отображение

$$H_X(\pi): H_{\mathfrak{C}}(B, X) \to H_{\mathfrak{K}}(A, X)$$

биективно. Другими словами, для любого морфизма $\alpha : A \to X$ существует такой единственный морфизм $\alpha' : B \to X \in \mathfrak{C}$, что $\alpha = \pi\alpha'$. $\mathfrak{C}$-рефлектор объекта A определен неоднозначно, но любые два $\mathfrak{C}$-рефлектора объекта A изоморфны. $\mathfrak{C}$-рефлектор левого нуля (инициального объекта) категории $\mathfrak{K}$ является левым нулем в $\mathfrak{C}$.

Примеры. В категории групп факторгруппа G/G' произвольной группы G по коммутанту является Р. группы G в подкатегории абелевых групп. Для абелевой группы A ее факторгруппа $A/T(A)$ по периодич. подгруппе $T(A)$ является Р. группы A в полной подкатегории абелевых групп без кручения. Пополнение (инъективная оболочка) $\tilde{A}$ группы $A/T(A)$ является Р. групп A и $A/T(A)$ в подкатегории полных абелевых групп без кручения.

Обычно Р. рассматриваются в полных подкатегориях. Полная подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$, в к-рой существуют Р. для любых объектов из $\mathfrak{K}$, наз. рефлективной.

М. Ш. Цаленко.

РЕШАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ, решающая процедура, статистическое решающее правило,— правило, согласно к-рому на основании полученных наблюдений делают статистич. выводы (принимают решения).

Пусть X — случайная величина, принимающая значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta$, и пусть $D = \{d\}$ — множество всех возможных решений d, к-рые можно вынести относительно параметра θ по реализации случайной величины X. Согласно терминологии, принятой в математич. статистике и теории игр, любое $\mathfrak{B}$-измеримое отображение $\delta : \mathfrak{X} \to D$ пространства реализаций $\mathfrak{X}$ случайной величины X в множество возможных решений D наз. Р. ф. Напр., в задаче статистич. оценивания параметра θ любая точечная оценка $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$ является Р. ф. Основной задачей статистики при получении статистич. выводов является выбор такой Р. ф. $\delta(\cdot)$, к-рая минимизирует риск

$$R(\theta, \delta) = E_\theta[L(\theta, \delta(X))]$$

относительно используемой функции потерь $L(\cdot, \cdot)$.

Понятие Р. ф. является основным в теории статистических Р. ф., созданной А. Вальдом (A. Wald).

Лит.: [1] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [2] Вальд А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, М., 1967, с. 300—522.

М. С. Никулин.

РЕШЕНИЕ в теории игр — исход (или множество исходов), удовлетворяющий принятому в данной модели принципу оптимальности. Выделяют следующие основные типы Р.: 1) решение по Нэшу (см. *Бескоалиционная игра*), в частности *седловая точка* функции выигрыша в антагонистич. играх; 2) решение по Нейману — Моргенштерну (Н — М-решение) — множество дележей, никакие два из к-рых не доминируют друг друга, причем для каждого дележа, не принадлежащего этому множеству, найдется доминирующий его дележ из этого множества (см. *Доминирование*); 3) решение Нэша в *арбитражных схемах*.

Лит.: [1] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [2] Оуэн Г., Теория игр, пер. с англ., М., 1971.

А. Н. Ляпунов.

РЕШЕТА МЕТОД — один из общих методов теории чисел, обобщающий принцип высеивания составных чисел из натурального ряда (см. *Эратосфена решето*). Проблема Р. м. состоит в оценке для конечного множества A целых чисел количества тех элементов, к-рые не делятся ни на какое простое число p из нек-рого множества P простых чисел. Оценивается «просеивающая» функция $S(A; P, z)$, обозначающая количество указанных элементов из A при дополнительном условии: $p<z$. Для получения оценок просеивающей функции часто используется информация о числе $N(A_q)$ элементов множества A_q, состоящего из элементов A, к-рые делятся на свободное от квадратов число q. При $q=1$ множество $A_q=A$. Поэтому обычно оценивается более общая просеивающая функция $S(A_q; P, z)$.

При выборе ожидаемого значения для $N(A_q)$ в форме $(\omega(q)/q)X$, где X — ожидаемое значение для $N(A)$ и $\omega(q)$ — мультипликативная функция, руководствуются тем, чтобы погрешность

$$R(X, q)=N(A_q)-(\omega(q)/q)X$$

была относительно мала. Если при этом $\omega(p)=k$ (по крайней мере, «в среднем»), то k наз. размерностью решета.

Общая теория Р. м. с ее приложениями продвинулась наиболее далеко в случае линейного решета (при $k=1$). Существуют различные специализации Р. м., наиболее важные из к-рых принадлежат В. Бруну (V. Brun; см. *Бруна решето*) и А. Сельбергу (A. Selberg; см. *Сельберга решето*).

В приложениях Р. м. к аддитивным задачам (см. *Аддитивная теория чисел*), кроме оценок просеивающей функции сверху, необходимы оценки этой функции снизу. Получение оценок снизу может быть основано на логическом комбинаторном тождестве

$$S(A_q; P, z)=N(A_q)-\sum\nolimits_{p<z,\ p\in P}S(A_{qp}; P, p).$$

Наиболее точные оценки снизу получаются с добавлением комбинаторных соображений, связанных с использованием весовых функций. Сильный результат в приложениях Р. м. с весовыми функциями состоит в том, что каждое достаточно большое четное число N представимо в виде $N=p+P_2$, где p — простое число, P_2 содержит не более двух простых множителей.

Лит.: [1] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [2] Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962; [3] Halberstam H., Richert H., Sieve methods, L.— [a. o.], 1974.

Б. М. Бредихин.

РЕШЕТКА в группе Ли — *дискретная подгруппа* Γ группы Ли G такая, что G/Γ имеет конечный объем относительно G-инвариантной меры.

Р. размерности (или ранга) n в векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ — свободная абелева подгруппа в V, порожденная n векторами, линейно независимыми над полем $\mathbb{R}$. Подгруппа аддитивной группы конечномерного векторного пространства V над $\mathbb{R}$ дискретна тогда и только тогда, когда она является решеткой [1].

Лит.: [1] Моррис С., Двойственность Понтрягина и строение локально-компактных абелевых групп, пер. с англ., М., 1980.

А. Л. Онищик.

РЕШЕТКА, структура,— *частично упорядоченное множество*, в к-ром каждое двухэлементное подмножество имеет как точную верхнюю, так и точную нижнюю грани. Отсюда вытекает существование этих граней для всякого непустого конечного подмножества.

Примеры. 1) Линейно упорядоченное множество M (или цепь), где для $a, b\in M$, если $a\leqslant b$, то

$$\sup\{a, b\}=b,\quad \inf\{a, b\}=a.$$

2) Подпространства векторного пространства, упорядоченные по включению, где

$$\sup\{A, B\}=\{x\mid x=a+b,\ a\in A,\ b\in B\},$$
$$\inf\{A, B\}=A\cap A.$$

3) Подмножества данного множества, упорядоченные по включению, где

$$\sup\{A, B\}=A\cup B,$$
$$\inf\{A, B\}=A\cap B.$$

4) Неотрицательные целые числа, упорядоченные по делимости: $a \leqslant b$, если $b = ac$ для нек-рого c, где $\sup\{a, b\}$ — наименьшее общее кратное a и b, а $\inf\{a, b\}$ — наибольший общий делитель a и b.

5) Действительные функции, определенные на отрезке $[0, 1]$ и упорядоченные условием: $f \leqslant g$, если $(t) \leqslant g(t)$ для всех $t \in [0, 1]$, где

$$\sup\{f, g\} = u,$$

причем

$$u(t) = \max\{f(t), g(t)\},$$

а

$$\inf\{f, g\} = v,$$

причем

$$v(t) = \min\{f(t), g(t)\}.$$

Пусть M — решетка. M становится *универсальной алгеброй* с двумя бинарными операциями, если определить

$$a + b = \sup\{a, b\},$$

$$a \cdot b = \inf\{a, b\}$$

(вместо $+$ и $\cdot$ часто употребляются символы $\bigcup$ и $\bigcap$ или $\vee$ и $\wedge$). Эта универсальная алгебра удовлетворяет следующим тождественным соотношениям:

(1) $a + a = a$; (1′) $a \cdot a = a$;

(2) $a + b = b + a$; (2′) $a \cdot b = b \cdot a$;

(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$; (3′) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

(4) $a(a + b) = a$; (4′) $a + a \cdot b = a$.

Наоборот, если M — множество с двумя бинарными операциями, обладающими перечисленными выше свойствами (1)—(4), (1′)—(4′), то на M можно задать порядок $\leqslant$, полагая $a \leqslant b$, если $a + b = b$ (при этом окажется, что $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a \cdot b = a$). Возникающее частично упорядоченное множество будет Р., причем

$$\sup\{a, b\} = a + b, \text{ а } \inf\{a, b\} = a \cdot b.$$

Таким образом, Р. можно определить как универсальную алгебру, описываемую тождествами (1)—(4), (1′)—(4′), то есть Р. образует *универсальных алгебр многообразие*.

Если частично упорядоченное множество рассматривать как *малую категорию*, то оно оказывается Р. в том и только в том случае, когда для любых двух объектов этой категории существует их произведение и копроизведение.

Если P и P' — решетки и f — изоморфизм этих частично упорядоченных множеств, то f является также изоморфизмом соответствующих универсальных алгебр, т. е.

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ и } f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

для любых $x, y \in P$. Однако произвольное изотонное отображение решетки P в решетку P' не обязано быть гомоморфизмом этих Р., рассматриваемых как универсальные алгебры. Так, для любого $a \in P$ отображения $f(x) = x + a$ и $g(x) = x \cdot a$ — изотонные отображения решетки P в себя, являющиеся гомоморфизмами лишь в том и только в том случае, когда P — *дистрибутивная решетка*. Впрочем, первое из этих отображений является гомоморфизмом *полурешетки* P с операцией $+$, а второе — гомоморфизмом полурешетки P с операцией $\cdot$. Совокупность всех Р. образует категорию, если морфизмами считать гомоморфизмы.

Антигомоморфизм решетки P в решетку P' есть такое отображение $f: P \to P'$, что

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \text{ и } f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

для любых $x, y \in P$. Последовательное выполнение двух антигомоморфизмов является гомоморфизмом. Частично упорядоченное множество, антиизоморфное Р., есть Р.

Под координатизацией Р. понимают нахождение *алгебраической системы* (чаще, универсальной алгебры) такой, что данная Р. изоморфна Р. подсистем, Р. конгруэнций или какой-либо другой Р., связанной с этой алгебраич. системой или универсальной алгеброй. Произвольная Р. с 0 и 1 координатизируется частично упорядоченной полугруппой ее резидуальных отображений в себя, оказываясь изоморфной Р. правых аннуляторов этой полугруппы. Сама полугруппа является бэровской, т. е. как правый, так и левый аннулятор каждого из ее элементов порождается идемпотентом.

Наиболее важные результаты получены для Р., подчиненных тем или иным дополнительным ограничениям (см. *Алгебраическая решетка*, *Атомная решетка*, *Брауэра решетка*, *Векторная решетка*, *Дедекиндова решетка*, *Дистрибутивная решетка*, *Мультипликативная решетка*, *Ортомодулярная решетка*, *Полная решетка*, *Свободная решетка*, *Решетка с дополнениями*, *Булева алгебра*). По отдельным вопросам теории Р. см. *Идеал*, *Фильтр*, *Пополнение сечениями*. Особую роль играют алгебраич. образования, являющиеся в то же время Р. (см. *Структурно упорядоченная группа*). Наибольшее число приложений теории Р. связано с булевыми алгебрами. Другие классы Р. использовались в квантовой механике и физике.

Появление понятия «Р.» относится к сер. 19 в. и связано с тем, что многие факты, касающиеся множества идеалов кольца и множества нормальных подгрупп группы, выглядят аналогично и могут быть доказаны в рамках теории дедекиндовых Р. Как самостоятельное направление алгебры теория Р. сформировалась в 30-х гг. 20 в.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория решеток, пер. с англ., М., 1983; [2] Гретцер Г., Общая теория решеток, пер. с англ., М., 1982; [3] Салий В. Н., Лекции по теории решеток, Саратов, 1970; [4] Скорняков Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961; [5] его же, Элементы теории структур, 2 изд., М., 1982; [6] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 237—74; [7] Итоги науки. Алгебра, топология, геометрия. 1968, М., 1970, с. 101—54; [8] Упорядоченные множества и решетки, в. 3, Саратов, 1975; [9] Blyth T., Janowitz M., Residuation theory, N. Y., 1972.

Л. А. Скорняков.

РЕШЕТКА ПОДАЛГЕБР универсальной алгебры A — частично упорядоченное (отношением теоретико-множественного включения) множество Sub A всех подалгебр алгебры A. Для произвольных $X, Y \in$ Sub A их супремумом будет подалгебра, порожденная X и Y, а их инфинумом — пересечение $X \cap Y$. Пересечение подалгебр может быть пустым, поэтому для нек-рых типов алгебр (напр., для полугрупп и решеток) к числу подалгебр относят и пустое множество. Для любой алгебры A Р. п. Sub A является алгебраической и обратно, для любой алгебраической решетки L существует алгебра A такая, что $L \cong$ Sub A (теорема Биркгофа — Фринка). Любая решетка вложима в решетку Sub A для нек-рой группы A.

Р. п. Sub A — одна из основных производных структур, сопоставляемых алгебре A (наряду с такими структурами, как группа автоморфизмов, полугруппа эндоморфизмов, решетка конгруэнций и т. п.). Проблематика, посвященная изучению связей между алгебрами и их Р. п. делится на такие аспекты: решеточные изоморфизмы, решеточные характеристики тех или иных классов алгебр, исследование алгебр с различными ограничениями на Р. п. Алгебры A и B наз. решеточно изоморфными, если Sub $A \cong$ Sub B; всякий изоморфизм Sub A на Sub B наз. решеточным изоморфизмом (или проектированием) A на B. Изоморфные алгебры решеточно изоморфны, обратное же далеко не обязательно. Говорят, что алгебра A решеточно определяется (в данном классе $\mathcal{K}$), если для любой однотипной с ней алгебры B (из $\mathcal{K}$) из Sub $B \cong$ Sub A следует $B \cong A$. В некоторых случаях (напр., для полугрупп) понятие решеточной определяемости расширяют добавлением в заключение импликации условия «или B антиизоморфна A», так как антиизоморфные полугруппы также решеточно изоморфны. Классический пример решеточной определяемости доставляет первая основная теорема проективной геометрии (см. [1]), где в качестве A рассматриваются векторные пространства над телами. Решеточно определяющимися являются также всякая абелева группа, содержащая два независимых элемента бесконечного порядка, всякая свободная группа (свободная полугруппа) и группа (полугруппа), нетривиально разложимая в свободное произведение, всякая нильпотентная группа без кручения, всякая коммутативная полугруппа с законом сокращения и без идемпотентов, всякая свободная полугруппа идемпотентов, свободная полурешетка более чем с двумя свободными образующими. При этом нередко оказывается, что каждое проектирование алгебры индуцируется ее изоморфизмом (или антиизоморфизмом). Класс однотипных алгебр $\mathscr{K}$ может содержать решеточно не определяющиеся алгебры, но обладать тем свойством, что из $A \in \mathscr{K}$ и $\mathrm{Sub}\, B \cong \mathrm{Sub}\, A$ вытекает, что $B \in \mathscr{K}$; в этом случае говорят, что $\mathscr{K}$ решеточно определяется (или решеточно замкнут); если при этом алгебры B берутся только из класса $\mathscr{M}$, то к соответствующему термину добавляют «в классе $\mathscr{M}$». Среди решеточно замкнутых классов — класс всех разрешимых групп.

Многие ограничения, накладываемые на изучаемые алгебры, формулируются в терминах Р. п.; классический пример — условия минимальности и максимальности для подалгебр. $\mathrm{Sub}\, A$ удовлетворяет условию максимальности тогда и только тогда, когда все подалгебры в A конечно порожденные (см. также *Группа с условием конечности*, *Полугруппа с условием конечности*). В качестве других накладываемых на Р. п. ограничений рассматриваются такие теоретико-решеточные свойства как дистрибутивность, модулярность, различные виды полумодулярности, условие Жордана — Дедекинда, дополняемость, относительная дополняемость и т. д. Напр., для группы A Р. п. дистрибутивна тогда и только тогда, когда A локально циклическая (теорема Оре); условия дистрибутивности изучены и в случае полугрупп, ассоциативных колец, модулей, алгебр Ли и др.

Наряду с изоморфизмами Р. п. рассматриваются дуализмы (т. е. антиизоморфизмы), гомоморфизмы. В случае, когда A — топологическая алгебра, наиболее естественно сопоставлять ей решетку всех замкнутых подалгебр; соответствующая проблематика также активно разрабатывается.

Лит.: [1] Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, пер. с англ., М., 1955; [2] Судзуки М., Строение группы и строение структуры ее подгрупп, пер. с англ., М., 1960; [3] Скорняков Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961; [4] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [5] Садовский Л. Е., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 3, с. 123—57; [6] Аршинов М. Н., Садовский Л. Е., там же, 1972, т. 27, в. 6, с. 139—80; [7] Шеврин Л. Н., «Сибирск. матем. ж.», 1962, т. 3, № 3, с. 446—470; [8] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 237—74; [9] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970, с. 101—54; [10] Упорядоченные множества и решетки, в. 3, Саратов, 1975, с. 50—74. *Л. Н. Шеврин.*

РЕШЕТКА С ДОПОЛНЕНИЯМИ — решетка L с нулем 0 и единицей 1, в к-рой для любого элемента a существует такой элемент b (наз. дополнением элемента a), что $a \vee b = 1$ и $a \wedge b = 0$. Произвольную решетку можно вложить в решетку, каждый элемент к-рой обладает единственным дополнением. Если для любых $a, b \in L$ *интервал* $[a, b]$ является Р. с д., то L наз. решеткой с относительными дополнениями. Каждая модулярная Р. с д. является решеткой с относительными дополнениями. Решетка L

с нулем 0 называется: а) решеткой с частичными дополнениями, если каждый ее интервал вида $[0, a]$, $a \in L$, является Р. с д.; б) решеткой со слабыми дополнениями, если для любых a, $b \in L$ существует такой элемент $c \in L$, что $a \wedge c = 0$ и $b \wedge c \neq 0$; в) решеткой с полудополнениями, если для любого $a \in L$, $a \neq 1$, существует такой элемент $b \in L$, $b \neq 0$, что $a \wedge b = 0$; г) решеткой с псевдодополнениями, если для любого $a \in L$ существует такой элемент a^*, что $a \wedge x = 0$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant a^*$; д) решеткой с квазидополнениями, если для любого $x \in L$ существует такой элемент $y \in L$, $y \neq x$, что $x \vee y$ является плотным элементом. Большую роль играют также решетки с ортодополнениями (см. *Ортомодулярная решетка*). О связи между различными типами дополнений в решетках см. [4].

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, 2 изд., М., 1982; [3] его же, Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961; [4] Grillet P. A., Varlet J. C., «Bull. Soc. roy. Sci. Liège», 1967, t. 36, № 11—12, p. 628—42.
Т. С. Фофанова.

РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННАЯ ГРУППА — то же, что *структурно упорядоченная группа.*

РЕШЕТЧАТОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — дискретное вероятностное распределение, сосредоточенное на множестве точек вида $a+nh$, где $h>0$, a — действительное число, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Число h наз. шагом Р. р., и если ни при каких a_1 и $h_1 > h$ распределение не сосредоточено на множестве вида $a_1 + nh_1$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то шаг h наз. максимальным. Частным случаем Р. р. является арифметич. распределение.

Для того чтобы вероятностное распределение с характеристич. функцией $f(t)$ было решетчатым, необходимо и достаточно, чтобы существовало действительное число $t_0 \neq 0$ такое, что $|f(t_0)|=1$; причем h является максимальным шагом тогда и только тогда, когда $|f(t)|<1$ при $0<t<2\pi/h$ и $|f(2\pi/h)|=1$. Характеристич. функция Р. р. является периодич. функцией.

Формула обращения для Р. р. имеет вид

$$p_n = \frac{h}{2\pi} \int_{|t| < \pi/h} e^{-it(a+nh)} f(t)\, dt,$$

где p_n — вероятность, к-рую Р. р. приписывают точке $a+nh$, $f(t)$ — соответствующая характеристич. функция. Справедливо также равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n^2 = \frac{h}{2\pi} \int_{|t| < \pi/h} |f(t)|^2\, dt.$$

Свертка двух Р. р. с шагами h_1 и h_2 является Р. р. тогда и только тогда, когда h_1/h_2 — рациональное число.

При исследовании предельного поведения сумм независимых случайных величин, имеющих Р. р., основной результат центральной предельной теоремы о сходимости к нормальному распределению существенно дополняется локальными теоремами для Р. р. Простейшим примером локальной теоремы для Р. р. является *Лапласа теорема*. Ее обобщением служит следующее утверждение: пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathsf{E}X_1 = m$, $\mathsf{D}X_1 = \sigma^2$ и $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ и X_1 принимает значения вида $a+nh$, $h>0$; тогда если

$$P_k(n) = \mathsf{P}\{S_k = ka + nh\},$$

для выполнения при $k \to \infty$ предельного соотношения

$$\left| \frac{\sigma\sqrt{k}}{h} P_k(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{ka+nh-km}{\sigma\sqrt{k}}\right)^2 \right\} \right| \to 0$$

равномерно относительно n, необходимо и достаточно, чтобы шаг h был максимальным.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [2] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., *Теория вероятностей*, 2 изд., М., 1973.
Н. Г. Ушаков.

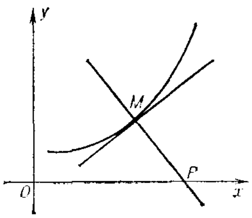
РИБОКУРА КОНГРУЭНЦИЯ — конгруэнция прямых, развертывающиеся поверхности к-рой секут ее среднюю поверхность по сопряженной сети линий.

Пусть S — средняя поверхность Р. к. Тогда существует семейство поверхностей, к-рые соответствуют поверхности S ортогональностью линейных элементов и в каждой паре соответствующих точек имеют нормаль, параллельную лучу конгруэнции. Наоборот, если задана пара поверхностей S и $\tilde{S}$, соответствующих ортогональностью линейных элементов, то конгруэнция, образованная лучами, проходящими через точки поверхности S и коллинеарными нормалям поверхности $\tilde{S}$ в соответствующих точках, является Р.к. со средней поверхностью S. Поверхность $\tilde{S}$ наз. *образующей поверхностью* Р. к. Линии кривизны образующей поверхности $\tilde{S}$ соответствуют тем линейчатым поверхностям конгруэнции, линии сжатия к-рых пересекают луч в центре. Развертывающиеся поверхности Р. к. соответствуют асимптотич. линиям образующей поверхности $\tilde{S}$. У нормальной Р. к. образующая поверхность минимальная. Такая конгруэнция образована нормалями поверхности с изотермическим сферич. изображением линий кривизны.

Конгруэнция впервые рассмотрена А. Рибокуром (A. Ribaucour, 1881).

Лит.: [1] Фиников С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.— Л., 1937; [2] его же, Теория конгруэнций, М.— Л., 1950. *В. С. Малаховский.*

РИБОКУРА КРИВАЯ — плоская кривая, радиус кривизны R к-рой в произвольной точке M пропорционален длине отрезка нормали MP (см. рис.). Уравнение Р. к. в декартовых прямоугольных координатах:



$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{2n} - 1}},$$

где $n = \frac{MP}{R}$. Если $n = 1/h$ (h — любое целое число), то параметрич. уравнения Р. к.:

$$x = (m+1)\, C \int_0^t \sin^{m+1} t dt, \quad y = C \sin^{m+1} t,$$

где $m = -(n+1)n$. При $m=0$ Р. к. есть окружность, при $m=1$ — *циклоида*, при $m=-2$ — *цепная линия*, при $m=-3$ — *парабола*.

Длина дуги Р. к.:

$$l = (m+1)\, C \int_0^t \sin^m t\, dt;$$

радиус кривизны:

$$R = -(m+1)\, C \sin^m t.$$

Эту кривую исследовал А. Рибокур (A. Ribaucour, 1880).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960; [2] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956. *Д. Д. Соколов.*

РИККАРТОВО КОЛЬЦО левое, *левое PP-кольцо*, — кольцо, в к-ром левый аннулятор любого элемента порождается идемпотентом (симметричным образом определяются *правые* Р. к.). Р. к. характеризуются проективностью всех главных левых (правых) идеалов. Риккартовыми являются регулярные, бэровские и полунаследственные кольца. Левое Р. к. не обязано быть правым Р. к. Может не быть риккартовым и кольцо матриц над Р. к. Кольца эндоморфизмов всех свободных левых R-модулей суть Р. к. тогда и только тогда, когда R наследственно слева. Все эти кольца будут правыми Р. к. в том и только в том случае, когда R наследственно слева, совершенно слева и когерентно справа. Сами же кольца эндоморфизмов при этих условиях оказываются бэровскими (см. *Регулярное кольцо*). Коммутативное кольцо R является Р. к. тогда и только тогда, когда его полное кольцо частных регулярно в смысле Неймана и для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R кольцо частных $R_{\mathfrak{m}}$ не имеет делителей нуля. Кольцо многочленов над коммутативным Р. к. является Р. к.

Кольцо с инволюцией $*$ наз. **риккартовым $*$-кольцом**, если левый аннулятор любого элемента порождается проекцией, т. е. таким элементом e, что $e=e^2=e^*$. Аналогичное свойство для правых аннуляторов при этом выполняется автоматически. Проекции риккартова $*$-кольца образуют решетку. Эта решетка полна в том и только в том случае, когда проекцией порождается аннулятор любого множества. Такие кольца наз. **бэровскими $*$-кольцами**.

Термин «Р. к.» введен в честь Ч. Риккарта, рассмотревшего соответствующее свойство в кольцах операторов (см. [1]).

Лит.: [1] Rickart C. E., «Ann. math.», 1946, v. 47, p. 528—50; [2] Berberian S. K., Baer $*$-rings, B— [a. o.], 1972; [3] Kaplansky I., Rings of operators, N. Y.— Amst., 1968; [4] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1981, с. 31—134. *Л. А. Скорняков.*

РИККАТИ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$z'+az^2=bt^{\alpha}, \tag{1}$$

где a, b, α — постоянные. Впервые это уравнение исследовал Я. Риккати (1723, см. [1]); отдельные частные случаи рассматривались раньше. Д. Бернулли (D. Bernoulli, 1724—25) установил, что уравнение (1) интегрируется в элементарных функциях, если $\alpha=-2$ или $\alpha=-4k(2k-1)$, где k — целое число. Ж. Лиувилль (J. Liouville, 1841) доказал, что при других значениях α решение уравнения (1) нельзя выразить в квадратурах от элементарных функций. Общее решение уравнения (1) может быть записано с помощью *цилиндрических функций* (см. [1]).

Дифференциальное уравнение

$$z'=2a(t)\,z+b(t)-c(t)\,z^2, \tag{2}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — непрерывные функции, наз. **общим уравнением Риккати** (в отличие от него уравнение (1) наз. **специальным уравнением Риккати**). При $c(t)\equiv 0$ общее Р. у. является линейным дифференциальным уравнением, при $b(t)\equiv 0$ — *Бернулли уравнением*; решения этих двух уравнений находятся в квадратурах. Изучены также другие случаи интегрируемости общего Р. у. (см. [2]).

Уравнение (2) тесно связано с системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x'&=a(t)\,x+b(t)\,y,\\ y'&=c(t)\,x-a(t)\,y.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если $(x(t), y(t))$ — решение системы (3) при $t\in I=(t_0, t_1)$ и $y(t)$ не обращается в нуль на I, то $z=x(t)y^{-1}(t)$ есть решение уравнения (2); если $z(t)$ — решение уравнения (2), а $y(t)$ — решение уравнения

$$y'=[c(t)\,z(t)-a(t)]\,y,$$

то пара $(x(t)=z(t)y(t),\ y(t))$ является решением системы (3). В частности, решения уравнения(2) при $c(t)\equiv 1$ связаны с решениями уравнения

$$y''=2a(t)\,y'+b(t)\,y,\ \ t\in I,$$

равенством $z(t)=y'(t)y^{-1}(t)$, если $y(t)$ не обращается в нуль на I. В силу отмеченной связи, уравнение (2) часто привлекается для исследования колеблемости, неосцилляции, приводимости и многих других вопросов качественного поведения линейных уравнений и систем 2-го порядка (см. [3], [4]).

Уравнение

$$Z' = A(t)Z + B(t) - ZC(t)Z - ZD(t), \quad (4)$$

где $Z \equiv Z(t)$ — неизвестная $(n \times m)$-матрица-функция, а матрицы-функции A, B, C, D имеют размеры $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ соответственно, наз. **матричным уравнением Риккати**. Решения $Z(t)$ матричного Р. у. (4) связаны с решениями $(X(t), Y(t))$ матричной линейной системы:

$$\left.\begin{aligned} X' &= A(t)X + B(t)Y, \\ Y' &= C(t)X + D(t)Y \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

равенством $X(t) = Z(t)Y(t)$.

Матричное Р. у. играет важную роль в теории линейных гамильтоновых систем, вариационном исчислении, задачах оптимального управления, фильтрации, стабилизации управляемых линейных систем и др. (см. [6], [7]). Напр., оптимальное управление u_0 в задаче минимизации функционала

$$x^\top(t_1)\Phi x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1}[x^\top(t)M(t)x(t) + u^\top(t)N(t)u(t)]\,dt$$

на решениях системы

$$x' = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0,$$

($(n \times n)$-матрицы Φ, $M(t)$ симметричны и неотрицательно определены, а $(m \times m)$-матрица $N(t)$, положительно определенная при $t \in [t_0, t_1]$), дается равенством

$$u_0(t) = -N^{-1}(t)B^\top(t)Z(t)x,$$

где $Z(t)$ — решение матричного Р. у.

$$Z' = -ZA(t) - A^\top(t)Z + ZB(t)N^{-1}(t)B^\top(t)Z - M(t) \quad (6)$$

с граничным условием $Z(t_1) = \Phi$ (см. [5], [8]).

В задачах управления на бесконечном интервале времени важными являются вопросы о существовании у матричного Р. у. неотрицательно определенного ограниченного на $[t_0, \infty)$ решения, о существовании периодического или почти периодического решения (в случае периодических или почти периодических коэффициентов уравнения) и о способах приближенного построения таких решений.

В вариационных задачах с дискретным временем и задачах дискретной оптимизации аналогом уравнения (4) служит **матричное рекуррентное уравнение Риккати**

$$Z_{k+1} = A_k Z_k + B_k - Z_k C_k Z_k - Z_k D_k.$$

Уравнению (4) можно естественным образом поставить в соответствие динамич. систему на многообразии Грассмана $G_{m,n}$ (см. [9]), что позволяет привлечь к исследованию уравнения (4) теорию динамич. систем. Напр., если матрицы A, B, C, D в уравнении (4) периодичны с периодом $\omega > 0$ и $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots < |\lambda_{n+m}|$, где λ_i — мультипликаторы (см. *Флоке — Ляпунова теорема*) системы (5), то соответствующая динамич. система порождается диффеоморфизмом Морса — Смейла (см. *Морса — Смейла система*), и потому она структурно устойчива.

Лит.: [1] Riccati J., Opere, Treviso, 1758 (2 Aufl., Lucca, 1761—65); [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер с нем., 5 изд., М., 1976; [3] Еругин Н. П., Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 3 изд., Минск, 1979; [4] его же, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Минск, 1963; [5] Reid W. T., Riccati differential equations, N. Y.— L., 1972; [6] Калман Р., Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем, пер. с англ., М., 1971; [7] Лионс Ж.-Л., Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, пер. с франц., М., 1972; [8] Захар-Иткин М. Х., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 3, с. 83—120; [9] Schneider C. R., «Math. Syst. Theory», 1973, v. 7, № 3, p. 281—86. *Е. Л. Тонков.*

РИМАНА ГЕОМЕТРИЯ, эллиптическая геометрия,— одна из неевклидовых геометрий, т. е. геометрич. теория, основанная на аксиомах, требования к-рых отличны от требований аксиом *евклидовой геометрии*. В отличие от евклидовой геометрии в Р. г. осуществляется одно из двух возможных отрицаний аксиомы параллельности евклидовой геометрии: в плоскости через точку, не инцидентную данной прямой, не проходит ни одной прямой, не пересекающей данную; другое отрицание евклидовой аксиомы параллельности осуществляется в *Лобачевского геометрии*: в плоскости через данную точку, не инцидентную данной прямой, проходит по крайней мере две прямые, не пересекающие данную.

Система аксиом трехмерной Р. г. может быть построена по основе тех же понятий, что и *Гильберта система аксиом* евклидовой геометрии, где в качестве основных понятий полагаются «точка», «прямая», «плоскость». «Прямая» и «плоскость» понимаются как нек-рые классы «точек», а под «пространством» подразумевается совокупность всех объектов: «точек», «прямых» и «плоскостей».

Система аксиом состоит из четырех групп.

I группа — а к с и о м ы п р и н а д л е ж н о с т и — содержит все аксиомы, составляющие I группу гильбертовой системы аксиом, и, кроме того, дополняется еще одной аксиомой: каждым двум различным прямым в плоскости принадлежит одна и только одна общая им точка.

II группа — а к с и о м ы п о р я д к а, или р а с п о л о ж е н и я т о ч е к н а п р я м о й. Аксиомы этой группы описывают понятие «разделенность двух пар точек прямой», с помощью к-рого определяется порядок точек на прямой. II_1. Каковы бы ни были три различные точки A, B, C произвольной прямой, существует на этой прямой такая точка D, что пара A, B разделяет пару C, D (обозначается $AB \div CD$). Если $AB \div CD$, то все четыре точки A, B, C, D различны. II_2. Если $AB \div CD$, то $BA \div CD$ и $CD \div AB$. II_3. Каковы бы ни были четыре различные точки A, B, C, D прямой, из них могут быть всегда и единственным образом составлены две разделенные пары. II_4. Пусть точки A, B, C, D, E лежат на одной прямой, если $CD \div AB$ и $CE \div AB$, то пара DE не разделяет пару AB. II_5. Если пары CD и CE не разделяют пару AB, то и пара DE не разделяет пару AB (см. II_4). II_6. Пусть четыре различные прямые нек-рого пучка пересекаются двумя различными прямыми соответственно в точках A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1, тогда если $AB \div CD$, то и $A_1B_1 \div C_1D_1$.

III группа — а к с и о м ы к о н г р у э н т н о с т и — описывает отношение «конгруэнтность» отрезков, углов и т. д. Под отрезком подразумевается множество точек прямой, определенное парой различных точек A, B этой прямой следующим образом. Вследствие аксиом II группы на прямой существует такая пара точек M, N, что $AB \div MN$; множество точек X, к-рые удовлетворяют соотношению $AB \div MX$, образуют класс внутренних точек отрезка, определяемого точками A и B; обозначается $[AB]_M$. Точки прямой, внешние относительно $[AB]_M$, образуют в з а и м н о д о п о л н и т е л ь н ы й о т р е з о к $[AB]_N$, точки A и B наз. концами отрезков $[AB]_M$ и $[AB]_N$. В аксиомах, относящихся к понятию отрезка, под отрезком подразумевается всегда класс внутренних точек или всегда класс внешних точек. III_1. Каждый отрезок конгруэнтен самому себе. III_2. Если первый отрезок конгруэнтен второму, то второй отрезок конгруэнтен первому. III_3. Если первый отрезок конгруэнтен второму, а второй конгруэнтен третьему, то и первый конгруэнтен третьему. III_4. Из конгруэнтности двух отрезков следует конгруэнтность их взаимно дополнительных отрезков. III_5. Каждый отрезок не конгруэнтен своей части. П о л у п р я м ы м и наз. конгруэнтные взаимно дополнительные отрезки одной прямой. Концы таких отрезков наз. противоположными точками прямой. III_6. Для каждой точки прямой существует ей противоположная. III_7. Все полупрямые конгруэнтны между собой. III_8. Если отрезок $[AB]$ конгруэнтен отрезку $[A_1B_1]$ и точка C есть внутренняя точка первого отрезка, то внутри второго отрезка существует такая точка C_1, что отрезок $[A_1C_1]$ конгруэнтен отрезку $[AC]$ и отрезок $[C_1B_1]$ конгруэнтен отрезку $[CB]$. Пусть на сторонах угла, образованного двумя прямыми, отмечены противоположные точки относительно вершины угла, тогда отрезком, соотнесенным углу, наз. отрезок прямой, проходящий через эти две точки, к-рый расположен внутри данного угла. Два угла наз. *конгруэнтными*, если конгруэнтны соотнесенные им отрезки. III_9. Если в двух треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ сторона AB конгруэнтна стороне A_1B_1, а сторона AC — стороне A_1C_1, то угол A конгруэнтен углу A_1 тогда и только тогда, если конгруэнтны стороны BC и B_1C_1.

IV группа — *аксиома непрерывности*. Пусть внутренние точки отрезка $[AB]_M$ разделены на два класса таких, что 1) каждая точка отрезка попадает в один из этих классов, 2) каждый класс не пуст, 3) если точка X принадлежит первому классу, а точка Y — второму, то X — всегда внутренняя точка отрезка $[AY]_M$. Тогда на отрезке $[AB]_M$ существует такая точка C, что всякая внутренняя точка отрезка $[AC]_M$ принадлежит первому классу, а всякая внутренняя точка отрезка $[CB]_M$ — второму.

Имеются и другие системы аксиом Р. г., в основе к-рых лежат иные основные понятия и отношения (см., напр., [3], [5]).

Метрич. свойства Р. г. «в малом» совпадают с метрич. свойствами нек-рой гиперсферы в соответствующем евклидовом пространстве. Напр., для любой точки плоскости Римана существует содержащая эту точку часть плоскости, изометричная нек-рой части сферы в 3-мерном евклидовом пространстве, радиус r этой сферы — один и тот же для всех плоскостей данного пространства Римана — наз. радиусом кривизны этого пространства; метрич. свойства 3-мерного пространства Римана «в малом» совпадают с метрич. свойствами гиперсферы 4-мерного евклидова пространства и т. д. Число $k=1/r^2$ наз. *кривизной пространства Римана*.

Ниже приведены основные факты Р. г. прямой, плоскости и 3-мерного пространства.

Прямая Римана (*эллиптическая прямая*) — замкнутая конечная линия $Э^1$. Моделью прямой в евклидовой плоскости E^r может служить окружность радиуса r с отождествленными диаметрально противоположными точками. Две различные точки прямой делят ее на две части. Взаимное расположение точек на прямой определяется с помощью понятия «разделенности двух пар точек». Расстояние между двумя точками прямой определяется двузначно: меньшее из них не превышает $\pi r/2$, большее — превосходит $\pi r/2$. Длина всей прямой равна πr. Две точки, расстояние между к-рыми равно $\pi r/2$, наз. *взаимно полярными*; каждой точке прямой соответствует единственная, полярная ей.

Плоскость Римана (*эллиптическая плоскость*) — замкнутая конечная односторонняя поверхность $Э^2$, гомеоморфная листу Мёбиуса, граница к-рого заклеена кругом. Моделью плоскости Р. г. с кривизной $1/r^2$ в 3-мерном евклидовом пространстве может служить сфера радиуса r с отождествленными диаметрально противоположными точками. Прямая не разделяет плоскость на две области.

Всякие две прямые на плоскости обладают общим перпендикуляром; его длина равна αr, где α — угол между прямыми, r — радиус кривизны плоскости Римана. Две различные прямые делят плоскость на две области, к-рые наз. углами. Трехсторонник разделяет всю плоскость на 4 области, к-рые наз. треугольниками.

Метрич. соотношения в треугольнике на плоскости $Э^2$ кривизны $1/r^2$ выражаются соответствующими соотношениями сферич. тригонометрии на сфере радиуса r в евклидовом пространстве E^3. Вообще, формулы тригонометрии в $Э^2$ Р. г. тождественны формулам *сферической тригонометрии* на сфере соответствующего радиуса в евклидовом пространстве, однако существуют определенные условия справедливости сферич. формул на плоскости $Э^2$.

Множество точек плоскости, отстоящих от данной точки (полюса) на расстоянии $\pi r/2$, есть прямая — поляра полюса. Любая прямая однозначно определяется своим полюсом и, обратно, определяет свой полюс. Полюсы прямых, проходящих через данную точку, располагаются на поляре этой точки, а поляры точек, лежащих на нек-рой прямой, пересекаются в полюсе этой прямой. Взаимно полярные треугольники имеют вершинами полюсы соответствующих сторон. Для двух взаимно полярных треугольников имеет место теорема Шаля о пересечении в одной точке трех прямых, соединяющих соответствующие вершины этих треугольников. Если вершины треугольника являются полюсами его сторон, то его наз. автополярным треугольником.

Сумма углов треугольника больше π; его площадь $S=r^2\cdot\Delta$ пропорциональна угловому избытку $\Delta=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi$, где r — радиус кривизны плоскости Римана.

Окружность в $Э^2$ — множество точек, расположенных на одинаковом расстоянии от нек-рой точки (ее центра). Под радиусом окружности R можно понимать любой из взаимно дополнительных отрезков длины R и $\pi r-R$, обычно выбирается радиус, не больший $\pi r/2$. Окружность является эквидистантой нек-рой прямой (базы окружности). При $R=\pi r/2$ окружность является прямой — полярой центра. Длина окружности радиуса R равна $2\pi r\sin(R/r)$, а площадь круга равна $4\pi r^2\sin^2(R/2r)$.

Существуют четыре и только четыре окружности, проходящие через три данные точки, не лежащие на одной прямой. Две различные окружности могут пересекаться не более, чем в четырех различных точках. Площадь всей плоскости $Э^2$ радиуса кривизны r равна $2\pi r^2$.

В Р. г. плоскости имеет место принцип двойственности: во всяком верном утверждении можно взаимно заменить термины «точка» и «прямая», в результате получается верное утверждение.

Пространство Римана трехмерное (эллиптическое пространство) — замкнутое конечное двустороннее (ориентируемое) пространство $Э^3$. Моделью пространства $Э^3$ в евклидовом пространстве E^4 может служить гиперсфера радиуса r с отождествленными диаметрально противоположными точками. Пространство Римана с радиусом кривизны r имеет объем $\pi^2 r^3$.

Плоскость не разделяет пространство на две области. Две различные плоскости в $Э^3$ пересекаются по прямой. Прямая, не лежащая в плоскости, пересекает ее в одной точке.

Множество точек пространства, отстоящих от данной точки (полюса) на расстоянии $\pi r/2$, есть плоскость — поляра полюса. Любая плоскость определяется однозначно своим полюсам и обратно, определяет свой полюс. Если три плоскости проходят через одну прямую, то их полюсы лежат на одной прямой и обратно, если полюсы трех плоскостей лежат на одной прямой, то эти плоскости пересекаются по одной прямой. Для каждой прямой существует такая скрещивающаяся с ней прямая, что полюсы плоскостей, проходящих через одну прямую, лежат на другой, а полярные плоскости точек, лежащих на одной прямой, проходят через другую. Такие скрещивающиеся прямые наз. взаимно полярными (взаимные поляры). Две скрещивающиеся прямые наз. косыми, если они не являются взаимными полярами или если каждая из них не пересекает поляру другой. Две косые прямые имеют два общих перпендикуляра, являющихся взаимными полярами. Если два общих перпендикуляра косых прямых неравновелики (имеют разные длины), то эти косые прямые наз. расходящимися, а длины общих перпендикуляров дают наименьшее и наибольшее расстояния одной прямой от другой. Две косые прямые, имеющие бесконечное множество общих перпендикуляров одинаковой длины, наз. параллелями Клиффорда (равноотстоящими, паратактичными прямыми). Через каждую точку пространства, лежащую вне данной прямой и вне полярной ей прямой, проходят две параллели Клиффорда к данной прямой. Множество точек, отстоящих от данной прямой на одном и том же расстоянии, меньшем $\pi r/2$, наз. поверхностью Клиффорда. Данная прямая наз. осью, а расстояние ρ точек от оси — радиусом поверхности Клиффорда. Эта поверхность имеет две взаимно полярные оси и соответственно два радиуса, дополняющих друг друга до полупрямой. Плоскости, проходящие через ось поверхности Клиффорда, пересекают ее по окружности. Через каждую точку поверхности Клиффорда проходят две прямые, равноотстоящие от ее осей и целиком принадлежащие поверхности; эти прямые наз. прямолинейными образующими поверхности Клиффорда. Всякие три прямые, равноотстоящие друг от друга, определяют поверхность Клиффорда, для к-рой они являются образующими. Каждая пара прямолинейных образующих различных семейств пересекается под постоянным углом. Поверхность Клиффорда изометрична евклидову ромбу с острым углом, равным углу между образующими различных семейств, и стороной длины πr, у к-рого отождествлены точки противоположных сторон, соединяемых прямыми, параллельными другим сторонам. Иными словами, поверхность Клиффорда несет на себе евклидову геометрию. Площадь поверхности Клиффорда радиуса ρ равна $\pi^2 r^2 \sin(2\rho/r)$.

Сфера в $Э^3$ — множество точек, расположенных на одинаковом расстоянии от нек-рой точки (ее центра). Сфера является эквидистантой нек-рой плоскости (базы сферы). Площадь сферы радиуса R равна $4\pi r^2 \sin^2(R/r)$.

В Р. г. пространства имеет место принцип двойственности: во всяком верном утверждении можно взаимно заменить термины «точка» и «плоскость», в результате получается также верное утверждение.

По-видимому, первое сообщение о Р. г. сделано Б. Риманом (B. Riemann) в его лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854, опубл. 1867, см. [1]), где Р. г. рассматривалась как *риманова геометрия* постоянной положительной гауссовой кривизны.

Лит.: [1] Риман Б., в кн.: Об основаниях геометрии, М., 1956, с. 309—25; [2] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [3] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [4] Каган В. Ф., *Основания геометрии*, ч. 2, М., 1956; [5] Богомолов С. А., Введение в неевклидову геометрию Римана, Л.— М., 1934. *Л. А. Сидоров.*

РИМАНА ГИПОТЕЗЫ в аналитической теории чисел — пять гипотез, высказанных Б. Риманом (B. Riemann, 1876) относительно распределения нетривиальных нулей дзета-функции $\zeta(s)$ и относительно выражения через эти нули числа простых чисел, не превосходящих x (см. *Дзета-функция*). Не доказана и не опровергнута одна Р. г.: все нетривиальные нули дзета-функции $\zeta(s)$ лежат на прямой $\operatorname{Re} s = {}^1/_2$.

А. Ф. Лаврик.

РИМАНА ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ — см. *Дзета-функция.*

РИМАНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка в комплексной плоскости, имеющее три заданные *регулярные особые точки* a, b, c с соответствующими характеристич. показателями α, α', β, β', γ, γ' в этих точках. Общий вид такого уравнения впервые выписал Э. Папперица (E. Papperitz), из-за чего оно также наз. *Папперица уравнением.* Решения Р. д. у. записываются в виде так наз. *P*-функции Римана

$$w = P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

Р. д. у. принадлежит *Фукса классу уравнений* с тремя особыми точками. Частным случаем Р. д. у. является *гипергеометрическое уравнение* (особые точки: 0, 1, ∞); поэтому само Р. д. у. иногда наз. обобщенным гипергеометрическим уравнением. Р. д. у. приводится к *Похгаммера уравнению*, а потому решение Р. д. у. можно записать в виде интеграла по специальному контуру в комплексной плоскости.

Лит. см. при ст. *Папперица уравнение.* *Н. Х. Розов.*

РИМАНА ИНТЕГРАЛ — обобщение понятия *Коши интеграла* на нек-рый класс разрывных функций, введенное Б. Риманом (B. Riemann, 1853). Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$. Сумму вида

$$\sigma = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \ldots + f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \ldots \\ \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}), \qquad (1)$$

где $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, наз. интегральной суммой, отвечающей данному разбиению отрезка $[a, b]$ точками x_i и выбору точек ξ_i. Число I наз. пределом интегральных сумм (1) при $\max\limits_i \Delta x_i < \delta$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$ справедливо неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$. Если существует конечный предел I интегральных сумм при $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$, то функцию $f(x)$ наз. интегрируемой в смысле Римана на отрезке $[a, b]$ при $a < b$, а указанный предел — определенным интегралом Римана от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

При $a = b$, по определению, полагают

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

а при $a > b$ определяют интеграл (2) с помощью равенства

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Необходимым и достаточным условием интегрируемости $f(x)$ на $[a, b]$ в смысле Римана являются ограниченность $f(x)$ на этом отрезке и равенство нулю *Лебега меры* множества всех точек разрыва $f(x)$, содержащихся на $[a, b]$.

Свойства Р. и. 1) Всякая интегрируемая по Риману на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ ограничена на этом отрезке (обратное неверно: примером ограниченной и неинтегрируемой на $[a, b]$ функции служит *Дирихле функция*).

2) Линейное свойство: для любых постоянных α и β из интегрируемости на $[a, b]$ каждой из функций $f(x)$ и $g(x)$ следуют интегрируемость на этом отрезке функции $[\alpha f(x)+\beta g(x)]$ и равенство

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\,dx=\alpha \int_a^b f(x)\,dx+\beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

3) Из интегрируемости на отрезке $[a, b]$ каждой из функций $f(x)$ и $g(x)$ следует интегрируемость на этом отрезке произведения $f(x)g(x)$.

4) Аддитивность: из интегрируемости функции $f(x)$ на каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ следуют интегрируемость $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

5) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и если $f(x)\geqslant g(x)$ всюду на этом отрезке, то

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

6) Из интегрируемости на $[a, b]$ функции $f(x)$ следуют интегрируемость на этом отрезке функции $|f(x)|$ и справедливость оценки

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

7) Формула среднего значения: если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, функция $g(x)$ неотрицательна или неположительна всюду на этом отрезке, а M и m — точные верхняя и нижняя грани $f(x)$ на $[a, b]$, то найдется число μ из отрезка $m\leqslant\mu\leqslant M$ такое, что справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=\mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{3}$$

Если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на этом отрезке найдется точка ξ такая, что в формуле (3)

$$\mu=f(\xi).$$

8) Вторая формула среднего значения (формула Бонне): если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, а функция $g(x)$ монотонна на этом отрезке, то найдется точка ξ на $[a, b]$ такая, что справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Лит.: [1] Riemann B., «Göttinger Akad. Abhandl.», 1868, Bd 13; [2] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [3] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; [4] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975. *В. А. Ильин.*

РИМАНА МЕТОД, Римана — Вольтерра метод,— метод решения *Гурса задачи* и *Коши задачи* для линейных гиперболич. типа уравнений 2-го порядка с двумя независимыми переменными

$$Lu\equiv u_{xy}+a(x, y)\,u_x+b(x, y)\,u_y+c(x, y)\,u=$$
$$=f(x, y). \tag{1}$$

В Р. м. фундаментальную роль играет функция Римана $R=R(x, y; \xi, \eta)$, к-рая при определенных предположениях относительно заданных функций a, b, c и f однозначно определяется как решение специальной задачи Гурса:

$$R(\xi, y; \xi, \eta)=\exp\int_\eta^y a(\xi, t)\,dt;$$

$$R(x, \eta; \xi, \eta)=\exp\int_\xi^x b(t, \eta)\,dt$$

для сопряженного уравнения

$$L^*R \equiv R_{xy} - \frac{\partial}{\partial x}(a, R) - \frac{\partial}{\partial y}(bR) + cR = 0.$$

Функция R по переменным ξ, η является решением однородного уравнения

$$R_{\xi\eta} + a(\xi, \eta) R_\xi + b(\xi, \eta) R_\eta + c(\xi, \eta) R = 0.$$

При $a = b = 0$, $c = \text{const}$ функция $R = J_0(\sqrt{4c(x-\xi)(y-\eta)})$, где $J_0(z)$ — функция Бесселя порядка нуль.

Функцию Римана можно определить как решение нагруженного интегрального уравнения Вольтерра:

$$R(x, y; \xi, \eta) - \int_\eta^y a(x, \tau) R(x, \tau; \xi, \eta)\, d\tau - \\ - \int_\xi^x b(t, y) R(t, y; \xi, \eta)\, dt + \\ + \int_\xi^x dt \int_\eta^y c(t, \tau) R(t, \tau; \xi, \eta)\, d\tau = 1. \quad (2)$$

Р. м. решения задачи Гурса реализуется следующим образом: для любой дифференцируемой до соответствующего порядка функции $u = u(x, y)$ имеет место тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}[uR(x, y; \xi, \eta)] - R(x, y; \xi, \eta) Lu = \\ = \frac{\partial}{\partial x}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial y} - aR\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial x} - bR\right)\right],$$

из к-рого интегрированием по частям получается, что любое решение u уравнения (1) представляет собой решение нагруженного интегрального уравнения:

$$u(x, y) = R(x, y_0; x, y)\, u(x, y_0) + \\ + R(x_0, y; \xi, y)\, u(x_0, y) - R(x_0, y_0; x, y) + \\ + \int_{x_0}^x \left[b(t, y_0) R(t, y_0; x, y) - \frac{\partial R(t, y_0; x, y)}{\partial t}\right] \times \\ \times u(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^y \left[a(x_0, \tau) R(x_0, \tau; x, y) - \right. \\ \left. - \frac{\partial R(x_0, \tau; x, y)}{\partial \tau}\right] u(x_0, \tau)\, d\tau + \\ + \int_{x_0}^x dt \int_{y_0}^y R(t, \tau; x, y) f(x, \tau)\, d\tau, \ x > x_0, \ y > y_0. \quad (3)$$

Из (3) непосредственно вытекает корректность задачи Гурса

$$u(x, y_0) = \varphi(x), \ u(x_0, y_0) = \psi(y), \ \varphi(x_0) = \psi(y_0)$$

для уравнения (1).

Р. м. приводит решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными на любой гладкой нехарактеристич. кривой к нахождению функции Римана и дает возможность в квадратурах выписать решение этой задачи.

Р. м. обобщен на широкий класс линейных гиперболич. уравнений и систем.

Для случая гиперболич. типа системы линейных уравнений с частными производными 2-го порядка

$$u_{xx} - u_{yy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y),$$

где a, b, c — заданные действительные квадратные симметрич. матрицы порядка m, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ — заданный, а $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — искомый векторы, матрица Римана однозначно определяется как решение системы нагруженных интегральных уравнений Вольтерра вида (2), в правой части к-рой стоит единичная матрица I порядка m.

В. Вольтерра (V. Volterra) впервые обобщил Р. м. на волновое уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = f(x, y, t). \quad (4)$$

Роль функции Римана, позволяющей выписать в квадратурах решение задачи Коши с начальными данными на плоскости $t=\text{const}$ и задачи Гурса с данными на характеристич. конусе для уравнения (4), играет функция

$$R=\log\left[\sqrt{\frac{(t-\tau)^2}{r^2}-1}+\frac{\tau-t}{r}\right],$$

где $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$.

Метод предложен Б. Риманом (В. Riemann, 1860).

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959; [2] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [3] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958. *А. М. Нахушев.*

РИМАНА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования числовых рядов. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ суммируется методом Римана к числу S, если

$$\lim_{h\to 0}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right]=S.$$

Впервые этот метод ввел и доказал его регулярность Б. Риман (В. Riemann, см. [1]) в 1854. Р. м. с. применяется в теории тригонометрич. рядов, где его обычно формулируют следующим образом: тригонометрич. ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

с ограниченными коэффициентами a_n, b_n суммируется методом Римана в точке x_0 к числу S, если функция

$$F(x)=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}$$

имеет в точке x_0 *Римана производную*, равную S.

Лит.: [1] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [3] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965; [4] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *Т. П. Лукашенко.*

РИМАНА ОБОБЩЕННАЯ ГИПОТЕЗА — высказывание о нетривиальных нулях *Дирихле L-функций*, *дзета-функций* Дедекинда и нек-рых других подобных функций, вполне аналогичное *Римана гипотезе* относительно нетривиальных нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$. Р. о. г. в случае Дирихле L-функций наз. также расширенной гипотезой Римана. *А. Ф. Лаврик.*

РИМАНА ПРОИЗВОДНАЯ, производная Шварца, вторая симметрическая производная, функции $f(x)$ в точке x_0 — предел

$$D^2f(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}.$$

Введена Б. Риманом (В. Riemann, 1854); он доказал, что если в точке x_0 существует 2-я производная $f''(x_0)$, то существует Р. п. и $D^2f(x_0)=f''(x_0)$. Верхний и нижний пределы

$$\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0+h)}{h^2}$$

при $h\to 0$ наз. соответственно верхней $\overline{D}^2f(x_0)$ и нижней $\underline{D}^2f(x_0)$ Р. п.

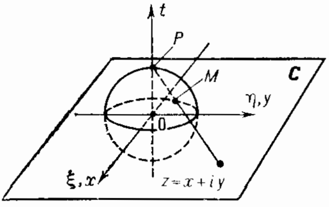
Р. п. получила широкое применение в теории представления функций тригонометрич. рядами; в частности, в связи с *Римана методом суммирования*. *Т. П. Лукашенко.*

РИМАНА СООТНОШЕНИЕ, билинейные соотношения Римана,— см. *Абелев дифференциал.*

РИМАНА СФЕРА — сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3(\xi,\eta,t)$, на к-рую расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ отображается взаимно однозначно и конформно при помощи *стереографической проекции.* Напр., в качестве Р. с. можно взять единичную сферу

$$S_2=\{(\xi,\eta,t)\in\mathbb{R}^3;\ \xi^2+\eta^2+t^2=1\},$$

а плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ совместить с плоскостью $t=0$ так, чтобы действительная ось совпала с осью $\eta=0$, $t=0$, а мнимая ось — с осью $\xi=0$, $t=0$ (см. рис.). Каждой точке $z=x+iy\neq\infty$ при стереографич. проекции соответствует точка сферы $M(\xi, \eta, t)\neq P(0, 0, 1)$, получающаяся как точка пересечения луча со сферой S_2, проведенного из северного полюса сферы $P(0, 0, 1)$ в точку z; бесконечно удаленной точке $z=\infty$ соответствует северный полюс $P(0, 0, 1)$.



Аналитически это соответствие выражается формулами

$$\xi+i\eta=\frac{2z}{|z|^2+1}, \quad t=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}, \quad z=\frac{\xi+i\eta}{1-t}. \qquad (*)$$

Иначе говоря, соответствие (*) определяет дифференцируемое вложение одномерного комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^1$ в пространство $\mathbb{R}^3$ в виде сферы S_2. Во многих вопросах теории функций расширенную комплексную плоскость отождествляют с Р. с. От исключительной роли бесконечно удаленной точки плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ можно избавиться, если за расстояние между двумя точками z, $w\in\overline{\mathbb{C}}$ принять хордальное, или сферическое, расстояние $\chi(z, w)$ между их образами M, $N\in S_2$:

$$\chi(z, w)=\frac{2|z-w|}{\sqrt{|z|^2+1}\sqrt{|w|^2+1}}, \quad \chi(z, \infty)=\frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}.$$

Вложение многомерного комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$, $n>1$, в пространство $\mathbb{R}^{n(n+2)}$ можно осуществить при помощи формул комплексно n-мерной стереографич. проекции, обобщающих формулы (*) (см. [2]).

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [2] Фукс Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, [2 изд.], М., 1962.

Е. Д. Соломенцев.

РИМАНА ТЕНЗОР — четырехвалентный тензор, рассматриваемый в теории кривизны пространств. Пусть L_n — пространство аффинной связности, Γ^k_{ij} — объект связности пространства L_n, компоненты (координаты) Р. т., один раз контравариантного и трижды ковариантного, имеют вид

$$R^q_{lk,\,i}=\frac{\partial\Gamma^q_{li}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^q_{ki}}{\partial x^l}-\Gamma^q_{lp}\Gamma^p_{ki}+\Gamma^q_{kp}\Gamma^p_{li},$$

$$l,\ k,\ i,\ q=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $\frac{\partial}{\partial x^k}$ — символ дифференцирования по пространственной координате x^k, $k=1, \ldots, n$. В римановом пространстве V_n с основным метрич. тензором g_{ij}, кроме тензора $R^q_{lk,\,i}$, рассматривается четырежды ковариантный Р. т., получаемый опусканием верхнего индекса q с помощью метрич. тензора g_{ij}:

$$R^q_{lk,\,i}g_{qj}=R_{lk,\,ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^k\partial x^i}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^k\partial x^j}-\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^l\partial x^i}+\frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^l\partial x^j}\right)+g_{pq}\left(\Gamma^p_{lj}\Gamma^q_{ki}-\Gamma^p_{kj}\Gamma^q_{li}\right).$$

Здесь $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$, так как V_n снабжено римановой связностью (без кручения). В произвольном пространстве с аффинной связностью без кручения координаты Р. т. удовлетворяют тождеству Риччи

$$R^q_{lk\,i}+R^q_{ki,\,l}+R^q_{il,\,k}=0,$$

$$R_{lk,\,ij}+R_{ki,\,lj}+R_{il,\,kj}=0,$$

т. е. циклирование по трем первым (нижним) индексам дает нуль.

Р. т. обладает следующими свойствами:

$$1)\ R_{lk,ij}=R_{ij,lk};\quad 2)\ R^q_{i,lk}=-R^q_{i,kl};$$
$$3)\ R_{lk,ij}=-R_{kl,ij},\ R_{lk,ij}=-R_{lk,ji};$$
$$4)\ R_{aa,ij}=0,\ R_{lk,bb}=0,$$

если оба индекса одной пары одинаковы, то соответствующая координата равна нулю: $R^q_{aa,i}=0$;

5) для абсолютных производных Р. т. имеет место тождество Бианки

$$\nabla_m R^q_{kl,i}+\nabla_k R^q_{lm,i}+\nabla_l R^q_{mk,i}=0,$$

где ∇_m — символ ковариантного дифференцирования по координате x^m. Аналогичное тождество имеет место и для тензора $R_{lk,ij}$.

Р. т. имеет всего n^4 координат, где n — размерность пространства, из них $n^2(n^2-1)/12$ существенных, между к-рыми нет тождественных зависимостей, вытекающих из указанных свойств.

В случае $n=2$ Р. т. имеет одну существенную координату $R_{12,12}$, к-рая входит в определение внутренней, или римановой, кривизны поверхности $K=\frac{R_{12,12}}{\det g_{ij}}$ (см. *Гауссова кривизна*).

Р. т. был определен Б. Риманом (В. Riemann) в 1861 (опубл. в 1876).

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [2] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [3] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971. *Л. А. Сидоров.*

РИМАНА ТЕОРЕМА — 1) Р. т. о конформном отображении: каковы бы ни были две односвязные области G_1 и G_2 расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, отличные от $\overline{\mathbb{C}}$, а также от $\overline{\mathbb{C}}$ с какой-либо исключенной из нее точкой, найдется бесконечное число аналитических и однолистных в области G_1 функций, каждая из к-рых осуществляет взаимно однозначное и конформное отображение G_1 на G_2. При этом для любой пары точек $a\in G_1$, $a\neq\infty$, и $b\in G_2$ и любого действительного числа α, $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$, найдется, и притом единственная, функция f этого класса, для к-рой $f(a)=b$, $\arg f'(a)=\alpha$. Условие $\arg f'(a)=\alpha$ геометрически означает, что каждый бесконечно малый вектор, выходящий из точки a, при отображении $w=f(z)$ переходит в бесконечно малый вектор, направление к-рого образует с направлением исходного вектора угол α.

Р. т. является основной в теории конформных отображений и вообще в геометрич. теории функций комплексного переменного. Вместе со своими обобщениями на многосвязные области она имеет обширные применения в теории функций комплексного переменного, математич. физике, теории упругости, аэро- и гидромеханике, электро- и магнитостатике и т. д. Эта теорема для более общего случая односвязных и, вообще говоря, неоднолистных областей над комплексной плоскостью была сформулирована Б. Риманом (В. Riemann, 1851). При этом вместо условий нормировки «$f(a)=b$, $\arg f'(a)=\alpha$» конформного отображения $w=f(z)$, обеспечивающих его единственность, в формулировке Б. Римана для той же цели использовались условия «$f(a)=b$, $f(\zeta)=\omega$», где $a\in G_1$, $b\in G_2$, а ζ и ω — наперед заданные точки границ областей G_1 и G_2 соответственно. Последние условия при современном определении понятия односвязной области не всегда корректны. Б. Риман доказывал свою теорему в значительной степени исходя из физич. представлений, к-рые его также убедили в важности этой теоремы для приложений. В современном понимании математич. строгость доказательству Б. Римана придал Д. Гильберт (D. Hilbert), обосновавший использованный Б. Риманом в его доказательстве т. н. *Дирихле принцип*.

См. также *Конформное отображение*.

Лит.: [1] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948, с. 49—87; [2] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966. *Е. П. Долженко.*

2) Р. т. о перестановке членов ряда: если ряд, члены к-рого являются действительными числами, сходится, но не абсолютно, то каково бы ни было число A, можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна A. Кроме того, члены ряда можно так переставить, что его сумма будет равна одной из наперед заданных бесконечностей со знаком $+\infty$ или $-\infty$, а также так, что его сумма не будет равна ни $+\infty$, ни $-\infty$, но последовательность его частичных сумм будет бесконечно большой, и, наконец, так, что последовательность его частичных сумм не будет иметь ни конечного, ни бесконечного предела (см. *Ряд*). *Л. Д. Кудрявцев.*

РИМАНА ТЕТА-ФУНКЦИЯ — суперпозиция *тета-функций* 1-го порядка $\Theta_H(u)$, $u=(u_1, \ldots, u_p)$, с полуцелыми характеристиками H и *абелевых интегралов* 1-го рода, примененная Б. Риманом (B. Riemann, 1857) для решения *Якоби проблемы обращения*.

Пусть $F(u, w)=0$ — алгебраич. уравнение, определяющее компактную риманову поверхность F рода p; $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ — базис *абелевых дифференциалов* 1-го рода на F с матрицей периодов размера $p\times 2p$:

$$W=\|\pi i E,\ A\|=\begin{Vmatrix} \pi i & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ 0 & \pi i & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \pi i & a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{Vmatrix}.$$

Пусть

$$u(w)=\left(u_1(w_1)=\int_{c_1}^{w_1}\varphi_1,\ \ldots,\ u_p(w_p)=\int_{c_p}^{w_p}\varphi_p\right)$$

— вектор базисных абелевых интегралов 1-го рода, где $(c_1, \ldots, c_p)$ — фиксированная система точек на F, а $w=(w_1, \ldots, w_p)$ — текущая система точек на F. Для любой тета-характеристики

$$H=\begin{Vmatrix} h \\ h' \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} h_1 & \ldots & h_p \\ h_1' & \ldots & h_p' \end{Vmatrix},$$

где целые числа h_i, h_i' принимают только значения 0 или 1, можно построить тета-функцию $\Theta_H(u)$ с матрицей периодов W, причем $\Theta_H(u)$ удовлетворяет основным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_H(u+\pi i e_\mu)&=(-1)^{h_\mu}\Theta_H(u), \\ \Theta_H(u+e_\mu A)&=(-1)^{h_\mu'}\exp(-a_{\mu\mu}-2u_\mu)\cdot\Theta_H(u), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где e_μ есть μ-я вектор-строка единичной матрицы E, $\mu=1, \ldots, p$.

Если $z=(z_1, \ldots, z_p)$ — нек-рый фиксированный вектор в комплексном пространстве $\mathbb{C}^p$, то тета-функция Римана $\Phi_H(w)$ представляет из себя суперпозицию

$$\Phi_H(w)=\Theta_H(u(w)-z). \quad (2)$$

В области F^*, получающейся из F после удаления разрезов вдоль циклов $a_1b_1 \ldots a_pb_p$ базиса гомологий F, Р. т.-ф. (2) всюду определены и аналитичны. При переходе через разрезы Р. т.-ф., вообще говоря, умножаются на мультипликаторы, значения к-рых определяются из основных соотношений (1). Особую роль при этом играет тета-функция 1-го порядка $\Theta(u)=\theta_0(u)$ с нулевой характеристикой $H=0$. Именно нули $\eta_1, \ldots, \eta_p$ соответствующей Р. т.-ф. $\Phi(w)=\Phi_0(w)$ определяют решение проблемы обращения Якоби.

Для фактич. построения аналитич. выражений, решающих *проблему обращения*, используются отношения Р. т.-ф. вида $\Psi_H(w)=\Theta_H(u(w))$ с общим знаменателем $\Psi(w)=\Theta(u(w))=\theta_0(u(w))$. Из (1) видно, что такие отношения $\Psi_H(w)/\Psi(w)$ могут иметь в качестве нетривиальных мультипликаторов только -1, а квадраты этих отношений являются однозначными мероморфными на F функциями, т. е. рациональными функциями точки поверхности F. Используемые при этом квадраты и другие рациональные функции от отношений тета-функций представляют собой специальные *абелевы функции* с $2p$ периодами. Специализация выражается в том, что $p(p+1)/2$ различных элементов $a_{\mu\nu}$ симметрич. матрицы A при $p>3$ связаны определенными соотношениями, налагаемыми конформной структурой поверхности F, так что независимых среди них остается $3(p-1)$.

Р. т.-ф., построенные для случая гиперэллиптич. поверхности F, когда $F(u, w)=w^2-P(u)$, где $P(u)$ — многочлен степени $n\geqslant 5$ без кратных корней, иногда выделяются под названием гиперэллиптических тета-функций.

Лит.: [1] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.—Л., 1948, гл. 9; [2] Маркушевич А. И., *Введение в классическую теорию абелевых функций*, М., 1979; [3] Krazer A., Lehrbuch der Thetafunktionen, Lpz., 1903; [4] Conforto F., Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, B., 1956.

Е. Д. Соломенцев.

РИМАНА ФУНКЦИЯ — 1) Р. ф. в теории тригонометрических рядов — функция, введенная Б. Риманом (B. Riemann, 1851) (см. [1]) для изучения вопроса о представимости функции тригонометрич. рядом. Пусть дан ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (*)$$

с ограниченными последовательностями $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Функцией Римана для этого ряда наз. функция $F(x)$, полученная почленным двукратным интегрированием данного ряда:

$$F(x)=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+Cx+D,$$
$$C,\ D=\text{const}.$$

Теоремы Римана. 1) Пусть ряд (*) сходится в точке x_0 к числу S. Тогда производная Шварца $D_2F(x_0)=S$. 2) Пусть $a_n,\ b_n\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда в любой точке x

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h}=0,$$

причем сходимость на любом промежутке равномерная, то есть $F(x)$ — равномерно гладкая функция.

Если ряд (*) сходится на $[0, 2\pi]$ к $f(x)$ и $f(x)\in L[0, 2\pi]$, то $D_2F(x)=f(x)$ на $[0, 2\pi]$ и

$$F(x)=\int_0^x dt\int_0^t f(u)\,du+Cx+D.$$

Пусть $a_n,\ b_n\to 0$ при $n\to\infty$ и пусть

$$\underline{S}(x)=\varliminf_{n\to\infty}S_n(x)\ \text{ и }\ \overline{S}(x)=\varlimsup_{n\to\infty}S_n(x)$$

конечны в точке x, а

$$S(x)=\frac{1}{2}(\underline{S}(x)+\overline{S}(x)),\ \delta(x)=\frac{1}{2}(S(x)-\underline{S}(x)).$$

Тогда нижняя и верхняя производные Шварца $\underline{D}_2F(x)$ и $\overline{D}_2F(x)$ принадлежат $[S-\mu\delta,\ S+\mu\delta]$, где μ — нек-рая абсолютная постоянная (лемма Дюбуа-Реймона).

Лит.: [1] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.
А. А. Конюшков.

2) Р. ф. в теории дифференциальных уравнений — см. *Римана метод.*

РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА ЗАДАЧА — см. *Граничные задачи теории аналитических функций.*

РИМАНА — ГУРВИЦА ФОРМУЛА, формула Гурвица, соотношение Гурвица,— формула, связывающая род замкнутой *римановой поверхности* с числом ее листов и кратностью точек ветвления. Пусть R — замкнутая риманова поверхность рода g, $\tilde{R}$ — накрывающая R риманова поверхность, имеющая m листов над R, конечное число точек ветвления с кратностями $k_1, \ldots, k_s$ и род $\tilde{g}$. Тогда имеет место Р.— Г. ф.:

$$2\tilde{g}-2=m(2g-2)+\sum_{\nu=1}^{s}(k_\nu-1).$$

В частности, если риманова поверхность $\tilde{R}$ рассматривается как накрывающая поверхность над *Римана сферой*, то $g=0$ и Р.— Г. ф. дает соотношение

$$\tilde{g}=\sum_{\nu=1}^{s}\frac{k_\nu-1}{2}-m+1.$$

Р.— Г. ф. позволяет подсчитать род алгебраич. функции (т. е. род соответствующей римановой поверхности), определяемой алгебраич. уравнением $F(z, w)=0$. В более общем понимании Р.— Г. ф. связывает род g поля алгебраич. функций с родом $\tilde{g}$ его конечного (сепарабельного) расширения степени m и индексами ветвления k_ν (см., напр., [4], [5]).

Р.— Г. ф. была высказана Б. Риманом [1] и доказана А. Гурвицем [2].

Лит.: [1] Riemann B., Gesammelte mathematische Werke, Lpz., 1876, S. 129; [2] Hurwitz A., Mathematische Werke, Bd 1, Basel, 1932, S. 321—83; [3] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [4] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [5] Ленг С., Введение в алгебраические и абелевы функции, пер. с англ., М., 1976.
Е. Д. Соломенцев.

РИМАНА — КРИСТОФФЕЛЯ ТЕНЗОР — четырехвалентный тензор, координаты (компоненты) к-рого определяются объектами Γ_{ij}^{k} связности пространства, называемыми *Кристоффеля символами* 2-го рода. Р.— К. т. наз. также *Римана тензором.* *Л. А. Сидоров.*

РИМАНА — РОХА ТЕОРЕМА — теорема, позволяющая выразить эйлерову характеристику $\chi(E)$ локально свободного пучка E на алгебраическом или аналитич. многообразии X в терминах характеристич. классов Чжэня пучка E и многообразия X. Она может быть применена для вычисления размерности пространства сечений пучка E (проблема Римана — Роха).

Классическая Р.— Р. т. относится к случаю неособых алгебраич. кривых X и утверждает, что для любого дивизора D на X

$$l(D)-l(K_X-D)=\deg D-g+1, \qquad (*)$$

где $l(D)=\dim H^0(X, O_X(D))$ — размерность пространства функций $f\in k(X)$, для к-рых $(f)+D\geqslant 0$, K_X канонич. дивизор, а g — род кривой X. В сер. 19 в. Б. Риман (B. Riemann) аналитич. методами получил неравенство

$$l(D)\geqslant \deg D-g+1.$$

Равенство (*) было доказано Э. Рохом (E. Roch).

Р.— Р. т. для кривых представляет собой одномерный случай более общей теоремы Римана — Роха — Хирцебруха — Гротендика. Пусть X — неособое проективное многообразие размерности n, а $H^{\cdot}X$ — подходящая теория когомологий: либо $H^{\cdot}X=H^{\cdot}(X, \mathbb{Q})$ — сингулярные когомологии в случае, когда основное поле $k=\mathbb{C}$, либо $H^{\cdot}X=A(X)\otimes\mathbb{Q}$, где $A(X)$ — *Чжоу кольцо*, либо $H^{\cdot}X$ — кольцо, присоединенное к кольцу

Гротендика $K^0(X)$ (см. *К-функтор* в алгебраической геометрии) относительно нек-рой специальной γ-фильтрации (см. [2], [7]). Пусть E — локально свободный пучок ранга r на X. Для пучка E следующим образом определяются универсальные многочлены с рациональными коэффициентами $\mathrm{ch}\,(-)$ и $\mathrm{td}\,(-)$ от классов Чжэня $c_i(E) \in H^{\cdot}X$ пучка E. Для многочлена Чжэня рассматривается разложение на множители

$$c_t(E) = c_0(E) + \ldots + c_r(E)\, t^r = \prod\nolimits_{i=1}^{r} (1 + a_i t),$$

где a_i — формальные символы. Экспоненциальный характер Чжэня определяется формулой

$$\mathrm{ch}\,(E) = \sum\nolimits_{i=1}^{r} e^{a_i} \left(e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \ldots \right),$$

и, соответственно, класс Тодда

$$\mathrm{td}\,(E) = \prod\nolimits_{i=1}^{r} \frac{a_i}{1 - e^{-a_i}};$$

$\mathrm{ch}\,(E)$ и $\mathrm{td}\,(E)$ — симметрич. функции от a_i, и их можно записать в виде многочленов от $c_i(E)$.

Теорема Римана — Роха — Хирцебруха: если X — неособое проективное многообразие или компактное комплексное многообразие размерности n, E — векторное расслоение ранга r на X, то

$$\chi(E) = \deg\,(\mathrm{ch}\,(E)\,\mathrm{td}\,(T_X))_n,$$

где T_X — касательный пучок на X, а $\deg(\ )_n$ обозначает компоненту степени n в $H^{\cdot}X$. Эта теорема была доказана Ф. Хирцебрухом (F. Hirzebruch) в случае основного поля $\mathbb{C}$. В случае $n=2$ и обратимого пучка $E = \mathcal{O}_X(D)$ она приводит к равенству

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \frac{1}{2} D(D - K_X) + \frac{1}{12}(K_X^2 + c_2),$$

где $c_2 = c_2(X)$ — 2-й класс Чжэня поверхности X, а K_X — ее канонич. класс. В частности, при $D=0$ получается формула Нётера

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 1 + p_a = \frac{1}{12}(K_X^2 + c_2).$$

Для трехмерных многообразий ($n=3$) теорема приводит к равенству

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \frac{1}{6} D^3 - \frac{1}{4} D^2 K_X + \frac{1}{12} D(K_X^2 + c_2) - \\ - \frac{1}{24} K_X c_2.$$

В частности, при $D=0$

$$\chi(\mathcal{O}_X) = -\frac{1}{24} K_X c_2.$$

В 1957 А. Гротендик (A. Grothendieck) обобщил теорему Римана — Роха — Хирцебруха на случай морфизмов неособых многообразий над произвольным алгебраически замкнутым полем (см. [1]). Пусть K_0X и K^0X — группы Гротендика соответственно когерентных и локальных свободных пучков на X. Функтор K_0X является ковариантным функтором из категории схем и собственных морфизмов в категорию абелевых групп, при этом для собственного морфизма $f: X \to Y$ гомоморфизм $f_!: K_0X \to K_0Y$ определяется формулой

$$f_!(\mathcal{F}) = \sum (-1)^i R^i f_*(\mathcal{F}),$$

где $\mathcal{F}$ — произвольный когерентный пучок на X; K^0X — контравариантный функтор в категорию колец. Для регулярных схем с обильным пучком группы K_0X и K^0X совпадают и обозначаются $K(X)$. Характер Чжэня $\mathrm{ch}: K(X) \to H^{\cdot}X$ является гомоморфизмом колец; $H^{\cdot}X$ также является ковариантным функтором: определен гомоморфизм **Гизина** $f_*: H^{\cdot}X \to H^{\cdot}Y$.

В случае, когда $H^{\cdot}X = H^{\cdot}(X, \mathbb{Q})$, гомоморфизм f_* получается из f_* для гомологий с помощью двойственности Пуанкаре. Обобщенная А. Гротендиком теорема выражает меру отклонения от коммутативности гомоморфизмов $f_!$ и ch.

Теорема Римана — Роха — Хирцебруха — Гротендика: пусть $f: X \to Y$ — гладкий проективный морфизм неособых проективных многообразий; тогда для любого $x \in K(X)$ в $H^{\cdot}X$ справедливо равенство

$$\mathrm{ch}(f_!(x)) = f_*(\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{td}(T_f)),$$

где $T_f = T_X - f^*(T_Y) \in K_X$ (относительный касательный пучок морфизма f).

В случае, когда Y — точка, эта теорема сводится к теореме Римана — Роха — Хирцебруха. Имеются обобщения (см. [5]—[7]) на случаи, когда Y — нётерова схема, обладающая обильным обратимым пучком, когда f — проективный морфизм, слои к-рого — локально полные пересечения, а также на особые квазипроективные многообразия.

Нек-рые варианты Р.— Р. т. тесно связаны с проблемой индекса эллиптич. операторов (см. *Индекса формулы*). Напр., теорема Римана — Роха — Хирцебруха для компактных комплексных многообразий является частным случаем теоремы Атьи — Зингера об индексе.

Лит.: [1] Борель А., Серр Ж.-П., «Математика», 1961, т. 5, № 5, с. 17—54; [2] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 5, с. 3—86; [3] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; [4] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973; [5] Baum P., Fulton W., Mac Pherson R., «Publ. Math. IHES», 1975, № 45, p. 101—45; [6] их же, «Acta math.», 1979, v. 143, № 3—4, p. 155—92; [7] Théorie des intersections et théorème de Riemann — Roch (SGA, A6), B.— [c. a.], 1971. *Вал. С. Куликов.*

РИМАНА — СТИЛТЬЕСА ИНТЕГРАЛ — см. *Стилтьеса интеграл.*

РИМАНА — ШВАРЦА ПОВЕРХНОСТЬ — *минимальная поверхность*, натянутая на полигональный контур, многоугольник. Она представляет собой одно из первых достаточно общих решений *Плато задачи.* Аналитически выражается с помощью *Кристоффеля — Шварца формулы.* Рассмотрена впервые Б. Риманом (B. Riemann, 1872) и Г. Шварцем (H. Schwarz, 1874).

М. И. Войцеховский.

РИМАНА — ШВАРЦА ПРИНЦИП, принцип симметрии Римана — Шварца,— метод продолжения конформных отображений и аналитич. функций комплексного переменного, сформулированный Б. Риманом (B. Riemann) и обоснованный Г. Шварцем (H. Schwarz) в 19 в.

Р.— Ш. п. для конформных отображений состоит в следующем. Пусть области D_1, D_2 на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ симметричны относительно действительной оси $\mathbb{R}$ и не пересекаются, а их границы содержат общий интервал $\gamma \subset \mathbb{R}$, причем $D = D_1 \cup \gamma \cup \cup D_2$ — тоже область. Пусть аналогично определены D_1^*, D_2^*, γ^* и D^*. Если функция f_1, непрерывная на $D_1 \cup \gamma$, конформно отображает D_1 на D_1^* и если $f_1(\gamma) = \gamma^*$, то функция $f(z)$, равная $f_1(z)$ при $z \in D_1 \cup \gamma$ и $\overline{f_1(\bar{z})}$ при $z \in D_2$, осуществляет конформное отображение области D на область D^*.

Более общая формулировка Р.— Ш. п. получается, когда D_1, D_2 и D_1^*, D_2^* — области на *Римана сфере* $\overline{\mathbb{C}}$, симметричные относительно окружностей C, $C^* \subset \overline{\mathbb{C}}$ соответственно, и $\gamma \subset C$, $\gamma \subset C^*$ — открытые дуги (см. *Симметрии принцип*).

Р.— Ш. п. для голоморфных функций. Пусть граница области $D \subset \mathbb{C}$ содержит открытый участок γ, к-рый является гладкой вещественно аналитической дугой. Если функция f голоморфна в D, непрерывна в $D \cup \gamma$ и ее значения на γ принадлежат нек-рой другой гладкой вещественно аналитической дуге γ^*, то f аналитически продолжается в нек-рую окрестность дуги γ.

Р.— Ш. п. используется для построения конформных отображений плоских областей, а также в теории аналитич. продолжения функций одного и многих комплексных переменных.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973.

Е. М. Чирка.

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ — теория риманова пространства. Римановым пространством наз. n-мерное связное дифференцируемое многообразие M_n, на к-ром задано дифференцируемое поле ковариантного, симметрического и положительно определенного тензора g ранга 2. Тензор g наз. метрическим тензором. Р. г. есть многомерное обобщение *внутренней геометрии* двухмерных поверхностей в эвклидовом пространстве E^3. Метрика риманова пространства с точностью до первого порядка малости, по сравнению с размерами рассматриваемой области, совпадает с евклидовой метрикой. Отличие этих метрик оценивается (локально) римановой кривизной — многомерным обобщением понятия гауссовой кривизны поверхности в E^3.

В основании Р. г. лежат три идеи. Первая идея — осознание факта существования неевклидовой геометрии — геометрии Н. И. Лобачевского. Вторая идея — понятие внутренней геометрии поверхностей, созданной К. Гауссом (C. Gauss). Третья идея — понятие n-мерного пространства, разработанное в 1-й пол. 19 в. Б. Риман (B. Riemann) соединил и обобщил эти идеи в лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Понятия Р. г. сыграли важную роль в создании А. Эйнштейном (A. Einstein) общей теории относительности, дальнейшее ее развитие связано с созданием аппарата тензорного исчисления. Р. г. и ее многочисленные обобщения успешно развиваются, особенно в той ее части, к-рая наз. *римановой геометрией в целом*, и находят обширные и глубокие механические и физич. применения.

Основные понятия Р. г. следующие.

Скалярное произведение. В каждом касательном пространстве $(TM^n)_p$, $p \in M^n$, тензор g определяет скалярное (внутреннее) произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по формуле

$$\langle X,\ Y\rangle = g(X,\ Y),\ X,\ Y \in (TM^n)_p.$$

Верно и обратное: если для любого $p \in M^n$ в $(TM^n)_p$ определено скалярное произведение, дифференцируемо зависящее от p, то оно определяет тензорное поле g с указанными выше свойствами. Степени гладкости M^n и g варьируются в зависимости от поставленной задачи. В большинстве случаев достаточно потребовать, чтобы M^n было трижды непрерывно дифференцируемо, а поле тензора g — дважды непрерывно дифференцируемо (далее необходимая степень гладкости указываться не будет). В локальных координатах $\{x^i\}$ с локальным базисом $\{\partial_i\}$, $i=1, \ldots, n$, компоненты тензора g имеют вид

$$g_{ij} = \langle \partial_i,\ \partial_j \rangle,$$

так что

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i,\ j=1}^{n} g_{ij} X^i Y^j,$$

где

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} Y^j \partial_j.$$

Риманово пространство как метрическое пространство. Длина l гладкой кривой $c(t):[0,\ 1]\to M^n$ определяется формулой

$$l=\int_0^1|\dot{c}|\,dt,$$

где $\dot{c}$ — касательный вектор к $c(t)$. Длина кусочно гладкой кривой равна сумме длин ее гладких звеньев. Если $x^i=x^i(t)$ — уравнения $c(t)$ в локальных координатах, то

$$\dot{c}=\sum\nolimits_{i=1}^n\frac{dx^i}{dt}\partial_i,\quad l=\int_0^1\sqrt{\sum\nolimits_{i,\ j=1}^n g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt.$$

Имея в виду эту формулу, метрику на M^n записывают в традиционной форме

$$ds^2=\sum\nolimits_{i,\ j=1}^n g_{ij}dx^i\,dx^j,$$

и ds наз. элементом длины, а функции $g_{ij}(x)$ — коэффициентами метрической (основной, первой квадратичной) формы. Угол между двумя кривыми в точке их пересечения определяется как угол между касательными к ним. Объём $V(U)$ области U, принадлежащей координатной окрестности, определяется формулой

$$V(U)=\int_U|g|^{1/2}\,dx^1\ldots dx^n,$$

где $g=\det\|g_{ij}\|$. Объем произвольной области равен сумме объемов ее частей, причем каждая из частей лежит в нек-рой координатной окрестности.

Расстояние $\rho(p,\ q)$ между точками $p,\ q\in M^n$ определяется как точная нижняя грань длин всех кусочно гладких кривых, соединяющих p с q. Аналогично определяется метрика ρ_U в произвольной связной области U. Два римановых пространства M_1^n и M_2^n наз. изометричными, если существует отображение $\varphi: M_1^n\to M_2^n$, при к-ром

$$\rho_{M^n}(p,\ q)=\rho_{M_2^n}(\varphi(p),\ \varphi(q)),$$

или, что то же, $l(\dot{c})=l(\varphi(c))$, где c — произвольная кривая в M_1^n. Если φ — изометрия, то для любой точки $p\in M_1^n$ существует координатная окрестность $U_1\ni p$ и координатная окрестность $U_2\ni\varphi(p)$ такие, что $\overset{1}{g}_{ij}(x)=\overset{2}{g}_{ij}(\varphi(x))$, $x\in U_1$, $i,j=1,\ \ldots,\ n$. Изометрич. отображение M^n на себя наз. движением.

Кривая с концами в точках p и q наз. кратчайшей, если ее длина равна $\rho(p,\ q)$. Стационарная кривая функционала длины l наз. геодезической линией. Каждая кратчайшая в M^n есть геодезическая, и каждая достаточно малая дуга геодезической есть кратчайшая. Область $U\subset M^n$ наз. геодезически выпуклой, если кратчайшие, определенные по метрике ρ_U, есть геодезические M^n. Если $x^i=x^i(t)$, $i=1,\ \ldots,\ n$, — уравнения геодезической в локальной системе координат $\{x^i\}$, то функции $x^i(t)$ удовлетворяют системе уравнений, к-рая в случае, когда t — параметр, пропорциональный длине дуги, имеет вид

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\sum\nolimits_{j,\ k=1}^n\Gamma_{jk}^i\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0,\ i=1,\ \ldots,\ n,$$

где

$$\Gamma_{jk}^i=\sum\nolimits_{a=1}^n g^{ai}\Gamma_{jk,\ a},$$

$$\Gamma_{jk,\ a}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ja}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ka}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^a}\right)$$

— символы Кристоффеля, g^{ab} — элементы матрицы, обратной к $\|g_{ij}\|$, $i,\ j,\ k,\ a,\ b=1,\ \ldots,\ n$.

Риманово пространство наз. полным (геодезически полным), если оно полно как метрич. пространство (если любую дугу геодезической можно неограниченно продолжить в обе стороны). Риманово пространство полно тогда и только тогда, когда оно геодезически полно. В полном римановом пространстве любые две точки можно соединить кратчайшей (не обязательно единственной). На любом дифференцируемом многообразии можно ввести структуру полного риманова пространства.

Риманово пространство как многообразие со связностью. *Ковариантная производная* ∇ наз. симметрической и совместной с метрикой g пространства M^n, если выполняются условия симметричности

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

и совместности

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle,$$

где X, Y, Z — дифференцируемые векторные поля, а $[X, Y]$ — их коммутатор. Этими условиями производная ∇ определяется однозначно через поле метрич. тензора g. В локальных координатах $\{x^i\}$ компоненты связности ∇ имеют вид $\Gamma_{kj,\,i} = \langle \nabla_k \partial_j, \partial_i\rangle$ и совпадают с символом Кристоффеля 1-го рода, а

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} X^k + \sum_{j,\,k=1}^n \Gamma^i_{jk} X^j Y^k\right)\partial_i.$$

Аналогичной формулой определяется ковариантная производная любого тензора.

Векторное поле $Y(t)$ вдоль кривой $c(t)$ наз. параллельным, если $\nabla_{\dot c} Y = 0$. Аналитически параллельное поле $Y(t)$ определяется решением системы

$$\frac{dY^i}{dt} + \sum_{j,\,k=1}^n \Gamma^i_{jk} Y^j \frac{dx^k}{dt}, \quad i = 1, \ \ldots, \ n,$$

где $x^i = x^i(t)$ — уравнения кривой $c(t)$. Решения этой системы при различных начальных условиях дают отображение $(TM^n)_{c(0)}$ в $(TM^n)_{c(1)}$; оно оказывается изометричным и наз. параллельным перенесением Леви-Чивита. Результат перенесения зависит, вообще говоря, не только от конечных точек $c(0)$ и $c(1)$, но и от самого пути $c(t)$. Кривая, для к-рой $\nabla_{\dot c}\dot c = 0$, является геодезической, и это свойство геодезической можно взять за ее определение.

Подмногообразия риманова пространства. Если M^k, $k \leqslant n$,— дифференцируемое подмногообразие риманова пространства M^n, то в каждом касательном пространстве к $M^k((TM^k)_p \subset (TM^n)_p)$ индуцируется скалярное произведение и тем самым на M^k возникает структура риманова пространства с метрич. тензором a, компоненты к-рого вычисляются по формулам

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{i,\ j=1}^n g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}, \quad \alpha, \ \beta = 1, \ \ldots, \ k,$$

где $x^i = x^i(u^1, \ \ldots, \ u^k)$ — уравнения M^k в локальных координатах. Внешняя геометрия M^k, $k \geqslant 2$, описывается вторыми квадратичными формами $B(\nu_p)$, к-рые определяются для каждой единичной нормали ν_p к M^k формулой

$$B(\nu_p)(X, Y) = -(\nabla_X \nu, Y),$$

где X и Y — векторные поля на M^k, а ν — произвольное поле единичных нормалей, содержащее ν_p. Для любой формы $B(\nu_p)$ определяются нормальные кривизны, главные направления и кривизны, средняя и полная кривизны и т. д. и выводятся уравнения Гаусса — Кодацци — Риччи, связывающие коэффициенты первой и вторых квадратичных форм. Свойствами вторых форм характеризуются важные классы подмногообразий, напр. минимальные, вполне геодезические, выпуклые и т. п. Для $M^1 = c(t)$ (гладкая кривая) строится теория, аналогичная теории кривых в E^n, определяются первая, вторая и т. д. кривизны и выводятся уравнения, аналогичные формулам Френе. Первая кривизна кривой k_1 обычно наз. геодезической кривизной и вычисляется по формуле

$$k_1 = |\nabla_c \dot{c}|,$$

если t — длина дуги; в локальных координатах

$$k_1 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} \mu^i \mu^j},$$

где

$$\mu^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt},$$

а $x^i = x^i(t)$ — уравнения $c(t)$.

Большой круг задач Р. г. связан с *изометрическими погружениями* одного риманова пространства в другое и изучением свойств этих погружений. Эти задачи трудны и исследованы мало (более подробно — в двумерном случае).

Экспоненциальное отображение $\exp_q : (TM^n)_q \to M^n$ определяется условием: $\exp_q X = r$, где r — конец дуги геодезической с началом в q, с направлением $X \in (TM^n)_q$ и длины $|X|$. Если в окрестности точки p ввести систему координат, сопоставляя точке p декартовы координаты точки $\exp_q^{-1} p \in (TM^n)_q$, то окажется

$$\Gamma^i_{jn}\big|_{x=q} = \Gamma_{jk,\, i}\big|_{x=q} = 0, \text{ то есть}$$

$$\left.\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right|_{x=q} = 0, \quad i,\ j,\ k = 1,\ \ldots,\ n;$$

это — т. н. (римановы) нормальные координаты.

Кривизна. Если в окрестности точки q ввести нормальные координаты, то компоненты метрич. тензора записываются в виде

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{k,\ l=1}^n R_{ik,\, jl} x^k x^l + \sum_{k,\ l=1}^n \varepsilon_{ik,\, jl} x^k x^l,$$

где $\varepsilon_{ik,\, jl} \to 0$ при $x^i \to 0$, $i, j, k, l = 1, \ldots, n$. Отсюда выводится важное свойство римановой метрики: для любой точки $g \in M^n$ экспоненциальное отображение $\varphi = \exp_q : (TM^n)_q \to M^n$ обладает свойством

$$\rho_{(TM^n)_q}(X,\ Y) = |X - Y| = \rho_{M^n}(\varphi(X),\ \varphi(Y)) \times$$
$$\times (1 + \varepsilon(X,\ Y)),$$

где $\varepsilon(X,\ Y) \to 0$ при $|X|$, $|Y| \to 0$. Добиться более высокого по порядку малости совпадения метрик M^n и $(TM^n)_q$ за счет удачного выбора отображения φ в общем случае невозможно. Поэтому коэффициенты $R_{ik,\, jl}$ характеризуют отличие метрики M^n от евклидовой метрики $(TM^n)_q$. Эти коэффициенты являются компонентами т. н. тензора кривизны, или тензора Римана — Кристоффеля (в точке q). В локальных координатах $\{x^i\}$ они выражаются через коэффициенты метрич. тензора и их первые и вторые производные по формуле

$$R_{ik,\, jl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\, \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^i\, \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k\, \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\, \partial x^j}\right) +$$

$$+ \sum_{a,\ b=1}^n g^{ab} (\Gamma_{kj,\, a} \Gamma_{il,\, b} - \Gamma_{kl,\, a}, \ \Gamma_{ij,\, b}),$$

$$i,\ j,\ k,\ l,\ a,\ b = 1,\ \ldots,\ n.$$

С тензором кривизны связан целый ряд других понятий, также (с разных сторон) характеризующих меру отличия метрики M^n от евклидовой. Так, через тензор кривизны определяются тензоры Риччи

$$R_{ij} = \sum_{k,\ l=1}^{n} g^{kl} R_{ik,\,jl}$$

и Эйнштейна

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij},$$

где

$$R = \sum_{i,\ j=1}^{n} g^{ij} R_{ij}$$

— т. н. скалярная кривизна M^n.

Трилинейное отображение, сопоставляющее трем векторным полям X, Y, Z поле

$$R(X,\ Y)Z = \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{[XY]} Z,$$

наз. преобразованием кривизны. Его свойства:

1) $R(X,\ Y)Z + R(Y,\ X)Z = 0$;

2) $R(X,\ Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,\ X)Y = 0$ (тождество Риччи);

3) $\langle R(X,\ Y)Z,\ W\rangle = \langle R(X,\ Y)W,\ Z\rangle$;

4) $\langle R(X,\ Y)Z,\ W\rangle = \langle R(Z,\ W)X,\ Y\rangle$.

Кроме того, имеет место тождество Бианки

$$\nabla_X(R(Y,Z)W) + \nabla_Y(R(Z,\ X)W) + \nabla_Z(R(X,\ Y)W) = 0.$$

Преобразование кривизны можно связать нек-рой конструкцией с параллельным перенесением. Алгебраич. свойства тензора кривизны выводятся из свойств преобразования кривизны, т. к. через него, а именно через «биквадратичную форму» $k(X,\ Y) = \langle R(X,\ Y)Y,\ X\rangle$, тензор кривизны (точнее, его значения на векторах X, Y, Z, W) однозначно (алгебраически) выражается (см. *Кривизна*).

Секционная кривизна. Пусть F^2 — двумерная поверхность в M^n, проходящая через p, $\sigma = (TF^2)_p$, Γ — простая замкнутая кривая на Γ^2, проходящая через p, S — площадь области на F^2, ограниченной кривой Γ, $z \in (TF^2)_p$, $\bar{z}$ — вектор, полученный из z параллельным перенесением вдоль Γ, φ — угол между вектором z и касательной составляющей вектора $\bar{z}$. Тогда при стягивании Γ к точке p существует предел $K(p,\ \sigma) = \lim \frac{\varphi}{S}$, к-рый наз. римановой секционной кривизной пространства M^n в данной точке p и в данном двумерном направлении σ ($K(p,\ \sigma)$ не зависит от поверхности F^2, а зависит только от σ). Секционная кривизна показывает меру «искривления» M^n в данной точке и в данном двумерном направлении. Вообще говоря, в разных двумерных направлениях это искривление различно; но если в каждой точке кривизна $K(p,\ \sigma)$ не зависит от выбора σ, то она не меняется и от точки к точке (теорема Шура). Тождественное обращение секционной кривизны в нуль — необходимое и достаточное условие того, чтобы M^n было локально изометрично E^n (в целом оно может отличаться от E^n). Секционную кривизну M^n можно связать и с другими объектами Р. г., напр. с дефектом (избытком) геодезич. треугольника (см. *Гаусса — Бонне теорема*). Сам Б. Риман определял секционную кривизну как гауссову кривизну двумерной поверхности $\exp_p\sigma$, вычисленную по формуле Гаусса в точке p. В свою очередь, по секционной кривизне метрика M^n определяется однозначно в следующем смысле: если у двух многообразий M_1^n и M_2^n секционные кривизны постоянны и равны одному и тому же числу a, то M_1^n и M_2^n локально изометричны, если они к тому же оба односвязны, то — просто изометричны. Односвязное риманово пространство постоянной секционной кривизны a изометрично:

n-мерному пространству Лобачевского L_n при $a<0$; n-мерному евклидову пространству E_n при $a=0$; n-мерной сфере S^n в E^{n+1} радиуса $1/\sqrt{a}$ при $a>0$. В общем случае известен следующий результат. Если M_1^n — аналитическое риманово пространство непостоянной секционной кривизны и существует диффеоморфизм $\varphi: M_1^n \to M_2^n$, при к-ром $K(p, \sigma)=K(\varphi(p), d\varphi(\sigma))$, то при $n \geqslant 4$ отображение φ — изометрия; в случае $n=3$ это утверждение доказано при нек-рых дополнительных предположениях, а в случае $n=2$ теорема не верна. Однако неизвестно (1983), кроме двумерного случая, какова должна быть функция $K(p, \sigma)$, чтобы для нее существовала метрика g, для к-рой $K(p, \sigma)$ была бы секционной кривизной. В этом направлении известны только нек-рые отрицательные результаты.

Секционная кривизна связана с преобразованием кривизны формулой

$$K(p, \sigma)=\frac{\langle R(X_p, Y_p) X_p, Y_p\rangle}{|X_p|^2 |Y_p|^2-\langle X_p, Y_p\rangle^2},$$

а через компоненты тензора кривизны выражается так:

$$K(p, \sigma)= \\ =\frac{\sum_{i, j, k, l=1}^n R_{ik, jl}(X^i Y^k-X^k Y^i)(X^j Y^l-X^l Y^j)}{\sum_{i, j, k, l=1}^n \begin{vmatrix} g_{ij} & g_{il} \\ g_{kj} & g_{kl}\end{vmatrix}(X^i Y^j-X^j Y^i)(X^k Y^l-X^l Y^k)},$$

где σ определено векторами

$$X=\sum_{i=1}^n X^i \partial_i, \quad Y=\sum_{j=1}^n Y^j \partial_j.$$

Значение тензора Риччи R_{ij} на векторе X связано с секционной кривизной следующим образом: пусть векторы $X, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ образуют ортонормированный базис в $(TM^n)_p$, тогда

$$\sum_{i, j=1}^n R_{ij} X^i X^j=\sum_{k=1}^n K(p, \sigma_k),$$

где σ_k — двумерное направление векторов X и Y_k.

Классы римановых пространств. Помимо общих (произвольных) римановых пространств существуют римановы пространства, на к-рых могут быть введены дополнительные структуры. Эти структуры возникают тогда, когда непосредственно на метрику или на кривизну накладываются те или иные условия геометрического или алгебраич. характера. Таким способом определяются важные классы римановых пространств: многообразия постоянной секционной кривизны (см. *Пространственные формы*), *однородное пространство*, *симметрическое пространство*, эрмитовы и кэлеровы *многообразия*, пространства Эйнштейна и т. д.

Обобщения. Развитие идей Р. г. и геометрии в целом привело к ряду обобщений понятия Р. г.

Псевдориманова геометрия — теория псевдориманова пространства. Псевдоримановым пространством наз. дифференцируемое многообразие, на к-ром задано поле знакопеременного симметричного невырожденного тензора.

Финслерова геометрия — теория дифференцируемого многообразия, на касательном расслоении к-рого задана функция $F(x, \lambda)$, однородная первой степени по λ. Длина l кривой $c(t)$ вычисляется:

$$l=\int_0^1 F(c, \dot{c})\, dt.$$

Пространства ограниченной кривизны — теория двумерных метрич. многообразий с *внутренней метрикой* (без всяких предположений гладкости), в к-рых определена интегральная кривизна любого ограниченного борелевского множества. Сюда, в частности, относится внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Этот класс метрич. пространства можно получить, присоединяя к двумерным римановым пространствам двумерные метризованные многообразия, метрика к-рых в окрестности каждой точки допускает равномерное приближение римановыми метриками с ограниченными в совокупности интегралами от абсолютной гауссовой кривизны.

Пространства кривизны не больше K — теория полных метрич. многообразий с внутренней метрикой, в к-рых сумма верхних углов треугольников, составленных из кратчайших, не превосходит суммы углов треугольника на плоскости постоянной кривизны K с такими же длинами сторон (кроме того, предполагается, что любые две точки можно соединить единственной кратчайшей).

См. также *Геодезических геометрия*, *Конформная геометрия*, *Риманово пространство обобщенное.*

Лит.: [1] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.—Л., 1948; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [4] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [5] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948; [6] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 3, с. 3—55; [7] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965; [8] Картан Э., Геометрия римановых пространств, пер. с франц., М.—Л., 1936; [9] Kulkarni R. S., «Ann. Math.», 1970, v. 91, № 2, p. 311—31; [10] Wolf J. A., Spaces of constant curvature, N. Y., 1967. *В. А. Топоногов.*

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ В ЦЕЛОМ — раздел римановой геометрии, изучающий связи между локальными и глобальными характеристиками римановых многообразий (р. м.). Термин Р. г. в ц. обычно относят к определенному кругу проблем и методов, характерных для *геометрии в целом.* Основное место в Р. г. в ц. занимает изучение связи между кривизной и топологией р. м. При этом исследуются вопрос о топологическом и метрич. строении р. м. с данными условиями на кривизну и вопрос о существовании на заданном гладком многообразии римановой метрики с предписанными свойствами кривизны (*секционной кривизны* K_σ, *Риччи кривизны* Ric, *скалярной кривизны* $K_{ск}$). Бо́льшая часть полученных результатов относится к пространствам с кривизнами постоянного знака. Р. г. в ц. тесно соприкасается с теорией *однородных пространств* и вариационной теорией *геодезических линий.* О подмногообразиях Р. м. см. в статьях *Изометрическое погружение* и *Погруженных многообразий геометрия.*

Методы Р. г. в ц. носят синтетич. характер. Наряду с локальной дифференциальной геометрией широко используются теория дифференциальных уравнений и *Морса теория.* Но основные достижения связаны с нахождением удачных конструкций, напр. построением замкнутых геодезических, минимальных пленок или пленок из геодезических, орисфер, выпуклых множеств. Исследованию топологии р. м. обычно предшествует изучение их метрич. свойств. Последнее часто осуществляется путем сравнения р. м. с подходящим эталонным пространством (см. ниже теоремы сравнения).

Топологическое строение. Для замкнутых поверхностей связь между кривизной и топологией по существу исчерпывается формулой Гаусса — Бонне. Среди замкнутых поверхностей метрику положительной кривизны могут нести только сфера S^2 и проективная плоскость P^2, а нулевой кривизны — тор и бутылка Клейна. Строение р. м. размерности $n>2$ известно хуже (1983). Вот примеры известных теорем.

Полное односвязное р. м. M^n с $K_\sigma \leqslant 0$ диффеоморфно $\mathbb{R}^n$ (теорема Адамара — Картана), причем для любой точки $x \in M^n$ экспоненциальное отображение $\exp_x$ есть диффеоморфизм касательного пространства T_xM^n на M^n.

Для замкнутых р. м. с $K_\sigma > 0$ имеет место следующая теорема о сфере: полное р. м. M^n с $0<\delta\leqslant$

$\leqslant K_\sigma \leqslant 1$ наз. δ-защемленным; если оно односвязно и $\delta > 1/4$, то M^n гомеоморфно S^n. Для четных n граница здесь точная: при $\delta = 1/4$ существуют M^n, негомеоморфные S^n, это — *симметрические пространства* ранга 1 и только они. Для нечетных n теорема о гомеоморфности M^n и S^n верна и при $\delta = 1/4$. При $n < 7$, $n \neq 4$, гомеоморфность сфере S^n влечет диффеоморфность. При $n \geqslant 7$ диффеоморфность сфере установлена при более жестком, чем в теореме о сфере, защемлении (достаточно взять $\delta > 0{,}87$, а при $n \to \infty$ взять $\delta > 0{,}66$). Известно также, что при еще более жестком защемлении (достаточно $\delta > 0{,}98$ и $\delta > 0{,}66$ при $n \to \infty$) неодносвязное M^n диффеоморфно пространству постоянной кривизны (факторпространству S^n по дискретной подгруппе изометрий). Есть ряд результатов об условиях на K_σ, обеспечивающих гомеоморфизм симметрич. пространству ранга 1 (см. [14], [15]).

Открытое, т. е. полное некомпактное, р. м. с $K_\sigma > 0$ всегда диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Множество $X \subset M^n$ наз. абсолютно выпуклым, если каждая геодезическая с концами в X вся лежит в X. Пусть M^n — открытое р. м. с $K_\sigma \geqslant 0$, тогда в M^n существует вполне геодезическое абсолютно выпуклое замкнутое подмногообразие N такое, что M^n диффеоморфно пространству $\nu(N)$ *нормального расслоения* N в M^n (если $K_\sigma > 0$, то $\dim N = 0$). В случаях $\dim N = 1$ или $n-1$, а для однородных пространств — всегда, M^n даже изометрично $\nu(N)$ со стандартной метрикой нормального расслоения. При $n \leqslant 3$ это дает полную классификацию открытых р. м. с $K_\sigma \geqslant 0$.

Прямой наз. полная геодезическая, кратчайшая на любом своем участке. Теорема о цилиндре: открытое M^n с $K_\sigma \geqslant 0$ изометрично прямому метрич. произведению $M^{n-k} \times \mathbb{R}^k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, где M^{n-k} не содержит прямых. Условие $K_\sigma \geqslant 0$ здесь можно заменить на $\mathrm{Ric} \geqslant 0$.

Фундаментальная группа. При $K_\sigma > 0$ и четном n замкнутое M^n либо ориентируемо и односвязно, либо неориентируемо и фундаментальная группа $\pi_1(M^n) = \mathbb{Z}_2$; при нечетном n оно всегда ориентируемо, но о $\pi_1(M^n)$ за пределами теоремы о сфере мало что известно. Даже для M^n постоянной кривизны $K_\sigma = 1$ полное описание возможных строений $\pi_1(M^n)$ для нечетных n оказалось трудной задачей (см. [9]).

Если $K_\sigma = 0$, то универсальное накрывающее $\tilde{M}^n$ пространства M^n изометрично $\mathbb{R}^n$ и фундаментальная группа $\pi_1(M^n)$ изоморфна дискретной группе изометрий $\mathbb{R}^n$ без неподвижных точек; она содержит подгруппу сдвигов конечного индекса. (Тем самым M^h допускает конечное изометрич. накрытие плоским тором.)

Если в $\tilde{M}^n$ все $K_\sigma \leqslant 0$, то $\tilde{M}^n$ диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Поэтому все гомотопич. группы $\pi_i(M^n)$ для $i > 1$ тривиальны, и гомотопич. тип определяется $\pi_1(M^n)$. Если $K_\sigma < 0$, то $\pi_1(M^n)$ полностью некоммутативна в том смысле, что любая абелева (и даже любая разрешимая) ее подгруппа является бесконечной циклической. В случае $K_\sigma \leqslant 0$ известно следующее. Пусть Γ — разрешимая подгруппа $\pi_1(M^n)$. Тогда Γ изоморфна дискретной группе изометрий $\mathbb{R}^n$ (без неподвижных точек) и M^n содержит компактное вполне геодезич. подмногообразие, изометричное $\mathbb{R}^n/\Gamma$. Вместо $K_\sigma \leqslant 0$ достаточно при этом потребовать отсутствия на геодезических сопряженных точек.

Для двух многообразий одинаковой постоянной отрицательной кривизны и одинаковой размерности $n \geqslant 3$ изоморфизм π_1 влечет изометрию (теорема Мостова).

Римановы многообразия, для к-рых $\max |K_\sigma| \times \times \operatorname{diam} M^n < \varepsilon$, наз. ε-плоскими. Такие многообразия могут при произвольном $\varepsilon > 0$ топологически отличаться от локально плоских. Для них при любом $n \geqslant 2$ существует такое ε_n, что для ε_n-плоского M^n в $\pi_1(M^n)$

есть нильпотентная подгруппа конечного индекса. При этом M^n допускает конечное (с кратностью, зависящей лишь от n) накрытие, диффеоморфное факторпространству нильпотентной группы Ли по ее дискретной подгруппе (см. [8]).

Полное р. м. с кривизной $\mathrm{Ric} \geqslant a > 0$ имеет конечный $\mathrm{diam}\, M^n \leqslant \pi/\sqrt{a}$ и потому конечную группу $\pi_1(M^n)$. Если для замкнутого M^n $\mathrm{Ric} \geqslant 0$, то существует такая конечная нормальная подгруппа $\Gamma \subset \pi_1(M^n)$, что π_1/Γ — дискретная группа изометрий $\mathbb{R}^k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, причем $\tilde{M}^n$ разлагается в прямое метрич. произведение $M^* \times \mathbb{R}^k$, где M^* замкнуто, разложение инвариантно относительно $\pi_1(M^n)$, а Γ — тривиальна на $\mathbb{R}^k$.

Наряду с изучением $\pi_1(M^n)$ получены с помощью теории гармонических дифференциальных форм нек-рые оценки для чисел Бетти b_k для δ-защемленных M^n. Так, $b_2 = 0$ при $\delta > (n-3)(4n-9)^{-1}$ и нечетном $n \geqslant 5$.

Теоремы сравнения. Многие глобальные свойства р. м. доказываются путем сравнения конструкций в изучаемом р. м. с аналогичными конструкциями в эталонном пространстве. В качестве последнего берут многообразие постоянной кривизны, реже — другое симметрич. пространство. Ниже c-плоскостью называем $\mathbb{R}^2$ при $c=0$, сферу S_c^2 радиуса $c^{-1/2}$ при $c > 0$, плоскость Лобачевского кривизны c при $c < 0$.

Многочисленные применения имеет следующая теорема Топоногова сравнения углов. Пусть в р. м. M^n все $K_\sigma \geqslant c$ и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — углы треугольника из кратчайших, а $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$ — соответствующие углы треугольника с теми же длинами сторон на c-плоскости; тогда $\alpha_i \geqslant \alpha_i'$. Если $K_\sigma \leqslant c$ и любые две точки сторон рассматриваемого в M^n треугольника соединимы единственной кратчайшей, то $\alpha_i \leqslant \alpha_i'$. Эта теорема эквивалентна следующему условию выпуклости: если в M^n кратчайшие ab, ac образуют тот же угол, что кратчайшие $a'b'$, $a'c'$ тех же длин на c-плоскости, то $\rho_{M^n}(b, c) \leqslant \rho_c(b', c')$. Здесь по существу сравнивается быстрота расходимости кратчайших.

В теореме сравнения Рауха сравниваются скорости движения концов b и b' кратчайших ab, $a'b'$ в двух р. м. M^n и M'^n при условии, что ab и $a'b'$ поворачиваются вокруг своих начал a, a' с одинаковой скоростью в условиях, когда (при нек-ром естественном сопоставлении) секционные кривизны в M^n не меньше, чем в M'^n. Тогда скорость движения b не больше, чем скорость b'. В основном случае (при сравнении с c-плоскостью) теорема Рауха равносильна инфинитезимальному варианту теоремы сравнения углов.

Имеются аналоги теоремы Рауха, в к-рых точки a, a' смещаются по гиперповерхностям, к к-рым ab, $a'b'$ остаются ортогональными. Есть также теоремы сравнения для объемов трубчатых окрестностей подмногообразий (см. [13], [16]).

Экстремальные теоремы. Теоремы сравнения приводят к оценкам таких характеристик M^n, как диаметр, радиус инъективности, длина замкнутой геодезической, объем шара данного радиуса и т. п. Ответы на вопросы о случаях достижения равенства в таких оценках дают экстремальные теоремы.

Для M^n с $K_\sigma \geqslant 1$ всегда $\mathrm{diam}\, M^n \leqslant \pi$. Равенство достигается только для единичной сферы. Если M^n замкнуто и $0 < K_\sigma \leqslant 1$ при четном n или $1/4 < K_\sigma \leqslant 1$ при нечетном n, то радиус инъективности $r_{in}(M^n) \geqslant \pi$ и длина замкнутой геодезической $\geqslant 2\pi$. Если при этом в M^n есть замкнутая геодезическая γ длины 2π, то при четном n в M^n существует вполне геодезич. поверхность, содержащая γ и изометричная S_1^n, а при $1/4 < K_\sigma \leqslant 1$, независимо от четности n, M^n изометрично S_1^n (см. [6]). Объем шара

D радиуса $r<r_{in}(M^n)$ в M^n с $K_\sigma \leqslant c$ ($K_\sigma \geqslant c$) не меньше (не больше), чем объем шара D_c того же радиуса в пространстве постоянной кривизны c, с равенством, лишь если D изометрично D_c.

Экстремальные теоремы не всегда связаны с оценками кривизны. Пусть, напр., на замкнутой поверхности F для любой точки множество точек, ей сопряженных, состоит из единственной точки. Тогда F изометрично сфере.

Конечность топологических типов. Среди замкнутых р. м. с равномерно ограниченными кривизнами и ограниченными снизу радиусами инъективности $\mathrm{Vol}\ M^n<C_1$, $r_{in}>C_2>0$, $K_\sigma<C_3$, есть лишь конечное число попарно гомотопически неэквивалентных, а при замене $K_\sigma<C_3$ на $|K_\sigma|<C_3$ — лишь конечное число попарно негомеоморфных. В этом утверждении условие $r_{in}>C_2>0$ можно заменить обеспечивающими его, но легче проверяемыми условиями $\mathrm{Vol}\ M^n \geqslant C_4>0$, $\mathrm{diam}\ M^n<C_5$ (см. [14]).

Для р. м. со знакопостоянными K_σ условия, обеспечивающие конечность их топологич. типов, упрощаются. Напр., для четных n и $K_\sigma>0$ достаточно условия $\max K_\sigma<C \min K_\sigma$.

При $n>3$ для M^n с $-1 \leqslant K_\sigma<0$ справедлива оценка $\mathrm{Vol}\ M^n>C(1+\mathrm{diam}\ M^n)$. Поэтому при $n \neq 3$ конечно число топологич. типов замкнутых р. м., удовлетворяющих условиям $\mathrm{Vol}\ M^n<C_1$, $C_2<K_\sigma<0$. Но при $n=3$ существует бесконечная серия попарно негомеоморфных M^3, удовлетворяющих условиям (см. [12]).

Метрики с заданной кривизной. Пусть χ — эйлерова характеристика замкнутой поверхности M^2. Чтобы гладкая функция f на M^n была кривизной нек-рой римановой метрики на M^2, необходимо: $\max f>0$ при $\chi>0$, $\min f<0$ при $\chi<0$ и f меняет знак или $f\equiv 0$ при $\chi=0$. Эти условия и достаточны. Условие $\int_{M^2}\omega=2\pi\chi$ необходимо и достаточно, чтобы 2-форма ω была формой кривизны $\omega=\int K\,dS$ римановой метрики на M^2. Если M^2 — открытое подмногообразие замкнутого многообразия N^2, то любая гладкая f на M^2 есть кривизна нек-рой (быть может, неполной) римановой метрики на M^2. Необходимые и достаточные условия, при к-рых f есть кривизна полной римановой метрики на некомпактной поверхности, выяснены (1983) лишь для конечносвязных поверхностей.

С ростом размерности число независимых компонент тензора кривизны растет быстрее числа компонент метрич. тензора. Условия, при к-рых данное поле тензора служит, хотя бы локально, полем тензора кривизны нек-рой метрики, неизвестны (1983). Но для скалярной кривизны при $n>2$ каждая гладкая функция f на замкнутом M^n, для к-рой $\min f<0$, является скалярной кривизной нек-рой римановой метрики на M^n (см. [4]). Существуют многообразия, не допускающие метрики с положительной скалярной кривизной, напр. трехмерный тор (см. [5]).

Выпуклые функции. Существование на р. м. M^n скалярной функции f, выпуклой вдоль любой геодезической, налагает жесткие ограничения на строение такого M^n. Напр., если на M^n есть выпуклая функция f, то $\mathrm{Vol}\ M^n=\infty$. Если f строго выпукла и при любом c компактны множества $f^{-1}(c)$, то M^n диффеоморфно $\mathbb{R}^n$.

В ряде случаев выпуклые функции удается построить. Напр., при $K_\sigma \leqslant 0$ выпуклы функции $f_1(x)=\rho(x, p)$, $f_2(x)=\rho(x, p)^2$, $p \in M^n$. Если $K_\sigma \leqslant 0$ и γ: $M^n \to M^n$ — изометрия, то выпукла функция $\delta_\gamma(x)=\rho(x, \gamma x)$. При $K_\sigma \geqslant 0$ существуют выпуклые f с компактными $f^{-1}(c)$; это связано с абсолютной выпуклостью (при $K_\sigma \geqslant 0$) дополнений к орішарам и с тем обстоятельством, что при $K_\sigma \geqslant 0$ выпуклость множества $U \subset M^n$ влечет выпуклость множества $\{x \in U : \rho(x, \partial U) \geqslant t\}$.

Изучались и проблемы Р. г. в ц. для р. м. с дополнительными структурами, напр. для кэлеровых многообразий (см. [10]).

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 3, с. 3—55; [3] Cheeger J., Ebin D., Comparison theorems in riemannian geometry, Amst.— Oxf.—N. Y., 1975; [4] Исследования по метрической теории поверхностей, пер. с англ. и франц., М., 1980; [5] Schoen R., Yau S., «Ann. Math.», 1979, v. 110, p. 127—42; [6] Топоногов В. А., «Сиб. матем. ж.», 1974, т. 15, № 6, с. 1348—71; [7] Gromov M., Lawson B., «Ann. Math.», 1980, v. 111, № 2, p. 209—30; [8] Buser P., Karcher H., Gromov's almost flat manifolds, «Asterisque», 1981, v. 81; [9] Вольф Дж., Пространства постоянной кривизны, пер. с англ., М., 1982; [10] Goldberg S., Curvature and homology, N. Y., 1963; [11] Бecce A., Многообразия с замкнутыми геодезическими, пер. с англ., М., 1981; [12] Thurston W., The geometry and topology of 3 manifolds, Preprint, Princeton, 1978; [13] Heintze E., Karcher H., «Ann. scient. École norm. super.», 1978, v. 11, № 4, p. 451—70; [14] Cheeger J., «Amer. J. Math.», 1969, v. 91, № 3, p. 807—34; [15] Min-Oo, Ruh E., «Ann. scient. École, norm. super.», 1979, v. 12, p. 335—53; [16] Gray A., «Topology», 1982, v. 21, № 2, p. 201—28.

Ю. Д. Бураго, В. А. Топоногов.

РИМАНОВА КРИВИЗНА — мера отличия метрик риманова и евклидова пространств. Пусть M — точка риманова пространства, F — двумерная регулярная поверхность $x^i = x^i(u, v)$, проходящая через M, L — простой замкнутый контур на F, проходящий через M, σ — площадь участка поверхности, ограниченного контуром L. Пусть произвольный вектор a^i, касательный к поверхности F (т. е. линейно выражающийся через векторы $\frac{\partial x^i}{\partial u}$, $\frac{\partial x^i}{\partial v}$), перенесен параллельно по L. Тогда составляющая перенесенного вектора, касательная к F, окажется повернутой по отношению к a^i на угол φ (положительное направление отсчета углов должно совпадать с направлением обхода L). Если при стягивании L в точку M существует предел

$$K = \lim \frac{\varphi}{\sigma},$$

то он наз. **римановой кривизной** (*кривизной* риманова пространства) в данной точке в направлении двумерной поверхности; Р. к. зависит не от поверхности, а лишь от ее направления в точке M, т. е. от направления двумерной плоскости касательного евклидова пространства, содержащего векторы $\frac{\partial x^i}{\partial u}$, $\frac{\partial x^i}{\partial v}$.

Р. к. K связана с тензором кривизны формулой

$$K = \sum_{m,\, l,\, k,\, j} R_{mlkj}\, x^{ml}\, x^{kj},$$

где

$$x^{ml} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^m}{\partial u}\frac{\partial x^l}{\partial v} - \frac{\partial x^l}{\partial u}\frac{\partial x^m}{\partial v}\right),$$

причем параметры u, v выбраны так, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\frac{\partial x^i}{\partial u}$, $\frac{\partial x^i}{\partial v}$, равна 1.

По материалам ст. Риманова геометрия в БСЭ-3.

РИМАНОВА МЕТРИКА — метрика пространства, задаваемая положительно определенной квадратичной формой. Если в пространстве V_n введена локальная система координат $(x^1, \ldots, x^n)$ и в каждой точке $X(x^1, \ldots, \ldots, x^n) \in V_n$ определены функции $g_{ij}(X)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $\det(g_{ij}) > 0$, $g_{ij}(X) = g_{ji}(X)$, являющиеся компонентами ковариантного симметричного тензора второй валентности, то этот тензор наз. **основным метрическим тензором** пространства V_n. С помощью основного тензора выражается длина ds контравариантного вектора $(dx^1, \ldots, dx^n)$:

$$ds^2 = g_{ij}(X)\, dx^i\, dx^j;$$

форма $g_{ij}dx^i dx^j$ является положительно определенной квадратичной формой. Метрика пространства V_n, определенная с помощью формы ds^2, наз. римановой, а пространство с введенной в нем Р. м. наз. *римановым пространством*. Задание Р. м. на нек-ром дифференцируемом многообразии означает задание на этом многообразии евклидовой структуры, дифференцируемым образом зависящей от точки.

Р. м. является обобщением первой квадратичной формы поверхности в трехмерном евклидовом пространстве — внутренней метрики поверхности. Геометрия пространства V_n, основанная на определенной Р. м., наз. *римановой геометрией*.

Существуют обобщения понятия Р. м. Так, псевдориманова метрика определяется с помощью неопределенной квадратичной формы (см. *Псевдориманово пространство* и *Относительности теория*). Вырожденная Р. м., то есть метрич. форма, определенная с помощью функций $g_{ij}(X)$, для к-рых $\det(g_{ij})=0$, определяет нек-рое *полуриманово пространство*.

Лит.: [1] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Риман Б., О гипотезах, лежащих в основании геометрии, пер. с нем., в кн.: Об основаниях геометрии, М., 1956. *Л. А. Сидоров.*

РИМАНОВА ОБЛАСТЬ, комплексное (аналитическое) многообразие над $\mathbb{C}^n$, — аналог *римановой поверхности* аналитич. функции $w=f(z)$ одного комплексного переменного z для случая аналитич. функции $w=f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$, многих комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$, $n \geqslant 2$.

Точнее, линейно связное хаусдорфово топологич. пространство R наз. (абстрактной) римановой областью, если существует локальный гомеоморфизм (проекция) $\pi: R \to \mathbb{C}^n$ такой, что для каждой точки $p_0 \in R$ существует окрестность $U(p_0; \varepsilon)$, гомеоморфно отображающаяся на нек-рый поликруг

$$D(z^0; \varepsilon) = \{z=(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n: \\ |z_j - z_j^0| < \varepsilon, \ j=1, \ldots, n\}$$

в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Р. о. сепарабельна.

Комплексная функция g наз. голоморфной на R, если для любой точки $p_0 \in R$ функция $g[\pi^{-1}(z)]$ от n комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$ голоморфна в соответствующем поликруге $D(z^0; \varepsilon)$. Проекция π задается набором n голоморфных функций $\pi=(\pi_1, \ldots, \pi_n)$, соответствующих координатам $z_1, \ldots, z_n$ в $\mathbb{C}^n$. Исходя из данного регулярного элемента аналитич. функции $w=f(z)$, ее Р. о. строится аналогично тому, как строится риманова поверхность данной аналитич. функции одного комплексного переменного, т. е. сначала посредством аналитич. продолжения строится *полная аналитическая функция* $w=f(z)$, а затем с помощью окрестностей вводится топология на множестве элементов полной аналитич. функции. Так же, как и римановы поверхности, Р. о. неизбежно возникают при аналитич. продолжении данного элемента аналитич. функции, когда полную аналитич. функцию $w=f(z)$ стремятся представить, следуя идеям Б. Римана (B. Riemann), как однозначную функцию точки соответствующей Р. о.

В частности, Р. о. возникают как многолистные *голоморфности области* аналитич. функций многих комплексных переменных. Теорема Ока утверждает, что Р. о. является областью голоморфности тогда и только тогда, когда она голоморфно выпукла (см. *Голоморфно выпуклое комплексное пространство*).

Современное изучение Р. о. проводится в рамках общей теории аналитич. пространств. Обобщение понятия области голоморфности приводит к *Штейна пространствам*.

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [2] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [3] Хермандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968.

Е. Д. Соломенцев.

РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ аналитической функции $w=f(z)$ комплексного переменного z — поверхность R такая, что данная *полная аналитическая функция* $w=f(z)$, вообще говоря многозначная, может рассматриваться как однозначная аналитич. функция $w=F(p)$ точки p поверхности R.

Понятие Р. п. возникло в связи с изучением алгебраич. функций $w=f(z)$, определяемых алгебраич. уравнением

$$a_0(z)w^m+a_1(z)w^{m-1}+\ldots+a_m(z)=0, \qquad (1)$$

где $a_j(z)$, $j=0, \ldots, m$,— многочлены с постоянными коэффициентами, $a_0(z)\not\equiv 0$, $a_m(z)\not\equiv 0$. В работах В. Пюизё (V. Puiseaux, 1850—51) было достигнуто ясное понимание многозначности, присущей этим функциям $w=f(z)$, когда каждому значению переменного z ставится в соответствие m значений переменного w. Б. Риман (B. Riemann, 1851—57, см. [1]) впервые показал, как для любой алгебраич. функции построить поверхность, на к-рой ее можно рассматривать как однозначную рациональную функцию точки. Полученную Р. п. можно отождествить с алгебраич. кривой, определяемой уравнением (1). Вообще, для всего дальнейшего развития теории Р. п., связанного с именами Ф. Клейна (F. Klein), А. Пуанкаре (H. Poincaré), П. Кёбе (P. Koebe) и др., характерно (то усиливающееся, то несколько ослабевающее) взаимопроникновение, с одной стороны, идей и методов теории функций комплексного переменного, с другой — алгебры и алгебраич. геометрии. Важной вехой в этом развитии явилось первое издание книги Г. Вейля [18], в к-рой было сформулировано общее понятие абстрактной Р. п.

Определение А: связное хаусдорфово топологич. пространство R наз. абстрактной римановой поверхностью, или просто римановой поверхностью, если оно допускает покрытие открытыми множествами U с соответствующим каждому множеству U гомеоморфным отображением $\alpha: U\to D$, где $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ есть единичный круг на плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z, причем если точка $p\in R$ принадлежит U и U', то взаимно однозначное соответствие $z'=\alpha'\alpha^{-1}(z)$ есть конформное отображение I рода в окрестности точки $\alpha(p)\in D$, то есть $z'=\alpha'\alpha^{-1}(z)$ есть однолистная аналитич. функция в окрестности точки $\alpha(p)\in D$. Иначе говоря, абстрактная Р. п. есть двумерное комплексное аналитич. многообразие.

Определение римановой поверхности с краем $\bar{R}$ отличается от определения А тем, что наряду с гомеоморфизмами $\alpha: U\to D$ допускаются гомеоморфизмы $\alpha: U\to D_0^+$, где $D_0^+=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1, \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$ — единичный полукруг на плоскости $\mathbb{C}$, причем обычно предполагается, что $\bar{R}$ не является Р. п. в смысле определения А. Точки Р. п. с краем $\bar{R}$, имеющие окрестности, гомеоморфные D, наз. внутренними, а остальные точки, отображающиеся в точки отрезка

$$\{z=x+iy\in\mathbb{C}: -1<x<1,\ y=0\},$$

образуют край $\partial\bar{R}$. Совокупность внутренних точек $\bar{R}$ (внутренность $\bar{R}$) есть Р. п. в смысле определения А. Таким образом, в случае Р. п. с краем обычно край предполагается непустым множеством.

Р. п. (или Р. п. с краем) есть триангулируемое и ориентируемое многообразие со счетной базой, к-рое, следовательно, сепарабельно и метризуемо. Компактная Р. п. (без края) наз. замкнутой Р. п.; более широкий класс конечных Р. п. включает замкнутые Р. п. и компактные Р. п. с краем, состоящим из конечного числа связных компонент. Некомпактные Р. п. с краем или без него наз. открытыми Р. п. В нек-рых случаях в определении А более удобно допускать конформное отображение не только I рода, но и II рода. Получающаяся при таком подходе Р. п. с краем $\overline{R}$ (или без него) не является уже, вообще говоря, ориентируемой, но в предположении ее конечности она может быть вложена конформно в ориентируемую замкнутую Р. п.— *дубль римановой поверхности* $\overline{R}$ (см. [8]).

Пусть аналитич. функция $w=f(z)$ задана одним из своих регулярных элементов $(a, P)=(a, P(z-a))$, т. е. парой, состоящей из точки $a\in\mathbb{C}$ и степенного ряда

$$P(z-a)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

с центром a и радиусом сходимости $r(a)$, $0<r(a)\leqslant\infty$. *Аналитическое продолжение* элемента (a, P) вдоль всевозможных путей в расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ позволяет получить все регулярные элементы такого же типа (b, Q), составляющие в совокупности полную аналитич. функцию, к-рую мы будем продолжать обозначать $w=f(z)$. Кроме того, при аналитич. продолжении появляются элементы более общей природы

$$(b, S)=\left(b, S\left(\sqrt[n]{z-b}\right)\right),$$

т. е. пары, состоящие из точки $b\in\overline{\mathbb{C}}$ и обобщенного степенного ряда (р я д а П ю и з ё):

$$S\left(\sqrt[n]{z-b}\right)=\sum_{\nu=m}^{\infty} b_\nu (z-b)^{\nu/n}$$

или (в случае, когда $b=\infty$ — бесконечно удаленная точка):

$$S(z^{-1/n})=\sum_{\nu=m}^{\infty} b_\nu z^{-\nu/n},$$

где m — целое, а n — натуральное числа, причем эти ряды сходятся соответственно при $|z-b|<r(b)$ или при $|z|>r(\infty)>0$. Обобщенные элементы (b, S), а точнее их классы эквивалентности, составляют в совокупности *аналитический образ* A_f, соответствующий данной аналитич. функции $w=f(z)$. Среди составляющих аналитич. образ классов эквивалентности элементов (b, S) различаются регулярные с $n=1$ и разветвленные с $n>1$. Введение подходящей топологии на аналитич. образе A_f превращает его в Р. п. R_f аналитич. функции $w=f(z)$. Это получается, напр., если задавать окрестность элемента (b, S), $b\neq\infty$, как множество, состоящее из самого элемента (b, S) и всех тех регулярных элементов (a, P) из A_f, для к-рых $|b-a|<\rho^n$, $\rho<r(b)$ и ряд $P(z-a)$ сходится к одному из n определений ряда $S(\sqrt[n]{z-b})$ в их общей области определения, т. е.

$$P(z-a)\equiv S\left(\varepsilon\sqrt[n]{z-b}\right),$$

где ε — один из корней из единицы степени n, $\varepsilon^n=1$. Окрестность элемента (∞, S) состоит из самого элемента (∞, S) и всех тех регулярных элементов (a, P) из A_f, для к-рых $|a|>\rho^{-n}$, $\rho<r(b)$ и ряд $P(z-a)$ сходится к одному из n определений ряда $S(z^{-1/n})$. Пространство R_f удовлетворяет всем условиям определения А.

Таким образом, каждой аналитич. функции $w=f(z)$ соответствует Р. п. R_f, на к-рой эта функция представляется как однозначная аналитич. функция точки $w=F(p)$, $p=(b, S)\in R_f$. Это означает, что в окрестности любой точки $p_0=(b, S)$ существует *локальный униформизирующий параметр* $t=\sqrt[n]{z-b}$, через к-рый w выражается как однозначная аналитич. функция $w=P(t)=F(p)$. Иначе говоря, Р. п. R_f аналитич. функции есть геометрич. конструкция для глобальной *униформизации* многозначного, вообще говоря, соотношения $w=f(z)$. В окрестности каждой точки $p_0=(b, S)\in R_f$ оно униформизируется посредством двух однозначных аналитич. функций $z=b+t^n$ и $w=S(t)$. С другой стороны, отображение проектирования $\Pi : (b, S) \to b$, ставящее в соответствие каждому элементу $p_0=(b, S)\in R_f$ его центр b, показывает, что Р. п. R_f аналитич. функции есть (разветвленная) накрывающая поверхность над расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$ или, что то же, над *Римана сферой*. Проекции разветвленных элементов (b, S) с $n>1$ суть точки ветвления этого накрытия.

В то же время каждой априори заданной Р. п. R соответствует бесконечно много аналитич. функций $w=f(z)$, для к-рых именно R является их Р. п., $R_f=R$. Это утверждение для случая замкнутых Р. п. было высказано и обосновано еще Б. Риманом в 1851. Центральным пунктом соответствующего доказательства является конструкция гармонич. функций на R с заданными особенностями. Данное Б. Риманом обоснование опиралось на некритич. применение т. н. *Дирихле принципа*; строгое доказательство впервые было дано П. Кёбе (1909); позднее были даны более простые доказательства этого фундаментального положения, в том числе и опирающиеся на надлежащим образом применяемый принцип Дирихле (см., напр., [3], [4], [17], [18]).

Какова бы ни была ориентируемая топологич. поверхность S, можно построить Р. п. R, гомеоморфную S, т. е. построить Р. п. R того же топологич. типа, что и S. Замкнутые Р. п. топологически вполне характеризуются одним числом — родом g, $0\leqslant g<+\infty$. Топологич. тип такой Р. п. R при $g=0$ есть сфера, при $g=1$ — тор, при $g>1$ — обобщенный тор, или сфера с g ручками. Разрезав Р. п. R рода $g=0$ вдоль нек-рой дуги, получают в качестве ее топологич. модели, или нормальной формы, двуугольник с символом $s=aa^{-1}$, указывающим, что точки сторон a и a^{-1} отождествляются; при $g\geqslant 1$ необходимо сделать $2g$ *канонических разрезов* $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$, после чего получается нормальная форма замкнутой Р. п. R — многоугольник с $4g$ сторонами, попарно отождествляемыми, символ $s=a_1 \ldots$ должен указывать порядок следования сторон. Напр., на рис. 1 изображены нормальные формы сферы при $g=0$ и тора при $g=1$ с их символами. С аналитич. точки зрения замкнутая Р. п. R характеризуется тем, что она есть Р. п. нек-рой алгебраич. функции $w=f(z)$, определяемой алгебраич. уравнением (1) степени m. Эту Р. п. R можно представлять себе также в виде m листов, про-

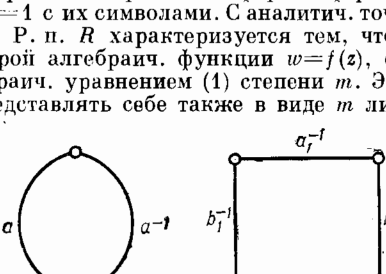


Рис. 1.

стирающихся над сферой Римана и определенным образом соединяющихся между собой в точках ветвления и вдоль нек-рых линий, соединяющих эти точки (способ соединения определяется конкретным видом уравнения (1)). При этом род g Р. п. R выражается через число листов m и порядки $k_1, \ldots, k_s$ точек ветвления *Римана — Гурвица формулой*

$$g=\sum_{\nu=1}^{s}\frac{k_\nu-1}{2}-m+1.$$

Конечные Р. п. $\overline{R}$ топологически вполне характеризуются родом g, $0\leqslant g<\infty$, и числом l связных компонент края, $0\leqslant l<\infty$; их топологич. типом является сфера с g ручками и l отверстиями. В нормальной форме конечной Р. п. число сторон не обязательно четное, нек-рые стороны, соответствующие компонентам края, остаются свободными, не отождествляются. Понятие рода обобщается и для открытых Р. п. R, напр. при помощи исчерпания R последовательностью $\{\overline{R}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ принадлежащих R компактных Р. п. с краем $\overline{R}_\nu$ таких, что $\overline{R}_\nu$ содержится внутри $\overline{R}_{\nu+1}$, $\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\overline{R}_\nu=R$. Род g Р. п. R полагают равным $g=\lim\limits_{\nu\to\infty} g_\nu$, где g_ν — род $\overline{R}_\nu$. Этот предел существует и не зависит от выбора исчерпания $\{\overline{R}_\nu\}$, $0\leqslant g\leqslant+\infty$. Однако род не полностью определяет топологич. тип открытой Р. п.; топологич. типы открытых Р. п. могут быть весьма разнообразными. Так, на рис. 2 изображены две модели с $g=0$ и $g=2$.

Важной топологич. характеристикой Р. п. R является порядок связности: R наз. **односвязной**, если любую простую замкнутую кривую на R можно непрерывно деформировать в точку, не выходя за пределы R, т. е., иначе говоря, если *фундаментальная группа* поверхности R тривиальна. В противном случае Р. п. R наз. **многосвязной**. Важный класс составляют Р. п., **подобные однолистным**: так наз. Р. п. (с краем или без края), к-рые разделяются любой простой замкнутой кривой на две непересекающиеся части. Напр., на рис. 2, *а* представлена топологич. модель многосвязной Р. п., подобной однолистной. Р. п., подобная однолистной, необходимо имеет род нуль. Р. п. R, подобная однолистной, наз. n-**связной**, если минимальное число разрезов, превращающих R в односвязную Р. п., равно $n-1$, $n\geqslant1$ (см. рис. 2, *б*).

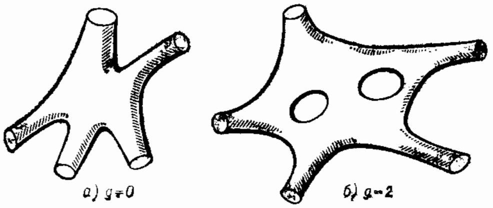


Рис. 2.

Топологич. свойства Р. п. R отнюдь не определяют полностью аналитич. свойства R, т. е. топологич. свойства R не определяют полностью поведение функций различных классов на R. В частности, пусть $f: R_1\to R_2$ — функция на Р. п. R_1 со значениями на другой Р. п. R_2. Функция f наз. аналитической на R_1, если для любой точки $p_0\in R_1$, $f(p_0)=q_0$, можно найти локальные униформизирующие параметры соответственно $t=\varphi(p)$ в окрестности p_0 на R_1 и $\tau=\psi(q)$ в окрестности q_0 на R_2 такие, что сложная функция

$$\tau=\psi\{f[\varphi^{-1}(t)]\}=g(t)$$

является аналитич. функцией комплексного переменного t в окрестности значения $t_0=\varphi(p_0)$. Две Р. п. R_1 и R_2 наз. **конформно эквивалентными**, или принадлежащими одному и тому же конформному классу, если существует аналитич. функция $f: R_1\to R_2$, взаимно однозначно отображающая R_1 на R_2. С точки зрения поведения аналитич. функций на Р. п., конформно эквивалентные Р. п. следует рассматривать как одну и ту же Р. п., но топологически эквивалентные Р. п. не всегда являются конформно эквивалентными.

Применительно к Р. п. можно следующим образом сформулировать **теорему Римана о конформном отображении**: всякая односвязная Р. п. R конформно эквивалентна одной из трех областей: 1) расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, или сфере Римана (**эллиптический** случай); 2) конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$, или сфере Римана с одной выколотой точкой (параболический случай); 3) единичному кругу $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ на плоскости $\mathbb{C}$, или сфере Римана с разрезом положительной длины (гиперболический случай). Важный результат состоит в том, что любая Р. п., подобная однолистной, конформно эквивалентна нек-рой канонич. области расширенной комплексной плоскости. В качестве такой канонич. области можно взять всю расширенную плоскость с конечным или бесконечным числом разрезов, параллельных действительной оси, причем нек-рые из этих разрезов могут вырождаться в точки. Как указано выше, в случае односвязной Р. п. канонич. область либо не имеет ни одного разреза (эллиптический тип), либо разрез вырождается в точку (параболический тип), либо разрез имеет положительную длину (гиперболический тип). Все три типа односвязных Р. п. конформно различны, хотя последние два из них топологически эквивалентны. Проблема типа, пока (1983) не получившая полного решения, состоит в разыскании дополнительных условий на односвязную Р. п., при к-рых она принадлежит гиперболическому или параболич. типу (см. [6], [7], [10], [11]).

В общем случае произвольной Р. п. R односвязной Р. п. будет всегда ее универсальная накрывающая поверхность $\hat{R}$, к-рая, следовательно, принадлежит одному из трех указанных типов. Сама Р. п. R считается Р. п. эллиптического, параболического или гиперболического типа в соответствии с тем, какого типа будет ее универсальная накрывающая $\hat{R}$. Эта классификация Р. п. оправдывается следующими соображениями. Пусть D — одна из трех областей: расширенная комплексная плоскость, конечная комплексная плоскость или единичный круг, а Λ — нек-рая группа дробно-линейных отображений области D на себя (автоморфизмов), не имеющая неподвижных точек в D. Конформное отображение $w=W(q)$ универсальной накрывающей $\hat{R}$ на D переводит группу $\hat{\Lambda}$ преобразований накрытия $\hat{R}$, изоморфную фундаментальной группе $\pi_1(R)$, в нек-рую группу Λ автоморфизмов области D. При этом $w=W(q)$ можно рассматривать как конформное отображение факторпространства $\hat{R}/\hat{\Lambda}$ на факторпространство D/Λ, а $\hat{R}/\hat{\Lambda}$ можно отождествить с R. Таким образом, $w=W(q)$ можно рассматривать как конформное отображение Р. п. R на факторпространство D/Λ с нек-рой группой автоморфизмов Λ, изоморфной фундаментальной группе $\pi_1(R)$.

Так как Р. п. R эллиптич. типа обязательно односвязна, то группа Λ тривиальна, а значит, такая Р. п. есть обязательно Р. п. функции, обратной рациональной. Односвязная Р. п. параболич. типа обязательно является Р. п. функции, обратной мероморфной в конечной плоскости. Компактная Р. п. рода $g=0$, $g=1$ и $g>1$ является соответственно Р. п. эллиптического, параболического и *гиперболич. типа*.

В связи с конформной эквивалентностью Р. п. возникает также вопрос о строении группы Σ конформных автоморфизмов Р. п. R. За нек-рыми простыми исключениями эта группа Σ дискретна, а для компактных Р. п. рода $g>1$ она конечна (теорема Шварца). *Исключительных случаев, когда группа Σ непрерывна*, всего семь, а именно (указаны представители соответствующих конформных классов): сфера в эллиптич. случае; сфера с одной или двумя выколотыми точками и тор в параболич. случае; круг, круг с выколотой точкой и кольцо в гиперболич. случае.

Важное значение имеет также проблема модулей Р. п. в различных постановках. Это вопрос о возможном описании разнообразия конформно неэквивалентных Р. п. того или иного вида. Напр., легко устанавливаются следующие положения. Множество видов конформно неэквивалентных двусвязных Р. п., подобных однолистным (колец), зависит от одного действительного параметра (м о д у л я) k, $0<k<1$; т. е. два кольца $0<r_\nu<|z|<R_\nu$, $\nu=1, 2$, конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают отношения их радиусов: $k=(r_1/R_1)=(r_2/R_2)$. Множество видов конформно неэквивалентных n-связных Р. п., подобных однолистным, при $n>2$ зависит от $3n-6$ действительных параметров. Множество видов конформно неэквивалентных замкнутых Р. п. рода $g\geqslant 1$ при $g=1$ зависит от двух действительных параметров, а при $g>1$ — от $6g-6$ действительных параметров (см. *Римановых поверхностей конформные классы*, а также [3], [12], [13], [15], [16]; относительно поведения функций других классов на Р. п. см. *Римановых поверхностей классификация*).

Важным аспектом теории Р. п. является связь с понятием униформизации. Для многозначной, вообще говоря, аналитич. функции

$$w=f(z) \tag{2}$$

ее Р. п. R_f дает геометрич. средство униформизации: многозначное соотношение (2) заменяется двумя однозначными представлениями:

$$w=F(p),\ z=g(p),\ p\in R_f, \tag{3}$$

выражающими переменные z и w однозначно во всей области существования функции (2) как полной аналитич. функции. С другой стороны, подход К. Вейерштрасса (K. Weierstrass) к построению понятия полной аналитич. функции (2) состоит в использовании локального униформизирующего параметра t, позволяющего выразить переменные z и w аналитически в виде однозначных аналитич. функций $z=z(t)$ и $w=w(t)$ локально в окрестности нек-рой точки (z_0, w_0), $w_0=f(z_0)$. Задача униформизации в ее простейшей классич. постановке есть задача синтеза этих двух идей. Требуется заменить соотношение (2) во всей области его определения двумя аналитич. представлениями $z=z(t)$, $w=w(t)$, где t — униформизирующее комплексное переменное, изменяющееся в нек-рой области на плоскости.

Возможность униформизации в указанной постановке установлена П. Кёбе и независимо А. Пуанкаре почти одновременно в 1907. Если Р. п. R_f функции (2) односвязна или подобна однолистной, то задача униформизации сводится к построению конформного отображения $\varphi: R_f\to D$ Р. п. R_f на плоскую область D. Представления (3) тогда дают искомую униформизацию:

$$z=g[\varphi^{-1}(t)],\ w=F[\varphi^{-1}(t)],\ t\in D.$$

Конформное отображение f на плоскую область существует для Р. п. R_f, подобных однолистным, и только для них (о б щ а я т е о р е м а у н и ф о р м и з а ц и и).

В общем случае произвольного аналитич. соотношения (2) Р. п. R_f не является подобной однолистной, но ее универсальная накрывающая $\hat{R}_f$ односвязна, и следовательно, существует конформное отображение

$$\psi: \hat{R}_f\longrightarrow D,$$

где D — одна из упоминавшихся областей: $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ или единичный круг. Функция $w=f(z)$ мероморфна на Р. п. R_f, а следовательно и на $\hat{R}_f$, причем она зависит только от проекции $p=p(q)$, $p\in R_f$, точки $q\in\hat{R}_f$. Таким образом, получается геометрич. униформизация в виде

$$z=g[p(q)],\ w=F[p(q)],$$

а отсюда и аналитич. униформизация:

$$z = g\{p[\psi^{-1}(t)]\} = \Psi(t),$$
$$w = F\{p[\psi^{-1}(t)]\} = \Phi(t), \ t \in D,$$

где z и w выражаются как мероморфные функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ переменного $t \in D$. Эти функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ суть *автоморфные функции* в области D относительно группы автоморфизмов Λ, изоморфной фундаментальной группе $\pi_1(R_f)$ Р. п. R_f униформизируемой функции (см. [3], [7], [15], [16]).

Лит.: [1] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.—Л., 1948; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [3] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [4] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1—2, М., 1962; [5] его же, Лекции о топологических принципах теории аналитических функций, пер. с франц., М., 1964; [6] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [7] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [8] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957; [9] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.—Л., 1948; [10] Волковыский Л. И., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1950, т. 34, с. 3—171; [11] его же, «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 5, с. 77—84; [12] Крушкаль С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975; [13] Крушкаль С. Л., Апанасов Б. Н., Гусевский Н. А., Клейновы группы в примерах и задачах, Новосиб., 1978; [14] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 16, М., 1978, с. 191—245; [15] Альфорс Л., Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, пер. с англ., М., 1961; [16] Берс Л., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 4, с. 153—98; 1974, т. 29, в. 2, с. 86—102; [17] Klein F., Riemannsche Flächen... Vorlesung von F. Klein, Gött., 1894; [18] Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, 3 Aufl., Stuttg., 1955; [19] Ahlfors L., Sario L., Riemann surfaces, Princeton, 1960; [20] Pfluger A., Theorie der Riemannschen Flächen, B.— [u. a.], 1957; [21] Sario L., Nakai M., Classification theory of Riemann surfaces, B.— [u. a.], 1970; [22] Heins M., Hardy classes on Riemann surfaces, B.— [u. a.], 1969; [23] Gunning R. C., Lectures on Riemann surfaces, Princeton, 1966; [24] его же, Lectures on Riemann surfaces, Jacobi varieties, Princeton, 1972; [25] Форстер О., Римановы поверхности, пер. с нем., М., 1980.

Е. Д. Соломенцев.

РИМАНОВА СВЯЗНОСТЬ — *аффинная связность* на римановом пространстве M, относительно к-рой метрич. тензор пространства g_{ij} является ковариантно постоянным. Если аффинная связность на M задана с помощью матрицы локальных форм связности

$$\left.\begin{aligned} \omega^i &= \Gamma^i_k\,dx^k, \ \det\left|\Gamma^i_k\right| \neq 0, \\ \omega^i_j &= \Gamma^i_{jk}\,dx^k \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и метрич. формой на M является $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$, то последнее условие выражается в виде

$$dg_{ij} = g_{kj}\omega^k_i + g_{ik}\omega^k_j\,. \tag{2}$$

Оно может быть выражено еще следующим образом: при *параллельном перенесении* вдоль любой кривой многообразия M скалярное произведение $\langle X, Y\rangle = g_{ij}\omega^i(X)\omega^j(Y)$ произвольных двух векторов сохраняет свое значение, т. е. для любых векторных полей X, Y, Z на M справедливо равенство

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle,$$

где $\nabla_Z X$ — векторное поле, называемое ковариантной производной поля X относительно поля Z и определяемое формулой

$$\omega^i(\nabla_Z X) = Z\omega^i(X) + \omega^i_k(Z)\,\omega^k(X).$$

Если на M перейти к локальному полю ортонормированных реперов, то $g_{ij} = \delta_{ij}$ (если ограничиться случаем положительно определенной ds^2) и условие (2) принимает вид

$$\omega^j_i + \omega^i_j = 0,$$

т. е. матрица ω, составленная из форм (1), принимает значения в алгебре Ли группы движений евклидова пространства E_n размерности $n=\dim M$. Поэтому Р. с. может быть интерпретирована как связность в расслоенном пространстве ортонормированных реперов в касательных к M евклидовых пространствах. *Голономии группа* Р. с. есть нек-рая подгруппа группы движений пространства E_n; римановой связностью для нек-рой римановой метрики на M является каждая аффинная связность, группа голономии к-рой — группа движений или нек-рая ее подгруппа.

Если в (1) $\omega^i=dx^i$ (то есть M отнесено к полю натуральных реперов локальной координатной системы), то

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}=g_{kj}\Gamma^k_{il}+g_{ik}\Gamma^k_{jl},$$

и

$$\Gamma^k_{ij}=\left\{{k \atop ij}\right\}-\frac{1}{2}S^k_{ij}-g^{kl}g_{m(i}S^m_{j)l},$$

где

$$\left\{{k \atop ij}\right\}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

— т. н. символ Кристоффеля и $S^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{jk}$ — тензор кручения Р. с. Существует одна и только одна Р. с. без кручения (т. е. такая, что $S^k_{ij}=0$), к-рая определяется формами $\omega^i_j=\left\{{i \atop jk}\right\}^{ij}dx^k$ и наз. *Леви-Чивита связностью.*

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960. *Ю. Г. Лумисте.*

РИМАНОВО МНОГООБРАЗИЕ — дифференцируемое многообразие, наделенное *римановой метрикой.* По существу Р. м.— то же, что и *риманово пространство.* *М. И. Войцеховский.*

РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство, в малых областях к-рого имеет место приближенно (с точностью до малых высшего порядка сравнительно с размерами областей) евклидова геометрия, хотя в целом такое пространство может не быть евклидовым. Р. п. названо по имени Б. Римана (B. Riemann), наметившего в 1854 основы теории таких пространств (см. *Риманова геометрия*). Простейшими Р. п. являются евклидово пространство и примыкающие к нему два других пространства постоянной кривизны, в к-рых имеет место *Лобачевского геометрия* и *Римана геометрия* (не смешивать последнюю с общей римановой геометрией, к-рая изучает Р. п. вообще).

По материалам одноименной статьи в БСЭ-3.

РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО ОБОБЩЕННОЕ — пространство с *внутренней метрикой*, подчиненное нек-рым ограничениям на кривизну. К ним относятся пространства с «кривизной, ограниченной сверху», и др. (см. [3]). Р. п. о. отличаются от *римановых пространств* не только большей общностью, но и тем, что они определяются и исследуются, исходя из метрики, без координат. При нек-ром соединении условий на кривизну и поведении кратчайших (т. е. кривых, длины к-рых равны расстояниям между концами) Р. п. о. оказывается римановым, что дает чисто метрич. определение риманова пространства.

Определения Р. п. о. исходят из классич. связи кривизны с избытком *геодезического треугольника* (избыток — сумма углов минус π). Эти понятия переносятся на пространство с внутренней метрикой такое, что у каждой точки его есть окрестность, любые две точки к-рой соединены кратчайшей. Это условие далее подразумевается без оговорок. Треугольником $T=ABC$ наз. тройка кратчайших AB, BC, CA — сторон треугольника, соединяющих попарно три различных точки A, B, C — вершины треугольника. Угол определяется между кривыми в любом метрич. пространстве.

Пусть L, M — исходящие из одной точки O кривые в пространстве с метрикой ρ. Выбираются точки $X \in L$, $Y \in M$ $(X, Y \neq O)$, строится евклидов треугольник со сторонами $x = \rho(O, X)$, $y = \rho(O, Y)$, $z = \rho(X, Y)$ и углом $\gamma(x, y)$, противолежащим стороне z. Определяется верхний угол между L и M:

$$\overline{\alpha} = \varlimsup_{xy \to 0} \gamma(x, y). \tag{1}$$

Верхние углы треугольника — это верхние углы $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ между его сторонами при вершинах A, B, C, а избыток треугольника $\overline{\delta}(T) = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} - \pi$.

Р. п. о. с ограниченной кривизной ($\leqslant K$ и $\geqslant K'$) определяется условием:

(A) для каждой последовательности треугольников T_n, стягивающихся к точке,

$$K \geqslant \varlimsup \frac{\overline{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)} \geqslant \lim \frac{\overline{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)} \geqslant K', \tag{2}$$

где $\sigma(T_n^0)$ — площадь евклидова треугольника с такими же сторонами, что T_n (если $\sigma(T_n^0) = 0$, то $\overline{\delta}(T_n) = 0$). Такое пространство оказывается римановым при двух естественных дополнительных условиях:

(1) локальная компактность пространства (в пространстве с внутренней метрикой это уже обеспечивает условие локального существования кратчайших);

(2) локальная продолжаемость кратчайших — у каждой точки существует окрестность U такая, что любую кратчайшую XY, где X, $Y \in U$, можно продолжить за ее концы. При всех этих условиях пространство является римановым (см. [4]), причем в окрестности каждой точки можно ввести координаты x^i так, что метрика будет задаваться линейным элементом $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ с коэффициентами $g_{ij} \in W_q^2 \cap C^{1, \alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Тем самым имеется параллельный перенос (с непрерывными Γ_{jk}^i) и почти везде — тензор кривизны.

Кроме того, доказано [7], что координаты x^i можно взять гармоническими, т. е. удовлетворяющими равенствам $\sum_{ij} g^{ij} \Gamma_{ij}^l = 0$. Гармонич. системы координат составляют атлас класса $C^{3, \alpha}$ при любом α, $0 < \alpha < 1$.

Р. п. о. с ограниченной кривизной при $K = K'$, удовлетворяющее условиям (1) и (2), является римановым пространством постоянной римановой кривизны K (см. [3]).

Всякое риманово пространство с римановой кривизной, заключенной между K и $K'(K' \leqslant K)$, является Р. п. о. кривизны $\leqslant K$ и $\geqslant K'$ и удовлетворяет условиям (1) и (2).

«Пространство с кривизной $\leqslant K$» определяется левым неравенством (2), т. е. условием:

(A^-) для любой последовательности треугольников T_n, стягивающихся в точку,

$$\varlimsup \frac{\overline{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)} \leqslant K. \tag{3}$$

Другое равносильное определение и начало исследования Р. п. о. исходят из сравнения произвольного треугольника $T = ABC$ с треугольником T^k со сторонами той же длины в пространстве постоянной кривизны K. Пусть α_k, β_k, γ_k — углы такого треугольника; относительный верхний избыток треугольника T определяется как $\overline{\delta}_k(T) = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma}) - (\alpha_k + \beta_k + \gamma_k)$. Условие ($A^-$) в определении пространства с кривизной $\leqslant K$ можно заменить на условие:

(A_1^-) у каждой точки есть окрестность R_k, в к-рой $\overline{\delta}_k(T) \leqslant 0$ для всякого треугольника T. Выполняется и более сильное свойство вогнутости метрики. Именно, пусть L, M — кратчайшие, исходящие из одной точки O, и $\gamma_k(x, y)$ — угол в треугольнике T^k со сторонами $x=\rho(O, X)$, $y=\rho(O, X)$, $z=\rho(X, Y)$, $X\in L$, $Y\in M$, в пространстве постоянной кривизны K, противолежащий стороне z. В R_k (локально) угол $\gamma_k(x, y)$ оказывается неубывающей функцией ($\gamma_k(x_1, y_1)\leqslant\gamma_k(x_2, y_2)$ при $x_1\leqslant x_2$, $y_1\leqslant y_2$). Отсюда следуют локальные свойства:

(I) между любыми двумя кратчайшими, исходящими из одной точки, существует угол и даже «угол в сильном смысле» $\alpha_C=\lim\limits_{xy\to 0}\gamma_k(x, y)$ (так что, в частности, если $y=\text{const}$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y-z}{x}=\cos\alpha_C$);

(II) для углов α, β, γ треугольника в R_k и соответствующего треугольника T^k

$$\alpha\leqslant\alpha_k,\ \beta\leqslant\beta_k,\ \gamma\leqslant\gamma_k;$$

(III) в R_k, если $A_n\to A$, $B_n\to B$, кратчайшие $A_nB_n\to AB$ (тем самым кратчайшая в R_k с данными концами единственна).

Двойственными пространствами с кривизной $\leqslant K$ будут пространства с кривизной $\geqslant K$, определяемые аналогично через нижние избытки, к-рые вычисляются по нижним углам в сильном смысле. Для кратчайших L, M этот угол есть

$$\underline{\alpha}=\varliminf_{xy\to 0}\gamma(x, y).$$

Нижний избыток треугольника есть $\underline{\delta}=\underline{\alpha}+\underline{\beta}+\underline{\gamma}-\pi$. Пространство с кривизной $\geqslant K$ — это такое пространство, в к-ром вместо (A^-) выполняется условие:

(A^+) для любой последовательности T_n треугольников, стягивающихся к точке,

$$\varliminf\frac{\underline{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)}\geqslant K. \tag{4}$$

Неравенство с верхним избытком $\overline{\delta}$, противоположное неравенству (3), не дает содержательных результатов, их не дает и неравенство с избытком, вычисляемым просто с нижними углами

$$\varliminf_{xy\to 0}\gamma(x, y).$$

Условие (A^+) можно заменить на условие:

(A_1^+) у каждой точки есть окрестность R_k^+, в к-рой $\underline{\delta}_k(T)\geqslant 0$ для всякого треугольника T. В R_k^+ (локально) угол $\gamma_k(x, y)$ для двух кратчайших L, M оказывается невозрастающей функцией *(выпуклая метрика)*.

Аналогично пространствам с кривизной $\leqslant K$ для пространств с кривизной $\geqslant K$ выполняются (локальные) свойства, подобные (I) и (II): между кратчайшими существует угол в сильном смысле; $\alpha\geqslant\alpha_k$, $\beta\geqslant\beta_k$, $\gamma\geqslant\gamma_k$ для всякого треугольника в R_k^+. Вместо (III) выполняется условие неналегания кратчайших или, что то же, единственность их продолжения: если $AC\supset AB$ и $AC_1\supset AB$ в R_k^+, то либо $AC\supset AC_1$, либо $AC_1\supset AC$.

Таким образом, пространство с ограниченной кривизной получается соединением условий, определяющих оба класса пространств — с кривизной, ограниченной сверху или снизу (причем в левой части неравенства (3) нет нужды брать $\underline{\delta}$). Условие (A) можно заменить, подобно (A_1^+) и (A_1^-), на условие:

(A_1) у каждой точки есть окрестность $R_{kk'}$, где $\delta_k(T)\leqslant 0$, $\delta_{k'}(T)\geqslant 0$ для всякого треугольника T. Это оказывается также равносильным следующему:

(A_2) для всякой четверки точек в $R_{kk'}$ существует четверка точек с теми же попарными расстояниями в пространстве постоянной кривизны k, где $K'\leqslant k\leqslant K$ и k зависит, вообще говоря, от выбранной четверки точек в $R_{kk'}$.

Примером Р. п. о. с кривизной $\leqslant K$ ($\geqslant K'$) является область риманова пространства, в к-рой римановы кривизны всех двумерных площадок во всех точках ограничены сверху (снизу) числом K (K').

Множество V в пространстве с внутренней метрикой наз. выпуклым, если любые две точки X, $Y \in V$ можно соединить кратчайшей X, Y и всякая такая кратчайшая содержится в V.

Установлен [8] следующий результат: если пространство R с внутренней метрикой получено склеиванием двух пространств R', R'' кривизны $\leqslant K$ по выпуклым множествам $V' \subset R''$ и $V'' \subset R''$, то R само есть пространство кривизны $\leqslant K$. Условие склеивания заключается в том, что $R = R' \cup R''$, $V' = V'' = R' \cap R''$ и в R', R'' индуцируется метрика пространства R.

Две выходящие из точки O кривые L, M (по определению) имеют в O одинаковое направление, если верхний угол между ними равен нулю (если $L = M$, то говорят, что L имеет в O определенное направление). Направление в точке O определяется как класс кривых, имеющих в O одинаковое направление. Направления в точке O образуют метрич. пространство, в к-ром расстояние между направлениями определяется верхним углом между любыми их представителями. Это пространство наз. пространством направлений в точке O.

Доказано [5]: если точка O содержится в окрестности пространства кривизны $\leqslant K$, гомеоморфной E^n, то пространство направлений в точке O является пространством кривизны $\leqslant 1$. Неизвестно (1983), гомеоморфно ли оно $(n-1)$-мерной сфере.

В двумерном случае теория многообразий ограниченной кривизны (см. *Двумерное многообразие ограниченной кривизны*) включает в себя как частный случай теорию многообразий с кривизной $\leqslant K$. Примером двумерного многообразия с кривизной $\leqslant K$ является линейчатая поверхность в R_k, снабженная внутренней метрикой, т. е. поверхность, образованная внутренними частями кратчайших, концы к-рых зачеркивают две спрямляемые кривые L_1, L_2. Если кривая L_2 вырождается в точку O, поверхность наз. конусом кратчайших, натянутым из точки O на кривую L_1. Если L_1 есть треугольник OAB, то такой конус наз. поверхностным треугольником (см. [3]).

Отображение $\varphi : M_1 \to M_2$ метрич. пространства наз. нерастягивающим, если $\rho_{M_1}(X, Y) \geqslant \rho_{M_2}(\varphi(X), \varphi(Y))$ для любых X, $Y \in M_1$. Отображение $\varphi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ замкнутой кривой Γ_1 в M_1 на замкнутую кривую Γ_2 в M_2 наз. эквилонгальным, если длины соответствующих при отображении φ дуг кривых Γ_1 и Γ_2 совпадают. Пусть V — выпуклая область в пространстве постоянной кривизны K и L — краевой контур V. Область V мажорирует замкнутую кривую Γ в метрич. пространстве M, если существует нарастающее отображение области V в M, эквилонгально отображающее L на Γ. Само отображение наз. мажорирующим.

Пусть R_k — выпуклое пространство с внутренней метрикой; C — конус кратчайших, натянутый на замкнутую спрямляемую кривую Γ в R_k из точки $O \in \Gamma$, причем в случае $K > 0$ длина l кривой Γ меньше $2\pi/\sqrt{K}$. Тогда в пространстве постоянной кривизны K существует выпуклая область V, мажорирующая Γ, такая, что $\varphi(V) = C$ для соответствующего мажорирующего отображения φ. Это свойство характеризует пространства кривизны $\leqslant K$. Достаточным является уже существование эквилонгального нерастягивающего отображения контура L области V на Γ.

Поверхностью в метрич. пространстве M наз. непрерывное отображение f круга B в M. Пусть P — триангулируемый многоугольник, т. е. комплекс из треугольников T_i, вписанный в B. Треугольнику T_i с вершинами X, Y, Z сопоставляется евклидов треугольник T_i^0 со сторонами, равными расстоянию между точками $f(X)$, $f(Y)$, $f(Z)$. Пусть $S_0(P)$ обозначает сумму площадей $S(T_i^0)$ всех треугольников T_i^0; тогда **площадь** $S(f)$ **поверхности** f определяется (см. [3]) как нижний предел величин $S_0(P)$ при условии, что вершины комплекса P неограниченно сгущаются в B : $S(f)=\lim S_0(P)$. Это определение модифицировано так (см. [6]). Вместо точек $f(X)$, $f(Y)$, $f(Z)$ вершинам X, Y, Z треугольника T_i комплекса P сопоставляются нек-рые точки X^P, Y^P, Z^P в M, причем вершинам комплекса P сопоставляются одинаковые точки в том и только в том случае, когда образы вершин при отображении f совпадают. За площадь $L(f)$ поверхности f принимается нижний предел сумм площадей евклидовых треугольников T_i^0 со сторонами, равными расстояниям между точками X^P, Y^P, Z^P при дополнительном предположении, что $\rho(f(X_k), X_k^P)$ по всем вершинам X_k комплекса P стремится к нулю. Всегда $L(f) \leqslant S(f)$.

1) Если последовательность поверхностей f_n в R_k равномерно сходится к поверхности f, то

$$L(f) \leqslant \lim L(f_n) \text{ (полунепрерывность).}$$

2) Если p — нерастягивающее отображение из R_k в R_k и f — поверхность в R_k, то

$$L(p \circ f) \leqslant L(f) \text{ (принцип Колмогорова).}$$

3) Площадь $S(f)$ поверхностного треугольника T в R_k не больше площади соответствующего треугольника T^k и равна ему тогда и только тогда, когда треугольник T изометричен T^k (локальное свойство).

4) В условиях теоремы о существовании мажорирующего отображения (см. выше) площадь $S(G)$ не больше площади круга в пространстве постоянной кривизны K с периметром l (изопериметрическое неравенство) (см. [3], [6]).

Решается [6] задача Плато в R_k о существовании поверхности минимальной площади, натянутой на замкнутую кривую Г. Доказано следующее. Пусть R_k — метрически полное пространство кривизны $\leqslant K$ (при $K>0$ диаметр $d(R_k)<\pi/2\sqrt{K}$), Γ — замкнутая жорданова кривая в R_k. Тогда существует поверхность f минимальной площади $L(f)$, натянутая на кривую Γ. Пусть Γ, Γ_n, $n=1, 2, \ldots,$ — замкнутые жордановы кривые в таком пространстве и $a(\Gamma)$, $a(\Gamma_n)$ — минимальные площади поверхностей, натянутых соответственно на Γ и Γ_n. Если Γ_n равномерно сходятся в нек-рых параметризациях к Γ, то $a(\Gamma) \leqslant \lim a(\Gamma_n)$.

Рассматривались двумерные многообразия с индефинитной метрикой ограниченной кривизны. Не решена (1983) задача бескоординатного определения многомерных пространств с индефинитной метрикой ограниченной кривизны, в частности пространств общей теории относительности.

Лит.: [1] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948; [2] его же, «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 5—23; [3] его же, «Schrift. Inst. Math. Deutsch. Acad. Wiss.», 1957, H. 1, S. 33—84; [4] Берестовский В. Н., «Сиб. матем. ж.», 1975, т. 16, № 4, с. 651—62; [5] Николаев И. Г., там же, 1978, т. 19, № 6, с. 1341—48; [6] его же, там же, 1979, т. 20, № 2, с. 345—53; [7] Решетняк Ю. Г., «Матем. сб.», 1960, т. 52, № 3, с. 789—98; [8] его же, «Сиб. матем. ж.», 1968, т. 9, № 4, с. 918—27.

А. Д. Александров, В. Н. Берестовский.

РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО ОДНОРОДНОЕ — риманово пространство (M, γ) вместе с транзитивной эффективной группой G его движений. Пусть K — стационарная подгруппа фиксированной точки $o \in M$. Тогда многообразие M отождествляется с факторпространством G/K с помощью биекции $G/K \ni gK \Longleftrightarrow go \in M$, а риманова метрика γ рассматривается как G-инвариантная метрика на G/K. Обычно предполагается дополнительно, что группа G замкнута в полной группе движений. В этом случае стационарная подгруппа K компактна.

Пусть K — компактная подгруппа группы Ли G, не содержащая нормальных делителей группы G. Тогда однородное пространство $M=G/K$ допускает инвариантную риманову метрику γ, к-рая определяется следующим образом. Пусть $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{M}$ — редуктивная структура в M, т. е. разложение алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы Ли G в прямую сумму алгебры Ли $\mathfrak{K}$ группы K и подпространства $\mathfrak{M}$, инвариантного относительно присоединенного представления $\mathrm{Ad}\, K$ группы K в пространстве $\mathfrak{G}$. Пространство $\mathfrak{M}$ естественным образом отождествляется с касательным пространством $T_0M\approx\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ точки $o=eK$, а представление изотропии группы K в T_0M — с представлением $\mathrm{Ad}\, K|\mathfrak{M}$. Любая G-инвариантная риманова метрика γ на M получается из нек-рого $\mathrm{Ad}\, K$-инвариантного скалярного произведения γ_0 в $\mathfrak{M}$ разнесением с помощью преобразований из G:

$$\gamma_{go}(X, Y)=\gamma_0(g^{-1}X, g^{-1}Y), \; X, Y\in T_{go}M, \quad g\in G.$$

Существование такого скалярного произведения следует из компактности группы изотропии $\mathrm{Ad}\, K|\mathfrak{M}$.

Любое Р. п. о., локально изометричное односвязному Р. п. о. M, получается из M факторизацией по произвольной дискретной группе изометрий Клиффорда — Вольфа (т. е. движений многообразия M, перемещающих все точки на одинаковые расстояния [2]).

Наиболее изученными классами Р. п. о. являются римановы симметрич. пространства, однородные кэлеровы пространства и однородные кватернионные пространства, изотропно неприводимые Р. п. о. (классифицированы в [9], [10]), нормальные Р. п. о., в к-рых скалярное произведение γ_0 в $\mathfrak{M}$ продолжается до невырожденной симметрической $\mathrm{Ad}\, G$-инвариантной билинейной формы на $\mathfrak{G}$, естественно редуктивные Р. п. о., характеризуемые тем, что в них любая геодезическая является траекторией однопараметрич. группы движений.

Изучена структура Р. п. о. с различными условиями на тензор кривизны. Напр., известна классификация Р. п. о. положительной секционной кривизны [5]. Описана структура просто транзитивных групп движений Р. п. о. неположительной кривизны [8], неотрицательной кривизны и неотрицательной кривизны Риччи [4]. Р. п. о. с разрешимой группой движений G всегда имеет неположительную скалярную кривизну sk, и случай $\mathrm{sk}=0$ возможен только для локально евклидова пространства. Любая инвариантная риманова метрика на односвязном Р. п. о. G/K имеет неположительную скалярную кривизну тогда и только тогда, когда K есть максимальная компактная подгруппа группы G (см. [4]).

Р. п. о. (M, γ) наз. эйнштейновым, если его тензор Риччи ρ пропорционален метрике: $\rho=\lambda\gamma$, $\lambda=\mathrm{const}$. Проблема описания эйнштейновых Р. п. о. не решена (1983). Известен ряд частных результатов. Пусть $(M=G/K, \; \gamma)$ — эйнштейново Р. п. о. со скалярной кривизной sk. 1) Если $\mathrm{sk}>0$, то многообразие M компактно. Описаны все такие пространства: а) если (M, γ) — кватернионное пространство, б) если M диффеоморфно симметрич. пространству ранга один, в) для нек-рого класса естественно редуктивных Р. п. о. (см. [7]) и для изотропно неприводимых Р. п. о. (см. [10]). 2) Если $\mathrm{sk}=0$, то M есть локально евклидово пространство. 3) Если $\mathrm{sk}<0$ и группа G унимодулярна (т. е. определитель операторов ее присоединенного представления равен 1), то группа G полупроста.

Лит.: [1] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1981; [2] Вольф Дж., Пространства постоянной кривизны, пер. с англ., М., 1982; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М.,

1964; [4] Bérard Bergery L., «Ann. sci Ec. norm. sup.», 1978, t. 11, № 4, p. 543—76; [5] его же, «J. Math. pures et appl.», 1976, t. 55, p. 47—67; [6] Jensen G. R., «J. Dif. Geom.», 1973, v. 8, p. 599—614; [7] D'Atri J. E., Ziller W., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1979, v. 18, p. 1—72; [8] Azencott R., Wilson E. N., там же, 1976, v. 8, p. 1—102; [9] Мантуров О. В., «Тр. сем. по вект. и тенз. анализу», 1966, т. 13, 68—145; [10] Wolf J., «Acta math.», 1968, v. 120, p. 59—148.
Д. В. Алексеевский.

РИМАНОВЫ КООРДИНАТЫ — см. *Геодезические координаты.*

РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КЛАССИФИКАЦИЯ — изучение римановых поверхностей (р. п.), связанное с рассмотрением поведения функций различных классов на этих поверхностях.

Комплексная функция $f: R \to \overline{\mathbb{C}}$ на р. п. R наз. аналитической на R, если для любой точки $p_0 \in R$ существуют окрестность U и *локальный униформизирующий параметр* $z=\varphi(p)$, $\varphi(p_0)=0$, отображающий гомеоморфно U на единичный круг $D=\{z \in \mathbb{C} : |z|<1\}$ и такой, что сложная функция $F(z)=f[\varphi^{-1}(z)]$ является однозначной аналитич. функцией в D. Аналогично определяются на р. п. действительные и комплексные гармонич. функции, субгармонич. функции и др. Пусть W — нек-рый конформно инвариантный класс функций на р. п. R, содержащий константы. Задача Р. п. к. в простейшей постановке состоит в определении условий, при к-рых данная р. п. R принадлежит или не принадлежит классу O_W таких р. п., что класс W на них состоит только из констант. Теория Р. п. к. выросла в 20 в. из классич. теоремы Римана о конформном отображении односвязных р. п., проблемы типа, проблемы существования *Грина функции* р. п. и понятия идеальной границы р. п.

Теорема Римана утверждает, что любая односвязная р. п. R отображается конформно (и, следовательно, гомеоморфно) на плоскую область D одного из трех видов: $D=\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость (случай р. п. R эллиптического типа); $D=\mathbb{C}$ — конечная комплексная плоскость (R — параболического типа); $D=\{z \in \mathbb{C} : |z|<1\}$ — единичный круг (R — гиперболического типа). Поскольку эллиптич. случай отличается от остальных уже топологически, остается трудная задача распознавания, когда данная р. п. R принадлежит гиперболическому или параболич. типу. Это и есть классич. проблема типа, полностью пока не решенная (1983). Известно, что замкнутая р. п. рода g при $g=0$ эллиптич. типа, при $g=1$ параболич. типа, при $g>1$ гиперболич. типа, поэтому проблема типа важна в основном для открытых р. п. В случае произвольной р. п. R, не обязательно односвязной, ее типом является тип ее универсальной накрывающей поверхности (см. *Универсальное накрытие*) $\hat{R}$, к-рая всегда односвязна.

Для односвязных конечных р. п. R задача отыскания конформного отображения R на единичный круг D эквивалентна задаче отыскания функции Грина $G(p, p_0)$ для R, т. е. положительной гармонич. функции с логарифмич. особенностью вида $\ln(1/|z-z_0|)$ в полюсе $p_0 \in R$ ($z=\varphi(p)$ — параметр в окрестности p_0, $z_0=\varphi(p_0)$, обращающийся в нуль во всех точках края ∂R). Функция Грина строится и для многосвязных конечных р. п. гиперболич. типа. В случае произвольной открытой р. п. R можно построить исчерпание $\{\overline{R}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ поверхности R с помощью конечных р. п. $\overline{R}_\nu$ с краем, имеющих функции Грина

$$G_\nu(p, p_0)=\ln\frac{1}{|z-z_0|}+\gamma_\nu+O(|z-z_0|),\ z \to z_0$$

(или $G_\nu(p, p_0)\equiv+\infty$, начиная с нек-рого номера ν), и таких, что $\overline{R}_\nu \subset R_{\nu+1}$, $\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\overline{R}_\nu=R$. Постоянная

$\gamma_\nu, -\infty < \gamma_\nu \leqslant +\infty$, наз. *Робена постоянной* р. п. $\overline{R}_\nu$, $c_\nu = e^{-\gamma_\nu}$ есть *емкость* края $\partial \overline{R}_\nu$ (относительно фиксированного полюса $p_0 \in R$). При стремлении ν к ∞ значения $G_\nu(p, p_0)$ и γ_ν могут только возрастать. Функция Грина открытой р. п. R определяется как предел $G(p, p_0)$ возрастающей последовательности $\{G_\nu(p, p_0)\}$, если он существует; в противном случае, когда

$$\lim_{\nu \to \infty} G_\nu(p, p_0) = +\infty,$$

говорят, что р. п. R не имеет функции Грина, причем существование или несуществование функции Грина не зависит от выбора полюса $p_0 \in R$. Класс р. п., для к-рых функция Грина не существует, обозначается $\mathcal{O}_G$. Иными словами, класс $\mathcal{O}_G$ характеризуется тем, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \gamma_\nu = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{\nu \to \infty} c_\nu = 0,$$

причем эти соотношения также не зависят от выбора полюса.

Пусть R — открытая р. п. и $\{\Delta_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ — т. н. определяющая последовательность замкнутых на R областей Δ_ν, т. е. такая последовательность, что 1) граница Δ_ν есть простая замкнутая кривая на R; 2) $\Delta_{\nu+1} \subset \Delta_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$; 3) $\bigcap_{\nu=1}^\infty \Delta_\nu = \varnothing$, то есть Δ_ν не компактны на R. Две определяющие последовательности $\{\Delta_\nu\}$ и $\{\Delta'_\nu\}$ эквивалентны, если каждому ν соответствуют такие n и m, что $\Delta'_n \subset \Delta_\nu$ и $\Delta_m \subset \Delta'_\nu$. Классы эквивалентности определяющих последовательностей наз. граничными элементами р. п. R, а совокупность всех граничных элементов образует идеальную границу Γ р. п. R, рассматриваемой как топологич. поверхность. Напр., идеальная граница единичного круга D состоит из одного граничного элемента. Отметим, что функция Грина открытой р. п. R, в отличие от случая гиперболич. конечной р. п., не обязательно обращается в нуль на всех элементах идеальной границы Γ. Класс $\mathcal{O}_G$ характеризуется также как класс р. п. с идеальной границей нулевой емкости, или, короче, как класс р. п. с нулевой границей; если $R \notin \mathcal{O}_G$, то $\lim_{\nu \to \infty} c_\nu = c > 0$ наз. емкостью идеальной границы. Существование или несуществование функции Грина р. п. R, а также объем других функциональных классов на R определяются прежде всего этой и другими более тонкими характеристиками идеальной границы, связанными с самими функциональными классами.

Основными функциональными классами W на р. п. R являются следующие:

AB — класс ограниченных однозначных аналитич. функций на R;

AD — класс однозначных аналитич. функций $f(z)$ на R с конечным *Дирихле интегралом*

$$D_R(f) = \iint_R \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 dx\, dy, \quad z = x + iy;$$

HP, HB и HD — классы однозначных гармонич. функций на R соответственно положительных, ограниченных и с конечным интегралом Дирихле. Эти классы могут комбинироваться, напр. ABD — класс ограниченных однозначных аналитич. функций на R с конечным интегралом Дирихле. Для соответствующих классов $\mathcal{O}_W$ р. п. R установлены следующие строгие включения и равенства:

$$\mathcal{O}_G \subset \mathcal{O}_{HP} \subset \mathcal{O}_{HB} \subset \mathcal{O}_{AB} \subset \mathcal{O}_{ABD} = \mathcal{O}_{AD},$$

$$\mathcal{O}_{HB} \subset \mathcal{O}_{HD} \subset \mathcal{O}_{AD}, \ \mathcal{O}_{HBD} = \mathcal{O}_{HD}.$$

Для плоских областей R эти соотношения упрощаются:

$$\mathfrak{G}_G = \mathfrak{G}_{HP} = \mathfrak{G}_{HB} = \mathfrak{G}_{HD},$$
$$\mathfrak{G}_{AB} \subset \mathfrak{G}_{ABD} = \mathfrak{G}_{AD}.$$

Важное значение имеют также классы Харди AH_p, $0<p\leqslant+\infty$, однозначных аналитич. функций $w=f(z)$ на р. п. R. При $0<p<+\infty$ функция $f\in AH_p$, если субгармонич. функция $|f|^p$ имеет на всей р. п. R гармонич. мажоранту, а $AH_\infty=AB$ (см. *Граничные свойства аналитических функций*).

Р. п. параболич. типа принадлежит классу $\mathfrak{G}_G$, поэтому иногда вопрос о характеризации р. п. класса $\mathfrak{G}_G$ наз. обобщенной проблемой типа. Имеется много результатов, в к-рых в различных терминах устанавливаются условия принадлежности р. п. указанным выше классам. Глубокие исследования были посвящены выяснению внутренних свойств р. п. определенных классов. В частности, оказалось, что р. п. с нулевой границей во многих отношениях аналогичны замкнутым р. п. На них строятся аналоги *абелевых дифференциалов* и соответствующие интегралы.

Более тонкие свойства идеальной границы р. п. R удается исследовать также с помощью различных компактификаций R. Напр., пусть $N(R)$ — винеровская алгебра функций u на р. п. R, ограниченных, непрерывных и гармонизуемых на R; последнее означает, что для любой регулярной области $G\subset R$ существует обобщенное решение задачи Дирихле в смысле Винера — Перрона (см. *Перрона метод*) с граничными данными u на границе ∂G. Компактификацией Винера р. п. R наз. компактное хаусдорфово пространство R^* такое, что R есть открытое плотное подпространство R^*, каждая функция $u\in N(R)$ непрерывно продолжается на R^* и $N(R)$ разделяет точки R^*. Компактификация Винера существует для любой р. п. R. Множество $\Gamma(R)=R^*\setminus R$ наз. винеровской идеальной границей р. п. R, а подмножество $\Delta(R)\subset\Gamma(R)$, состоящее из тех точек R^*, в к-рых все потенциалы из $N(R)$ обращаются в нуль,— винеровской гармонической границей. В этих терминах, напр., включение $R\in\mathfrak{G}_G$ равносильно равенству $\Delta(R)=\varnothing$; отсюда получается также строгое включение $\mathfrak{G}_{HP}\subset\mathfrak{G}_{HB}$.

С Р. п. к. связан также вопрос об *устранимых множествах* на р. п. Так, компакт K на р. п. R наз. AB-устранимым, если для нек-рой окрестности $U\supset K$ на R все AB-функции на $\bar{U}\setminus K$ имеют аналитич. продолжение на всю окрестность U.

Внимание многих исследователей привлечено также к вопросам классификации римановых многообразий произвольных размерностей $N\geqslant 2$, связанной с рассмотрением описанных выше классов функций.

Лит. см. при ст. *Риманова поверхность*.

Е. Д. Соломенцев.

РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОНФОРМНЫЕ КЛАССЫ — классы, состоящие из конформно эквивалентных римановых поверхностей. Замкнутые римановы поверхности (р. п.) имеют простой топологич. инвариант — род g; при этом любые две поверхности одного рода гомеоморфны. В простейших случаях топологич. эквивалентность двух р. п. обеспечивает и их принадлежность к одному и тому же Р. п. к. к., то есть конформную эквивалентность, или, говоря иначе, совпадение их конформных структур. Это выполняется, напр., для поверхностей рода 0, то есть гомеоморфных сфере. В общем случае дело обстоит не так. Еще Б. Риман (B. Riemann) заметил, что классы конформной эквивалентности р. п. рода $g>1$ зависят от $3g-3$ комплексных параметров, называемых *модулями римановых поверхностей*; для конформно эквивалентных поверхностей эти модули совпадают. Случай $g=1$ описан ниже. Если же рассматривать компактные р. п. рода g с n

аналитич. компонентами края, то для их конформной эквивалентности требуется совпадение $6g-6+3n$ действительных параметров-модулей ($g\geqslant 0$, $n\geqslant 0$, $6g-6+$ $+3n>0$). В частности, для n-связных плоских областей ($n\geqslant 3$) таких модулей $3n-6$; всякая двусвязная плоская область конформно эквивалентна кольцу с определенным отношением радиусов.

Указанное выше замечание Б. Римана послужило истоком классич. проблемы модулей р. п., к-рая заключается в том, чтобы изучить природу этих параметров и, если возможно, ввести их так, чтобы они определяли на множестве р. п. данного рода g комплексно-аналитич. структуру. Имеются два подхода к проблеме модулей: алгебраический и аналитический. Алгебраич. подход связан с изучением полей $K(S)$ мероморфных функций на р. п. S. В случае замкнутой поверхности $K(S)$ есть поле алгебраич. функций (для $g=0$ — это поле рациональных, а для $g=1$ — поле эллиптич. функций). Каждая замкнутая р. п. S конформно эквивалентна р. п. нек-рой алгебраич. функции, определяемой уравнением $P(z, w)=0$, где P — неприводимый многочлен над $\mathbb{C}$. Это уравнение задает плоскую алгебраич. кривую X, и поле рациональных функций на X отождествляется с полем мероморфных функций на S. Конформной эквивалентности р. п. соответствует бирациональная эквивалентность (совпадение) полей их алгебраич. функций или, что равносильно, бирациональная эквивалентность определяемых этими поверхностями алгебраич. кривых.

Аналитич. подход опирается на геометрические и аналитич. свойства р. п. Оказывается удобным ослабить конформную эквивалентность р. п., наложив топологич. ограничения. Вместо р. п. S данного рода $g\geqslant 1$ берутся пары (S, f), где f — гомеоморфизм фиксированной поверхности S_0 рода g на S; две пары (S, f), (S', f') считаются эквивалентными, если существует такой конформный гомеоморфизм $h: S\to S'$, что отображение

$$(f')^{-1}\circ h\circ f\colon\ S_0\longrightarrow S_0$$

гомотопно тождественному. Множество классов эквивалентности $\{(S, f)\}$ наз. пространством Тайхмюллера $T(S_0)$ поверхности S_0. В $T(S_0)$ вводится метрика с помощью квазиконформных гомеоморфизмов $S\to S'$. Аналогичным образом определяется пространство Тайхмюллера и для некомпактной р. п., но тогда берутся только квазиконформные гомеоморфизмы f. Для замкнутых поверхностей S_0 данного рода g пространства $T(S_0)$ изометрически изоморфны, и можно говорить о пространстве Тайхмюллера T_g поверхностей рода g. Пространство R_g Р. п. к. к. рода g получается факторизацией T_g по нек-рой счетной группе Γ_g его автоморфизмов, называемой *модулярной группой.*

Наиболее простым является случай поверхностей рода 1 — торов. Каждый тор S после конформного отображения его универсальной накрывающей на комплексную плоскость $\mathbb{C}$ представляется в виде $\mathbb{C}/G$, где G — группа сдвигов с двумя образующими ω_1, ω_2 такими, что $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$; при этом два тора S и S' конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда отношения $\tau=\omega_2/\omega_1$ и $\tau'=\omega_2'/\omega_1'$ соответствующих образующих связаны модулярным преобразованием

$$\tau'=(a\tau+b)/(c\tau+d),\ ad-bc=1;$$
$$a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z}.$$

В качестве (комплексного) модуля данного Р. п. к. к. $\{S\}$ можно взять значение эллиптической модулярной функции $J(\tau)$. Пространство Тайхмюллера T_1 совпадает с полуплоскостью $H=\{\tau\in\mathbb{C}: \operatorname{Im}\tau>0\}$, Γ_1 есть эллиптическая модулярная группа $SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm 1\}$, а $R_1=$ $=T_1/\Gamma_1$ — риманова поверхность, конформно эквивалентная $\mathbb{C}\setminus\{0, 1\}$. Все эллиптич. кривые (и поверхности рода 1) допускают одновременную униформизацию с помощью функции Вейерштрасса $\wp(z;\ 1,\ \tau)$ и ее производной $\wp'(z;\ 1,\ \tau)$.

При $g>1$ ситуация значительно сложнее. Установлены, в частности, следующие основные свойства пространства T_g: 1) T_g гомеоморфно R^{6g-6}; 2) T_g биголоморфно вкладывается в виде ограниченной области в $\mathbb{C}^{3g-3}$, к-рая голоморфно выпукла; 3) модулярная группа Γ_g дискретна (даже собственно разрывна) и при $g>2$ является полной группой биголоморфных автоморфизмов T_g; 4) накрытие $T_g \to T_g/\Gamma_g$ является разветвленным, а $T_g/\Gamma_g=R_g$ есть нормальное комплексное пространство с неуниформизируемыми особенностями. Такие же свойства, за отдельными исключениями в 3), имеют место и для более общего случая замкнутых р. п. с конечным числом проколов, к-рым соответствуют конечномерные пространства Тайхмюллера. Указанное биголоморфное вложение T_g в $\mathbb{C}^{3g-3}$ получается с помощью *униформизации* и свойств *квазиконформных отображений.* Поверхность S_0 представляется в виде $S_0=H/\Gamma_0$, где Γ_0 — *фуксова группа*, действующая разрывно в верхней полуплоскости H (определяемая с точностью до сопряжения в группе всех конформных автоморфизмов H), и рассматриваются квазиконформные автоморфизмы $w=f^{\mu}(z)$ плоскости $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, т. е. решения уравнения Бельтрами $w_{\bar z}=\mu(z)w_z$, где $\mu(z)d\bar z/dz$ — инвариантные относительно Γ_0 формы с носителями в H, $\|\mu\|_{L_\infty}<1$. Пусть еще f^{μ} оставляют неподвижными точки 0, 1, ∞. Тогда T_g можно отождествить с пространством сужений $f^{\mu}|R$ или, что равносильно, сужений $f^{\mu}|L$, $L=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z<0\}$, и T_g биголоморфно эквивалентно области, заполняемой производными Шварца

$$\{f^{\mu},\ z\}=\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left[\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]^2,\ f=f^{\mu},\ z\in L,$$

в комплексном пространстве $B(L,\ \Gamma_0)$ голоморфных в L решений уравнения

$$\varphi(\gamma(z))\,\gamma'^2(z)=\varphi(z),\ \ \gamma\in\Gamma_0,$$

с нормой

$$\|\varphi\|=\sup_L|\operatorname{Im} z|^2|\varphi(z)|;$$

при этом $\dim B(L,\ \Gamma_0)=3g-3$. Используя это вложение, можно построить расслоенное пространство $\tilde T_g$ с базой T_g, также допускающее введение комплексной структуры, и голоморфные функции $\psi_1,\ \dots,\ \psi_{5g-5}$ на $\tilde T_g$, позволяющие дать параметрич. представление всех алгебраич. кривых рода g в комплексном проективном пространстве P^n, $n\geqslant 2$. Указанная конструкция, связанная с вложением T_g в $B(L,\ \Gamma_0)$, обобщается на произвольные р. п. и фуксовы группы. В частности, для компактных р. п. с аналитич. границами получающееся пространство Тайхмюллера допускает введение в нем глобальной вещественно аналитич. структуры соответствующей размерности.

Другое описание Р. п. к. к. рода $g>1$ получается с помощью т. н. матриц периодов этих поверхностей. Это — симметрические $(g\times g)$-матрицы с положительно определенной мнимой частью. Пространство T_g голоморфно вкладывается во множество всех таких матриц (верхнюю полуплоскость Зигеля) H_g (см. [4], [5]).

Имеются замкнутые р. п. с определенной симметрией, конформные классы к-рых зависят от меньшего числа параметров. Это — гиперэллиптические поверхности, эквивалентные двулистным р. п. функций $w=\sqrt{p(z)}$, где $p(z)$ — многочлены вида $(z-z_1)\dots(z-z_{2g+2})$. Они допускают конформную инволюцию и зависят от $2g-1$ комплексных параметров. Все поверхности рода 2 гиперэллиптичны; при $g>2$ такие поверхности образуют в T_g аналитич. подмногообразия размерности $2g-1$.

С Р. п. к. к. связан вопрос о конформных автоморфизмах данной римановой поверхности S. За исключением нескольких частных случаев группа $\operatorname{Aut} S$ таких автоморфизмов дискретна. В случае замкнутых поверхностей рода $g>1$ она конечна, причем тогда порядок $\operatorname{Aut} S$ не превосходит $84(g-1)$.

Имеющаяся классификация некомпактных р. п. бесконечного рода основана на выделении отдельных конформных инвариантов и не определяет Р. п. к. к. полностью; обычно это делается в терминах существования аналитических или гармонич. функций с определенными свойствами.

Лит.: [1] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [2] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Крушкаль С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975; [4] Берс Л., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 4, с. 153—98; [5] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957; [6] Abikoff W., The real analytic theory of Teichmüller space, B.— [u. a.], 1980. *С. Л. Крушкаль.*

РИМСКИЕ ЦИФРЫ — цифры древних римлян. Система Р. ц. основана на употреблении особых знаков для десятичных разрядов I=1, X=10, C=100, M=1000 и их половин V=5, L=50, D=500. Натуральные числа записываются при помощи повторения этих цифр. При этом если большая цифра стоит перед меньшей, то они складываются (принцип сложения), если же меньшая — перед большей, то меньшая вычитается из большей (принцип вычитания). Последнее правило применяется только во избежание четырехкратного повторения одной и той же цифры. Выполнение арифметич. действий над многозначными числами в этой записи весьма неудобно. Система Р. ц. в настоящее время не применяется, за исключением, в отдельных случаях, обозначения веков, годов н. э. и месяцев при указании дат, порядковых числительных, а также иногда производных небольших порядков, больших трех: y^{IV}, y^{V} и т. д. *БСЭ-3.*

РИСК статистической процедуры — характеристика, выражающая средние потери экспериментатора в задаче принятия статистич. решения и этим самым определяющая качество используемой статистич. процедуры.

Пусть по реализации случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, надлежит принять решение d из измеримого пространства решений $(D, \mathcal{A})$ относительно параметра θ. Далее, пусть потери статистика от принятия решения d, если случайная величина X подчиняется закону P_θ, равны $L(\theta, d)$, где L — нек-рая функция потерь, заданная на $\Theta \times D$. В таком случае, если статистик в задаче принятия решения d пользуется нерандомизированной *решающей функцией* $\delta : \mathfrak{X} \to D$, то в качестве характеристики этой решающей функции δ используют функцию

$$R(\theta, \delta) = \mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta(X)) = \int_{\mathfrak{X}} L(\theta, \delta(X))\, d\mathsf{P}_\theta(x),$$

называемую функцией риска, или просто риском, статистич. процедуры, основанной на решающей функции δ относительно функции потерь L.

Понятие Р. позволяет ввести отношение частичного упорядочивания на множестве $\Delta = \{\delta\}$ всех нерандомизированных решающих функций, при этом считают, что из двух различных решающих функций δ_1 и δ_2 предпочтительнее является δ_1, если $R(\theta, \delta_1) \leqslant R(\theta, \delta_2)$ равномерно по всем θ.

В случае, если решающая функция δ является рандомизированной, Р. статистич. процедуры определяется по формуле

$$R(\theta, \delta)=\int_{\mathfrak{X}}\int_{D} L(\theta, d)\, dQ_x(d)\, d\mathsf{P}_{\theta}(x),$$

где $\{Q_x(d)\}$ — семейство марковских переходных распределений вероятностей, определяющих процедуру рандомизации.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [3] Вальд А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, М., 1967. *М. С. Никулин.*

РИСОВСКАЯ ПОЛУГРУППА МАТРИЧНОГО ТИПА — теоретико-полугрупповая конструкция, определяемая следующим образом. Пусть S — произвольная полугруппа, I и Λ — (индексные) множества, $P=(p_{\lambda i})$ — $(\Lambda\times I)$-матрица над S, т. е. отображение декартова произведения $\Lambda\times I$ в S. На множестве $M=I\times S\times\Lambda$ определяется операция посредством формулы

$$(i, s, \lambda)(j, t, \mu)=(i, sp_{\lambda_j}t, \mu).$$

Тогда M превращается в полугруппу, к-рая наз. Р. п. м. т. над полугруппой S и обозначается $\mathscr{M}(S; I, \Lambda; P)$; матрица P наз. сэндвич-матрицей полугруппы $\mathscr{M}(S; I, \Lambda; P)$. Если S есть полугруппа с нулем 0, то $Z=\{(i, 0, \lambda)|i\in I, \lambda\in\Lambda\}$ есть идеал в $M=\mathscr{M}(S; I, \Lambda; P)$ и факторполугруппа Риса M/Z (см. *Полугруппа*) обозначается $\mathscr{M}^0(S; I, \Lambda; P)$; в случае, когда $S=G^0$ есть группа G^0 с присоединенным нулем, вместо $\mathscr{M}^0(G^0; I, \Lambda; P)$ пишут $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ и называют эту полугруппу Р. п. м. т. над группой с присоединенным нулем G^0. Для полугрупп $\mathscr{M}(G; I, \Lambda; P)$ и $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ группа G наз. структурной группой.

Другое представление Р. п. м. т. над полугруппой S с нулем и $(\Lambda\times I)$-сэндвич-матрицей P осуществляется следующим образом. $(I\times\Lambda)$-матрица над S наз. матрицей Риса, если она содержит не более одного ненулевого элемента. Через $\|a\|_{i\lambda}$ обозначается матрица Риса над S, у к-рой в i-й строке и λ-м столбце стоит a, а на остальных местах — нули. На множестве всех $(I\times\Lambda)$-матриц Риса над S задается операция:

$$A\circ B=APB, \qquad (*)$$

где в правой части — «обычное» матричное умножение. Относительно этой операции указанное множество образует полугруппу. Отображение $\|a\|_{i\lambda}\mapsto(i, a, \lambda)$ является изоморфизмом этой полугруппы на полугруппу $\mathscr{M}^0(S; I, \Delta; P)$; обозначение $\mathscr{M}^0(S; I, \Lambda; P)$ применяется для обеих этих полугрупп. Формула $(*)$ объясняет термин «сэндвич-матрица» для P. Если G — группа, то полугруппа $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ будет регулярной тогда и только тогда, когда каждая строка и каждый столбец матрицы P содержит ненулевой элемент; всякая полугруппа $\mathscr{M}(G; I, \Lambda; P)$ вполне проста, всякая регулярная полугруппа $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ вполне 0-проста. Обращение последних двух утверждений составляет основное содержание теоремы Риса [1]: всякая вполне простая (вполне 0-простая) полугруппа изоморфно представима Р. п. м. т. над группой (регулярной Р. п. м. т. над группой с присоединенным нулем). Если $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ и $\mathscr{M}^0(G'; I', \Lambda'; P')$ изоморфны, то группы G и G' изоморфны, I и I' равномощны, Λ и Λ' равномощны; необходимые и достаточные условия изоморфизма полугрупп $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ и $\mathscr{M}^0(G'; I', \Lambda'; P')$ хорошо известны и наряду с только что приведенными условиями включают вполне определенную связь между сэндвич-матрицами P и P' (см. [1]—[3]). В частности, любая вполне 0-простая полугруппа изоморфно представима Р. п. м. т., у сэндвич-матрицы P к-рой каждый элемент в данной строке и данном столбце равен либо 0, либо единице структурной группы; такая сэндвич-матрица наз. **нормализованной.** Аналогичные свойства выполняются для вполне простых полугрупп.

Лит.: [1] Rees D., «Proc. Camb. Phil. Soc», 1940, v. 36, p. 387—400; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [3] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960. *Л. Н. Шеврин.*

РИССА БАЗИС — см. *Рисса система.*

РИССА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — формула, дающая выражение для производной тригонометрич. полинома в нек-рой точке через значения самого полинома в конечном числе точек: если $T_n(x)$ — тригонометрич. полином с действительными коэффициентами степени n, то для любого действительного x имеет место равенство

$$T'_n(x)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sin^2\left(x_k^{(n)}/2\right)}T_n\left(x+x_k^{(n)}\right),$$

где $x_k^{(n)}=(2k-1)\pi/2n$, $k=1, 2, \ldots, 2n$.

Р. и. ф. обобщается на целые функции экспоненциального типа: если f — целая функция, ограниченная на действительной оси $\mathbb{R}$ и имеющая степень σ, то

$$f'(x)=\frac{\sigma}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1/2)^2}f\left(x+\frac{2k+1}{2\sigma}\pi\right),\ x\in\mathbb{R},$$

причем ряд, стоящий в правой части равенства, сходится равномерно на всей действительной оси.

Установлена М. Риссом [1].

Лит.: [1] Riesz M., «C. r. Acad. sci.», 1914, t. 158, p. 1152—54; [2] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ч. 1, Л.—М., 1937; [3] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977. *Л. Д. Кудрявцев.*

РИССА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — метод суммирования числовых и функциональных рядов; обозначается (R, λ, k). Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ суммируем **методом суммирования Рисса** (R, λ, k) к сумме s, если

$$\lim_{\omega\to+\infty}\sum_{\lambda_n\leqslant\omega}\left(1-\frac{\lambda_n}{\omega}\right)^k a_n=s,$$

где $k>0$, $0\leqslant\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\to\infty$, ω — непрерывный параметр. Метод был введен М. Риссом [1] для суммирования рядов Дирихле. Метод (R, λ, k) регулярен; при $\lambda_n=n$ равносилен *Чезаро методу суммирования* (C, k) и совместен с ним.

М. Рисс рассматривал также метод, в к-ром суммируемость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ определяется через предел последовательности $\{\sigma_m\}$, где

$$\sigma_m=\frac{1}{P_m}\sum_{k=0}^{m}p_k s_k,$$

$$P_m=\sum_{k=0}^{m}p_k\neq 0,\ s_k=\sum_{n=0}^{k}a_n.$$

Этот метод обозначается (R, p_n). Метод (R, λ, k) является модификацией метода (R, p_n) (при $k=1$) и обобщением его на произвольные $k>0$.

Лит.: [1] Riesz M., «C. r. Acad. sci.», 1911, t. 152, p. 1651—54; [2] его же, там же, 1909, t. 149, p. 18—21; [3] Hardy G. H., Riesz M., The general theory of Dirichlet's series, Camb., 1915; [4] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *И. И. Волков.*

РИССА НЕРАВЕНСТВО — 1) Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система функций на отрезке $[a, b]$, $|\varphi_n|\leqslant M$ почти всюду на $[a, b]$ для любого n.

а) Если $f\in L^p[a, b]$, $1<p\leqslant 2$, то ее коэффициенты Фурье

$$c_n=\int_a^b f\overline{\varphi}_n dx$$

удовлетворяют **неравенству Рисса**

$$\|\{c_n\}\|_q\leqslant M^{2/p-1}\|f\|_p,\ 1/p+1/q=1.$$

б) Для любой последовательности $\{c_n\}$ с $\|\{c_n\}\|_p<\infty$, $1<p\leqslant 2$, существует функция $f\in L^q[a, b]$, имеющая c_n своими коэффициентами Фурье и удовлетворяющая неравенству Рисса

$$\|f\|_q\leqslant M^{2/p-1}\|\{c_n\}\|_p, \quad 1/p+1/q=1.$$

2) Если $f\in L^p[0, 2\pi]$, $1<p<\infty$, то сопряженная функция $\overline{f}\in L^p[0, 2\pi]$ и справедливо неравенство Рисса

$$\|\overline{f}\|_p\leqslant A_p\|f\|_p,$$

где A_p — постоянная, зависящая только от p.

Утверждение 1) впервые доказано Ф. Риссом [1], частные случаи этого утверждения ранее рассматривали У. Юнг (W. Young) и Ф. Хаусдорф (F. Hausdorf). Утверждение 2) впервые доказано М. Риссом [2].

Лит.: [1] Riesz F., «Math. Z.», 1923, Bd 18, S. 117—24; [2] Riesz M., там же, 1927, Bd 27, S. 218—44; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, с. 211, 566; [4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1965, с. 404 (т. 1), с. 154 (т. 2). *Т. П. Лукашенко.*

РИССА ПОТЕНЦИАЛ, α-потенциал,— потенциал вида

$$V_\alpha(x)=V(x;\,\alpha,\mu)=\int\frac{d\mu(y)}{|x-y|^\alpha},\ \alpha>0,$$

где μ — положительная борелевская мера с компактным носителем на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $|x-y|$ — расстояние между точками $x, y\in\mathbb{R}^n$. При $n\geqslant 3$ и $\alpha=n-2$ Р. п. совпадает с классическим *ньютоновым потенциалом*; при $n=2$ и $\alpha\to 0$ предельным случаем Р. п. в нек-ром смысле является *логарифмический потенциал.* При $n\geqslant 3$ и $0<\alpha\leqslant n-2$ Р. п. есть супергармонич. функция во всем пространстве $\mathbb{R}^n$; при этом в классич. случае $\alpha=n-2$ вне носителя $S(\mu)$ меры μ потенциал $V(x)=V_{n-2}(x)$ есть гармонич. функция. При $\alpha>n-2$ Р. п. $V_\alpha(x)$ есть субгармонич. функция вне $S(\mu)$. При всех $\alpha>0$ Р. п. $V_\alpha(x)$ — полунепрерывная снизу функция в $\mathbb{R}^n$, непрерывная вне $S(\mu)$.

Из общих свойств Р. п. важнейшими являются следующие. Принцип непрерывности: если $x_0\in S(\mu)$ и сужение $V_\alpha(x)|S(\mu)$ непрерывно в точке x_0, то $V_\alpha(x)$ непрерывен в x_0 как функция на всем $\mathbb{R}^n$. Ограниченный принцип максимума: если $V_\alpha(x)|S(\mu)\leqslant M$, то $V_\alpha(x)\leqslant 2^\alpha M$ всюду в $\mathbb{R}^n$. При $n-2\leqslant\alpha<n$ справедлив более точный принцип максимума: если $V_\alpha(x)|S(\mu)\leqslant M$, то $V_\alpha(x)\leqslant M$ всюду в $\mathbb{R}^n$ (это утверждение остается верным и при $n=2$ и $\alpha\to 0$, то есть для логарифмич. потенциала).

Теория *емкости* для Р. п. строится, напр., исходя из понятия α-энергии меры μ:

$$E_\alpha(\mu)=\iint\frac{d\mu(x)\,d\mu(y)}{|x-y|^\alpha},\ \alpha>0.$$

Для компакта K можно положить

$$V_\alpha(K)=\inf\{E_\alpha(\mu)\},$$

где нижняя грань берется по всем мерам μ, сосредоточенным на K и таким, что $\mu(K)=1$; тогда α-емкость равна

$$C_\alpha(K)=[V_\alpha(K)]^{-1/\alpha}.$$

Если $V_\alpha(K)<+\infty$, то нижняя грань достигается на сосредоточенной на K емкостной мере λ, $\lambda(K)=1$, порождающей соответствующий емкостный α-потенциал $V(x;\,\alpha,\lambda)$. Дальнейшее построение α-емкостей произвольных множеств производится так же, как и для классич. емкостей.

Р. п. назван по имени М. Рисса (см. [2]), получившего ряд важных свойств Р. п.; впервые такие потенциалы были исследованы О. Фростманом (см. [1]).

Лит.: [1] Frostmann O., «Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.», 1935, v. 3; [2] Riesz M., «Acta sci. math. Szeged», 1938, v. 9, p. 1—42; [3] Ландкоф Н. С., Основы современ-

ной теории потенциала, М., 1966; [4] Хейман У., Кеннеди П., Субгармонические функции, пер. с англ., т. 1, М., 1980. *Е. Д. Соломенцев.*

РИССА ПРОИЗВЕДЕНИЕ — бесконечное произведение вида

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k \cos n_k x),\ \frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant q > 1,\ |a_k| \leqslant 1,\quad (1)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. $x \in [0, \pi]$.

С помощью таких произведений ($a_k=1$, $n_k=3^k$ при всех $k \in \mathbb{N}$) Ф. Рисс (F. Riesz) указал первый пример непрерывной функции с ограниченным изменением, коэффициенты Фурье к-рой не равны $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Если $q>3$, то тождество

$$\prod_{k=1}^{m}(1+a_k \cos n_k x)=1+\sum_{k=1}^{p_m}\gamma_k \cos kx,$$

$$p_m=n_1+\ldots+n_m,\ m \in \mathbb{N},\ x \in [0, \pi],$$

определяет ряд

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k \cos kx, \quad (2)$$

о к-ром говорят, что он представляет Р. п. (1). В случае, когда $q \geqslant 3$, $-1 \leqslant a_k \leqslant 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$, ряд (2) есть ряд Фурье — Стилтьеса неубывающей непрерывной функции F. Если $q>3$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2=+\infty,\ -1 \leqslant a_k \leqslant 1$$

при всех $k \in \mathbb{N}$, то $F'(x)=0$ почти всюду. Если дополнительно $a_k \to 0$, то ряд (2) сходится к нулю почти всюду.

Ряд проблем, относящихся в основном к теории тригонометрич. рядов, удалось решить, используя естественное обобщение Р. п., когда в (1) вместо $a_k \cos n_k x$ записаны специально выбранные тригонометрич. полиномы $T_k(x)$.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965. *В. Ф. Емельянов.*

РИССА ПРОСТРАНСТВО, векторная решетка, — вещественное частично упорядоченное векторное пространство X, в к-ром

1) структуры векторного пространства и упорядоченного множества согласованы, т. е. из $x, y, z \in X$ и $x<y$ следует $x+z<y+z$ и из $x \in X$, $x>0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda>0$ следует $\lambda x>0$;

2) для любых двух элементов x, y существует $\sup(x, y) \in X$. В частности, существуют sup и inf любого конечного множества.

В отечественной литературе Р. п. обычно наз. K-линеалами. Впервые такие пространства были введены Ф. Риссом (F. Riesz, 1928).

Примером Р. п. может служить пространство $C[a, b]$ действительных непрерывных на $C[a, b]$ функций с поточечным упорядочением. Для любого элемента x Р. п. определяются $x_+=\sup(x, 0)$, $x_-=\sup(-x, 0)$ и $|x|=x_++x_-$. При этом оказывается, что $x=x_+-x_-$. В Р. п. вводятся два вида сходимости последовательности $\{x_n\}$. Порядковая сходимость, o-сходимость: $x_n \xrightarrow{o} x_0$, если существуют монотонно возрастающая последовательность $\{y_n\}$ и монотонно убывающая последовательность $\{z_n\}$ такие, что $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ и $\sup y_n=\inf z_n=x_0$. Относительно равномерная сходимость, r-сходимость: $x_n \xrightarrow{r} x_0$, если существует элемент $u>0$ такой, что для любого $\varepsilon>0$ существует n_0 такое, что $|x_n-x_0|<\varepsilon u$ при $n \geqslant n_0$ (r-сходимость наз. также сходимостью с регулятором). Понятия o- и r-сходимости обладают многими обычными свойствами сходимости числовых последовательностей и естественным образом распространяются на направления $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subset X$.

Р. п. наз. **архимедовым**, если из x, $y \in X$ и $nx \leqslant y$ для $n=1,2,\ldots$ следует $x \leqslant 0$. В архимедовом Р. п. из $\lambda_n \to \lambda_0$ и $x_n \to x_0$ следует $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$ (λ_n, $\lambda \in \mathbb{R}$, x_n, $x_0 \in X$) и из r-сходимости следует o-сходимость.

Лит.: [1] Riesz F., в кн.: Atti del Congr. Int. dei Math., v. 3, Bologna, 1930, p. 143—48; [2] Luxemburg W., Zaanen A., Rieszspaces, v. 1, Amst.—L., 1971; [3] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. *В. И. Соболев.*

РИССА СИСТЕМА — понятие теории ортогональных систем. Пусть фиксирована в пространстве $L^2 = L^2(a, b)$ полная система функций $\{\psi_n\}$. Ее считают нормированной или, более общо, почти нормированной, т. е. допускают наличие чисел $m > 0$ и $M > 0$, при к-рых $m \leqslant \|\psi_n\| \leqslant M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Ослабляя требования ортогональности системы $\{\psi_n\}$, предполагают, что существует полная в L^2 система функций $\{g_n\}$ и такая, что $(\psi_n, g_n) = 1$, $(\psi_n, g_m) = 0$ для всех $n \neq m$. В частном случае, когда система $\{\psi_n\}$ ортонормирована, $g_n = \psi_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n$$

сходится в L^2 к функции f, то $a_n = (f, g_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому имеет смысл называть число $a_n = (f, g_n)$ n-коэффициентом Фурье функции f по системе $\{\psi_n\}$. В доказательстве ряда теорем теории ортогональных рядов играют важную роль неравенство Бесселя и теорема Рисса—Фишера. В общем случае эти теоремы не верны, и поэтому приходится выделять специальный класс Р. с. с помощью следующих требований к системе $\{\psi_n\}$.

1) Для любой функции f сходится ряд из квадратов коэффициентов Фурье, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, g_n)^2 < +\infty.$$

2) Для любой последовательности чисел $\{a_n\} \in l^2$ существует функция f, имеющая числа a_n своими n-коэффициентами Фурье по системе $\{\psi_n\}$, то есть $a_n = (f, g_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Первое требование к системе $\{\psi_n\}$ заменяет неравенство Бесселя, второе — теорему Рисса — Фишера. Н. К. Бари доказала (см. [2]), что система $\{\psi_n\}$ есть Р. с. тогда и только тогда, когда существует линейный непрерывный обратимый в L^2 оператор A такой, что система функций $\{A\psi_n\}$ является полной и ортонормированной. Поэтому Р. с. наз. также **базисом Рисса**, эквивалентным ортонормированному. Н. К. Бари указала удобный критерий для Р. с. Полная в L^2 система функций $\{\psi_n\}$ является Р. с. тогда и только тогда, когда матрица Грама $\|(\psi_n, \psi_m)\|$ определяет линейный непрерывный обратимый оператор в l^2. Если в Р. с. переставить произвольно члены, то получится Р. с. Обратно, если базис в L^2 остается базисом после любой перестановки его членов, то, нормируя его, получают Р. с. Естественное обобщение Р. с. получают, если заменить L^2 на замыкание линейной оболочки системы $\{\psi_n\}$ по норме того гильбертова пространства, из к-рого взяты элементы ψ_n (см. [4]).

Лит.: [1] Бари Н. К., «Докл. АН СССР», 1946, т. 54, с. 383—86; [2] ее же, «Уч. зап. МГУ», 1951, в. 148, № 4, с. 69—107; [3] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965; [4] Ганошкин В. Ф., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 6, с. 3—82. *В. Ф. Емельянов.*

РИССА ТЕОРЕМА — 1) Р. т. **о представлении субгармонической функции**: если $u(x)$ — субгармонич. функция в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, то существует единственная положительная борелевская мера μ на D такая, что для любого относительно компактного множества $K \subset D$

справедливо представление Рисса функции $u(x)$ в виде суммы потенциала и гармонич. функции $h(x)$:

$$u(x) = -\int_K E_n(|x-y|)\,d\mu(y) + h(x), \qquad (1)$$

где

$$E_2(|x-y|) = \ln\frac{1}{|x-y|}, \quad E_n(|x-y|) = \frac{1}{|x-y|^{n-2}},$$

$n \geqslant 3$, $|x-y|$ — расстояние между точками $x, y \in \mathbb{R}^n$ (см. [1]). Мера μ наз. **ассоциированной мерой** для функции $u(x)$ или **мерой Рисса**.

Если $K=\overline{H}$ есть замыкание области H, причем существует обобщенная функция Грина $g(x, y; H)$, то формулу (1) можно записать в виде

$$u(x) = -\int_{\overline{H}} g(x, y; H)\,d\mu(y) + h^*(x), \qquad (2)$$

где $h^*(x)$ — наименьшая гармонич. мажоранта $u(x)$ в области H.

Формулы (1), (2) можно распространить при нек-рых дополнительных условиях на всю область D (см. *Субгармоническая функция*, а также [3], [5]).

2) Р. т. **о среднем значении субгармонической функции**: если $u(x)$ — субгармонич. функция в кольцевой области $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant r < |x-x_0| < R\}$, то ее среднее значение по площади сферы $S_n(x_0, \rho)$ с центром x_0 и радиусом ρ, $r < \rho < R$, равно

$$J(\rho) = J(\rho;\, x_0,\, u) = \frac{1}{\sigma_n(\rho)} \int_{S_n(x_0,\, \rho)} u(y)\,d\sigma_n(y),$$

где $\sigma_n(\rho)$ — площадь $S_n(x_0, \rho)$, и является выпуклой функцией относительно $1/\rho^{n-2}$ при $n \geqslant 3$ и относительно $\ln\rho$ при $n=2$. Если же $u(x)$ — субгармонич. функция во всем шаре $\{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| < R\}$, то $J(\rho)$, кроме того,— неубывающая непрерывная функция относительно ρ при условии, что $J(0) = u(x_0)$ (см. [1]).

3) Р. т. **об аналитических функциях классов Харди** H_δ, $\delta > 0$: если $f(z)$ — регулярная аналитич. функция в единичном круге $D = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ класса Харди H_δ, $\delta > 0$ (см. *Граничные свойства аналитических функций*), то для нее имеют место соотношения

$$\lim_{r \to 1} \int_E |f(re^{i\theta})|^\delta\,d\theta = \int_E |f(e^{i\theta})|^\delta\,d\theta,$$

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^\delta\,d\theta = 0,$$

где E — любое множество положительной меры на окружности $\Gamma = \{z = e^{i\theta} : |z| = 1\}$, $f(e^{i\theta})$ — граничные значения $f(z)$ на Γ. Кроме того, $f(z) \in H_1$ тогда и только тогда, когда ее первообразная непрерывна в замкнутом круге $D \cup \Gamma$ и абсолютно непрерывна на Γ (см. [2]).

Теоремы 1) — 3) доказаны Ф. Риссом (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Riesz F., «Acta math.», 1926, v. 48, p. 329—43; 1930, v. 54, p. 321—60; [2] его же, «Math. Z.», 1923, Bd 18, S. 87—95; [3] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.—Л., 1937; [4] его же, Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [5] Хейман У. К., Кеннеди П. Б., Субгармонические функции, пер. с англ., т. 1, М., 1980.

Е. Д. Соломенцев.

РИССА ТЕОРЕМА ВЫПУКЛОСТИ: логарифм $\ln M(\alpha, \beta)$ точной верхней грани модуля $M(\alpha, \beta)$ билинейной формы

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

на множестве

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i|^{1/\alpha} \leqslant 1, \quad \sum_{j=1}^{m} |y_j|^{1/\beta} \leqslant 1$$

(если $\alpha=0$ или $\beta=0$, то соответственно $|x_i| \leqslant 1$, $i=1, \ldots, m$ или $|y_j| \leqslant 1$, $j=1, \ldots, n$) является выпуклой функцией от параметров α и β в области $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, если форма действительна ($a_{ij}, x_i, y_i \in \mathbb{R}_+$), и в области $0 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant 1$, $\alpha + \beta \geqslant 1$, если форма комплексна (a_{ij}, x_i, $y_j \in \mathbb{C}$). Эта теорема была доказана М. Риссом [1].

Обобщение Р. т. в. на линейные операторы (см. [3]): пусть L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,— совокупность всех комплекснозначных суммируемых в p-й степени при $1 \leqslant p < \infty$ и существенно ограниченных при $p = \infty$ функций на нек-ром пространстве с мерой; пусть, далее, $T : L_{p_i} \to L_{q_i}$, $1 \leqslant p_i$, $q_i \leqslant \infty$, $i = 0, 1$,— линейный непрерывный оператор; тогда T является непрерывным оператором из L_{p_t} в L_{q_t}, где

$$1/p_t = (1-t)/p_0 + t/p_1,\ 1/q_t = (1-t)/q_0 + t/q_1,\ t \in [0, 1]$$

и норма k_t оператора T (как оператора из L_{p_t} в L_{q_t}) удовлетворяет неравенству $k_t \leqslant k_0^{1-t} k_1^t$ (т. е. является логарифмически *выпуклой* функцией). Эту теорему наз. теоремой Рисса — Торина об интерполяции, но иногда теоремой выпуклости Рисса [4].

Р. т. в. явилась отправным пунктом для целого направления в анализе, где изучаются интерполяционные свойства линейных операторов. Среди первых из обобщений Р. т. в.— теорема Марцинкевича об интерполяции [5], к-рая гарантирует при $1 \leqslant p_i \leqslant \leqslant q_i \leqslant \infty$, $i = 0, 1$, непрерывность оператора $T : L_{p_t} \to L_{q_t}$, $t \in (0, 1)$, при более слабых предположениях, чем в теореме Рисса — Торина. См. также *Интерполирование операторов*.

Лит.: [1] Riesz M., «Acta math.», 1926, v. 49, p. 465—97; [2] Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [3] Thorin G., «Comm. Sém. Math. Univ. Lund.», 1939, v. 4, p. 1—5; [4] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974; [5] Marcinkiewicz J., «C. r. Acad. Sci.», 1939, t. 208, p. 1272—73; [6] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., Интерполяция линейных операторов, М., 1978; [7] Triebel H., Interpolation theory, В., 1978. *В. М. Тихомиров.*

РИССА — ФИШЕРА ТЕОРЕМА — теорема, устанавливающая связь между пространствами l^2 и $L^2[a, b]$: если система функций $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована на отрезке $[a, b]$, а последовательность чисел $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$$

(то есть $c_n \in l^2$), то существует функция $f(t) \in L^2[a, b]$, для к-рой

$$\int_a^b |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2,\ c_n = \int_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt.$$

При этом функция $f(t)$ единственна как элемент пространства $L^2[a, b]$, т. е. с точностью до ее значений на множестве нулевой меры Лебега. В частности, если ортонормированная система $\{\varphi_n(t)\}$ замкнута (полна) в $L^2[a, b]$, то с помощью Р.— Ф. т. устанавливается, что пространства l^2 и $L^2[a, b]$ изоморфны и изометричны.

Р.— Ф. т. доказана независимо Ф. Риссом [1] и Э. Фишером [2].

Лит.: [1] Riesz F., «C. r. Acad. sci.», 1907, t. 144, p. 615—19; [2] Fischer E., там же, 1907, t. 144, p. 1022—24, 1148—50; [3] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974, с. 168. *Б. И. Голубов.*

РИССОВ ТЕОРЕМА — 1) Р. т. единственности для ограниченных аналитических функций: если $f(z)$ — ограниченная регулярная аналитич. функция в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, имеющая *радиальные граничные значения* нуль на множестве E точек окружности $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ положительной меры, mes $E > 0$, то $f(z) \equiv 0$. Теорема сформулирована и доказана братьями Ф. Риссом и М. Риссом (F. Riesz, M. Riesz, 1916, см. [1]).

Это — одна из первых граничных теорем единственности для аналитич. функций. Независимо от братьев Риссов наиболее общие граничные теоремы единственности были получены Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым (см. [2], [3]).

2) Р. т. об интеграле Коши: если $f(z)$ есть интеграл Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$$

в единичном круге D и его граничные значения $f(\zeta)=f(e^{i\theta})$ образуют функцию ограниченной вариации на Γ, то $f(\zeta)$ есть абсолютно непрерывная функция на Γ (см. [1]).

Эта теорема допускает обобщение для интегралов Коши по любому спрямляемому контуру Γ (см. [3]).

Лит.: [1] Riesz F., Œuvres complètes, t. 1, P.— Bdpst, 1960, p. 537—54; [2] Привалов И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1918; [3] его же, Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950. *Е. Д. Соломенцев.*

РИТЦА МЕТОД — метод решения задач вариационного исчисления и вообще бесконечномерных задач на экстремум, основанный на минимизации функционала на конечномерных подпространствах или многообразиях.

Пусть поставлена задача нахождения точки минимума ограниченного снизу функционала $J: U\to\mathbb{R}$ на сепарабельном банаховом пространстве U. Задается нек-рая (т. н. координатная) система элементов $\{\varphi_n\}_1^\infty\subset U$, полная в U. По Р. м. минимизирующий элемент в n-м приближении разыскивается в линейной оболочке первых n координатных элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, т. е. коэффициенты $c_1^{(n)}, \ldots, c_n^{(n)}$ приближения

$$u_n=\sum\nolimits_{j=1}^{n}c_j^{(n)}\varphi_j$$

определяются из условия минимальности $J(u_n)$ среди элементов указанного вида. Вместо координатной системы можно задать последовательность подпространств $U_n\subset U$, не обязательно вложенных друг в друга.

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (u, v), A — самосопряженный, положительно определенный, вообще говоря, неограниченный оператор в H, а H_A — гильбертово пространство, получаемое пополнением области определения $D(A)\subseteq H$ оператора A по норме $\|u\|_A$, порожденной скалярным произведением $(u, v)_A=(Au, v)$, $u, v\in D(A)$. Пусть нужно решить задачу

$$Au=f. \tag{1}$$

Она равносильна задаче отыскания точки минимума квадратичного функционала

$$\Phi(u)=(Au, u)-(u, f)-(f, u),$$

к-рый можно записать в виде

$$\Phi(u)=\|u-u_0\|_A^2-\|u_0\|_A^2,\quad u\in H_A,$$

где $u_0=A^{-1}f$ — решение уравнения (1). Пусть $H_n\subset H_A$, $n=1, 2, \ldots,$ — замкнутые (обычно конечномерные) подпространства такие, что $\|u-P_nu\|_A\to 0$ при $n\to\infty$ для каждого $u\in H_A$, где P_n — ортопроектор в H_A, проектирующий на H_n. Минимизируя Φ в H_n, получают ритцовское приближение $u_n=P_nu_0$ к решению уравнения (1); при этом $\|u_n-u_0\|_A=\|u_0-P_nu_0\|_A\to 0$ при $n\to\infty$. Если $\dim H_n=n$ и $\varphi_1^{(n)}, \ldots, \varphi_n^{(n)}$ — базис H_n, то коэффициенты элемента

$$u_n=\sum\nolimits_{j=1}^{n}c_j^{(n)}\varphi_j^{(n)} \tag{2}$$

определяются из линейной системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} (\varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)})_A c_j^{(n)} = (f, \varphi_i^{(n)}), \quad i=1, \ldots, n. \qquad (3)$$

К ритцовскому приближению можно прийти и минуя вариационную формулировку задачи (1). А именно, определив приближение (2) из условий

$$(Au_n - f, \varphi_i^{(n)}) = 0, \quad i=1, \ldots, n$$

(метод Галеркина), приходят к той же системе уравнений (3). Поэтому Р. м. для уравнения (1) иногда наз. методом Ритца — Галеркина.

Р. м. широко применяется и при решении задач на собственные значения, краевых задач и вообще операторных уравнений. Пусть A и B — самосопряженные операторы в H, причем A положительно определен, B положителен, $D(A) \subseteq D(B)$ и оператор $A^{-1}B$ вполне непрерывен в пространстве H_A. В силу наложенных условий $A^{-1}B$ самосопряжен и положителен в H_A и спектр задачи

$$Au = \lambda Bu \qquad (4)$$

состоит из положительных собственных значений:

$$Au_k = \lambda_k Bu_k, \quad 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots; \quad \lambda_k \to \infty \text{ при } k \to \infty.$$

Р. м. основан на вариационной характеризации собственных значений. Напр.,

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_A} \frac{(Au, u)}{(Bu, u)},$$

и, проведя минимизацию лишь по подпространству $H_n \subset H_A$, получают ритцовские приближения λ_{1n}, u_{1n} к λ_1, u_1. Если $\varphi_1^{(n)}, \ldots, \varphi_n^{(n)}$, как и выше, базис H_n, то ритцовские приближения λ_{kn} к λ_k, $k=1, \ldots, n$, определяются из уравнения

$$\det(A_n - \lambda B_n) = 0,$$

$$A_n = \{(A\varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)})\}_{i, j=1}^{n}, \quad B_n = \{(B\varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)})\}_{i, j=1}^{n},$$

а вектор коэффициентов $c_{k,n} = (c_{1k}^{(n)}, \ldots, c_{nk}^{(n)})$ приближения

$$u_{kn} = \sum_{j=1}^{n} c_{jk}^{(n)} \varphi_j^{(n)}$$

к u_k определится как нетривиальное решение линейной однородной системы $(A_n - \lambda_{kn} B_n) c_{kn} = 0$. Р. м. приближает собственные значения сверху, то есть $\lambda_{kn} \geqslant \lambda_k$, $k=1, \ldots, n$. Если k-е собственное значение задачи (4) простое ($\lambda_{k-1} < \lambda_k < \lambda_{k+1}$), то быстрота сходимости Р. м. характеризуется соотношениями

$$\lambda_{kn} - \lambda_k = \lambda_k (1 + \varepsilon_{kn}) \| u_k - P_n u_k \|_A^2,$$

$$\| u_k \|_A = 1, \quad \| u_{kn} - u_k \|_A = (1 + \varepsilon'_{kn}) \| u_k - P_n u_k \|_A,$$

$$\| u_{kn} \|_A = \| u \|_A = 1,$$

где ε_{kn}, $\varepsilon'_{kn} \to 0$ при $n \to \infty$. Подобные соотношения распространяются и на случай кратного λ_k, но требуют нек-рых уточнений (см. [2]). В. Ритц [4] предложил свой метод в 1908, но ранее Рэлей (Rayleigh) применял этот метод при решении нек-рых задач на собственные значения. В связи с этим Р. м. часто наз. методом Рэлея — Ритца, особенно, если речь идет о решении проблемы собственных значений.

Лит.: [1] Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972; [2] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [3] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, 2 изд., М., 1970; [4] Ritz W., «J. reine und angew. Math.», 1908, Bd 135, S. 1—61. *Г. М. Вайникко.*

РИЧАРДСОНА ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ — метод ускорения сходимости решений разностных задач (см. *Аппроксимация дифференциальной краевой задачи* *разностной*). Основная идея метода состоит в исследовании решения $u_h(x)$ сходящейся разностной задачи при фиксированных x как функции параметра h разностной сетки, стремящегося к нулю, в подборе подходящей интерполяционной функции $\chi(h)$, построенной по нескольким значениям решения $u_h(x)$ при различных h, и вычислении величины $\chi(0)$, являющейся приближенным значением искомого решения $u(x)$ — предела последовательности $u_h(x)$ при $h \to 0$. Чаще всего функция $\chi(h)$ ищется в виде интерполяционного многочлена от h.

Метод носит имя Л. Ричардсона [1], к-рый впервые использовал его как средство для улучшения точности решений разностных задач и называл постепенным переходом к пределу.

Теоретич. основой применимости метода служит существование разложения вида

$$u_h(x) = u(x) + \sum_{i=1}^{m-1} h^{\beta_i} v_i(x) + h^B \eta_h(x),$$

где $B > \beta_{m-1} > \ldots > \beta_1 > 0$ и функции v_i не зависят от h, а $\eta_h(x)$ — значения сеточной функции, ограниченные при $h \to 0$. Имеется несколько теоретич. приемов для выяснения существования таких разложений [4].

Чаще всего используется линейная экстраполяция: с помощью m значений $u_h(x)$ в одной точке x для различных параметров $h = h_1, \ldots, h_m$ вычисляется экстраполированное значение $u_H(x)$ по правилу

$$u_H(x) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k u_{h_k}(x),$$

где веса γ_k определяются из системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k = 1; \ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k h_k^{\beta_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m-1.$$

Если среди h_k нет слишком близких значений, то

$$|u_H(x) - u(x)| = O(\hbar^B),$$

где $\hbar = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} h_k$, то есть величина $u_H(x)$ сходится к $u(x)$ при $h \to 0$ с порядком B, что больше β_1 — порядка сходимости $u_h(x)$ к $u(x)$. В двух частных случаях существуют алгоритмы вычисления величины $u_H(x)$, минуя определение коэффициентов γ_k:

а) в случае $\beta_i = ip$, $p > 0$, $i = 1, \ldots, m-1$, метод приводит к интерполяции многочлена от h^p и из свойств *Лагранжа интерполяционной формулы* следует, что

$$u_H(x) = a_1^{(m-1)},$$

где

$$a_j^{(0)} = u_{h_j}(x), \ j = 1, 2, \ldots, m;$$

$$a_j^{(i)} = a_{j+1}^{(i-1)} + \frac{a_{j+1}^{(i-1)} - a_j^{(i-1)}}{(h_j/h_{i+j})^p - 1}, \qquad (*)$$

$$j = 1, \ldots, m-i, \ i = 1, \ldots, m-1;$$

б) в случае $h_i = h_0 b^i$, $0 < b < 1$, $i = 1, \ldots, m-1$, формула (*) заменяется следующей:

$$a_j^{(i)} = a_{j+1}^{(i-1)} + \frac{a_{j+1}^{(i-1)} - a_j^{(i-1)}}{b^{\beta_{i-1}}}.$$

Этот алгоритм, называемый правилом Ромберга (W. Romberg, 1955), нашел распространение при конструировании квадратурных формул (см. [5]). Для того чтобы при различных h_i сетки $D_{h_i U}$ (см. *Аппроксимация дифференциального оператора разностным*) имели возможно больше общих узлов для осуществления Р. э., параметры h_i выбирают как часть одной из последовательностей: $h_i = h_0/i$, $i = 1, 2, \ldots$; $h_i = h_0 2^{1-i}$, $i = 1, 2, \ldots$; h_0, $h_0/2$, $h_0/3$, $h_0/4$, $h_0/6$, $h_0/8$, $h_0/12$, ...

Линейная экстраполяция не является единственно возможной. Напр., в случае $\beta_i = ip$, $p > 0$, в качестве интерполяционной функции $\chi(h)$ используют рациональные функции вида $\varphi(h^p)/\psi(h^p)$, где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — многочлены от t степени $[(m-1)/2]$ и $[m/2]$ соответственно. Тогда результат рациональной экстраполяции $u_H(x) = \chi(0)$ может быть вычислен с помощью рекуррентной процедуры:

$$d_j^{(-1)} = 0, \ j = 2, \ \ldots, \ m;$$

$$d_j^{(0)} = u_{h_j}(x), \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ m;$$

$$d_j^{(i)} = d_{j+1}^{(i-1)} + \left(d_{j+1}^{(i-1)} - d_j^{(i-1)}\right) \times$$

$$\times \left\{ \left(\frac{h_j}{h_{i+j}}\right)^p \left[1 - \frac{d_{j+1}^{(i-1)} - d_j^{(i-1)}}{d_{j+1}^{(i-1)} - d_{j+1}^{(i-1)}}\right] - 1 \right\}^{-1},$$

$$j = 1, \ \ldots, \ m-i, \ i = 1, \ \ldots, \ m-1;$$

$$u_H(x) = d_1^{(m-1)}.$$

Р. э. удобна для реализации на ЭВМ, поскольку для достижения высокой точности использует многократное решение простых разностных задач (иногда с небольшими модификациями) невысокого порядка аппроксимации, для к-рых обычно хорошо разработаны стандартные приемы решения и программы для ЭВМ.

Лит.: [1] Richardson L. F., «Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A», 1910, v. 210, p. 307—57; [2] Bulirsch R., Stoer J., «Numer. Math.», 1964, Bd 6, H. 5, S. 413—27; [3] Joice D. C., «SIAM Review», 1971, v. 13, № 4, p. 435—90; [4] Марчук Г. И., Шайдуров В. В., Повышение точности решений разностных схем, М., 1979; [5] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.

В. В. Шайдуров.

РИЧЧИ КРИВИЗНА риманова многообразия M в точке $p \in M$ — число, сопоставляемое каждому одномерному подпространству из касательного пространства M_p по формуле

$$r(v) = \frac{(cR)(v, v)}{g(v, v)},$$

где cR — *Риччи тензор*, v — вектор, порождающий одномерное подпространство, g — метрич. тензор риманова многообразия M. Р. к. выражается через секционные кривизны многообразия M. Пусть $K_p(\alpha, \beta)$ — секционная кривизна в точке $p \in M$ в направлении площадки, определяемой векторами α и β, $l_1, \ldots, l_{n-1}$ — нормированные векторы, ортогональные друг другу и вектору v, n — размерность M, тогда

$$r(v) = \sum_{i=1}^{n-1} K_p(v, l_i).$$

Для многообразий M размерности больше двух имеет место следующее предложение: если Р. к. в точке $p \in M$ имеет одно и то же значение r по всем направлениям v, то Р. к. имеет одно и то же значение r во всех точках многообразия. Многообразия с постоянной Р. к. наз. **пространствами Эйнштейна**. Тензор Риччи пространства Эйнштейна имеет вид $cR = rg$, где r — Р. к. Для пространства Эйнштейна выполняется равенство

$$nR_{ij}R^{ij} - s^2 = 0,$$

где R_{ij}, R^{ij} — ковариантные и контравариантные координаты тензора Риччи, n — размерность пространства, s — скалярная кривизна пространства.

Р. к. может быть определена и на псевдоримановых многообразиях с помощью аналогичных формул, в этом случае вектор предполагается неизотропным.

По Р. к. однозначно восстанавливается тензор Риччи:

$$(cR)(u, v) = \frac{1}{2}\left[r(u+v)\, g(u+v, u+v) - r(u)\, g(u, u) - \right.$$
$$\left. - r(v)\, g(v, v)\right].$$

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Петров А. З., Пространства Эйнштейна, М., 1961.

Л. А. Сидоров.

РИЧЧИ ТЕНЗОР — дважды ковариантный тензор, получаемый из *Римана тензора* R^{l}_{jkl} путем свертывания верхнего индекса с нижним:

$$R_{ki} = R^{m}_{mk,\,i}.$$

В римановом пространстве V_n Р. т. является симметрическим: $R_{ki} = R_{ik}$. В результате свертывания Р. т. с контравариантным метрич. тензором g^{ij} пространства V_n получается скалярная величина $R = g^{ij}R_{ij}$, называемая **инвариантом кривизны**, или **скалярной кривизной** V_n. Компоненты Р. т. выражаются через основной метрич. тензор g_{ij} пространства V_n:

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 \ln \sqrt{g}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^{k}_{ij} + \Gamma^{m}_{ik}\Gamma^{k}_{mj} - \Gamma^{m}_{ij}\frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^m},$$

где $g = \det g_{ij}$, Γ^{k}_{ij} — символы Кристоффеля 2-го рода, вычисленные относительно тензора g_{ij}.

Тензор введен Г. Риччи [1].

Лит.: [1] Ricci G., «Atti Reale Inst. Veneto», 1903—04, t. 53, № 2, p. 1233—39; [2] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948. *Л. А. Сидоров.*

РИЧЧИ ТЕОРЕМА: для того чтобы поверхность S с метрикой ds^2 и гауссовой кривизной $K \leqslant 0$ была локально изометрична нек-рой минимальной поверхности F, необходимо и достаточно, чтобы метрика $d\tilde{s}^2 = \sqrt{-K}ds^2$ имела (во всех точках, где $K < 0$) гауссову кривизну $\tilde{K} = 0$. *И. Х. Сабитов.*

РИЧЧИ ТОЖДЕСТВО — 1) Тождество, выражающее одно из свойств *Римана тензора* $R^{l}_{ij,k}$ (или $R_{i,\,j,\,kl}$):

$$R^{l}_{ij,\,k} + R^{l}_{jk,\,i} + R^{l}_{ki,\,j} = 0.$$

Для ковариантного тензора $R_{ij,\,kl}$ тождество имеет вид

$$R_{ij,\,kl} + R_{jk,\,il} + R_{ki,\,jl} = 0,$$

т. е. циклирование по трем первым индексам дает нуль.

2) Тождество, к-рому должны удовлетворять ковариантные производные 2-го порядка относительно метрич. тензора g_{ij} риманова пространства V_n, отличающиеся лишь порядком дифференцирования. Если λ_i — тензор 1-й валентности, $\lambda_{i,\,jk}$ — ковариантная производная 2-го порядка по x^j и по x^k относительно тензора g_{ji}, то Р. т. имеет вид

$$\lambda_{i,\,jk} - \lambda_{i,\,kj} = \lambda_l R^{l}_{ij,\,k},$$

где $R^{l}_{ij,\,k}$ — тензор Римана, определяемый метрич. тензором g_{ij}, то есть в метрике пространства V_n (иными словами, альтернированная 2-я абсолютная производная тензорного поля λ_i в метрике g_{ij} выражается через тензор Римана и компоненты λ_i).

Для ковариантного тензора 2-й валентности a_{ij} Р. т. имеет вид

$$a_{ij,\,kl} - a_{ij,\,lk} = a_{ih}R^{h}_{jk,\,l} + a_{hj}R^{h}_{ik,\,l}.$$

Вообще, для ковариантного тензора m-й валентности $a_{r_1 \ldots r_m}$ тождество имеет вид

$$a_{r_1 \ldots r_m,\,kl} - a_{r_1 \ldots r_m,\,l_k} = \\ = \sum_{\alpha}^{1 \ldots m} a_{r_1 \ldots r_{\alpha-1} h r_{\alpha+1} \ldots r_m} R^{h}_{r_\alpha kl}.$$

Аналогичные тождества образуются и для ковариантных и смешанных тензоров в V_n. Р. т. применяется, напр., при построении геометрии подпространств в V_n в качестве условия интегрируемости основных деривариационных уравнений, из к-рого выводятся уравнения Гаусса и Петерсона — Кодацци для подпространств в V_n.

Тождество установлено Г. Риччи (см. [1]).

Лит.: [1] Ricci G., Levi-Civita T., «Math. Ann.», 1901, Bd 54, S. 125—201; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948.
Л. А. Сидоров.

РИШАРА ПАРАДОКС — см. *Антиномия.*

РОБЕНА ЗАДАЧА, задача равновесия, электростатическая задача,— задача о таком распределении положительной борелевской меры λ на границе S компакта K в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, к-рое создает постоянный *ньютонов потенциал* при $n > 2$ или *логарифмический потенциал* при $n=2$ на каждой из связных компонент внутренности K, т. е. задача о равновесном распределении электрич. заряда $\lambda(K)$ на поверхности S проводника K.

В простейшем классич. случае, когда K есть гомеоморфная шару замкнутая область в $\mathbb{R}^n$, ограниченная гладкой простой замкнутой поверхностью или (при $n=2$) кривой S класса $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $0 \in K$, решение Р. з. сводится к отысканию нетривиального решения $\nu(x)$, $x \in S$, однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\frac{1}{2}\nu(x) + \frac{1}{k_n}\int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}E_n(x, y)\,dS(y) = 0,\ x \in S, \quad (1)$$

с условием нормировки

$$\lambda(S) = \int_S \nu(y)\,dS(y) = 1. \quad (2)$$

Здесь

$$E_2(x, y) = \ln\frac{1}{|x-y|},\ E_n(x, y) = \frac{1}{|x-y|^{n-2}}$$

при $n \geqslant 3$, $|x-y|$ — расстояние между точками $x, y \in \mathbb{R}^n$, n_x — направление внешней нормали к S в точке $x \in S$, $\nu(x)$ — производная, или плотность, абсолютно непрерывной меры λ по мере Лебега на S,

$$k_2 = 2\pi,\ k_n = \frac{2(n-2)\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

при $n \geqslant 3$, $dS(y)$ — элемент площади поверхности S. Уравнение (1) получается при рассмотрении внутренней задачи Неймана для области с границей S при нулевых граничных данных, т. к. потенциал простого слоя

$$u(x) = u(x; K) = \int_S \nu(y)\,E_n(x, y)\,dS(y),$$

называемый потенциалом Робена, или равновесным потенциалом, должен, по условию Р. з., иметь постоянное значение на K (см. *Потенциала теория*, а также [2]). Решение $\nu(x)$ задачи (1), (2) при указанных условиях всегда существует в классе непрерывных функций $C(S)$. Мера

$$\lambda(E) = \int_E \nu(y)\,dS(y),\ E \subset S,$$

дающая решение Р. з., наз. равновесной мерой. Аналогично решается Р. з. и в более сложном случае, когда граница компакта K состоит из конечного числа непересекающихся простых замкнутых поверхностей или (при $n=2$) кривых класса $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ (см. [2]). При этом на ограниченных связных компонентах открытого множества $G = CK = \mathbb{R}^n \setminus K$ потенциал Робена $u(x)$ также сохраняет постоянное значение, т. е. на границах этих компонент плотность $\nu(x) = 0$.

Пусть компакт K есть связное множество. Постоянное значение потенциала Робена $u(x)$ на K

$$\gamma = \int_S \nu(y)\,E_n(x, y)\,dS(y),\ x \in K,$$

наз. постоянной Робена компакта K. При $n \geqslant 3$ она связана с гармонической, или ньютоновой, *емкостью* компакта K простым соотношением $C(K)=1/\gamma$, причем $0<\gamma<+\infty$, $0<C(K)<+\infty$. При $n=2$ постоянная Робена может принимать все значения $-\infty<\gamma<+\infty$, гармонич. емкость выражается формулой $C(K)=e^{-\gamma}$.

Иначе, равновесная мера λ определяется как мера, дающая минимум интегралу энергии

$$\iint_{K\times K} E_n(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

в классе всех мер μ, сосредоточенных на K и таких, что $\mu\geqslant 0$, $\mu(K)=1$. Такая мера λ в случае компакта K с гладкой границей совпадает с найденной выше, но она существует и в общем случае произвольного компакта $K\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, если только $C(K)>0$. Соответствующий равновесный потенциал

$$u(x)=u(x; K)=\int E_n(x, y)\, d\lambda(y),$$

являющийся обобщением потенциала Робена, сохраняет постоянное значение $\gamma=1/C(K)$ при $n\geqslant 3$ или $\gamma=-\ln C(K)$ при $n=2$ всюду на K, за возможным исключением точек нек-рого множества емкости нуль.

Название Р. з. связано с исследованиями Г. Робена (см. [1]).

Лит.: [1] Robin G., «Ann. sci. Éc. norm. supér.», 1886, v. 3; [2] Гюнтер Н. М., *Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики*, М., 1953; [3] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [4] Хейман У., Кеннеди П., Субгармонические функции, пер. с англ., т. 1, М., 1980. *Е. Д. Соломенцев.*

РОБЕНА ПОСТОЯННАЯ — численная характеристика множества точек евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, тесно связанная с *емкостью* множества.

Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$, μ — положительная борелевская мера, сосредоточенная на K и нормированная условием $\mu(K)=1$. Интеграл

$$V(\mu)=\iint_{K\times K} E_n(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y),$$

где

$$E_2(x, y)=\ln\frac{1}{|x-y|},\quad E_n(x, y)=\frac{1}{|x-y|^{n-2}} \text{ при } n\geqslant 3,$$

$|x-y|$ — расстояние между точками $x, y\in R^n$, есть *энергия меры* μ. Постоянной Робена компакта K наз. нижняя грань $\gamma(K)=\inf V(\mu)$ по всем мерам μ указанного вида. Если $\gamma(K)<+\infty$, то эта грань конечна и достигается на нек-рой (единственной) равновесной (или емкостной) мере $\lambda>0$, $\gamma(K)=V(\lambda)$, $\lambda(K)=1$, сосредоточенной на K; если $\gamma(K)=+\infty$, то $V(\mu)=+\infty$ для всех мер μ указанного вида. Р. п. компакта K связана с его емкостью соотношениями

$$\gamma(K)=1/C(K) \text{ при } n\geqslant 3,$$
$$\gamma(K)=-\ln C(K) \text{ при } n=2.$$

Если граница S компакта K достаточно гладкая, напр. состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых замкнутых поверхностей (при $n\geqslant 3$) или кривых (при $n=2$) класса $C^{1,\alpha}$, $0<\alpha<1$, то равновесная мера λ сосредоточена на части $\tilde{S}\subset S$, к-рая составляет границу той связной компоненты дополнения $CK=\mathbb{R}^n\setminus K$, к-рая содержит бесконечно удаленную точку. Равновесный потенциал, т. е. потенциал равновесной меры

$$u(x)=\int E_n(x, y)\, d\lambda(y),$$

в этом случае принимает на $\tilde{S}$ постоянное значение, равное $\gamma(K)$, что и позволяет вычислить Р. п. компакта в простейших случаях (см. *Робена задача*). Напр., Р. п. круга радиуса $r>0$ в $\mathbb{R}^2$ равна $-\ln r$, а Р. п. шара радиуса $r>0$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, равна $1/r^{n-2}$. В случае произвольного компакта K положительной емкости всюду $u(x) \leqslant \gamma(K)$ и $u(x)=\gamma(K)$ всюду на носителе $S(\lambda)$ равновесной меры λ, кроме, быть может, точек нек-рого полярного множества, причем всегда $S(\lambda) \subset K$.

Пусть D — область расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, содержащая внутри бесконечно удаленную точку и допускающая функцию Грина $g(z, \infty)$ с полюсом в бесконечности. Тогда имеет место представление

$$g(z, \infty)=\ln|z|+\gamma(D)+\varepsilon(z, \infty), \qquad (1)$$

где $z=x+iy$ — комплексное переменное, $\gamma(D)$ — *постоянная Робена области* D, $\varepsilon(z, \infty)$ — гармонич. функция в D, причем

$$\lim_{|z| \to \infty} \varepsilon(z, \infty)=0.$$

Определяемая формулой (1) Р. п. области D совпадает с Р. п. компакта ∂D, $\gamma(D)=\gamma(\partial D)$. Если функция Грина для области D не существует, то полагают $\gamma(D)=+\infty$.

Обобщая представление (1), для римановой поверхности R, допускающей функцию Грина, может быть получено локальное представление функции Грина $g(p, p_0)$ с полюсом $p_0 \in R$:

$$g(p, p_0)=\ln \frac{1}{|z-z_0|}+\gamma(R; p_0)+\varepsilon(p, p_0), \qquad (2)$$

где $z=z(p)$ — локальный униформизирующий параметр в окрестности полюса p_0, $z(p_0)=z_0$, $\gamma(R; p_0)$ — постоянная Робена римановой поверхности R относительно полюса p_0, $\varepsilon(p, p_0)$ — гармонич. функция в окрестности p_0, причем $\lim\limits_{p \to p_0} \varepsilon(p, p_0)=0$. Для римановых поверхностей R, не допускающих функцию Грина, полагают $\gamma(R; p_0)=+\infty$. В выражении (2) значение Р. п. $\gamma(R; p_0)$ зависит уже от выбора полюса $p_0 \in P$, но соотношения $\gamma(R; p_0)<+\infty$ и $\gamma(R; p_0)=+\infty$ не зависят от выбора полюса, что и позволяет использовать понятие Р. п. для классификации римановых поверхностей.

Лит.: [1] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [2] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 2, М., 1962; [3] Sario L., Nakai M., Classification theory of Riemann surfaces, B.—N. Y., 1970. *Е. Д. Соломенцев.*

***L*-РОД** — характеристическое число, соответствующее L-классу Хирцебруха (см. *Понтрягина класс*). *А. Ф. Харшиладзе.*

РОД АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ — см. *Алгебраическая функция.*

РОД КРИВОЙ — численный инвариант одномерного алгебраич. многообразия, определенного над полем k. Род g гладкой полной алгебраич. кривой X равен размерности пространства регулярных дифференциальных 1-форм на X. Род алгебраич. кривой X, по определению, равен роду полной гладкой алгебраич. кривой, бирационально изоморфной кривой X. Для любого целого $g \geqslant 0$ существует алгебраич. кривая рода g. Алгебраич. кривая над алгебраически замкнутым полем рода $g=0$ является *рациональной кривой*, т. е. бирационально изоморфна проективной прямой P^1. Кривые рода $g=1$ (эллиптич. кривые) бирационально изоморфны гладким кубич. кривым в P^2. Алгебраич. кривые рода $g>1$ распадаются на два класса: гиперэллиптич. кривые и негиперэллиптич. кривые. Для негиперэллиптич. кривых X рациональное отображение $\varphi_{|K_X|}: X \to P^{g-1}$, определяемое канонич. классом K_X полной гладкой кривой, является изоморфным вложением. Для гиперэллиптич. кривой X отображение $\varphi_{|K_X|}: X \to P^{g-1}$ являются двулистным накрытием рациональной кривой $\varphi_{|K_X|}(X)$, разветвленным в $2g+2$ точках.

Если X — проективная плоская кривая степени m, то

$$g=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-d,$$

где d — неотрицательное целое число, измеряющее отклонение от гладкости кривой X. Если X имеет только обыкновенные двойные особые точки, то d равно числу особых точек алгебраич. кривой X. Для пространственной кривой X имеет место оценка

$$g \leqslant \begin{cases} \frac{(m-2)^2}{4}, \text{ если } m \text{ — четно,} \\ \frac{(m-1)(m-3)}{4}, \text{ если } m \text{ — нечетно,} \end{cases}$$

где m — степень кривой X в P^3.

Если $k=\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, то алгебраич. кривая X может быть рассмотрена как риманова поверхность. В этом случае гладкая полная кривая X рода g гомеоморфна сфере с g ручками.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981. *Вик. С. Куликов.*

РОД ПОВЕРХНОСТИ — численный бирациональный инвариант двумерного алгебраич. многообразия, определенного над алгебраически замкнутым полем k. Различают два рода — арифметический и геометрический. Геометрический род p_g полной гладкой алгебраич. поверхности X равен

$$p_g=\dim_k H^0\left(X, \Omega_X^2\right)$$

размерности пространства регулярных дифференциальных 2-форм на X. Арифметический род p_a полной гладкой алгебраич. поверхности X равен

$$p_a=\chi(X, O_X)-1=\dim_k H^2(X, O_X)-\dim_k H^1(X, O_X).$$

Геометрический и арифметич. роды полной гладкой алгебраич. поверхности X связаны соотношением $p_g-p_a=q$, где q — иррегулярность поверхности X, равная размерности пространства регулярных дифференциальных 1-форм на X.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Труды МИАН СССР, т. 75). *Вик. С. Куликов.*

РОД ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ — целое число, равное наибольшему из чисел p и q в представлении целой функции $f(z)$ в форме

$$f(z)=z^{\lambda}e^{Q(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{\frac{z}{a_k}+\frac{z^2}{2a_k^2}+\ldots+\frac{z^p}{pa_k^p}}, \quad (*)$$

где q — степень многочлена $Q(z)$, а p — наименьшее целое, удовлетворяющее условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{p+1}}<\infty.$$

Число p наз. родом произведения, участвующего в формуле (*).

Лит.: [1] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956. *А. Ф. Леонтьев.*

РОД ЭЛЕМЕНТА арифметической группы — совокупность элементов группы единиц $G_{\mathbb{Z}}$ связной алгебраической $\mathbb{Q}$-группы G, сопряженных с данным элементом a в группах $G_{\mathbb{Q}}$ и $G_{\mathbb{Z}_p}$ для всех простых p, где $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$ — соответственно поле рациональных чисел и кольцо целых p-адических чисел; класс элемента a определяется как его класс сопряженности в $G_{\mathbb{Z}}$. Число непересекающихся классов, на к-рые распадается род элемента a, конечно [1], обозначается $f_G(a)$ и наз. числом классов в роде элемента a. Возникающая здесь функция f_G на $G_{\mathbb{Z}}$ является важной арифметич. характеристикой, выражающей отклонение от локально-глобального принципа в вопросах сопряженности. Вообще говоря, $f_G(a)>1$. Более того, если группа G полупроста, а группа $G_{\mathbb{Z}}$ бесконечна, то $\sup_{a \in H} f_G(a) = \infty$ для любой арифметич. подгруппы $H \subset \subset G_{\mathbb{Z}}$ (см. [1], [3]). Рассмотренные понятия представляют естественную модификацию соответствующих классич. понятий из теории квадратичных форм и применяются при исследовании финитной аппроксимируемости арифметич. групп относительно сопряженности (см. [2]).

Лит.: [1] Платонов В. П., «Докл. АН СССР», 1971, т. 200, № 4, с. 793—96; [2] Платонов В. П., Матвеев Г. В., «Докл. АН БССР», 1970, т. 14, № 9, с. 777—79; [3] Рапинчук А. С., «Докл. АН БССР», 1981, т. 25, № 2, с. 101—04. *А. С. Рапинчук.*

РОДРИГА ФОРМУЛА — 1) Р. ф. — формула, связывающая дифференциал нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности с дифференциалом радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ поверхности в главном направлении:

$$d\boldsymbol{n} = -k_1 d\boldsymbol{r} \text{ или } d\boldsymbol{n} = -k_2 d\boldsymbol{r},$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны.

Формула получена О. Родригом (O. Rodrigues, 1815). *А. Б. Иванов.*

2) Р. ф. — представление ортогональных многочленов через весовую функцию с помощью дифференцирования. Если весовая функция $h(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2} \equiv \frac{A(x)}{B(x)}, \quad x \in (a, b),$$

причем на концах интервала ортогональности выполняются условия

$$\lim_{x \to a+0} h(x) B(x) = \lim_{x \to b-0} h(x) B(x) = 0,$$

то ортогональный многочлен $P_n(x)$ представляется в виде формулы Родрига

$$P_n(x) = c_n [h(x) B^n(x)]^{(n)} / h(x),$$

где c_n — постоянная. Р. ф. имеет место только для классических ортогональных многочленов и для многочленов, полученных из последних линейными преобразованиями аргумента. Первоначально эта формула была установлена О. Родригом [1] для *Лежандра многочленов.*

Лит.: [1] Rodrigues O., «Correspondance sur l'École polytechnique», 1816, t. 3, p. 361—85. *П. К. Суетин.*

РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ ПРОЦЕСС — марковский процесс с состояниями 0, 1, 2, ..., в к-ром за время $(t, t+h)$ возможны переходы из состояния n в состояния $n+1$ и $n-1$ с вероятностями $\lambda_n(t)h + o(h)$ и $\mu_n(t)h + o(h)$ соответственно, а вероятность остальных переходов равна $o(h)$. При специальном выборе коэффициентов размножения $\lambda_n(t)$ и гибели $\mu_n(t)$ получаются частные случаи, к-рые дают удовлетворительное описание различных реальных процессов: радиоактивных превращений, работы телефонных станций, эволюции биологич. популяций и т. д. Использованию Р. и г. п. в приложениях способствует простота уравнений для переходных вероятностей, к-рые часто удается найти в явном виде. Напр., в случае пуассоновского процесса $\lambda_n(t) = \lambda$, $\mu_n(t) = 0$, вероятности $P_n(t)$ ($P_n(t)$ — вероятность нахождения в момент времени t в состоянии n, если процесс начался из состояния 0) удовлетворяют системе уравнений:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$
$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \quad n \geq 1.$$

Решение этой системы:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Более общим является процесс, для к-рого $\lambda_n(t)=n\lambda$, $\mu_n(t)=0$. Этот тип процесса был впервые изучен Дж. Юлом (G. Jule, 1924) в связи с математич. теорией эволюции. П р о ц е с с Ю л а является частным случаем п р о ц е с с а ч и с т о г о р а з м н о ж е н и я, к-рый получается из общего Р. и г. п., если положить $\lambda_n(t)=\lambda_n$, $\mu_n(t)=0$. Если λ_n растут очень быстро, то за конечное время можно с положительной вероятностью пройти по всем состояниям и тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) < 1$$

Условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$$

для процесса чистого размножения выполняется тогда и только тогда, когда расходится ряд $\sum 1/\lambda_n$. Если $\lambda_n(t)=n\lambda+\nu$, $\mu_n(t)=n\mu$, то Р. и г. п. представляет собой *ветвящийся процесс* с иммиграцией, в к-ром состояние n означает число частиц, причем каждая частица за время $(t, t+h)$ с вероятностью $\mu h+o(h)$ погибает, с вероятностью $\lambda h+o(h)$ делится на две и, кроме того, извне иммигрирует одна частица с вероятностью $\nu h+o(h)$. Если $\nu=0$, то получится простейший в е т в я щ и й с я п р о ц е с с б е з и м м и г р а ц и и. Если $\lambda=0$, а $\nu>0$, то этот вид процесса с иммиграцией можно применить к описанию работы телефонной системы с бесконечным числом линий. Состоянием тогда является число занятых линий. Коэффициент размножения $\lambda_n(t)=\nu$ характеризует поступающий поток вызовов, а μ — длительность разговора.

Лит.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1—2, М., 1964—67; [2] С е в а с т ь я н о в Б. А., Теория ветвящихся процессов, в кн.: Итоги науки. Серия Математика, т. 14— Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1967, М., 1968, с. 5—46; [3] С а а т и Т. Л., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, пер. с англ., М., 1965.

В. П. Чистяков.

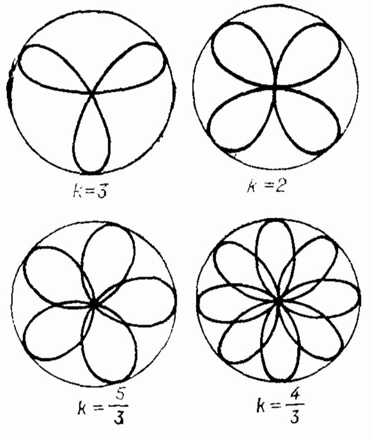
РОЖДЕНИЯ ОПЕРАТОРЫ — семейство замкнутых линейных операторов $\{a^*(f), f\in H\}$, где H — нек-рое гильбертово пространство, действующих в *Фока пространстве*, построенном над H, и являющихся сопряженными к *уничтожения операторам* $\{a(f), f\in H\}$.

Р. А. Минлос.

РОЗЫ — плоские кривые, уравнения к-рых в полярных координатах имеют вид

$$\rho=a\sin k\varphi,$$

где a и k — постоянные. Если $k=m/n$ — число рациональное, то Р.— алгебраич. кривая четного порядка. Порядок Р. равен $m+n$, если m и n — нечетные числа, и равен $2(m+n)$, если одно из чисел m или n — нечетное. Вся кривая расположена внутри круга радиуса a, состоит из конгруэнтных лепестков (см. рис.). Если k — целое, то Р. состоит из k лепестков при k нечетном и из $2k$ лепестков при k четном. Если $k=m/n$ и m, n — взаимно простые, то Р. состоит из m лепестков, когда m и n нечетные, и из $2m$ лепестков, если одно из чисел m или n является четным.



При иррациональном k лепестков бесконечное множество. Р. относятся к семейству *циклоидальных кривых*. Р. являются гипоциклоидами, если $k>1$, и эпициклоидой, если $k<1$.

С семейством циклоидальных кривых Р. связаны и тем, что они являются подэрами эпи- и гипоциклоид относительно центра их неподвижного круга.

Длина дуги Р. выражается эллиптич. интегралом 2-го рода. Площадь одного лепестка: $S=\pi a^2/4k$.

Р. наз. также кривыми Гуидо Гранди (G. Grandi), впервые описавшего их в 1728.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

РОЛЛЯ ТЕОРЕМА: если действительная функция f непрерывна на нек-ром отрезке $[a, b]$, имеет в каждой его внутренней точке конечную или определенного знака бесконечную производную, а на его концах принимает равные значения, то на интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка, в к-рой производная функции f равна нулю.

Геометрич. смысл Р. т. состоит в том, что на графике функции f, удовлетворяющей условиям Р. т., существует такая точка $(\xi, f(\xi))$, $a<\xi<b$, что в ней касательная к графику параллельна оси x.

Механич. интерпретация Р. т. означает, что для материальной точки, непрерывно двигающейся по прямой и вернувшейся через нек-рый промежуток времени в исходную точку, существует момент времени, в к-рый ее мгновенная скорость равнялась нулю.

Впервые теорема была получена для алгебраич. многочленов М. Роллем [1].

Лит.: [1] Rolle M., Traité d'algèbre, P., 1690; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975. *Л. Д. Кудрявцев.*

РОМБ — плоский четырехугольник с равными сторонами. Р. можно рассматривать как частный случай параллелограмма, у к-рого или две смежные стороны равны, или диагонали взаимно перпендикулярны, или диагональ делит угол пополам. Р. с прямыми углами наз. квадратом. *БСЭ-3.*

РОМБЕРГА МЕТОД, правило Ромберга, — метод вычисления определенного интеграла, основанный на *Ричардсона экстраполяции*. Пусть вычисляется значение I нек-рого функционала, при этом вычисляемое приближенное значение $T(h)$ зависит от параметра h, так что в результате вычисления получается приближенное равенство $I\cong T(h)$. Пусть известна информация о поведении разности $I-T(h)$ как функции от h, а именно:

$$I-T(h)=\alpha h^m, \tag{1}$$

где m — натуральное число и α зависит от приближаемого функционала и той функции, на к-рой он вычисляется, от способа приближения и (слабо) от h. Если наряду с $T(h)$ вычислено $T(2h)$, то способ Ричардсона дает для I приближение

$$I\cong\frac{2^mT(h)-T(2h)}{2^m-1}. \tag{2}$$

Это приближение тем лучше, чем слабее α из равенства (1) зависит от h. В частности, если α от h не зависит, то в (2) имеет место точное равенство.

Р. м. применяется к вычислению интеграла

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Промежуток [0, 1] взят для простоты записи, он может быть любым конечным. Пусть

$$T_{k0}\overset{\text{def}}{=}2^{-k-1}\left[f(0)+2\sum_{j=1}^{2^k-1}f(j2^{-k})+f(1)\right], \tag{3}$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Вычисления в Р. м. сводятся к составлению следующей таблицы:

$$\begin{array}{cccccc} & T_{00} & T_{01} & T_{02} & \dots & T_{0,n-1} \quad T_{0n} \\ & T_{10} & T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1,n-1} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ T_{n-2,0} & T_{n-2,1} & T_{n-2,2} & & & \\ T_{n-1,0} & T_{n-1,1} & & & & \\ T_{n0}, & & & & & \end{array}$$

где первый столбец состоит из квадратурных сумм (3) формулы трапеций. Элементы $(l+2)$-го столбца получаются из элементов $(l+1)$-го столбца по формуле

$$T_{k,l+1}=\frac{2^{2l+2}T_{k+1,l}-T_{kl}}{2^{2l+2}-1},\ k=0, 1, 2, \dots, n-l-1. \quad (4)$$

При составлении таблицы главная часть вычислительного труда затрачивается на вычисление элементов первого столбца. Элементы следующих столбцов вычисляются чуть сложнее конечных разностей.

Каждый элемент T_{kl} таблицы есть квадратурная сумма, приближающая интеграл

$$I \cong T_{kl}. \quad (5)$$

Узлами квадратурной суммы T_{kl} являются точки $j2^{-k-l}$, $j=0, 1, 2, \dots, 2^{k+l}$, а ее коэффициенты — положительные числа. Квадратурная формула (5) точна для всех многочленов степени не выше $2l+1$.

В предположении, что подинтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $2l+2$ на $[0, 1]$, разность $I-T_{kl}$ имеет представление вида (1), в к-ром $m=2l+2$. Отсюда следует, что элементы $(l+2)$-го столбца, вычисляемые по формуле (4), являются улучшениями по Ричардсону элементов $(l+1)$-го столбца. В частности, для погрешности квадратурной формулы трапеций справедливо представление

$$I-T_{k0}=-\frac{f''(\xi)}{12}h^2,\ h=2^{-k},\ \xi\in[0, 1],$$

и способ Ричардсона дает более точное приближение к I:

$$T_{k1}=\frac{4T_{k+1,0}-T_{k0}}{3},\ k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

T_{k1} оказывается квадратурной суммой формулы Симпсона, и т. к. для погрешности этой формулы справедливо представление

$$I-T_{k1}=-\frac{f^{(IV)}(\eta)}{180}h^4,\ h=2^{-k-1},\ \eta\in[0, 1],$$

то снова можно воспользоваться способом Ричардсона и т. д.

В Р. м. в качестве приближения к I берется T_{0n}, при этом предполагается, что существует непрерывная производная $f^{(2n)}(x)$ на $[0, 1]$. Ориентировочное представление о точности приближения T_{0n} можно получить, сравнивая T_{0n} и $T_{1,n-1}$.

Впервые метод изложен В. Ромбергом [1].

Лит.: [1] Romberg W., «Kgl. norske vid. selskabs forhandl.», 1955, Bd 28, № 7, s. 30—36; [2] Bauer F. L., Rutishauser H., Stiefel E., «Proc. Symp. Appl. Math.», 1963, v. 15, p. 199—218. *И. П. Мысовских.*

РОМБИЧЕСКАЯ СЕТЬ, конформно-чебышевская сеть,— сеть, в каждом четырехугольнике к-рой, образованном двумя парами линий различных семейств, стороны равны с точностью до бесконечно малых 1-го порядка. На поверхности вращения ее *асимптотическая сеть* есть Р. с. Напр., на гиперболоиде вращения его прямолинейные образующие составляют Р. с. *А. Б. Иванов.*

РОСТА ИНДИКАТРИСА, индикатор целой функции,— величина

$$h(\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho}},$$

характеризующая рост целой функции $f(z)$ конечного порядка $\rho>0$ и конечного типа σ вдоль луча $\arg z=\varphi$ при больших $r\,(z=re^{i\varphi})$. Напр., для функции

$$f(z)=e^{(a-ib)\,z^{\rho}}$$

порядок равен ρ и Р. и. равна $h(\varphi)=a\cos\rho\varphi+b\sin\rho\varphi$; для функции $\sin z$ порядок $\rho=1$ и $h(\varphi)=|\sin\varphi|$. Функция $h(\varphi)$ всюду конечна, непрерывна, имеет в каждой точке производную слева и справа, имеет производную всюду, кроме, быть может, счетного множества точек; всегда $h(\varphi)\leqslant\sigma$ и имеется, по крайней мере, одно φ, когда $h(\varphi)=\sigma$; обладает характерным свойством тригонометрич. выпуклости, т.е. если

$$h(\varphi_1)\leqslant H(\varphi_1),\quad h(\varphi_2)\leqslant H(\varphi_2),$$
$$H(\varphi)=a\cos\rho\varphi+b\sin\rho\varphi,$$
$$\varphi_1<\varphi_2,\ \varphi_2-\varphi_1<\min\left(\pi/\rho,\ 2\pi\right),$$

то $$h(\varphi)\leqslant H(\varphi),\ \varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2.$$

Выполняется неравенство

$$|f(re^{i\varphi})|\leqslant e^{[h(\varphi)+\varepsilon]r^{\rho}},\ r>r_0(\varepsilon),\quad\forall\varepsilon>0,$$

где $r_0(\varepsilon)$ не зависит от φ.

Р. и. вводится также для функции, аналитической в угле и имеющей в этом угле конечный порядок или уточненный порядок и конечный тип.

Лит.: [1] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968. *А. Ф. Леонтьев.*

РОСТОК — термин, означающий точечную локализацию различных математич. объектов (Р. функций, Р. отображений, Р. аналитических множеств и т. п.). Пусть, напр., x есть точка топологич. пространства и F — нек-рое семейство функций, определенных в окрестности x (каждая в своей). Функции f, g считаются эквивалентными (в точке x), если они совпадают в нек-рой окрестности x. Класс эквивалентности по этому отношению наз. ростком функций класса F в точке x. Так определяются Р. непрерывных функций, дифференцируемых функций в точках дифференцируемого многообразия, голоморфных функций в точках комплексного многообразия и т. п. Если семейство F обладает нек-рой алгебраич. структурой, то множество Р. функций семейства F наследует эту структуру (операции при помощи представителей классов). В частности, Р. голоморфных функций в точке z образуют кольцо. Элементы поля частных этого кольца наз. ростками мероморфных функций в точке z.

Аналогично определяется Р. семейства подмножеств топологич. пространства. Напр., в точках аналитич. многообразия есть Р. аналитических множеств (класс эквивалентности определяется по совпадению в окрестности данной точки). На Р. семейств подмножеств естественно определяются теоретико-множественные операции и отношения. Понятие Р. имеет смысл и для других объектов, определенных на открытых подмножествах топологич. пространства.

См. также *Аналитическая функция*, *Мероморфная функция*, *Пучок*.

Лит.: [1] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969. *Е. М. Чирка.*

РОТОР — то же, что *вихрь*.

РУЛЕТТА — название плоской кривой, рассматриваемой как траектория точки, жестко связанной с нек-рой кривой, катящейся по другой неподвижной кривой. В случае, когда окружность катится по прямой, Р. есть *циклоида*; если окружность катится по окружности — *циклоидальная кривая*; если по прямой катится гипербола, эллипс или парабола — *Штурма кривая*. Траектория точки эллипса, катящегося по др. эллипсу, наз. эпиэллипсом. Каждая плоская кривая многими способами может быть рассмотрена как Р.; напр., всякая кривая может быть образована качением прямой по *эволюте*.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

РУНГЕ ОБЛАСТЬ, область Рунге первого рода,— область G в пространстве $\mathbb{C}^n$ комплексных переменных $(z_1, \ldots, z_n)$, обладающая тем свойством, что для любой голоморфной в G функции $f(z_1, \ldots, z_n)$ существует последовательность многочленов

$$\{P_k(z_1, \ldots, z_n)\}_{k=1}^{\infty}, \qquad (*)$$

сходящаяся в G к $f(z_1, \ldots, z_n)$ равномерно на каждом замкнутом ограниченном множестве $E \subset G$. Определение Р. о. второго рода получается отсюда заменой последовательности (*) последовательностью рациональных функций $\{R_k(z_1, \ldots, z_n)\}_{k=1}^{\infty}$. При $n=1$ всякая односвязная область является Р. о. первого рода, всякая область — Р. о. второго рода (см. *Рунге теорема*). При $n \geqslant 2$ не всякая односвязная область есть Р. о. и не всякая Р. о. односвязна.

Лит.: [1] Фукс Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. *Е. П. Долженко.*

РУНГЕ ПРАВИЛО — один из методов оценки погрешности формул численного интегрирования. Пусть $R=h^kM$ — остаточный член формулы численного интегрирования, где h — длина отрезка интегрирования или какой-то его части, k — фиксированное число и M — произведение постоянной на производную подинтегральной функции порядка $k-1$ в какой-то точке промежутка интегрирования. Если J — точное значение интеграла, а I — его приближенное значение, то $J = I+h^kM$.

Согласно Р. п. вычисляется тот же самый интеграл по той же формуле численного интегрирования, но вместо h берется величина $h/2$. При этом, чтобы получить значение интеграла по всему отрезку, формула интегрирования применяется дважды. Если производная, входящая в M, меняется не сильно на рассматриваемом промежутке, то

$$R=h^kM=\frac{I_1-I}{1-\frac{1}{2^{k-1}}},$$

где I_1 — значение интеграла, вычисленное по $h/2$. Р. п. используется и при численном решении дифференциальных уравнений.

Правило предложено К. Рунге (С. Runge, нач. 20 в.).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; 2 изд., т. 2, М., 1962; [2] Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1979.

А. Б. Иванов.

РУНГЕ ТЕОРЕМА — теорема о возможности полиномиальных приближений голоморфных функций, впервые доказанная К. Рунге (С. Runge, 1885).

Пусть D — односвязная область на плоскости комплексного переменного z. Тогда всякая функция f, голоморфная в D, приближается равномерно внутри D многочленами от z. Точнее, для любого компакта $K \subset D$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $p(z)$ с комплексными коэффициентами такой, что $|f(z)-p(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in K$.

В иной формулировке: любая функция f, голоморфная в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, представляется в виде ряда из многочленов от z, абсолютно и равномерно сходящегося к f внутри D.

Эквивалентная формулировка Р. т.: пусть K — компакт на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ со связным дополнением $\mathbb{C}\setminus K$; тогда всякая функция, голоморфная в окрестности K, равномерно на K приближается многочленами от z. В такой форме Р. т. есть частный случай *Мергеляна теоремы*.

Р. т. наз. также следующая теорема о рациональных приближениях: всякая функция f, голоморфная в области $D\subset\mathbb{C}$, равномерно внутри D приближается рациональными функциями с полюсами вне D.

Р. т. имеет многочисленные применения в теории функций комплексного переменного и в функциональном анализе. Аналог Р. т. справедлив на некомпактных римановых поверхностях. Обобщением Р. т. для функций многих комплексных переменных является теорема Ока — Вейля (см. *Ока теоремы*).

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, 4 изд., М., 1978; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1, М., 1976.

Е. М. Чирка.

РУНГЕ — КУТТА МЕТОД — одношаговый метод численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$u'=f(t,\ u). \tag{1}$$

Основная идея Р.— К. м. была предложена К. Рунге [1] и развита затем В. Кутта [2] и др. Первоначально эта идея использовалась лишь для построения явных схем Р.— К. м., к-рые разыскивались в виде

$$y_{j+1}=y_j+\tau\sum\nolimits_{i=1}^{q} A_ik_i, \tag{2}$$

где

$$y_{j+\alpha}\simeq u(t_j+\alpha\tau),\ k_1=f(t_j,\ y_j),$$

$$k_n=f\left(t_j+\alpha_n\tau,\ y_j+\tau\sum\nolimits_{m=1}^{n-1}\beta_{nm}k_m\right),\ n=2,\ 3,\ \ldots,\ q,$$

при этом значения постоянных $A_i, \alpha_n, \beta_{nm}$, $i=1, 2, \ldots, q$; $n=2, 3, \ldots, q$; $m=1, 2, \ldots, n-1$, определялись из требования, чтобы погрешность равенства (2) на точном решении уравнения (1) имела возможно высокий порядок малости в сравнении с шагом τ для любых уравнений вида (1).

В отличие от *Адамса метода* и др. многошаговых методов, Р.— К. м., как и всякий одношаговый метод, не требует предварительного построения начала таблицы значений приближенного решения и дает возможность вести вычислительный процесс при естественных для уравнения (1) начальных условиях, что позволяет использовать его непосредственно и в случае неравномерных сеток. Однако поскольку в этом методе не используется информация о решении в предыдущих узлах сетки, то он, вообще говоря, оказывается локально менее экономичным, чем, напр., метод Адамса.

Наиболее широко известным (см., напр., [3]) среди Р.— К. м. является метод

$$y_{j+1}=y_j+\frac{1}{6}\tau(k_1+2k_2+2k_3+k_4),$$

$$k_1=f(t_j,\ y_j),\ k_2=f\left(t_j+\frac{1}{2}\tau,\ y_j+\frac{1}{2}\tau k_1\right),$$

$$k_3=f\left(t_j+\frac{1}{2}\tau,\ y_j+\frac{1}{2}\tau k_2\right),\quad k_4=f(t_j+\tau,\ y_j+\tau k_3),$$

принадлежащий зависящему от двух свободных параметров семейству методов четвертого порядка точности вида (2) с $q=4$. Популярен и простейший явный Р.— К. м. первого порядка точности, получающийся из (2) при $q=1$. Этот метод известен под названием метода Эйлера. При значениях q, равных 2 и 3, из (2) могут быть найдены семейства Р.— К. м. второго и третьего порядка точности, зависящие от одного и двух свободных параметров соответственно. В случае $q > 4$ имевшее место ранее соответствие между значением q и порядком точности метода уже нарушается. Р.— К. м. вида (2) пятого порядка точности удается построить лишь при $q=6$, шестого — при $q=7$, седьмого — при $q=9$ и т. д. В этом случае с увеличением значения q на единицу расширение множества подлежащих выбору в (2) постоянных A_i, α_n, β_{nm} часто оказывается уже недостаточным, чтобы удовлетворить условиям, возникающим из требования повышения на единицу порядка точности явного Р.— К. м. С целью увеличения числа выбираемых в (2) параметров можно рассмотреть, напр., следующее обобщение конструкции одношаговых методов, основанных на идее К. Рунге:

$$k_n = f\left(t_j + \alpha_n\tau,\ y_j + \tau\sum_{m=1}^{q}\beta_{nm}k_m\right),\quad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ q. \tag{3}$$

Методы вида (2), (3) в общем случае являются уже неявными, что значительно осложняет их численную реализацию: величины k_n, $n=1,\ 2,\ \ldots,\ q$, на каждом шаге приходится находить из системы, вообще говоря, нелинейных уравнений (3). Однако за счет достигнутого здесь значительного увеличения числа подлежащих выбору констант такие методы приобретают следующее свойство (см. [4]): для каждого значения q существует неявный Р.— К. м. порядка точности $2q$. Кроме того, при таком расширении класса Р.— К. м. появляются методы, хорошо ориентированные на случай *жестких дифференциальных систем*.

Имеется еще одно видоизменение (см., напр., [5]) идеи К. Рунге конструирования одношаговых методов численного решения уравнений вида (1). Именно, исходя из (1) записывается равенство

$$u(t_j+\tau) - u(t_j) = \tau\int_0^1 f(t_j+\alpha\tau,\ u(t_j+\alpha\tau))\,d\alpha.$$

Приближенное представление последнего интеграла квадратурной формулой с q узлами дает

$$u(t_j+\tau) \cong u(t_j) + \tau\sum_{i=1}^{q} A_i f(t_j+\alpha_i\tau,\ u(t_j+\alpha_i\tau)). \tag{4}$$

Если выбор узлов α_i и коэффициентов A_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ q$, рассматриваемой квадратурной формулы подчинить условиям

$$\sum_{i=1}^{q} A_i = 1,\quad \sum_{i=1}^{q} A_i\alpha_i^n = \frac{1}{n+1},\quad n=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1, \tag{5}$$

то погрешность приближенного равенства (4) будет величиной порядка τ^{p+1}. При $p \leqslant 2q$ система уравнений (5) разрешима и приближенное равенство (4) может быть построено. Аналогично можно записать приближенные равенства для неизвестных величин $u(t_j+\alpha_i\tau)$, входящих в правую часть (4), при этом требования к их точности могут быть понижены на порядок, и т. д.

В качестве примера так построенного одношагового метода ниже приводится (см. [6]) метод третьего порядка точности предсказывающе-исправляющего характера:

$$y_{j+1/4} = y_j + \frac{1}{4}\tau f(t_j,\ y_j),$$

$$y_{j+1/2} = y_j + \frac{1}{2}\tau f\left(t_j + \frac{1}{4}\tau,\ y_{j+1/4}\right),$$

$$y^*_{j+1} = y_j + \tau f\left(t_j + \frac{1}{2}\tau,\ y_{j+1/2}\right),$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}\tau\left(f(t_j,\ y_j) + 4f\left(t_j + \frac{1}{2}\tau,\ y_{j+1/2}\right) + f(t_j+\tau,\ y^*_{j+1})\right).$$

Если положить в (4) одно из значений α_i равным единице, на этом пути можно строить также и неявные методы, напр. метод

$$y_{j+1}=y_j+\frac{1}{2}\tau\left(f(t_j,\ y_{j+1}-\tau f(t_j+\tau,\ y_{j+1}))+\right.$$
$$\left.+f(t_j+\tau,\ y_{j+1})\right)$$

второго порядка точности.

Рассмотренные выше на примере уравнений вида (1) подходы к построению численных методов могут быть распространены на обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков (см. [6], [7]), а также использованы при конструировании разностных схем в случае дифференциальных уравнений с частными производными.

Лит.: [1] Runge C., «Math. Ann.», 1895, Bd 46, S. 167—178; [2] Kutta W., «Z. Math. und Phys.», 1901, Bd 46, S. 435—53; [3] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [4] Butcher J. C., «Math. Comp.», 1964, v. 18, p. 50—64; [5] Бобков В. В., «Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук», 1967, № 4, с. 27—35; [6] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы, т. 2, М., 1977; [7] Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, пер. с нем., М., 1953.

В. В. Бобков.

РУЧЕК ТЕОРИЯ — один из методов изучения топологич. многообразий, основанный на представлении многообразия в виде объединения топологич. шаров с непересекающимися внутренностями и специальным образом пересекающимися краями.

Пусть M^n есть n-мерное многообразие, k — такое целое число, что $0 \leqslant k \leqslant n$, и пусть топологич. шар H является образом гомеоморфного отображения $h: B^k \times B^{n-k} \to M^n$, где B^m обозначает стандартный m-мерный шар с центром в точке O. Тогда пара (H, h) (или просто H) наз. ручкой индекса k в многообразии M^n. Гомеоморфизм h наз. характеристическим отображением ручки H, диск $h(B^k \times O)$ — срединным, а диск $h(O\times \times B^{n-k})$ — секущим. Сфера $h(\partial B^k\times O)$ наз. приклеивающей (или подошвенной) сферой, а сфера $h(O\times\partial B^{n-k})$ — секущей. Пространство $h(\partial B^k\times B^{n-k})$ наз. подошвой ручки H.

Если многообразие M^n кусочно линейно, то имеет смысл говорить о кусочно линейных ручках, имея в виду кусочную линейность характеристич. отображения. Точно также в случае гладкого многообразия M^n можно говорить о гладких ручках.

Пусть (H, h) — ручка индекса k в многообразии M^n, P — ее подошва и M_1^n — такое подмногообразие M^n, что $H\cap M_1^n=P$. Операция перехода от многообразия M_1^n к многообразию $M_2^n=M_1^n\cup H$ наз. операцией приклеивания ручки индекса k. Вложение $f=h|_{\partial B^k\times B^{n-k}}$ наз. приклеивающим отображением. С точностью до неподвижного на M_1^n гомеоморфизма многообразие M_2^n полностью определяется приклеивающим отображением f и не зависит от объемлющего многообразия M. Если f — произвольное вложение $\partial B^k \times B^{n-k}$ в ∂M_1^n, то результат приклеивания ручки по вложению f можно описать так: $M_2^n=(M_1^n\cup(B^k\times B^{n-k}))/\sim$, где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отождествлением точек $\partial B^k\times B^{n-k}$ и ∂M_1^n по вложению f. Операция перехода от ∂M_1^n к ∂M_2^n наз. сферической перестройкой. По аналогии с этим приклеивание ручек наз. иногда пристройками. Многообразия, получающиеся приклеиванием ручки по изотопным вложениям, гомеоморфны. На рис. 1 изображено приклеивание трехмерных ручек индексов 1 и 2. Приклеивание к M_1^n ручки индекса 0 состоит в добавлении к M_1^n отдельно взятого шара размерности n. Добавление ручки индекса n заключается в заклеивании n-мерным шаром одной из компонент ∂M_1^n.

Если многообразие M_1^n и приклеивающее вложение $f: \partial B^k \times B^{n-k} \to \partial M_1^n$ кусочно линейны, то многообразие M_2^n, получающееся приклеиванием ручки по вложению f, также кусочно линейно. В случае гладких M_1^n и f многообразие M_2^n обладает естественной гладкой структурой во всех точках, кроме «угловых» точек, объединение к-рых совпадает с краем подошвы ручки. Эту структуру можно единственным образом продолжить до гладкой структуры на всем M_2^n. Такое продолжение наз. **сглаживанием углов**. В гладком случае операцию сглаживания углов включают в операцию приклеивания ручки. Приклеивание гладкой ручки полностью определяется приклеивающей сферой вместе с тривиализацией ее нормального расслоения.

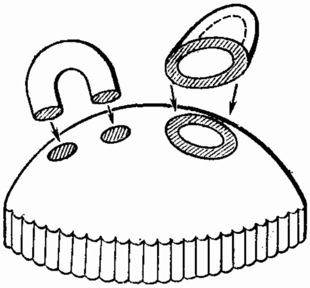


Рис. 1.

Представление компактного многообразия M^n в виде объединения конечного упорядоченного семейства ручек в M^n наз. **разложением** M^n **на ручки**, если каждая следующая ручка пересекается с объединением предыдущих в точности по своей подошве. Другими словами, M^n допускает разложение на ручки, если его можно получить из шара (или из пустого множества) последовательным приклеиванием ручек. Аналогично, под разложением пары (M^n, M_0^n), где M_0^n — подмногообразие многообразия M^n, понимается представление M^n в виде результата последовательных приклеиваний ручек к M_0^n. В частности, **разложением бордизма** (W, M_0, M_1) **на ручки** наз. разложение пары $(W, M_0 \times I)$, где $M_0 \times I$ — воротник M_0. Разложение на ручки некомпактного многообразия M^n состоит из бесконечного числа ручек. При этом обычно требуется, чтобы разложение было локально конечным, т. е. чтобы каждый компакт в M^n пересекался только с конечным числом ручек.

Применяя приведение в *общее положение* секущих сфер уже приклеенных ручек и подошвенной сферы приклеиваемой ручки и заменяя приклеивающие отображения на изотопные, можно добиться, чтобы ручки одного индекса не пересекались и чтобы индексы последовательно приклеиваемых ручек не убывали. Такое разложение на ручки наз. **правильным**.

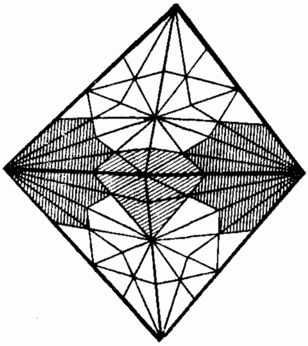


Рис. 2.

Каждое кусочно линейное многообразие раскладывается на кусочно линейные ручки. Если T — триангуляция M^n и T'' — ее второе барицентрическое подразделение, то в качестве ручек индекса k можно взять замкнутые звезды в T'' барицентров k-мерных симплексов T (см. рис. 2; определение звезды дано в ст. *Комплекс*).

Существует тесная связь между разложениями гладкого многообразия M^n на гладкие ручки и гладкими функциями на M^n с невырожденными критич. точками — *Морса функциями*. Эта связь заключается в следующем. Пусть x_0 — такая критич. точка индекса k

функции Морса $f: M^n \to R$, что для нек-рого $\varepsilon > 0$ в прообразе отрезка $[f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon]$ нет других критич. точек, и пусть $M_c = \{x \in M^n : f(x) \leqslant c\}$. Тогда многообразие $M_{f(x_0)+\varepsilon}$ получается из многообразия $M_{f(x_0)-\varepsilon}$ приклеиванием гладкой ручки индекса k. Таким образом, каждая функция Морса на компактном многообразии M^n порождает разложение M^n на гладкие ручки, причем число ручек индекса k в этом разложении совпадает с числом критич. точек индекса k. Этим доказывается существование разложения любого гладкого многообразия на гладкие ручки. Обратно, каждое разложение M^n на гладкие ручки порождено нек-рой функцией Морса на M^n.

Сложнее обстоит дело с разложением на ручки топологич. многообразий. Известно, что любое замкнутое топологич. многообразие размерности $n \geqslant 5$ раскладывается на топологич. ручки. Многообразия размерности $n \leqslant 3$ комбинаторно триангулируемы и поэтому раскладываются на ручки. Доказано, что существует многообразие размерности 4, не допускающее разложения на ручки.

Если в правильном разложении на ручки многообразия M^n последовательно стянуть все ручки на их срединные диски, то получится *клеточное пространство* K. Каждой ручке индекса k в разложении M^n отвечает k-мерная клетка в *клеточном разбиении* пространства K. Пространство K имеет тот же *гомотопический тип*, что и M^n. В случае замкнутого M^n пространство K совпадает с M^n.

Из определения ручки следует, что каждая n-мерная ручка H индекса k является одновременно ручкой индекса $n-k$. Если P_k — подошва H как ручки индекса k, а P_{n-k} — подошва H как ручки индекса $n-k$, то $P_k \cup P_{n-k} = \partial H$ и $P_k \cap P_{n-k} = \partial P_k = \partial P_{n-k}$. Каждое разложение замкнутого многообразия M^n на ручки порождает т. н. двойственное разложение M^n на ручки. Двойственное разложение состоит из взятых в обратном порядке ручек исходного разложения, причем каждая ручка индекса k считается уже ручкой индекса $n-k$. Этот факт служит геометрич. основой *Пуанкаре двойственности*. Если многообразие M^n имеет край, то двойственное разложение можно рассматривать как разложение пары $(M^n \cup (\partial M^n \times I), \partial M^n \times I)$.

Пусть H_1, H_2 — непересекающиеся ручки индекса k, приклеенные к многообразию M^n с односвязным краем по вложениям $f_1\ f_2: \partial B^k \times B^{n-k} \to \partial M^n$. Пусть $k \geqslant 2$ и $n-k \geqslant 2$, а $[f]$ обозначает элемент группы $\pi_{k-1}(\partial M^n)$, определяемый отображением f. Тогда вложение f_2 изотопно в $\partial(M^n \cup H_1)$ такому вложению $f_2' : \partial B^k \times \times B^{n-k} \to \partial M^n$, что $[f_2'] = [f_1] + [f_2]$. Это означает, что многообразия $M^n \cup H_1 \cup H_2$ и $M^n \cup H_1 \cup H_2'$, где H_2' — ручка, приклеенная по вложению f_2', гомеоморфны. Операция перехода от многообразия $M^n \cup H_1 \cup H_2$ к многообразию $M^n \cup H_1 \cup H_2'$ наз. сложением ручек.

Пусть многообразие M_2^n получено из многообразия M_1^n последовательным приклеиванием ручки H_1 индекса k и ручки H_2 индекса $k+1$ так, что подошвенная сфера ручки H_2 трансверсально пересекает секущую сферу ручки H_1 ровно в одной точке. Тогда эту пару ручек можно устранить. Это означает, что существует гомеоморфизм M_2^n на M_1^n, неподвижный вне окрестности $H_1 \cup H_2$. Операция устранения иногда наз. сокращением дополнительных ручек. Сложение ручек и сокращение ручек можно производить, оставаясь в рамках кусочно линейной или гладкой категории. С помощью сокращения ручек индексов 0 и 1 можно, напр., любое разложение на ручки связного компактного многообразия M^n заменить на разложение с ровно одной ручкой индекса 0. Если M^n односвязно и $n>5$, то, складывая и сокращая ручки, можно любое разложение на ручки свести к разложению с минимальным числом ручек, совместимым с гомологич. структурой M^n.

Пусть (H, h) — топологич. ручка индекса k в кусочно линейном многообразии M^n, причем характеристич. отображение h кусочно линейно в окрестности $\partial B^k \times \times B^{n-k}$. Существует ли неподвижная на окрестности $\partial B^k \times B^{n-k}$ изотопия отображения h, выпрямляющая ручку H, т. е. переводящая ее в кусочно линейную ручку? Если бы ответ на этот вопрос был всегда положительным, то на каждом топологич. многообразии можно было бы ввести кусочно линейную структуру, согласовывая структуры на координатных окрестностях с помощью выпрямления кусочно линейных ручек одной окрестности внутри другой. На самом деле ответ зависит от индекса k и размерности n ручки H. Если $n \leqslant 3$ или $n \geqslant 5$ и $k \neq 3$, то любая ручка выпрямляема. Известно, что при $n \geqslant 5$ существуют невыпрямляемые ручки индекса 3, причем препятствие к выпрямлению лежит в группе $\mathbb{Z}_2$. В размерности 4 ручки индексов 0 и 1 выпрямляемы, а индексов 2 и 3, вообще говоря, нет. Препятствием к сглаживанию кусочно линейных ручек служат т. н. группы Милнора Γ_k.

Лит.: [1] Смейл С., «Математика», 1962, т. 6, № 3, с. 138—55; [2] его же, там же, 1964, т. 8, № 4, с. 95—108; [3] его же, «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 1, с. 125—38; [4] Kirby R. C., Siebenmann L. C., «Ann. Math. Stud.», 1977, № 88; [5] Рурк К., Сандерсон Б., Введение в кусочно линейную топологию, пер. с англ., М., 1974; [6] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977. *С. В. Матвеев.*

РУЧНОЕ ВЛОЖЕНИЕ — вложение топологич. *полиэдра* P в пространство $\mathbb{R}^n$ такое, что существует гомеоморфизм $\mathbb{R}^n$ на себя, при к-ром P переходит в прямолинейный полиэдр. Тогда P наз. ручным. В противном случае P наз. диким, а вложение — *диким вложением.* *М. И. Войцеховский.*

РУШЕ ТЕОРЕМА: пусть $f(z)$ и $g(z)$ — регулярные аналитич. функции комплексного переменного z в области D, простая замкнутая кусочно гладкая кривая Γ вместе с ограничиваемой ею областью G принадлежит D и всюду на Γ выполняется неравенство $|f(z)|>|g(z)|$; тогда в области G сумма $f(z)+g(z)$ имеет столько же нулей, сколько и $f(z)$.

Эта теорема была получена Э. Руше [1]. Она является следствием *аргумента принципа*, и из нее в свою очередь получается основная теорема алгебры многочленов.

Справедливо также обобщение Р. т. для многомерных голоморфных отображений, напр. в следующем виде. Пусть $f(z)=(f_1(z), \ldots, f_n(z))$ и $g(z)=(g_1(z), \ldots, g_n(z))$ — голоморфные отображения области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, с изолированными нулями, пусть гомеоморфная сфере гладкая поверхность Γ вместе с ограничиваемой ею областью G принадлежит D и всюду на Γ выполняется неравенство

$$|f(z)|=\sqrt{|f_1(z)|^2+\ldots+|f_n(z)|^2}>|g(z)|.$$

Тогда отображение $f(z)+g(z)$ имеет в G столько же нулей, сколько и $f(z)$.

Лит.: [1] Rouché E., «J. École polyt.», 1858, t. 21; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

РЭЛЕЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное распределение вероятностей с плотностью

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, & x>0,\\ 0, & x \leqslant 0,\end{cases}$$

зависящей от *масштабного параметра* $\sigma>0$. Р. р.

имеет положительную асимметрию, его единственная мода находится в точке $x=\sigma$. Все моменты Р. р. конечны, математич. ожидание и дисперсия равны соответственно $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ и $2\sigma^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$. Функция распределения Р. р. имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x^2/2\sigma^2}, & x>0,\\ 0 & , x\leqslant 0.\end{cases}$$

Р. р. является частным случаем распределения с плотностью

$$\frac{2}{2^{n/2}\sigma^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{n-1}e^{-x^2/2\sigma^2},$$

при $n=2$ и, следовательно, при $\sigma=1$ Р. р. совпадает с распределением арифметического квадратного корня из случайной величины, имеющей *«хи-квадрат» распределение* с двумя степенями свободы. Иначе, Р. р. может быть интерпретировано как распределение длины вектора в прямоугольной системе координат на плоскости, координаты к-рого независимы и имеют *нормальное распределение* с параметрами 0 и σ^2. Аналогом Р. р. в 3-мерном пространстве служит *Максвелла распределение*.

Р. р. находит основное применение в теории стрельбы и статистич. теории связи. Р. р. впервые рассмотрено Рэлеем (Rayleigh, 1880), как распределение результирующей амплитуды при сложении гармонич. колебаний.

Лит.: [1] Стретт Дж. В. (лорд Рэлей), Волновая теория света, пер. с англ., М.— Л., 1940. *А. В. Прохоров.*

РЭЛЕЯ УРАВНЕНИЕ — нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+x=0,\quad \dot{x}=dx/dt,\qquad (*)$$

где функция $F(u)$ удовлетворяет предположению:

$$uF(u)<0 \text{ при малых } |u|,$$
$$uF(u)>0 \text{ при больших } |u|.$$

Р. у. описывает типичную нелинейную систему с одной степенью свободы, в к-рой возможны *автоколебания*. Названо по имени Рэлея (Rayleigh), изучавшего уравнение такого типа в связи с задачами акустики [1].

Если уравнение (*) продифференцировать, а затем положить $y=\dot{x}$, то получится *Льенара уравнение*

$$\ddot{y}+f(y)\dot{y}+y=0;\ f(u)=F'(u).$$

Частным случаем Р. у. при

$$F(u)=-\lambda\left(u-\frac{u^3}{3}\right),\ \lambda=\text{const},$$

является *Ван дер Поля уравнение*. Иногда Р. у. наз. частный случай уравнения (*):

$$\ddot{x}-(a-b\dot{x}^2)\dot{x}+x=0,\ a>0,\ b>0.$$

Имеется большое число работ, в к-рых выясняются условия существования и единственности устойчивого *предельного цикла* у Р. у., то есть условия возникновения автоколебаний. Вопрос о периодич. решениях изучался и для различных обобщений Р. у., напр. для

$$\ddot{x}+F(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=e(t),$$

где $e(t)$ — периодич. функция.

Системой типа Рэлея часто наз. уравнение

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+G(x)=H(t,x,\dot{x}),$$
$$x\in\mathbb{R}^n,\ F:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n,\ G:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n,$$

причем обычно предполагается, что

$$F = \operatorname{grad} f,\ f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ f \in C^1,$$

$$G = \operatorname{grad} g,\ g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ g \in C^2,$$

а H — ограниченная и периодическая по t вектор-функция. Представляет интерес получение достаточных условий существования периодич. решений таких систем.

Лит.: [1] Стретт Дж. В. (лорд Рэлей), Теория звука, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М.— Л., 1955; [2] Чезари Л., Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1964. См. также лит. при ст. *Льенара уравнение*. *Н. Х. Розов.*

РЯД, бесконечная сумма,— последовательность элементов (наз. членами данного ряда) нек-рого линейного топологич. пространства и определенное бесконечное множество их конечных сумм (наз. частичными суммами ряда), для к-рых определено понятие предела. Простейшими примерами Р. являются следующие.

Однократные числовые ряды. Пара последовательностей комплексных чисел $\{a_n\}$ и $\{s_n\}$ таких, что

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{1}$$

наз. числовым (однократным) рядом и обозначается так:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

или

$$\sum a_n. \tag{2}$$

Элементы последовательности $\{a_n\}$ наз. членами ряда, а элементы последовательности $\{s_n\}$ — его частичными суммами, причем a_n наз. n-м членом Р. (2), а s_n — его частичной суммой порядка n. Р. (2) однозначно определяется каждой из двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{s_n\}$: члены последовательности $\{s_n\}$ получаются из членов последовательности $\{a_n\}$ по формуле (1), а последовательность $\{a_n\}$ восстанавливается по последовательности $\{s_n\}$ согласно формулам

$$a_1 = s_1,\ a_{n+1} = s_{n+1} - s_n,\quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

В этом смысле изучение Р. равносильно изучению последовательностей: для каждого утверждения о Р. можно сформулировать равносильное ему утверждение о последовательностях.

Р. (2) наз. сходящимся, если последовательность его частичных сумм $\{s_n\}$ имеет конечный предел

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n,$$

к-рый наз. суммой Р. (2), и пишут

$$s = \sum a_n.$$

Таким образом, обозначение (2) применяется как для самого Р., так и для его суммы. Если последовательность частичных сумм Р. (2) не имеет конечного предела, то он наз. расходящимся.

Примером сходящегося Р. является сумма членов бесконечной геометрич. прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \tag{3}$$

при условии, что $|q| < 1$. В этом случае ее сумма равна $\frac{1}{1-q}$, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Если же $|q| \geqslant 1$, то Р. (3) дает пример расходящегося Р.

Если Р. (2) сходится, то последовательность его членов стремится к нулю:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Обратное утверждение неверно: последовательность членов $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *гармонического ряда*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

стремится к нулю, однако этот Р. расходится. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ наз. остатком порядка n Р. (2). Если Р. сходится, то каждый его остаток сходится. Если нек-рый остаток Р. сходится, то и сам Р. сходится. Если остаток порядка n Р. (2) сходится и его сумма равна r_n, то есть $r_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$, то

$$s=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=s_n+r_n.$$

Если Р. (2) и ряд

$$\sum b_n \tag{4}$$

сходятся, то сходится и ряд

$$\sum (a_n+b_n),$$

наз. суммой рядов (2) и (3), причем его сумма равна сумме этих Р.

Если Р. (2) сходится и λ — комплексное число, то ряд $\sum \lambda a_n$, наз. произведением Р. (2) на число λ, также сходится и $\sum \lambda a_n=\lambda \sum a_n$.

Условие сходимости Р., не использующее понятие его суммы, дает *Коши критерий* сходимости Р.

Если все члены Р. (2) являются действительными числами: $a_n \in \mathbb{R}$, то Р. (2) наз. действительным. Важную роль в теории Р. играют действительные Р. с неотрицательными членами:

$$\sum a_n,\ a_n \geqslant 0,\ n=1,\ 2,\ \ldots\ . \tag{5}$$

Для того чтобы Р. (5) сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху. Если же он расходится, то его частичные суммы стремятся к бесконечности:

$$\lim_{n \to \infty} s_n=+\infty,$$

поэтому в этом случае пишут

$$\sum a_n=+\infty.$$

Для Р. с неотрицательными членами существует много различных признаков сходимости. Основными являются следующие.

Признак сравнения. Если для Р. (5) и

$$\sum b_n,\ b_n \geqslant 0,\quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{6}$$

с неотрицательными членами существует такая постоянная $c>0$, что $0 \leqslant a_n \leqslant c b_n$, то из сходимости Р. (6) следует сходимость Р. (5), а из расходимости Р. (5) — расходимость Р. (6).

При применении признака сравнения для исследования сходимости заданного Р. с неотрицательными членами часто оказывается целесообразным выделить главную часть его n-го члена относительно $\frac{1}{n}$ при $n \to \infty$ в виде $\frac{a}{n^{\alpha}}$ (a — нек-рая постоянная), а в качестве Р., с к-рым сравнивается данный Р., взять ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

сходящийся при $\alpha>1$ и расходящийся при $\alpha \leqslant 1$.

Как следствие признака сравнения в случае, когда в качестве Р. сравнения взят Р. (7), получается следующее правило: если

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n = b,$$

то при $\alpha > 1$ и $0 \leqslant b < +\infty$ Р. (5) сходится, а при $\alpha \leqslant 1$ и $0 < b \leqslant +\infty$ Р. (5) расходится.

Следствиями признака сравнения являются также *Д'Аламбера признак* и *Коши признак* сходимости числовых рядов с положительными членами. Для таких Р. имеются еще *Бертрана признак*, *Гаусса признак*, *Ермакова признак*, *Куммера признак*, *Раабе признак*.

Интегральный признак сходимости дает достаточные условия сходимости Р. (5) с неотрицательными членами, образующими убывающую последовательность: $a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть Р. (5) таков, что для него существует функция f определенная и убывающая при $x \geqslant 1$, у к-рой ее значения в целочисленных точках совпадают с членами данного ряда: $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда если s_n — частичные суммы, а r_n — остатки ряда (5), то для них имеют место следующие оценки:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant r_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx$$

и

$$s_n = \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx + c + \varepsilon_n, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

где c — нек-рая постоянная, а

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Поэтому Р. (5) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Если же Р. (5) расходится, то его частичные суммы s_n растут так же, как интегралы

$$\int_{1}^{n+1} f(x)\,dx,$$

т. е. s_n асимптотически равны указанным интегралам:

$$s_n \sim \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx, \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Для Р. (5), члены к-рого образуют убывающую последовательность, имеет место теорема Коши: если члены Р. (5) убывают, то он сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

Необходимым условием сходимости Р. (5) с убывающей последовательностью членов является условие

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \longrightarrow \infty. \tag{8}$$

Пример расходящегося ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

показывает, что условие (8) не является достаточным для сходимости Р. (5) с убывающей последовательностью членов.

Важный класс числовых Р. составляют *абсолютно сходящиеся ряды*, т. е. такие Р. (2), для к-рых сходятся ряды $\sum |a_n|$. Если Р. абсолютно сходится, то он просто сходится и его сумма не зависит от порядка следования слагаемых. Сходящиеся, но не абсолютно сходящиеся

Р. наз. условно сходящимися. Примером условно сходящегося Р. является ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Сумма условно сходящегося Р. зависит от порядка его членов (см. *Римана теорема* о перестановке членов ряда): каковы бы ни были α и β, принадлежащие множеству действительных чисел, дополненному бесконечностями $+\infty$ и $-\infty$, $\alpha \leqslant \beta$, можно так переставить члены любого условно сходящегося Р., членами к-рого являются действительные числа, что для частичных сумм s_n полученного Р. будут иметь место равенства

$$\varliminf_{n\to\infty} s_n = \alpha, \quad \varlimsup_{n\to\infty} s_n = \beta.$$

Таким образом, для условно сходящихся Р. не имеет места коммутативный закон сложения. Не для всех Р. оказывается справедлив и ассоциативный закон сложения: если Р. расходится, то Р., полученный из данного последовательной группировкой его членов, может сходиться, причем его сумма зависит от способа группировки членов исходного Р. Напр., ряд

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$$

расходится, а ряды $(1-1)+(1-1)+\ldots$ и $1-(1-1)-(1-1)-\ldots$, полученные из него попарной группировкой его членов, сходятся и имеют различные суммы. Однако если Р. сходится, то, конечно, всякий Р., получающийся последовательной группировкой его членов, сходится, и его суммой является сумма данного Р., ибо последовательность частичных сумм нового Р. есть подпоследовательность частичных сумм исходного Р.

Среди Р. с членами разных знаков выделяют знакочередующиеся Р., для к-рых имеется *Лейбница признак* сходимости. Различные признаки сходимости для произвольных числовых Р. могут быть получены с помощью *Абеля преобразования* сумм попарных произведений, напр. *Абеля признак*, *Дедекинда признак*, *Дирихле признак*, *Дюбуа-Реймона признак* сходимости Р.

Умножение рядов. Для умножения Р. существуют различные правила. Наиболее известно правило Коши, согласно к-рому при перемножении рядов (2) и (4) сначала суммируются по конечным «диагоналям» попарные произведения $a_m b_n$, т. е. такие, у к-рых сумма индексов $m+n$ имеет одно и то же значение:

$$c_p = \sum_{m+n=p} a_m b_n, \tag{9}$$

и ряд $\sum c_p$, членами к-рого являются полученные суммы, наз. произведением данных Р. Это правило умножения Р. подсказывается формулой умножения степенных рядов:

$$\sum a_m x^m \sum b_n x^n = \sum c_p x^p.$$

Пусть Р. (2), (4), (9) сходятся и

$$\sum a_m = a, \quad \sum b_n = b, \quad \sum c_p = c.$$

Если Р. (2) и (4) абсолютно сходятся, то Р. (9) также абсолютно сходится и $ab=c$. Если Р. (2) абсолютно сходится, а Р. (4) сходится, то сходится Р. (9) и $ab=c$ (теорема Мертенса). Если же ряды (2) и (4) условно сходятся, то Р. (9) может не сходиться; напр., ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

условно сходится, а ряд

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^2 =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}}$$

расходится. Если все три Р. — (2), (4), (9) — сходятся, то $ab=c$.

Примером другого правила умножения Р. является суммирование сначала попарных произведений $a_m b_n$, у к-рых произведение индексов mn имеет фиксированное значение

$$c_p = \sum_{mn=p} a_m b_n,$$

и определение произведения рядов (2) и (4) как ряда $\sum c_p$. Это правило умножения Р. подсказывается формулой умножения *Дирихле рядов*:

$$\sum \frac{a_m}{m^x} \sum \frac{b_n}{n^x} = \sum \frac{c_p}{p^x}.$$

Встречаются также Р., члены к-рых a_n занумерованы всеми целыми числами $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Они обозначаются:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n. \quad (10)$$

Р. (10) наз. сходящимся, если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n},$$

и сумма этих Р. наз. суммой Р. (10).

Числовыми Р. более сложной структуры являются *кратные ряды*, члены $a_{n_1 \ldots n_m}$ к-рых снабжены мультииндексами, где n_k — натуральные числа, $k=1, 2, \ldots, m$, $m=2, 3, \ldots$. В теории кратных Р. рассматриваются различные типы частичных сумм: треугольные

$$s_n = \sum_{k_1+\ldots+k_m \leqslant n} a_{k_1 \ldots k_m},$$

прямоугольные

$$s_{n_1 \ldots n_m} = \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} a_{k_1 \ldots k_m},$$

сферические

$$s_r = \sum_{k_1^2+\ldots+k_m^2 \leqslant r^2} a_{k_1 \ldots k_m}, \quad r > 0,$$

и др. В зависимости от выбора типа частичных сумм определяется понятие суммы кратного Р. как соответствующего их предела. В случае $m=2$ кратный Р. наз. *двойным рядом*. Для кратных Р., в отличие от однократных, члены Р. уже могут не определяться заданием множества частичных сумм, т. е., вообще говоря, для того чтобы кратный Р. был определен, необходимо задать как кратную последовательность членов Р., так и множество его частичных сумм.

В математич. анализе находят применение не только сходящиеся Р., но и расходящиеся. Для последних разработаны разнообразные методы суммирования. В виде сумм числовых Р. записываются многие важные иррациональные постоянные, напр.:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad \pi^2 = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

а также значения определенных интегралов, первообразные подинтегральных функций к-рых не выражаются через элементарные функции:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2},$$
$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Функциональные ряды. Функциональным (однократным) рядом

$$\sum a_n(x), \quad x \in X, \tag{11}$$

наз. пара функциональных последовательностей $\{a_n(x)\}$ и $\{s_n(x)\}$, состоящих из числовых функций, определенных на нек-ром множестве X и таких, что

$$s_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Как и в случае числовых Р., элементы последовательности $\{a_n(x)\}$ наз. членами Р. (11), а последовательности $\{s_n(x)\}$ — его частичными суммами. Р. (11) наз. сходящимся на множестве X, если при любом фиксированном $x_0 \in X$ сходится числовой ряд

$$\sum a_n(x_0).$$

Пример. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

сходится на всей комплексной плоскости, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

только при $z=0$.

Сумма сходящегося Р. непрерывных, напр. на нек-ром отрезке, функций не обязательно является непрерывной функцией, напр. ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$$

сходится на отрезке $[0, 1]$, его члены непрерывны на этом отрезке, а сумма

$$s(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{если} \quad x = 1 \end{cases}$$

разрывна в точке $x=1$. Ряд условий, при к-рых на функциональные Р. переносятся свойства непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости конечных сумм соответственно непрерывных, дифференцируемых или интегрируемых функций, формулируется в терминах равномерной сходимости рядов (см. *Равномерно сходящийся ряд*).

Ряды измеримых функций. Пусть X — измеримое по Лебегу подмножество n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, μ — мера Лебега и члены $a_k(x)$ ряда

$$\sum a_k(x), \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

являются измеримыми почти всюду конечными на X функциями, принимающими значения из расширенной числовой прямой (т. е. наряду с действительными числами они могут принимать значения $+\infty$ и $-\infty$). Если Р. (12) сходится почти всюду на множестве X, то его сумма $s(x)$ также является измеримой функцией и, в силу *Егорова теоремы*, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $E \subset X$, что $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$, а Р., членами к-рого являются сужения $a_k(x)|_E$ функций $a_k(x)$ на компакте E, сходится на нем равномерно и его суммой является $s(x)|_E$ — сужение суммы Р. (12) на рассматриваемом компакте.

Пусть $L_p(X)$, $1 \leq p \leq +\infty$,— пространство функций $f: X \to \mathbb{R}$ соответственно с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

при $1 \leq p < +\infty$ и с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \operatorname{vrai} |f(x)|$$

при $p=\infty$. Р. (12) наз. сходящимся в пространстве $L_p(X)$, если последовательность его частичных сумм $\{s_n(x)\}$ сходится в $L_p(X)$ и ее предел $s(x)$ наз. суммой Р. (12) в этом пространстве:

$$s(x)=\sum a_k(x) \text{ в } L_p(X).$$

Если Р. (12) сходится в $L_p(X)$ и $s(x)$ — его сумма, то существует подпоследовательность последовательности его частичных сумм, к-рая сходится к $s(x)$ почти всюду на X.

Почленное интегрирование рядов. Обобщением теоремы о почленном интегрировании равномерно сходящихся Р. являются следующие теоремы.

Теорема 1. Если существует такая суммируемая на множестве X функция f, что для всех $m=1, 2, \ldots$ и всех $x \in X$ частичные суммы $s_n(x)$ Р. (12) удовлетворяют неравенству

$$|s_m(x)| \leqslant f(x),$$

Р. (12) сходится почти всюду на X и его сумма равна $s(x)$, то

$$\int_X s(x)\,dx=\int_X \left[\sum a_k(x)\right] dx=\sum \int_X a_k(x)\,dx. \quad (13)$$

Теорема 2. Если $a_k(x) \in L_p(X)$, $s(x) \in L_p(X)$, $1<p<+\infty$, $\mu X<+\infty$, и последовательность частичных сумм $\{s_m(x)\}$ Р. (12) слабо сходится на множестве X к функции $s(x)$ (т.е. для любой функции $b=b(x) \in L_q(x)$, $1/p+1/q=1$, выполняется условие

$$\lim_{m\to\infty}(s-s_m,\ b)=\lim_{m\to\infty}\int_X [s(x)-s_m(x)]\,b(x)\,dx=0),$$

то имеет место формула (13).

Можно почленно интегрировать и Р. (12), все члены к-рых неотрицательны на множестве X. У таких Р. последовательность их частичных сумм в каждой точке $x \in X$ возрастает и потому имеет конечный или бесконечный предел, к-рый наз. значением суммы $s(x)$ рассматриваемого Р. в этой точке.

Теорема 3. Если члены Р. (12) неотрицательны, то имеет место формула (13).

В предположениях теоремы 3 обе части формулы (13) могут обратиться в $+\infty$. Достаточные условия их конечности даются следующей теоремой.

Теорема 4. Если члены Р. (12) неотрицательны и интегралы от его частичных сумм $s_m(x)$ ограничены в совокупности:

$$\int_X s_m(x)\,dx \leqslant c, \text{ где } c \text{ — постоянная,}$$
$$m=1,\ 2,\ \ldots,$$

то сумма $s(x)$ Р. (12) является суммируемой функцией.

Почленное дифференцирование рядов. Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное арифметическое евклидово пространство точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, G — открытое в $\mathbb{R}^n$ множество, $f: G \to \mathbb{R}$. И пусть $D_{x_i}f$ — обобщенная производная функции f по переменной x_i, $i=1, 2, \ldots, n$. Если $a_k(x) \in L_p(G)$, $D_{x_{i_0}} a_k(x) \in L_p(G)$ (i_0 — фиксировано), $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, и ряды $\sum a_k(x)$, $\sum D_{x_{i_0}} a_k(x)$, $x \in G$, сходятся в $L_p(G)$: $s(x)=\sum a_k(x)$, $\sigma(x)=\sum D_{x_{i_0}} a_k(x)$, то функция $s(x)$ имеет в G обобщенную производную по переменной x_{i_0} и $D_{x_{i_0}} s(x)=\sigma(x)$, то есть

$$D_{x_{i_0}} \sum a_k(x) = \sum D_{x_{i_0}} a_k(x) \text{ в } L_p(G).$$

Среди функциональных Р. особо важную роль играют *степенные ряды*, *Фурье ряды*, *Дирихле ряды* и вообще Р., получающиеся при разложении функций по собственным функциям того или иного оператора. Многие из перечисленных свойств функциональных Р. обобщаются на более общие Р., когда их членами являются функции со значениями в линейных нормированных пространствах или, более общо, в линейных топологич. пространствах, а также на кратные функциональные Р., то есть Р., члены к-рых снабжены мультииндексами:

$$\sum a_{n_1 \ldots n_m}(x).$$

Теория функциональных рядов дает удобные и весьма общие методы для изучения функций, поскольку функции весьма широкого класса могут быть представлены в определенном смысле в виде суммы нек-рого ряда элементарных функций. Напр., однозначная аналитич. функция является в окрестности каждой внутренней точки из множества своего определения суммой своего *Тейлора ряда*; всякая непрерывная на отрезке функция является суммой равномерно сходящегося на этом отрезке ряда, членами к-рого являются алгебраич. многочлены; наконец, для всякой измеримой и конечной почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции существует тригонометрич. ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

сумма к-рого почти всюду совпадает с заданной функцией.

Разложение функций в Р. применяется в различных разделах математики: в анализе для исследования функций, при отыскании решений в виде Р. тех или иных уравнений, содержащих неизвестные функции, напр. *неопределенных коэффициентов методом*, в численных методах для приближенного вычисления значений функций и т. п.

Историческая справка. К понятию бесконечных сумм подошли еще ученые Др. Греции, у них уже встречалась сумма членов бесконечной геометрич. прогрессии с положительным знаменателем, меньшим единицы. Как самостоятельное понятие Р. вошел в математику в 17 в. И. Ньютон (J. Newton) и Г. Лейбниц (G. Leibniz) систематически использовали Р. для решения как алгебраических, так и дифференциальных уравнений. Формальная теория Р. усиленно развивалась в 18—19 вв. в работах Я. и И. Бернулли (Jakob und Johann Bernoulli), Б. Тейлора (B. Taylor), К. Маклорена (C. Maclaurin), Л. Эйлера (L. Euler), Ж. Д'Аламбера (J. D'Alembert), Ж. Лагранжа (J. Lagrange) и др. В этот период использовались как сходящиеся, так и расходящиеся Р., хотя не было полной ясности в вопросе о законности действий над ними. Точная теория Р. была создана в 19 в. на основе понятия предела в трудах К. Гаусса (C. Gauss), Б. Больцано (B. Bolzano), О. Коши (A. Cauchy), П. Дирихле (P. Dirichlet), Н. Абеля (N. Abel), К. Вейерштрасса (K. Weierstrass), Б. Римана (B. Riemann) и др.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного, 2 изд., М., 1948; [3] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [4] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [5] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [6] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [7] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; [8] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; [9] Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М.— Л., 1944.

Л. Д. Кудрявцев.

САККЕРИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК — четырехугольник $ABCD$, имеющий при вершинах A и B прямые углы и равные стороны AD и BC. Рассматривался Дж. Саккери (G. Saccheri, 1733) при попытках доказать постулат Евклида о параллельных. Из трех предположений о величинах углов при вершинах C и D: либо углы прямые, либо углы тупые, либо острые, первая гипотеза является утверждением, эквивалентным постулату Евклида о параллельных; вторая приводит к противоречию с др. аксиомами и постулатами Евклида. Относительно третьей гипотезы Дж. Саккери пришел к ошибочному выводу, что она противоречит др. аксиомам и постулатам Евклида.

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.— Л., 1949; [2] Погорелов А. В., Основания геометрии, 3 изд., М., 1968.

А. Б. Иванов.

САЛОННАЯ ИГРА — игра с несколькими участниками, в к-рой исход определяется не только искусством играющих, но и случайными факторами (раскладами карт, выпадениями игральных костей и т. п.). Исследование С. и. (преимущественно карточных) занимает значительное место в *игр теории*. С. и., с одной стороны, являются неисчерпаемым источником интересных с математич. точки зрения игровых моделей; а с другой — сами являются моделями более серьезных конфликтов — военных, экономических и т. п. Покер, первая модель к-рого исследовалась Дж. Нейманом в 1928 (см. [1]), сыграл при возникновении теории игр роль, аналогичную роли игры в кости в возникновении теории вероятностей. Позднее были построены и решены многие частные модели игр типа покера, а в сер. 50-х гг. С. Карлином (S. Karlin) и Р. Рестрепо (R. Restrepo) были заложены основы общей теории *антагонистических игр* типа «покер». В их модели игрок I (II) знает свою карту ξ (соответственно η) — реализацию случайной величины, имеющей распределение $F(\xi)$ [соответственно $G(\eta)$]. *Стратегии* игроков I и II представляют собой соответственно векторы $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$, а функция выигрыша имеет вид

$$K(\varphi, \psi) = \iint P[\xi, \eta, \varphi(\xi), \psi(\eta)]\, dF(\xi)\, dG(\eta).$$

С. Карлин и Р. Рестрепо нашли достаточно эффективные методы решения подобных игр (см. [2]).

Довольно много исследований было посвящено бриджу. Ввиду того что в бридже два партнера представляют собой фактически одного игрока, он является примером игры без полной памяти.

Лит.: [1] Нейман Дж., в сб.: Матричные игры, М., 1961, с. 173—204; [2] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964; [3] Thompson G. L., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 2, Princeton, 1953, p. 267—77.

В. К. Доманский.

САМОИНЪЕКТИВНОЕ КОЛЬЦО левое — кольцо, инъективное как левый модуль над собой. Симметричным образом определяется правое С. к. Классически полупростые кольца и все кольца вычетов суть С. к. Если R — С. к. с радикалом Джекобсона J, то факторкольцо R/J регулярно в смысле Неймана (см. *Регулярное кольцо*). Регулярное С. к. непрерывно. Всякое счетное С. к. квазифробениусово. Левое С. к. может не быть правым С. к. Кольцо матриц над С. к.

и полное кольцо линейных преобразований векторного пространства над телом самоинъективны. Кольца эндоморфизмов всех свободных левых R-модулей являются С. к. тогда и только тогда, когда R квазифробениусово. Если M — кообразующий категории левых R-модулей, то $\mathrm{End}_R M$ есть С. к. Если сингулярный идеал кольца R равен нулю, то его инъективная оболочка естественным образом превращается в С. к. Групповое кольцо RG самоинъективно слева тогда и только тогда, когда R есть С. к., а группа G конечна. Прямое произведение самоинъективных колец самоинъективно. Кольцо R изоморфно прямому произведению полных колец линейных преобразований над телами в том и только в том случае, когда R — левое С. к. без нильпотентных идеалов, каждый ненулевой левый идеал к-рого содержит минимальный левый идеал.

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, с. 57—190; [2] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [3] Lawrence J., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1977, v. 65, № 2, p. 217—20.

Л. А. Скорняков.

САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯ ТОЧКА — одна из *особых точек* кривой или поверхности. См., напр., *Двойная точка.*

САМОПЕРИМЕТР — длина $2\pi_S$ центрально-симметричной замкнутой выпуклой кривой S на плоскости, измеренная в той метрике Минковского, для к-рой сама S играет роль единичной окружности. Всегда $3 \leqslant \pi_S \leqslant 4$ (см. [1]). При обобщении на несимметричный случай С. приписывается направленной кривой S и зависит от выбора начала внутри S (см. [2], [3]). Рассмотрен случай звездной S (см. [4]). Существуют различные обобщения С. для единичной сферы S в нормированном пространстве размерности, большей двух (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Решетняк Ю. Г., «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, в. 6, с. 125—26; [2] Сорокин В. А., «Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та», 1965, № 243, с. 160—85; [3] Chakerian G. D., Talley W. K., «Arch. math.», 1969, v. 20, № 4, p. 431—43; [4] Gołąb S., «Colloq. math.», 1966, v. 15, № 1, p. 141—44; [5] Schäffer J. J., «Math. Ann.», 1971, Bd 190, № 3, S. 242—47; [6] Petty C. M., «Geom. dedic.», 1974, v. 3, № 1, p. 77—97.

В. А. Залгаллер.

САМОПРИКОСНОВЕНИЯ ТОЧКА — одна из *особых точек* кривой или поверхности. См., напр., *Двойная точка.*

САМОСОПРЯЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение $l(y)=0$, совпадающее с *сопряженным дифференциальным уравнением* $l^*(y)=0$. Здесь

$$l(y) \equiv a_0(t)\, y^{(n)} + \ldots + a_k(t)\, y^{(n-k)} + \ldots + a_n(t)\, y,$$

$$l^*(y) \equiv (-1)^n (\bar{a}_0 y)^{(n)} + \ldots + (-1)^{n-k} (\bar{a}_k y)^{(n-k)} + \ldots + \bar{a}_n y,$$

где

$$y^{(\nu)} = d^\nu y/dt^\nu, \ \ y(\cdot) \in C^n(I), \ \ a_k(\cdot) \in C^{n-k}(I), \quad a_0(t) \neq 0, \ \ t \in I;$$

$C^m(I)$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых комплекснозначных функций на $I=(\alpha, \beta)$; черта означает операцию комплексного сопряжения.

Левая часть всякого С. д. у. $l(y)=0$ есть сумма выражений вида

$$l_{2m}(y) = (p_m y^{(m)})^{(m)},$$

$$l_{2m-1}(y) = \frac{1}{2}\left[(iq_m y^{(m-1)})^{(m)} + (iq_m y^{(m)})^{(m-1)}\right],$$

где $p_m(t)$, $q_m(t)$ — действительнозначные достаточно гладкие функции, $i^2=-1$. С. д. у. с действительными коэффициентами — обязательно четного порядка и имеет вид

$$(p_0 y^{(m)})^{(m)}+\ldots+(p_k y^{(m-k)})^{(m-k)}+\ldots+p_m y=0$$

(см. [1] — [3]).

Линейная система дифференциальных уравнений

$$L(x)=0,\ L(x)\equiv\dot{x}+A(t)x,\ t\in I,$$

с непрерывной комплекснозначной $(n\times n)$-матрицей $A(t)$ наз. самосопряженной, если $A(t)=-A^*(t)$, где $A^*(t)$ — эрмитово сопряженная матрица к матрице $A(t)$ (см. [1], [4]). Это определение не согласовано с определением С. д. у. Напр., система

$$\dot{x}_1-x_2=0,\ \dot{x}_2+p(t)x_1=0,$$

эквивалентная С. д. у.

$$\ddot{y}+p(t)y=0,$$

— самосопряженная только в том случае, если $p(t)\equiv 1$.

Краевая задача

$$l(y)=0.\ t\in\Delta=[t_0,\ t_1], \tag{1}$$

$$U_k(y)=0,\ k=1,\ \ldots,\ n, \tag{2}$$

где $U_k: C^{(n)}(\Delta)\to\mathbb{R}^1$ — линейные и линейно независимые функционалы, описывающие краевые условия, наз. самосопряженной, если она совпадает со своей сопряженной краевой задачей, то есть (1) — С. д. у., а $U_k(y)=U_k^*(y)$ для всех $y(\cdot)\in C^n(\Delta)$ и всех $k=1,\ldots,n$ (см. [1] — [3], [5]). Если (1), (2) — самосопряженная краевая задача, то справедливо равенство (см. *Грина формулы*)

$$\int_{t_0}^{t_1}\bar{\xi}l(y)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\bar{l}(\xi)\,y\,dt$$

для любой пары функций $y(\cdot)$, $\xi(\cdot)\in C^n(\Delta)$, удовлетворяющей краевым условиям (2).

Все собственные значения самосопряженной задачи

$$l(y)=\lambda y,\ U_k(y)=0,\ k=1,\ \ldots,\ n,$$

действительны, а собственные функции φ_1, φ_2, отвечающие различным собственным значениям λ_1, λ_2, ортогональны

$$\int_{t_0}^{t_1}\overline{\varphi_1}(t)\,\varphi_2(t)\,dt=0.$$

Линейная краевая задача

$$L(x)\equiv\dot{x}+A(t)x=0,\ U(x)=0,\ t\in\Delta, \tag{3}$$

где $A(t)$ — непрерывная комплекснозначная $n\times n$ матрица, U есть n-вектор-функционал на пространстве $C_n^1(\Delta)$ непрерывных комплекснозначных функций $x:\Delta\to\mathbb{R}^n$, наз. самосопряженной, если она совпадает со своей сопряженной краевой задачей,

$$L^*(x)=0,\ U^*(x)=0,\ t\in\Delta,$$

т. е.

$$L(x)=-L^*(x),\ U(x)=U^*(x)$$

для всех $x(\cdot)\in C_n^1(\Delta)$. Самосопряженная краевая задача обладает свойствами, аналогичными свойствам задачи (1), (2) (см. [4]).

Понятия С. д. у. и самосопряженной краевой задачи тесно связаны с понятием самосопряженного оператора [6]. С. д. у. и самосопряженная краевая задача определяются также для линейного уравнения с частными производными (см. [5], [7]).

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [2] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [4] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [5] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [6] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, пер. с англ., ч. 2, М., 1966; [7] Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, М., 1976. *Е. Л. Тонков.*

САМОСОПРЯЖЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — линейное преобразование евклидова или унитарного пространства, совпадающее со своим *сопряженным линейным преобразованием*. В евклидовом пространстве С. л. п. наз. также симметрическим, а в унитарном пространстве — эрмитовым. Необходимое и достаточное условие самосопряженности линейного преобразования конечномерного пространства состоит в том, что его матрица A в произвольном ортонормированном базисе совпадает с сопряженной матрицей A^*, т. е. является симметрич. матрицей (в евклидовом случае) или эрмитовой матрицей (в унитарном случае). Собственные значения С. л. п. действительны (даже в унитарном случае), а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Линейное преобразование конечномерного пространства L является самосопряженным тогда и только тогда, когда в L существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов, и в этом базисе записывается действительной диагональной матрицей.

С. л. п. А наз. неотрицательным (или положительно полуопределенным), если $(\mathrm{A}x, x) \geqslant 0$ для любого вектора x, и положительно определенным, если $(\mathrm{A}x, x) > 0$ для любого вектора $x \neq 0$. Для неотрицательности (положительной определенности) нек-рого С. л. п. в конечномерном пространстве необходимо и достаточно, чтобы все его собственные значения были неотрицательны (соответственно положительны) или чтобы соответствующая ему матрица была положительно полуопределенной (соответственно положительно определенной). В этом случае существует единственное неотрицательное С. л. п. В, удовлетворяющее условию $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$ — квадратный корень из С. л. п. А.

А. Л. Онищик.

САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР, эрмитов оператор,— линейный оператор A, определенный на линейном всюду плотном множестве $D(A)$ гильбертова пространства H и совпадающий со своим *сопряженным оператором* A, т. е. такой, что $D(A) = D(A^*)$ и

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \qquad (*)$$

для любых $x, y \in D(A)$. Всякий С. о. замкнут и не допускает расширения с сохранением равенства (*) на более широкое, чем $D(A)$, линейное многообразие, в силу чего С. о. наз. также гипермаксимальным. Поэтому если A ограниченный С. о., то он определен на всем пространстве H.

Каждый С. о. однозначно определяет *разложение единицы* F_λ, $-\infty < \lambda < \infty$; имеет место интегральное представление

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dF_\lambda x,$$

где интеграл понимается как сильный предел интегральных сумм, для каждого $x \in D(A)$ и

$$D(A) = \left\{ x \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\langle E_\lambda x, x\rangle < \infty \right\}.$$

Спектр С. о. A не пуст и лежит на действительной оси. Квадратичная форма $K(A) = \langle Ax, x\rangle$, порожденная С. о. A, действительна, что позволяет ввести понятие *положительного оператора*.

С помощью С. о. описываются многие краевые задачи математич. физики.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1966; [3] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979. *В. И. Соболев.*

САРДА ТЕОРЕМА: пусть $f : M \to N$ — отображение класса C^r многообразий M и N размерности m и n соответственно; если $r > \max(0, m-n)$, то *критические значения* f образуют множество меры нуль. Множество же регулярных значений оказывается массивным и всюду плотным. Установлена А. Сардом [1].

Лит.: [1] Sard A., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1942, v. 48, p. 883—90. *М. И. Войцеховский.*

СБАЛАНСИРОВАННОЕ КОЛЬЦО левое (правое) — кольцо, над к-рым все левые (правые) модули сбалансированы. Кольцо сбалансировано слева тогда и только тогда, когда все его факторкольца суть QF-1-кольца, т. е. все точные левые модули над ними сбалансированы. В частности, кольцо сбалансировано, если все эти факторкольца квазифробениусовы. Всякое С. к. разлагается в прямую сумму однорядного кольца и колец матриц над локальными кольцами специального типа. Любое С. к. полусовершенно. Нётерово С. к. оказывается артиновым.

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 19, М., 1981, с. 31—134; [2] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79. *Л. А. Скорняков.*

СБАЛАНСИРОВАННЫЙ МОДУЛЬ — модуль M такой, что естественный кольцевой гомоморфизм $\varphi : R \to \mathrm{End}_{\mathrm{End}_R M} M$, в случае правого модуля определяемый равенством $\varphi(r)(m) = mr$ для любых $r \in R$ и $m \in M$, сюръективен. Модуль P над кольцом R оказывается образующим категории R-модулей тогда и только тогда, когда P есть С. м. как R-модуль, проективен и конечно порожден как $\mathrm{End}_R P$-модуль.

Лит.: [1] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79. *Л. А. Скорняков.*

СВЕРТКА функций $f(x)$ и $g(x)$, принадлежащих $L(-\infty, \infty)$, — функция $h(x)$, определяемая равенством

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

и обозначаемая символом $(f*g)(x)$. Функция $f*g$ определена почти всюду и также принадлежит $L(-\infty, \infty)$. Свертка обладает основными свойствами операции умножения, а именно: $f*g = g*f$,

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)*g = \alpha_1 (f_1*g) + \alpha_2 (f_2*g),\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R},$$
$$(f*g)*h = f*(g*h)$$

для любых трех функций из $L(-\infty, \infty)$. Поэтому $L(-\infty, \infty)$ с обычным сложением и умножением на число, с операцией С. в качестве умножения элементов из $L(-\infty, \infty)$ и с нормой

$$\| f \| = \int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |\, dx,$$

превращается в *банахову алгебру* (при такой норме $\|f*g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$). Если $F[f]$ — преобразование Фурье функции f, то

$$F[f*g] = \sqrt{2\pi}\, F[f]\, F(g)$$

и это используется при решении ряда прикладных задач.

Так, если задача сведена к интегральному уравнению вида

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\, f(y)\, dy, \qquad (*)$$

где $\quad g(x) \in L_2(-\infty, \infty),\ K(x) \in L(-\infty, \infty),$

$$\sup_x | F[K](x) | \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

то в предположении, что $f(x) \subset L(-\infty, \infty)$, применяя к уравнению (*) преобразование Фурье, получают

$$F[f] = F[g] + \sqrt{2\pi} F[f] F[K],$$

откуда

$$F[f] = \frac{F[g]}{1 - \sqrt{2\pi} F[K]},$$

и обратное преобразование Фурье приводит к решению

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F[g](\zeta) e^{-i\zeta x}}{1 - \sqrt{2\pi} F[K](\zeta)} d\zeta$$

уравнения (*).

Свойства С. функций находят важные приложения в теории вероятностей. Если $f(x)$ и $g(x)$ являются плотностями вероятности независимых случайных величин X и Y, то С. $(f*g)x$ есть плотность вероятности случайной величины $X+Y$.

Операция С. распространяется на *обобщенные функции*. Если f и g — обобщенные функции, из к-рых по крайней мере одна имеет компактный носитель, и $\varphi(x)$ принадлежит пространству основных функций, то $f*g$ определяется равенством

$$\langle f*g, \varphi \rangle = \langle f(x) \times g(y), \varphi(x+y) \rangle,$$

где $f(x) \times g(y)$ — прямое произведение обобщенных функций f и g, т. е. функционал в пространстве основных функций двух независимых переменных такой, что

$$\langle f(x) \times g(x), u(x, y) \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle f(x), \langle g(y), u(x, y) \rangle \rangle$$

для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $u(x, y)$.

С. обобщенных функций также обладает свойством коммутативности, линейности по каждому аргументу, а если по крайней мере две из трех обобщенных функций имеют компактные носители, то и свойством ассоциативности. Справедливы равенства:

$$D^\alpha (f*g) = D^\alpha f*g = f*D^\alpha g,$$

где D оператор дифференцирования и α — любой мультииндекс, $(D^\alpha \delta)*f = D^\alpha f$, в частности $\delta * f = f$, где δ — дельта-функция, и если f_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — обобщенные функции такие, что $f_n \to f_0$ и существует компакт

$$K \supset \operatorname{supp} f_n, \; n = 1, 2, \ldots,$$

то

$$f_n * g \to f_0 * g.$$

Наконец, если g — финитная обобщенная функция и f — обобщенная функция медленного роста, то к $f*g$ применимо преобразование Фурье и снова

$$F[f*g] = \sqrt{2\pi} F[f] F[g].$$

С. обобщенных функций широко используется при решении краевых задач для уравнений с частными производными. Так, интеграл Пуассона, написанный в виде

$$U(x, t) = \mu(x) * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t},$$

дает решение уравнения теплопроводности для бесконечного стержня, когда начальная температура $\mu(x)$ может быть не только обычной, но и обобщенной функцией.

Понятие С. как обычных, так и обобщенных функций естественным образом переносится на случай функций многих независимых переменных: надо в предыдущем считать x, y не действительными числами, а векторами из $\mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [2] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, М., 1958; [3] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.— Л., 1948. *В. И. Соболев.*

СВЕРТКА ТЕНЗОРА — операция тензорной алгебры, ставящая в соответствие тензору $a_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, тензор

$$b_{j_1 \ldots j_{q-1}}^{i_2 \ldots i_p} = a_{j_1 \ldots j_{q-1} 1}^{1 i_2 \ldots i_p} + a_{j_1 \ldots j_{q-1} 2}^{2 i_2 \ldots i_p} + \ldots + a_{j_1 \ldots j_{q-1} n}^{n i_2 \ldots i_p} = \\ = a_{j_1 \ldots j_{q-1} \alpha}^{\alpha i_2 \ldots i_p}$$

(здесь свертка производится по паре индексов i_1, j_q). Аналогично определяется С. т. по любой паре верхнего и нижнего индексов. p-кратная С. т., p раз ковариантного и p раз контравариантного, является инвариантом. Так, С. т. a_j^i есть инвариант a_i^i, называемый *следом тензора* $\operatorname{Sp}(a_j^i)$, или $\operatorname{tr} a_j^i$. Сверткой произведения двух тензоров наз. свертка их произведения по верхнему индексу одного сомножителя и нижнему индексу другого.

А. Б. Иванов.

СВЕРТКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) f(t)\, dt.$$

Функция $G(x)$ наз. *ядром* С. п. Для определенных типов ядер G после соответствующих замен переменных С. п. переходит в одностороннее *Лапласа преобразование*, *Стилтьеса преобразование*, *Мейера преобразование*. Обращение С. п. осуществляется линейными дифференциальными операторами бесконечного порядка, инвариантными относительно сдвига.

С. п. введено также для нек-рых классов обобщенных функций (см. [2]).

Лит.: [1] Хиршман И. И., Уиддер Д. В., Преобразования типа свертки, пер. с англ., М., 1958; [2] Брычков Ю. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

СВЕРХРАЗРЕШИМАЯ ГРУППА — группа G, обладающая конечным инвариантным рядом подгрупп

$$G = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_r = 1,$$

в к-ром каждая факторгруппа A_{i-1}/A_i циклична. Всякая С. г. является *полициклической группой*. Подгруппы и факторгруппы С. г. также сверхразрешимы, коммутант С. г. нильпотентен. Конечная группа является С. г. тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы имеют простые индексы (*теорема Хупперта*).

Н. Н. Вильямс.

СВЕРХРЕЛАКСАЦИИ МЕТОД, *последовательной верхней релаксации метод*, — метод решения систем алгебраич. уравнений. См. *Релаксации метод*.

СВЕРХСХОДИМОСТЬ — сходимость нек-рой подпоследовательности частных сумм ряда в области, большей, чем область сходимости ряда. Имеют место следующие *теоремы о сверхсходимости*:

1) если в степенном ряде

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$$

с радиусом сходимости R, $0 < R < \infty$, показатели λ_n таковы, что для бесконечного множества значений n_ν индекса n

$$\lambda_{n_\nu + 1} - \lambda_{n_\nu} > \theta \lambda_{n_\nu},$$

где θ — фиксированное положительное число, то последовательность частных сумм порядков n_ν

$$S_{n_\nu}(z) = \sum_{m=1}^{n_\nu} a_m z^{\lambda_m}, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

сходится равномерно в достаточно малой окрестности каждой точки z_0 окружности $|z| = R$, в к-рой сумма ряда $f(z)$ регулярна;

2) если

$$\lambda_{n_{\nu+1}}-\lambda_{n_\nu} > \theta_\nu \lambda_{n_\nu},\ \lim_{\nu\to\infty}\theta_\nu=+\infty,$$

то последовательность $\{S_{n_\nu}(z)\}$ сходится равномерно в любой замкнутой ограниченной части области существования функции $f(z)$.

Имеет место и следующая теорема (обратная первой теореме): если у степенного ряда

$$f(z)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

с радиусом сходимости R, $0 < R < \infty$, имеется подпоследовательность частных сумм, к-рая равномерно сходится в нек-рой окрестности точки z_0, $|z_0| \geqslant R$, то данный степенной ряд может быть представлен суммой ряда с радиусом сходимости, бо́льшим **R**, и *лакунарного степенного ряда*

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} d_n z^{\lambda_n},\ \lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k} > \theta\lambda_{n_k},\ k=1,\ 2,\ \ldots;\ \theta > 0.$$

Первые теоремы верны и для многих других рядов, в частности для рядов Дирихле.

Лит.: [1] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Леонтьев А. Ф., Ряды экспонент, М., 1976.

А. Ф. Леонтьев.

СВЕРХЭФФЕКТИВНАЯ ОЦЕНКА, суперэффективная оценка, — общепринятое сокращение термина «сверхэффективная (суперэффективная) последовательность оценок», употребляемого по отношению к состоятельной последовательности асимптотически нормальных оценок неизвестного параметра, к-рая является более эффективной, чем состоятельная последовательность оценок максимального правдоподобия.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta$, и пусть семейство распределений $\{P_\theta\}$ таково, что существует состоятельная последовательность $\{\hat\theta_n\}$ оценок $\hat\theta_n=\hat\theta_n(X_1, \ldots, X_n)$ максимального правдоподобия параметра θ. Далее, пусть $\{T_n\}$ — последовательность асимптотически нормальных оценок $T_n= =T_n(X_1 \ldots, X_n)$ параметра θ. Если при всех $\theta \in \Theta$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}_\theta\,[n\,(T_n-\theta)^2] \leqslant \frac{1}{I(\theta)},$$

где $I(\theta)$ — информационное количество Фишера, и, кроме того, хотя бы в одной точке θ^*, $\theta^* \in \Theta$, выполняется строгое неравенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}_{\theta^*}\,[n\,(T_n-\theta^*)] < \frac{1}{I(\theta^*)}, \qquad (*)$$

то такая последовательность оценок $\{T\}$ наз. сверхэффективной (суперэффективной) относительно квадратичной функции потерь, а точки θ^*, в к-рых выполняется (*), наз. точками суперэффективности.

Лит.: [1] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [2] Шметтерер Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., М., 1976; [3] Le Cam L., «Univ. California Publ. Stat.», 1953, v. 1, p. 277—330.

М. С. Никулин.

СВОБОДНАЯ АБЕЛЕВА ГРУППА — группа, свободная в многообразии всех абелевых групп (см. *Свободная алгебра*). Прямые суммы (в конечном или бесконечном числе) бесконечных циклич. групп и только они являются свободными группами в классе абелевых групп. При этом совокупность образующих элементов всех циклич. прямых слагаемых служит системой свободных образующих (называемой также базой) С. а. г. Не всякая максимальная линейно независимая система элементов С. а. г. служит для нее базой. С. а. г.

изоморфны тогда и только тогда, когда их базы равномощны. Мощность базы С. а. г. совпадает с рангом Прюфера этой группы. Всякая подгруппа С. а. г., отличная от нулевой, сама свободна. Абелева группа свободна тогда и только тогда, когда она обладает возрастающим рядом подгрупп (см. *Подгрупп ряд*), каждый фактор к-рого изоморфен бесконечной циклич. группе.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982. *О. А. Иванова.*

СВОБОДНАЯ АЛГЕБРА класса $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр — алгебра F из класса $\mathfrak{K}$, обладающая свободной порождающей системой (или базой) X, т. е. таким множеством порождающих X, что всякое отображение множества X в любую алгебру A из $\mathfrak{K}$ продолжается до гомоморфизма алгебры F в A (ср. *Свободная алгебраическая система*). С. а. обладает любой непустой класс алгебр, замкнутый относительно подалгебр и прямых произведений и содержащий неодноэлементные алгебры. В частности, С. а. всегда существует в нетривиальных многообразиях и квазимногообразиях универсальных алгебр (см. *Универсальных алгебр многообразие*, *Алгебраических систем квазимногообразие*). С. а. класса, состоящего из всех алгебр данной сигнатуры Ω, наз. абсолютно свободной. Алгебра A сигнатуры Ω является С. а. нек-рого класса универсальных алгебр сигнатуры Ω тогда и только тогда, когда A внутренне свободна, т. е. обладает таким порождающим множеством X, что всякое отображение X в A продолжается до эндоморфизма алгебры A. Если С. а. обладает бесконечной базой, то все ее базы имеют одну и ту же мощность (см. *Свободная абелева группа*, *Свободная алгебра* над ассоциативно-коммутативным кольцом, *Свободная ассоциативная алгебра*, *Свободная булева алгебра*, *Свободная группа*, *Свободная полугруппа*, *Свободная решетка*, *Свободный группоид*, *Свободный модуль*, а также *Свободное произведение*). Ясно, что каждый элемент С. а. с базой X записывается как слово в алфавите X в сигнатуре рассматриваемого класса. Естествен вопрос: когда различные слова равны как элементы С. а.? В нек-рых случаях ответ почти тривиален (полугруппы, кольца, группы, ассоциативные алгебры), в других — достаточно сложен (алгебры Ли, решетки, булевы алгебры), а иногда и не поддается решению (альтернативные кольца). *Л. А. Скорняков.*

СВОБОДНАЯ АЛГЕБРА над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ — свободная алгебра многообразия алгебр над Φ (см. *Кольца и алгебры*). Элементами такой С. а. со свободной порождающей системой X служат линейные комбинации элементов *свободного группоида* со свободной порождающей системой X с коэффициентами из Φ. Другими словами, эта С. а. является *свободным модулем* над Φ с вышеупомянутым группоидом в качестве базы. Если Φ — кольцо целых чисел, то С. а. над Φ наз. свободным кольцом (ср. *Свободная ассоциативная алгебра*). Ненулевая подалгебра С. а. над полем Φ сама является С. а.
Л. А. Скорняков.

СВОБОДНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — свободный объект в нек-ром классе алгебраич. систем.

Пусть $\mathfrak{K}$ — непустой класс алгебраич. систем (см. *Алгебраических систем класс*). Система F наз. свободной в классе $\mathfrak{K}$, или $\mathfrak{K}$-свободной, если она принадлежит классу $\mathfrak{K}$ и обладает таким множеством X порождающих, что всякое отображение $\varphi_0: X \to A$ множества X в любую систему A из $\mathfrak{K}$ продолжаемо до гомоморфизма $\varphi: F \to A$. В этом случае говорят также, что F свободна над X в классе $\mathfrak{K}$. Множество порождающих X с таким свойством наз. $\mathfrak{K}$-свободным базисом системы F, а его мощность — рангом системы F. $\mathfrak{K}$-свободные системы одного и того же ранга изоморфны. Если класс $\mathfrak{K}$ обладает свободной системой ранга r, то всякая система из $\mathfrak{K}$, допускающая порождающее множество мощности $\leqslant r$, является ее гомоморфным образом. $\mathfrak{K}$-свободный базис X $\mathfrak{K}$-свободной системы является и ее минимальным порождающим множеством, поэтому если класс $\mathfrak{K}$ обладает изоморфными свободными системами F и F' различных рангов r и r', то оба кардинала r и r' конечны.

Класс алгебраич. систем наз. тривиальным, или вырожденным, если в каждой его системе истинно тождество $x=y$, т. е. все его системы одноэлементны. В противном случае класс наз. нетривиальным, или невырожденным. Во всяком невырожденном квазимногообразии (многообразии) алгебраич. систем (см. *Алгебраических систем квазимногообразие*, *Алгебраических систем многообразие*) существует С. а. с. любого ранга. Всякий вырожденный класс алгебраич. систем обладает только свободной системой ранга 1.

Пусть класс $\mathfrak{K}$ обладает свободными системами F_l и F_k конечных рангов l и k соответственно и $k < l$. Изоморфизм $F_k \cong F_l$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие термы

$$s_i(x_1, \ldots, x_k), \ i=1, \ldots, l,$$

$$t_j(x_1, \ldots, x_l), \ j=1, \ldots, k,$$

в сигнатуре класса $\mathfrak{K}$, что в классе $\mathfrak{K}$ истинны тождества

$$s_i(t_1(x_1, \ldots, x_l), \ldots, t_k(x_1, \ldots, x_l)) = x_i,$$

$$t_j(s_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, s_l(x_1, \ldots, x_k)) = x_j,$$

где $i=1, \ldots, l$, $j=1, \ldots, k$. Если же класс $\mathfrak{K}$ содержит конечную систему A мощности $\geqslant 2$, то $\mathfrak{K}$-свободные системы различных рангов не изоморфны. В частности, во всех многообразиях групп, полугрупп, решеток, ассоциативных колец свободные системы различных рангов не изоморфны. С другой стороны, в нек-рых многообразиях модулей (см. *Свободный модуль*) все свободные модули конечного ранга изоморфны.

Существуют также многообразия алгебраич. систем конечного типа (см. *Алгебраическая система*), в к-рых все С. а. с. конечных рангов изоморфны между собой; напр., многообразие $\mathfrak{A}_{1,2}$ алгебр $\langle A, \varphi_1, \varphi_2, \omega\rangle$ типа $\langle 1, 1, 2\rangle$, определяемое тождествами

$$\varphi_i(\omega(x_1, x_2)) = x_i, \ i=1, 2,$$

$$\omega(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = x.$$

Доказано (см. [3]), что в многообразиях $\mathfrak{A}_{m,n}$ ($1 \leqslant m < n$) алгебр $\langle A, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_m\rangle$ с m-арными операциями $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и n-арными операциями $\omega_1, \ldots, \omega_m$, определяемых тождествами

$$\varphi_i(\omega_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega_m(x_1, \ldots, x_n)) = x_i,$$

$$\omega_j(\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m)) = x_j,$$

$$i=1, \ldots, n, \ j=1, \ldots, m,$$

при фиксированных m и n свободные алгебры конечных рангов $k \neq l$ изоморфны тогда и только тогда, когда

$$k \equiv l \ (\mathrm{mod}\ (n-m)), \ k \geqslant m, \ l \geqslant m.$$

Существуют универсальные классы, не имеющие свободных систем. Примером такого класса может служить класс групп, определяемый универсальными формулами

$$(x^2=1) \vee (x^3=1), \ xy=yx$$

(кванторы опущены). Универсальный класс $\mathfrak{U}$, обладающий свободной системой любого конечного ранга, имеет свободные системы любых рангов.

Пусть Σ — совместное множество универсальных формул $G(x_1, \ldots, x_n)$ вида

$$\neg G_1 \vee \ldots \vee \neg G_p \vee G_{p+1} \vee \ldots \vee G_q,$$

где $G_1, \ldots, G_q$ — атомные формулы сигнатуры Ω. Пусть

$$ngG = G_1 \& \ldots \& G_p.$$

Говорят, что Σ обладает r-подстановочным свойством ($r \geqslant 1$), если для любой формулы $G(x_1, \ldots, x_n)$ из Σ и любых термов

$$t_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_r)$$

от r переменных $x_1, \ldots, x_r$ верно утверждение:

$$\Sigma \vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_r)\, ngG(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists i > p)\, \Sigma \vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_r)\, G_i(t_i, \ldots, t_n).$$

В невырожденном универсальном классе $[\Sigma]$, определяемом множеством универсальных формул Σ, свободная система конечного ранга $r \geqslant 1$ существует тогда и только тогда, когда Σ обладает r-подстановочным свойством [4]. В частности, если все формулы из Σ несократимы и Σ содержит позитивную формулу

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_r)\, G_1 \vee \ldots \vee G_q$$

с числом дизъюнктных членов $q \geqslant 2$, то универсальный класс $[\Sigma]$ не имеет свободных систем ранга $n \geqslant r$. Напр., класс линейно упорядоченных групп в сигнатуре $\langle \leqslant, \cdot, ^{-1} \rangle$ не имеет С. а. с. ранга $r \geqslant 2$.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] Jónsson B., Tarski A., «Math. Scand.», 1961, v. 9, p. 95—101; [3] Świerczkowski S., «Fund. Math.», 1961, v. 50, № 1, p. 35—44; [4] Grätzer G., «Math. Nachr.», 1968, Bd 36, H. 3/4, S. 135—40. *Д. М. Смирнов.*

СВОБОДНАЯ АССОЦИАТИВНАЯ АЛГЕБРА — алгебра $k\langle X \rangle$ многочленов (со свободными членами) над полем k от некоммутирующих переменных X. Свойство универсальности определяет алгебру $k\langle X \rangle$ единственным с точностью до изоморфизма образом: существует отображение $i: X \to k\langle X \rangle$ такое, что любое отображение X в нек-рую ассоциативную алгебру A с единицей над k можно единственным образом пропустить через отображение i. Основные свойства алгебры $k\langle X \rangle$:

1) алгебра $k\langle X \rangle$ вложима в тело (теорема Мальцева — Неймана);

2) алгебра $k\langle X \rangle$ обладает слабым алгоритмом деления, т. е. из соотношения

$$d\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) < \max_i \{d(a_i) + d(b_i)\},$$

где $a_i, b_i \in k\langle X \rangle$, все a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, не равны нулю, $d(a_1) \leqslant \ldots \leqslant d(a_n)$, всегда следует, что существуют целое число r, $1 < r \leqslant n$, и элементы $c_1, \ldots, c_{r-1}$ такие, что

$$d\left(a_r - \sum_{i=1}^{r-1} a_i c_i\right) < d(a_r)$$

$$\text{и } d(a_i) + d(c_i) \leqslant d(a_r),\ 1 \leqslant i \leqslant r-1$$

(здесь $d(a)$ — обычная степень многочлена $a \in k\langle X \rangle$, $d(0) = -\infty$);

3) алгебра $k\langle X \rangle$ является левым (правым) кольцом свободных идеалов (т. е. любой левый (правый) идеал алгебры $k\langle X \rangle$ является свободным модулем однозначно определенного ранга);

4) централизатор любого нескалярного элемента алгебры $k\langle X \rangle$ (т. е. множество элементов, перестановочных с данным) изоморфен алгебре многочленов над k от одного переменного (теорема Бергмана).

Лит.: [1] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] его же, Свободные кольца и их связи, пер. с англ., М., 1975. *Л. А. Бокуть.*

СВОБОДНАЯ БУЛЕВА АЛГЕБРА — булева алгебра, обладающая такой системой образующих, что всякое отображение этой системы в какую-либо булеву алгебру допускает продолжение до гомоморфизма. Любая булева алгебра изоморфна факторалгебре нек-рой С. б. а.

Для любого кардинального числа a существует единственная с точностью до изоморфизма С. б. а. с a образующими. Ее стоуновский бикомпакт есть топологич. произведение a простых двоеточий — *двоичный дисконтинуум*.

Конечная булева алгебра свободна тогда и только тогда, когда число ее элементов имеет вид 2^{2^n}; здесь n — число образующих. Такая С. б. а. реализуется в виде алгебры *булевых функций* от n переменных. Счетная С. б. а. изоморфна алгебре открыто-замкнутых подмножеств *канторова множества*. Всякое множество попарно дизъюнктных элементов С. б. а. конечно или счетно.

Бесконечная С. б. а. не может быть полной. В то же время мощность любой бесконечной полной булевой алгебры есть верхняя грань мощностей ее свободных подалгебр (см. [5]).

Лит.: [1] Сикорский Р., Булевы алгебры, пер. с англ., М., 1969; [2] Владимиров Д. А., Булевы алгебры, М., 1969; [3] Halmos P. R., Lectures on Boolean algebras, Princeton — [a.o.], 1963; [4] Биркгофф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [5] Кисляков С. В., «Сиб. матем. ж.», 1973, т. 14, № 3, с. 569—81.

Д. А. Владимиров.

СВОБОДНАЯ ГРУППА — группа F с системой X порождающих элементов такая, что любое отображение множества X в любую группу G продолжается до гомоморфизма F в G. Такая система X наз. системой свободных порождающих; ее мощность наз. рангом свободной группы F. Множество X наз. также алфавитом. Элементы из F представляют собой слова в алфавите X, т. е. выражения вида

$$v = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n},$$

где $x_{i_j} \in X$, $\varepsilon_j = \pm 1$ при всех j, а также пустое слово. Слово v наз. несократимым, если $x_{i_j}^{\varepsilon_j} \neq x_{i_{j+1}}^{-\varepsilon_{j+1}}$ при любом $j=1, 2, \ldots, n-1$. Несократимые слова являются разными элементами С. г. F, и каждое слово равно единственному несократимому слову. Число n наз. длиной слова v, если оно несократимо. Преобразованиями Нильсена конечного упорядоченного множества элементов $a_1, \ldots, a_k$ группы называются: 1) перестановка двух элементов в этом множестве, 2) замена одного из a_i на a_i^{-1}, 3) замена одного из a_i на $a_i a_j$, где $j \neq i$. Если С. г. F имеет конечный ранг, то преобразования Нильсена над системой свободных порождающих приводят к новым системам свободных порождающих, причем любая система свободных порождающих может быть получена из любой другой последовательности применением этих преобразований (теорема Нильсена, см. [2]). Значение С. г. определяется тем, что всякая группа изоморфна нек-рой факторгруппе подходящей С. г. Всякая подгруппа С. г. также свободна (теорема Нильсена—Шрайера, см. [1], [2]).

С. г. *групп многообразия* $\mathfrak{B}$ определяется аналогично С. г., но в пределах $\mathfrak{B}$. Ее наз. также $\mathfrak{B}$-свободной группой, или относительно свободной (а также приведенно свободной). Если $\mathfrak{B}$ определяется системой тождеств $v=1$, где $v \in V$, то С. г. многообразия $\mathfrak{B}$ с системой X свободных порождающих изоморфна факторгруппе $F/V(F)$ С. г. F с системой X свободных порождающих по вербальной подгруппе $V(F)$ — подгруппе, порожденной всеми значениями слов $v \in V$ в F. С. г. нек-рых многообразий имеют специальные названия, напр.: свободная абелева, свободная нильпотентная, свободная разрешимая, свободная бернсайдова — С. г. многообразий $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}_c$, $\mathfrak{A}^l$, $\mathfrak{B}_n$ соответственно.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974; [3] Нейман Х., Многообразия групп, пер. с англ., М., 1969.

А. Л. Шмелькин.

СВОБОДНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ, свободное вхождение переменной,— вхождение переменной в языковое выражение, являющееся параметром этого выражения. Строгое определение этого понятия может быть дано только для *формализованного языка.* Для каждого языка дается свое определение С. п., зависящее от правил образования выражений данного языка. Семантич. критерием здесь служит следующее требование: подстановка какого-либо объекта из подразумеваемой интерпретации на место данного вхождения переменной не должна приводить к бессмысленному выражению. Напр., в выражении $\{(x, y)|x^2+y^2=z^2\}$, обозначающем множество точек окружности радиуса z, переменная z входит свободно, а переменные x и y нет (см. *Связанная переменная*). Если f обозначает отображение вида $X \times Y \to Z$ и переменные x, y пробегают множества X, Y соответственно, то в выражении $f(x, y)$ переменные x и y свободны (так же, как и f, если f рассматривать как переменную по функциям). При фиксировании x и варьировании y получается функция вида $Y \to Z$. Она обозначается через $\lambda y f(x, y)$. В этом выражении x свободно, а y нет. В выражении $(\lambda y f(x, y))(y)$, обозначающем значение функции $\lambda y f(x, y)$ в произвольной точке y, последнее вхождение переменной y будет свободным. Два других вхождения не являются свободными. Первое наз. операторным (находящимся под знаком оператора), второе — связанным.

Для неформализованных языков, т. е. в реальных математич. текстах, у отдельно взятого выражения не всегда можно определенно выяснить какие переменные у него свободны, а какие связанны. Напр., в выражении $\sum_{i<h} a_{ik}$ в зависимости от контекста переменная i может быть свободной, а k связанной или наоборот, но обе свободными быть не могут. Указание на то, какая переменная считается свободной, дается с помощью дополнительных средств. Напр., если это выражение встречается в контексте вида «пусть $f(k) = \sum_{i<k} a_{ik}$», то k свободна. Иногда принимают соглашение, что по k суммирование производиться не будет; тогда k — это параметр. Выражение $\{a_i\}$, часто используемое в математике, обозначает иногда одноэлементное множество, и тогда переменная i входит свободно; а иногда оно обозначает множество всех a_i, когда i пробегает отведенную ему область предметов, и тогда переменная i входит связанно. *В. Н. Гришин.*

СВОБОДНАЯ ПОЛУГРУППА над алфавитом A — полугруппа, элементами к-рой являются всевозможные конечные последовательности элементов из A (букв), а операция состоит в приписывании одной последовательности к другой. Элементы С. п. принято называть *словами*, а операцию часто называют конкатенацией. Ради удобства нередко рассматривают также и пустое слово 1 (длина к-рого по определению равна нулю), полагая $w1=1w=w$ для любого слова w; возникающая таким образом полугруппа с единицей наз. свободным моноидом над A. С. п. (свободный моноид) над A часто обозначают A^+ (соответственно A^*). Для С. п. A^+ алфавит A является единственным неприводимым порождающим множеством; он состоит в точности из элементов, неразложимых в произведение. Буквы из A наз. свободными образующими. С. п. определяется однозначно с точностью до изоморфизма мощностью своего алфавита; эта мощность наз. рангом свободной полугруппы. С. п. ранга 2 имеет подполугруппы, являющиеся С. п. счетного ранга.

С. п. являются *свободными алгебрами* в классе всех полугрупп. Следующие условия для полугруппы F эквивалентны: 1) F есть С. п.; 2) F имеет порождающее множество A такое, что любой элемент из F единственным образом представим в виде произведения элементов из A; 3) F удовлетворяет закону сокращения, не содержит идемпотентов, каждый элемент из F имеет конечное число делителей, и для любых u, v, u', $v' \in F$ равенство $uv=u'v'$ влечет, что $u=u'$ или один из элементов u, u' есть левый делитель другого.

Всякая подполугруппа H в С. п. имеет единственное неприводимое порождающее множество, состоящее из элементов, неразложимых в H в произведение; однако не всякая подполугруппа С. п. сама свободна. Следующие условия для подполугруппы H в С. п. F эквивалентны: 1) H есть С. п.; 2) для любого $w \in F$ из того, что $wH \cap H \neq \phi$ и $Hw \cap H \neq \phi$, следует, что $w \in H$; 3) для любого $w \in F$ из того, что $wH \cap Hw \cap H \neq \phi$, следует, что $w \in H$. Для произвольных различных слов u, v в С. п. F либо u и v являются свободными образующими порожденной ими подполугруппы, либо существует $w \in F$ такое, что $u=w^k$, $v=w^l$ для нек-рых натуральных k, l; вторая альтернатива выполняется тогда и только тогда, когда $uv=vu$. Всякая подполугруппа с тремя образующими в С. п. будет конечно определенной полугруппой, но существуют подполугруппы с четырьмя образующими, не являющиеся конечно определенными.

С. п. естественно возникают в *автоматов алгебраической теории* (см. также [5], [6]), теории кодирования (см. *Кодирование алфавитное*, [4] — [6]), теории формальных языков и формальных *грамматик* (см. [3], [5], [6]). С указанными областями связана проблематика решения уравнений в С. п. (см. [7] — [9]). Существует алгоритм, распознающий разрешимость произвольных уравнений в С. п.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Гросс М., Лантен А., Теория формальных грамматик, пер. с франц., М., 1971; [4] Марков А. А., Введение в теорию кодирования, М., 1982; [5] Eilenberg S., Automata, languages and machines, v. A—B, N. Y.—L., 1974—76; [6] Lallement G., Semigroups and combinatorial applications, N. Y.— [a. o.], 1979; [7] Lentin A., Equations dans les monoïdes libres, P., 1972; [8] Хмелевский Ю. И., Уравнения в свободной полугруппе, М., 1971 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 107); [9] Маканин Г. С., «Матем. сб.», 1977, т. 103, № 2, с. 147—236.
Л. Н. Шеврин.

СВОБОДНАЯ РЕЗОЛЬВЕНТА — частный случай проективной резольвенты. Всякий модуль M над ассоциативным кольцом R является фактормодулем F_0/N_0 свободного R-модуля F_0 по нек-рому его подмодулю N_0. Для подмодуля N_0 существует аналогичное представление F_1/N_1 и т. д. В результате получается точная последовательность свободных модулей

$$F_0 \leftarrow F_1 \leftarrow F_2 \leftarrow \dots \leftarrow F_n \leftarrow,$$

называемая С. р. модуля M. Канонич. гомоморфизм $F_0 \to M$ наз. пополняющим гомоморфизмом.

В. Е. Говоров.

СВОБОДНАЯ РЕШЕТКА — *свободная алгебра* многообразия всех решеток. Решены [1] проблемы тождества слов и канонич. представления слова в С. р.

Лит.: [1] Whitman P. M., «Annals Math.», 1941, v. 42, p. 325—30; 1942, v. 43, p. 104—15.
Т. С. Фофанова.

СВОБОДНО СТАНОВЯЩАЯСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — см. *Интуиционизм*.

СВОБОДНОЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ — синусоидальное колебание. Если механическая или физич. величина $x(t)$, где t — время, меняется по закону

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

то говорят, что $x(t)$ совершает С. г. к. Здесь A, ω, φ — действительные постоянные, $A>0$, $\omega>0$. Величины A, ω, φ наз. соответственно амплитудой, частотой, фазой С. г. к. Период С. г. к. равен

$T=2\pi/\omega$. В физике и технике часто употребляется такая терминология: С. г. к. наз. гармоническим колебанием, или простым гармоническим колебанием, функция вида (1) наз. *гармоникой*, переменная величина $\omega t+\varphi$ наз. мгновенной фазой, а постоянная φ — начальной фазой. Величина ω наз. также круговой, или циклической, частотой, а $f=\omega/2\pi$ — частотой. С. г. к. (1) можно записать в виде

$$x(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t,$$

где a, b и A, φ связаны соотношениями

$$A=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

или в виде

$$x(t)=\operatorname{Re}(Ae^{i(\omega t+\varphi)}).$$

Часто фазой наз. не φ, а $-\varphi$.

Малые колебания механических или физич. систем с одной степенью свободы вблизи устойчивого невырожденного положения равновесия представляют собой С. г. к. с большой степенью точности. Таковы, напр., малые колебания маятника; колебания груза, подвешенного на пружинке; колебания камертона; изменение напряжения и силы тока в электрическом колебательном контуре; качка корабля и т. д. Система, совершающая С. г. к., наз. линейным гармоническим осциллятором, и ее колебания описываются уравнением

$$\ddot{x}+\omega^2x=0.$$

Для математич. маятника длины l и массы $m:\omega^2=g/l$, для груза массы m на пружинке с коэффициентом упругости $k:\omega^2=k/m$; для электрического колебательного контура, состоящего из емкости C и индуктивности $L:\omega^2=1/CL$. На фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ положение равновесия $x=0$, $\dot{x}=0$ для С. г. к. есть центр, а фазовые траектории — окружности.

Сумма двух С. г. к. $x_1(t)+x_2(t)$,

где $$x_j(t)=A_j\cos(\omega_jt+\varphi_j),\ j=1,\ 2,$$

с соизмеримыми частотами ω_1, ω_2 есть С. г. к. Если же частоты ω_1, ω_2 несоизмеримы, то $x_1(t)+x_2(t)$ есть *почти периодическая функция* и

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}(x_1(t)+x_2(t))=A_1+A_2=-\inf_{t\in\mathbb{R}}(x_1(t)+x_2(t)).$$

Сумма n С. г. к. с частотами $\omega_1,\dots,\omega_n$, к-рые рационально независимы, также есть почти периодич. функция. Для суммы двух С. г. к. величина $\Omega=|\omega_1-\omega_2|$ наз. расстройкой. Если расстройка мала: $\Omega/\omega_1\ll 1$, а ω_1, ω_2 — одного порядка, то

$$x_1(t)+x_2(t)=A(t)\cos(\omega_1t+\varphi(t)),$$
$$A^2(t)=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\psi(t)-\varphi_1),$$
$$\psi(t)=\Omega t+\varphi_2.$$

«Амплитуда» $A(t)$ — медленно меняющаяся функция, имеющая период $2\pi/\Omega$, и $A^2(t)$ меняется в пределах от $(A_1-A_2)^2$ до $(A_1+A_2)^2$. Колебание $x_1(t)+x_2(t)$ наз. биением: «амплитуда» $A(t)$ поочередно увеличивается и уменьшается. Этот случай важен для анализа приемных устройств.

Пусть имеется система из n уравнений:

$$M\ddot{x}+Kx=0,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где M, K — действительные симметрические положительно определенные матрицы с постоянными элементами. С помощью ортогонального преобразования

$x=Ty$ эта система приводится к распадающейся системе:

$$\ddot{y}_j+\omega_j^2 y_j=0, \quad j=1, \ldots, n.$$

Координаты $y_1, \ldots, y_n$ наз. нормальными. В нормальных координатах $x(t)$ есть векторная сумма С. г. к. вдоль координатных осей.

Лит.: [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1981; [2] Горелик Г. С., Колебания и волны, М., 1959; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, 3 изд., т. 1, М., 1973.

М. В. Федорюк.

СВОБОДНОЕ МНОЖЕСТВО в векторном пространстве X над полем K — то же, что линейно независимая система векторов из X, т. е. множество элементов $A=\{a_t\}\subset X$, $t\in T$, такое, что соотношение $\Sigma\xi_t a_t=0$, где $\xi_t=0$ для всех кроме конечного числа индексов t, влечет $\xi_t=0$ для всех t. Несвободное множество наз. также зависимым.

Свободное множество в топологическом векторном пространстве X над полем K (топологически свободное множество) — множество $A=\{a_t\}\subset X$ такое, что для любого $s\in T$ замкнутое подпространство, порожденное точками a_t, $t\neq s$, не содержит a_s. Топологически С. м. является С. м. векторного пространства; обратное неверно. Напр., в нормированном пространстве C непрерывных функций на $[0, 1]$ функции $e^{2k\pi i x}$, $k\in Z$, образуют топологически С. м. в отличие от функций x^k (поскольку x содержится в замкнутом подпространстве, порожденном $\{x^{2k}\}$).

Совокупность всех (топологически) С. м. в X, вообще говоря, не индуктивна относительно включения; кроме того, она не обязательно содержит максимальное топологически С. м. Напр., пусть X — пространство над $\mathbb{R}$, образованное непрерывными функциями и наделенное отделимой топологией: соответствующая фундаментальная система окрестностей нуля в X состоит из уравновешенных поглощающих множеств $V_{\delta, \varepsilon}=\{x: |f(x)|\leqslant\delta$ всюду вне (зависящего от f) открытого множества меры $\leqslant\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, $\delta>0\}$. Тогда каждый непрерывный линейный функционал равен нулю и в X не существует максимального С. м.

Для того чтобы A было (топологически) С. м. в ослабленной топологии $\sigma(X, X^*)$ в X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого t существовал элемент $b_t\in X^*$ такой, что $\langle a_t, b_t\rangle\neq 0$ и $\langle a_s, b_t\rangle=0$ для всех $s\neq t$. Для локально выпуклого пространства С. м. в ослабленной топологии является С. м. и в исходной топологии.

М. И. Войцеховский.

СВОБОДНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ — операция в нек-ром классе универсальных алгебр, сопоставляющая заданной совокупности алгебр из этого класса в нек-ром смысле «самую свободную» алгебру этого же класса, содержащую подалгебры, изоморфные заданным, и порождаемую ими. Термин в настоящее время вытеснен термином *свободное произведение.* *О. А. Иванова.*

СВОБОДНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ в классе $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр A_α, $\alpha\in\Omega$, из класса $\mathfrak{K}$ — алгебра A из класса $\mathfrak{K}$, содержащая все A_α в качестве подалгебр и такая, что любой набор гомоморфизмов алгебр A_α в любую алгебру B из $\mathfrak{K}$ продолжается до гомоморфизма алгебры A в B. С. п. заведомо существует, если $\mathfrak{K}$ — многообразие универсальных алгебр. Каждая свободная алгебра является С. п. однопорожденных свободных алгебр. В классе всех абелевых групп С. п. совпадает с прямой суммой. В нек-рых случаях поддаются описанию подалгебры С. п.; напр., в группах (см. *Свободное произведение* групп), неассоциативных алгебрах, алгебрах Ли.

С. п. в категориях универсальных алгебр совпадает с *копроизведением* в этих категориях. *Л. А. Скорняков.*

СВОБОДНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ групп G_i, $i\in I$, — группа G, порожденная группами G_i, причем любые гомоморфизмы $\varphi_i : G_i \to H$ групп G_i в любую группу H продолжаются до гомоморфизма $\varphi : G \to H$. Для обозначения С. п. используется знак $*$, напр.:

$$G = \prod\nolimits_{i \in I}^{*} G_i \quad \text{и} \quad G = G_1 * G_2 * \ldots * G_k$$

в случае конечного множества I. Каждый не равный единице элемент С. п. G единственным образом выражается в виде несократимого слова $v = g_{i_1} g_{i_2} \cdot \ldots \cdot g_{i_n}$, где $g_{i_j} \in G_{i_j}$, $g_{i_j} \neq 1$, и при любом $j = 1, 2, \ldots, n-1$, $i_j \neq i_{j+1}$. Конструкция С. п. является важной в изучении групп, заданных множеством порождающих элементов и определяющих соотношений. В этих терминах оно может быть определено следующим образом. Пусть каждая группа G_i задана множествами X_i порождающих и Φ_i определяющих соотношений, причем $X_i \cap X_j = \phi$, если $i \neq j$. Тогда группа G, заданная множеством $X_i = \bigcup_{i \in I} X_i$ порождающих и множеством $\Phi = \bigcup_{i \in I} \Phi_i$ определяющих соотношений, будет С. п. групп G_i, $i \in I$.

Всякая подгруппа С. п. G сама разлагается в С. п. своих подгрупп, из к-рых нек-рые являются бесконечными циклическими, а каждая из других сопряжена с нек-рой подгруппой какой-либо группы G_i, входящей в свободное разложение группы G (теорема Куроша).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974.

А. Л. Шмелькин.

СВОБОДНЫЙ ВЕКТОР — см. *Вектор*.

СВОБОДНЫЙ ГРУППОИД — свободная алгебра многообразия всех группоидов. С. г. с множеством X свободных образующих совпадает с группоидом *слов*, если под словом понимать любую упорядоченную систему элементов из X с любыми повторениями, причем в этой системе задано распределение скобок (каждый символ считается взятым в скобки, а затем скобки расставлены так, что каждый раз перемножаются лишь две скобки). Произведением слов (a) и (b) считается слово $((a)\ (b))$.

О. А. Иванова.

СВОБОДНЫЙ МОДУЛЬ — свободный объект (свободная алгебра) в многообразии модулей над фиксированным кольцом R. Если R — ассоциативное кольцо с единицей, то С. м.— это модуль, обладающий базисом, т. е. линейно независимой системой порождающих. Мощность базиса С. м. наз. его **рангом**. Ранг не всегда определен однозначно, т. е. существуют кольца, над к-рыми С. м. может обладать двумя базисами, состоящими из различного числа элементов. Это равносильно существованию над кольцом R двух прямоугольных матриц A и B, для к-рых

$$AB = I_m, \ BA = I_n, \ m \neq n,$$

где I_m и I_n — единичные матрицы порядков m и n соответственно. Неоднозначность, однако, имеет место лишь для конечных базисов, если же ранг С. м. бесконечен, то все базисы С. м. равномощны. Кроме того, над кольцами, допускающими гомоморфизм в тело (в частности, над коммутативными кольцами), ранг С. м. определен всегда однозначно.

Кольцо R, рассматриваемое как левый модуль над самим собой, является С. м. ранга один. Всякий левый С. м. является прямой суммой С. м. ранга один. Любой модуль M представим как фактормодуль F_0/H_0 нек-рого С. м. F_0. Подмодуль H_0 в свою очередь представим как фактормодуль F_1/H_1 С. м. F_1. Продолжая этот процесс, получают точную последовательность:

$$\ldots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0,$$

к-рая наз. **свободной резольвентой** модуля M. Тела могут быть охарактеризованы как кольца, над к-рыми все модули свободны. Над областью главных идеалов подмодуль С. м. свободен. Близкими к С. м. являются *проективные модули* и *плоские модули*.

Лит.: [1] Кон П., Свободные кольца и их связи, пер. с англ., М., 1975; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966. *В. Е. Говоров.*

СВОДИМОСТИ АКСИОМА — аксиома, добавленная Б. Расселом (B. Russell) к его разветвленной теории типов с целью избежать расслоения понятий (см. *Непредикативное определение*). В разветвленной теории типов множества данного типа разделяются на порядки. Так, вместо понятия множества натуральных чисел появляется понятие множества натуральных чисел данного порядка. При этом множество натуральных чисел, определяемое формулами без использования каких-либо множеств, принадлежит первому порядку. Если в определении используется совокупность множеств первого порядка, а совокупности множеств высшего порядка не используются, то определяемое множество принадлежит второму порядку, и т. д. Напр., если S — семейство множеств, состоящее из множеств одного и того же порядка, то множество

$$M = \{x \mid \exists y\, (y \in S \wedge x \in y)\}$$

должно принадлежать следующему порядку, т. к. в его определении содержится квантор по множествам данного порядка. С. а. утверждает, что для каждого множества существует равнообъемное ему (т. е. состоящее из тех же самых элементов) множество первого порядка. Таким образом, С. а. фактически сводит разветвленную теорию типов к простой теории типов.

Лит.: [1] Гильберт Д., Аккерман В., Основы теоретической логики, пер. с нем., М., 1947. *В. Н. Гришин.*

СВЯЗАННАЯ ПЕРЕМЕННАЯ, связанное вхождение переменной,— тип вхождения переменной в языковое выражение. Точное определение для каждого формализованного языка — свое и зависит от правил образования этого языка. Вместо С. п. нельзя подставлять объекты. Такая подстановка приводит к бессмысленным выражениям. Но замена С. п. всюду, где она встречается, на новую для данного выражения переменную приводит к выражению с тем же самым смыслом. Напр., в выражениях

$$\int f(x,\ y)\, dx,\quad \{x \mid f(x,\ y) = 0\}$$

переменная x является связанной. Подстановка вместо x какого-нибудь числа приводит к бессмысленным выражениям. В то же время, написав всюду вместо x, например z, получают выражения, обозначающие те же самые сущности.

С. п. всегда возникают при применении к нек-рому выражению e со свободными вхождениями переменной x какого-нибудь оператора с операторной переменной x (см. *Свободная переменная*). В получившемся выражении все вхождения переменной x в e, бывшие свободными, становятся связанными. Ниже указаны нек-рые наиболее употребительные операторы (помимо уже использованных операторов $\int \ldots dx$ и $\{x \mid \ldots\}$), в к-рых x является операторной переменной:

$\forall x(\ldots)$, $\exists x(\ldots)$ — кванторы общности и существования;

$\int_{\ldots}^{\ldots} \ldots dx$ — определенный интеграл по x;

$\Sigma_x \ldots$ — сумма по x;

$\lambda x(\ldots)$ — функция от x, значение к-рой в точке x равно ...

Вместо многоточий можно подставлять определенные языковые выражения.

В реальных (не формализованных) математич. текстах возможно неоднозначное употребление одних и тех же выражений, в связи с чем выделение С. п. в данном выражении зависит от контекста и смысла выражения. В формализованных языках имеется формальная процедура выделения свободных и связанных вхождений переменных. *В. Н. Гришин.*

СВЯЗАННЫЙ ВЕКТОР — см. *Вектор*.

СВЯЗКА — двупараметрическое семейство линий на плоскости или поверхностей в пространстве, линейно зависящее от параметров. Пусть F_1, F_2, F_3 — функции двух переменных, из к-рых ни одна не является линейной комбинацией двух других. Семейство линий на плоскости, определяемых уравнением

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0$$

при всевозможных значениях параметров λ_1, λ_2, λ_3 (кроме $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$), представляет собой С. (фактически зависит от двух отношений $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$). Аналогично записывается уравнение С. поверхностей в

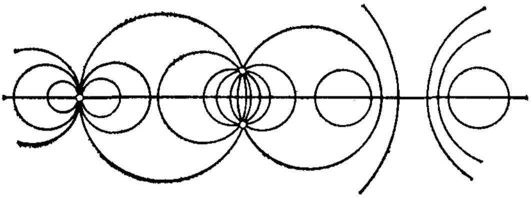


Рис. 1.

пространстве. Три уравнения $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ дают три элемента С. (три линии или три поверхности), к-рые определяют всю С.

Связка прямых — множество всех прямых, каждая пара из к-рых лежит в одной плоскости. В евклидовой геометрии С. прямых — множество всех прямых, проходящих через одну точку. Если эта точка конечная, то С. прямых наз. эллиптической, если бесконечно удаленная, — параболической.

Связка плоскостей — множество всех плоскостей, проходящих через одну точку (собственная С.) или параллельных нек-рой прямой (несобственная С.).

Связка окружностей — двупараметрич. семейство окружностей, линейно зависящее от параметров. Собственной С. окружностей является множество тех окружностей, относительно к-рых данная

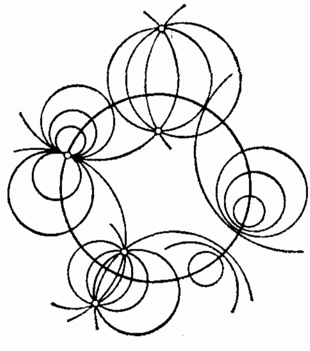


Рис. 2.

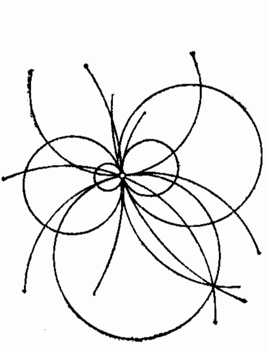


Рис. 3.

точка (центр С.) имеет данную степень точки. Несобственной С. окружностей наз. множество всех окружностей, центры к-рых принадлежат нек-рой фиксированной прямой (т. н. фундаментальной прямой) (см. рис. 1). Если (0,0) — центр собственной связки, то ее уравнение

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p = 0, \quad a^2 + b^2 > p,$$

где a и b — параметры, определяющие окружность,

p — степень центра С. относительно окружностей С. (степень несобственной С. считается бесконечной).

Имеются три типа собственных С. окружностей:

1) гиперболическая С. ($p > 0$), состоящая из всех окружностей, ортогональных нек-рой данной окружности (фундаментальной окружности) (см. рис. 2);

2) параболическая С. ($p = 0$), состоящая из всех окружностей, проходящих через нек-рую данную точку (центр С.) (см. рис. 3);

3) эллиптическая С. ($p < 0$), состоящая из окружностей, пересекающих нек-рую данную окружность в двух диаметрально противоположных точках последней (см. рис. 4).

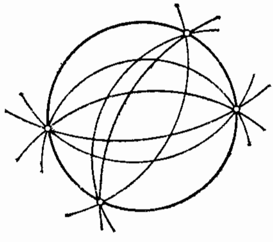


Рис. 4.

Пересечение двух С. окружностей является *пучком* окружностей. Эллиптическая С. содержит только эллиптич. пучки, параболическая С.— только эллиптич. и параболич. пучки, гиперболическая С.— три типа собственных пучков. Несобственная С. содержит как несобственные пучки, так и собственные пучки всех трех типов.

Пересечение двух С., из к-рых одна эллиптическая, может быть только эллиптич. пучком. Пересечения двух С., из к-рых одна параболич., может быть только эллиптическим или параболич. пучком. Пересечение двух С., из к-рых одна собственная, может быть только собственным пучком.

Связка сфер — двупараметрич. семейство сфер, линейно зависящее от параметров. С. сфер состоит из множества сфер, относительно к-рых точки нек-рой прямой (радикальной оси) имеют одинаковую степень (различную для разных точек). Радикальная ось пересекает все сферы С. в двух точках. В зависимости от того, являются ли эти точки действительными (различными), комплексно сопряженными или совпадающими, С. сфер наз. эллиптической С., к-рая состоит из всех сфер, проходящих через две общие точки; гиперболической С., к-рая состоит из всех сфер, ортогональных двум нек-рым пересекающимся сферам; параболической С., к-рая состоит из всех сфер, касающихся нек-рой данной прямой в данной точке. Центры всех сфер С. лежат в одной плоскости, перпендикулярной к радикальной оси. С. является пересечением всех общих сфер двух *сетей* сфер.

В проективной геометрии С.— множество всех прямых и плоскостей, проходящих через данную точку.

Лит.: [1] Постников М. М., Аналитическая геометрия, М., 1973; [2] Моденов П. С., Аналитическая геометрия, М., 1969. *А. Б. Иванов.*

СВЯЗКА ПОЛУГРУПП данного семейства $\{S_\alpha\}$ — полугруппа S, обладающая разбиением на подполугруппы, классы к-рого суть в точности полугруппы S_α, и для любых S_α, S_β существует S_γ такая, что $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\gamma$. В этом случае говорят также, что S разложима в связку полугрупп S_α. Другими словами, S есть С. п. S_α, если все S_α— подполугруппы в S и существует конгруэнция ρ на S такая, что ρ-классы суть в точности S_α. Полугруппы S_α наз. компонентами данной связки. Термин «С. п.» согласуется с использованием нередко слова «связка» как синонима термина «полугруппа идемпотентов», так как конгруэнция ρ на полугруппе S определяет разложение S в связку тогда и только тогда, когда факторполугруппа S/ρ — полугруппа идемпотентов.

Многие полугруппы разложимы в связку полугрупп с теми или иными «более хорошими» свойствами; таким образом, изучение их строения в известной мере сводится к рассмотрению типов, к-рым принадлежат компоненты связки, и к рассмотрению полугрупп идемпотентов (см., напр., *Архимедова полугруппа*, *Вполне простая полугруппа*, *Клиффордова полугруппа*, *Периодическая полугруппа*, *Сепаративная полугруппа*).

С. п. S_α наз. коммутативной, если для соответствующей конгруэнции ρ факторполугруппа S/ρ коммутативна; тогда S/ρ — полурешетка (в этом случае часто говорят, что S есть полурешетка полугрупп S_α, в частности, если S/ρ — цепь, то говорят, что S есть цепь полугрупп S_α). С. п. наз. прямоугольной (иногда — матричной), если S/ρ — прямоугольная полугруппа (см. *Идемпотентов полугруппа*). Это эквивалентно тому, что компоненты связки могут быть индексированы парами индексов $S_{i\lambda}$, где i и λ пробегают нек-рые множества I и Λ соответственно, причем для любых $S_{i\lambda}$, $S_{j\mu}$ выполняется включение $S_{i\lambda}S_{j\mu}\subseteq S_{i\mu}$. Любая С. п. есть полурешетка прямоугольных связок, т. е. ее компоненты могут быть распределены на подсемейства так, что объединение компонент каждого подсемейства есть прямоугольная связка этих компонент, а исходная полугруппа разложима в полурешетку указанных объединений (теорема Клиффорда [1]). Поскольку свойства быть полугруппой идемпотентов, полурешеткой, прямоугольной полугруппой характеризуются тождествами, на любой полугруппе S для каждого из перечисленных свойств θ существует наименьшая конгруэнция, для к-рой соответствующая факторполугруппа обладает свойством θ, т. е. существуют наибольшие (или наиболее дробные) разложения S в С. п., в коммутативную С. п., в прямоугольную С. п.

К специальным типам С. п. относится сильная связка [4]: для любых элементов a и b из разных компонент произведение ab равно степени одного из этих элементов. Важным частным случаем сильной связки и одновременно частным случаем цепи полугрупп является ординальная сумма (или последовательно аннулирующая связка): множество ее компонент $\{S_\alpha\}$ линейно упорядочено и для любых S_α, S_β таких, что $S_\alpha < S_\beta$, и любых $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ имеет место равенство $ab=ba=a$. Заданием компонент и способа их упорядочения ординальная сумма определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Лит.: [1] Clifford A., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1954, v. 5, p. 499—504; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [3] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [4] Шеврин Л. Н., «Изв. вузов. Матем.», 1965, № 6, с. 156—65. *Л. Н. Шеврин.*

СВЯЗНАЯ КОМПОНЕНТА ЕДИНИЦЫ группы G — наибольшее связное подмножество G° топологической (или алгебраической) группы G, содержащее единицу этой группы. С. к. е. G° является замкнутой нормальной подгруппой в G; смежные классы по этой подгруппе совпадают со связными компонентами группы G. Факторгруппа G/G° вполне несвязна и хаусдорфова, причем G° — наименьшая из таких нормальных подгрупп $H\subset G$, что G/H вполне несвязна. Если G локально связна (напр., G — группа Ли), то G° открыта в G и G/G° дискретна.

В произвольной алгебраич. группе G С. к. е. G° также открыта и имеет конечный индекс, причем G° является минимальной замкнутой подгруппой конечного индекса в G. Связные компоненты алгебраич. группы G совпадают с неприводимыми компонентами. Для любого регулярного гомоморфизма $\varphi : G \to G'$ алгебраич. групп справедливо равенство $\varphi(G^\circ)=\varphi(G)^\circ$. Если G определена над нек-рым полем k, то и G° определена над k.

Если G — алгебраич. группа над полем $\mathbb{C}$, то ее С. к. е. G° совпадает со С. к. е. группы G, рассматриваемой как комплексная группа Ли. Если G определена над $\mathbb{R}$, то группа $G^{\circ}(\mathbb{R})$ вещественных точек в G° не обязательно связна в топологии группы Ли $G(\mathbb{R})$, но число ее связных компонент конечно и имеет вид 2^l, где $l \geqslant 0$. Напр., группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ распадается на две компоненты, хотя $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ связна. Псевдоортогональная унимодулярная группа $\mathrm{SO}(p, q)$, к-рая может рассматриваться как группа вещественных точек связной комплексной алгебраич. группы $\mathrm{SO}_{p+q}(\mathbb{C})$, связна при $p=0$ или $q=0$ и распадается на две компоненты при $p, q > 0$.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [4] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *А. Л. Онищик.*

СВЯЗНАЯ СУММА семейства множеств — объединение этих множеств в единое связное множество. Само понятие С. с. возникло из необходимости отличить такого рода объединение от понятия несвязной или открыто-замкнутой суммы, т. е. такого объединения множеств, когда они не пересекаются и связными подмножествами в этом объединении могут быть только подмножества-слагаемые. *В. И. Малыхин.*

СВЯЗНОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество объемлющего множества, в к-ром определено понятие *связности* и в смысле к-рого само подмножество связно. Напр., С. м. пространства действительных чисел являются выпуклые множества и только они; С. м. графа является такое множество, в к-ром любые две точки соединены путем, целиком лежащим в этом множестве.
В. И. Малыхин.

СВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, к-рое нельзя представить в виде суммы двух отделенных друг от друга частей или, более строго, непустых непересекающихся открыто-замкнутых подмножеств. Пространство связно тогда и только тогда, когда каждая непрерывная числовая функция принимает на нем все промежуточные значения. Непрерывный образ С. п., произведение С. п., пространство замкнутых подмножеств в топологии Вьеториса С. п. суть С. п. Каждое связное вполне регулярное пространство имеет мощность не менее континуума, хотя существуют и счетные связные хаусдорфовы пространства.
В. И. Малыхин.

СВЯЗНОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ — *дифференциально-геометрические структуры* на гладком *многообразии* M, являющиеся *связностями* в приклеенных к M гладких расслоенных пространствах E с однородными типовыми слоями G/H размерности $\dim M$. В зависимости от выбора однородного пространства G/H получаются, напр., *аффинные связности*, *проективные связности*, *конформные связности* и др. на многообразии M. Общее понятие С. на м. ввел Э. Картан [1]; он назвал многообразие M с заданной на нем связностью «неголономным пространством с фундаментальной группой».

Современное определение С. на м. опирается на понятие гладкого расслоенного пространства, приклеенного к многообразию M. Пусть $F=G/H$ является *однородным пространством* размерности $\dim M$ (напр., аффинным пространством, проективным пространством и т. п.). Пусть $p: E \to M$ является гладким локально тривиальным расслоением с типовым слоем F и пусть в этом расслоении существует и фиксировано гладкое сечение s, т. е. такое гладкое отображение $s: M \to E$, что $p(s(x))=x$ для любого $x \in M$. Последнее условие гарантирует, что s является диффеоморфизмом M на $s(M)$, и поэтому M и $s(M)$ можно при желании отождествлять. Другими словами, к каждой точке $x \in M$ присоединен экземпляр F_x однородного пространства F размерности $\dim M$ — слой расслоения $p: E \to M$ над x—с фиксированной в ней точкой $s(x)$, отождествляемой с x.

С. на м. является частным случаем общего понятия связности; самостоятельно она может быть определена следующим образом. Пусть для каждой кусочно гладкой кривой $L(x_0, x_1)$ многообразия M определен изоморфизм $\Gamma L: F_{x_1} \to F_{x_0}$ касательных однородных пространств в концах кривой (напр., если F является аффинным, проективным и т. д. пространством, то ΓL — соответственно аффинное, проективное и т. д. отображение). Пусть, кроме того:

1) при $L(x_0, x_1)$, $L'(x_1, x_2)$, $L^{-1}(x_1, x_0)$ и $LL'(x_0, x_2)$ справедливы $\Gamma L^{-1} = (\Gamma L)^{-1}$, $\Gamma(LL') = (\Gamma L)(\Gamma L')$;

2) для каждой точки $x \in M$ и касательного вектора $X_x \in T_x(M)$ изоморфизм $\Gamma L_t: F_{x_t} \to F_x$, где L_t — образ отрезка $[0, t]$ при параметризации $\lambda: [0, 1] \to L(x, x_1)$ кривой L с касательным вектором X, стремится при $t \to 0$ к тождественному изоморфизму, и его отклонение от последнего зависит в своей главной части только от x и X, причем гладко.

В этом случае говорят, что на многообразии M дана связность Γ типа F; изоморфизм ΓL наз. *параллельным перенесением* вдоль L. Для каждой кривой $L(x, x_1) \in M$ определяется ее развертка: кривая в F_x, состоящая из образов точек x_t кривой L при параллельном перенесении вдоль L_t. Из 2) следует, что кривые с общим касательным X в точке x дают развертки с общим касательным вектором Y, гладко зависящим от x и X, вследствие чего для каждой точки x возникает отображение

$$f_x: T_x(M) \to T_{s(x)}(F_x).$$

Наиболее изучены линейные С. на м., к-рые обладают следующим дополнительным свойством:

3) элемент $\omega(X)$ в алгебре Ли g структурной группы G, к-рый определяет главную часть отклонения изоморфизма ΓL_t от тождественного изоморфизма при $t \to 0$ относительно нек-рого поля реперов, зависит от X линейно.

В этом случае отображение f_x является линейным. Если f_x оказывается изоморфизмом для любой точки x, то говорят о невырожденной С. на м. или о связности Картана; в этом случае изоморфизм f_x^{-1} трактуется также как приклеивание расслоения $p: E \to M$ к базе M (вдоль заданного сечения S). Связность Картана на M наз. полной, если для каждой точки x всякая гладкая кривая в F_x с началом в x является разверткой нек-рой кривой в M.

С точки зрения общей теории связностей, где линейная связность в расслоении $p: E \to M$ задается с помощью *горизонтального распределения* Δ на E, отображение f_x является композицией изоморфизма s^*, отображающего X в соответствующий касательный к $s(M)$ вектор, и последующей проекции пространства $T_{s(x)}(E) = \Delta_{s(x)} \oplus T_{s(x)}(F_x)$ на второе прямое слагаемое. Отсюда следует, что связность невырождена тогда и только тогда, когда $\Delta_{s(x)} \cap T_{s(x)}(s(M)) = \{0\}$ для любой точки $x \in M$. На M применимы все понятия и результаты общей теории связностей, напр. такие, как *голономии группа*, *кривизны форма*, теорема о голономии и др. Дополнительная структура расслоения, приклеенного к многообразию M, позволяет, однако, ввести нек-рые более специальные понятия. Кроме развертки наиболее важным из них является понятие *кручения формы* связности на M в точке x.

Особое место в теории С. на м. занимают связности Картана в случае, когда $F = G/H$ является однородным *редуктивным пространством*, т. е. когда существует прямое разложение $g = h + m$ со свойством $[hm] \subset m$. В этом случае происходит расщепление формы кривизны Ω на два самостоятельных объекта: ее компонента в m порождает форму кручения, а компонента в h порождает форму кривизны. Здесь наиболее известным примером является аффинная связность на M, у к-рой F является аффинным пространством размерности $\dim M$.

Редуктивное пространство F обладает инвариантной аффинной связностью. Вообще, если на F существует инвариантная аффинная или проективная связность, то определяются *геодезические линии* связности типа F на M как такие линии в M, развертки к-рых являются геодезич. линиями указанной инвариантной связности.

Лит.: [1] Cartan E., «Acta math.», 1926, t. 48, p. 1—42 (в рус. пер. — Картан Э., Группы голономии обобщенных пространств, пер. с франц., Казань, 1933); [2] Лаптев Г. Ф., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 275—382; [3] Ehresmann C., Coll. de Topologie (Bruxells, 1950), P., 1951, p. 29—55; [4] Kobayashi S., «Canad. J. Math.», 1956, v. 8, N 2, p. 145—156; [5] Clifton Y. H., «J. Math. and Mech.», 1966, v. 16, № 6, p. 569—76. *Ю. Г. Лумисте.*

СВЯЗНОСТИ ОБЪЕКТ — дифференциально-геометрический объект на гладком главном расслоенном пространстве P, с помощью к-рого задается *горизонтальное распределение* Δ связности в P. Пусть $R_0(P)$ является расслоением всех таких реперов в касательных к P пространствах, что первые r векторов $e_1, \ldots, e_r$ касательны к слою и порождаются определенными r базисными элементами в алгебре Ли структурной группы G пространства P, $r=\dim G$. С. о. составляют тогда функции Γ_i^ρ на $R_0(P)$ такие, что подпространство распределения Δ натянуто на векторы $e_i+\Gamma_i^\rho e_\rho$ ($\rho, \sigma=1, \ldots, r$; $i, j, \ldots=r+1, \ldots, r+n$). Условия, к-рым должны удовлетворить функции Γ_i^ρ на $R_0(P)$, чтобы они составили С. о., следующие:

$$d\Gamma_i^\rho-\Gamma_j^\rho\omega_i^j+\Gamma_i^\sigma\omega_\sigma^\rho+\omega_i^\rho=\Gamma_{ij}^\rho\omega^j. \tag{1}$$

Они выражены с помощью 1-форм на $R_0(P)$, входящие в структурные уравнения для форм ω^i, ω^ρ, составляющих дуальный кобазис к $\{e_i, e_\rho\}$:

$$\left.\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j^i, \\ d\omega^\rho &= -\frac{1}{2} C_{\sigma\tau}^\rho\omega^\sigma \wedge \omega^\tau + \omega^i \wedge \omega_i^\rho, \\ \omega_\sigma^\rho &= -C_{\sigma\tau}^\rho\omega^\tau. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

С. о. определяет также *связности форму* θ согласно формуле $\theta^\rho=\omega^\rho-\Gamma_i^\rho\omega^i$ и *кривизны форму* Ω согласно формулам

$$\Omega^\rho=-\frac{1}{2}R_{ij}^\rho\omega^i \wedge \omega^j,$$

$$R_{ij}^\rho=-2\left(\Gamma_{[ij]}^\rho+C_{\sigma\tau}^\rho\Gamma_i^\sigma\Gamma_j^\tau\right).$$

Напр., пусть P является пространством аффинных реперов в касательных пространствах n-мерного гладкого многообразия M. Тогда вторые из уравнений (2) имеют вид

$$d\omega_j^i=-\omega_k^i \wedge \omega_j^k+\omega^k \wedge \omega_{jk}^i$$

и (1) сводятся к

$$d\Gamma_{ik}^j-\Gamma_{lk}^j\omega_i^l-\Gamma_{il}^j\omega_k^l+\Gamma_{ik}^l\omega_l^j+\omega_{ik}^j=\Gamma_{jkl}^i\omega^l.$$

При *параллельном перенесении* должно быть $\omega_j^i-\Gamma_{jk}^i\omega^k=0$. Если на M выбрана локальная карта и в ее области сделан переход к натуральному реперу карты, то $\omega^k=dx^k$ и параллельное перенесение определяется с помощью $\omega_j^i=\Gamma_{jk}^i dx^k$. Классич. определение С. о. аффинной связности на M как совокупности функций Γ_{jk}^i, заданных на области каждой карты и преобразующихся при переходе к координатам другой карты по формулам

$$\Gamma_{j'k'}^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma_{jk}^i+\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i},$$

следует из условия инвариантности перенесения.

Ю. Г. Лумисте.

СВЯЗНОСТИ ФОРМА — линейная дифференциальная форма θ на главном расслоенном пространстве P, к-рая принимает значения в алгебре g структурной группы G пространства P, определяется нек-рой *линейной связностью* Γ в P и сама определяет эту связность однозначно. По связности Γ значение С. ф. $\theta_y(Y)$, где $y \in P$, $Y \in T_y(P)$, определяется как тот элемент в g, к-рый в действии G на P порождает вторую компоненту вектора Y относительно прямого расслоения $T_y(P) = \Delta_y \oplus T_y(G_y)$, где G_y — слой, содержащий y, а Δ — горизонтальное распределение связности Γ. По С. ф. θ горизонтальное распределение Δ, а тем самым и связность Γ, восстанавливается следующим образом.

Теорема Картана — Лаптева. Чтобы нек-рая форма θ на P со значениями в g была С. ф., необходимо и достаточно следующее: 1) при $Y \in T_y(G_y)$ значением $\theta_y(Y)$ является тот элемент в g, к-рый в действии G на P порождает Y, 2) g-значная 2-форма

$$\Omega = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta],$$

составленная из θ, является полубазовой, или горизонтальной, т. е. $\Omega_y(Y, Y') = 0$, если хотя бы один из векторов Y и Y' принадлежит $T_y(G_y)$. 2-форма Ω наз. *кривизны формой* связности. Если в g задан базис $\{e_1, \ldots, e_r\}$, то условие 2) выражается локально в виде равенств:

$$d\theta^\rho + \frac{1}{2} C^\rho_{\sigma\tau}\theta^\sigma \wedge \theta^\tau = \frac{1}{2} R^\rho_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \qquad (*)$$

$$(\rho, \sigma, \tau = 1, \ldots, r;\ i, j = r+1, \ldots, r+n = \dim P),$$

где $\omega^1, \ldots, \omega^n$ — нек-рые линейно независимые полубазовые 1-формы. В такой форме необходимость условия 2) установил Э. Картан [1]; его достаточность при выполнении условия 1) доказал Г. Ф. Лаптев [2]. Уравнения (*) на компоненты С. ф. наз. структурными уравнениями связности в P, в них R^ρ_{ij} составляют объект кривизны.

Пусть P, в качестве примера, является пространством аффинных реперов в касательных пространствах n-мерного гладкого многообразия M. Тогда G и g являются соответственно группой и алгеброй Ли матриц вида

$$\left\| \begin{matrix} 1 & a^i \\ 0 & A^i_j \end{matrix} \right\|, \ \det|A^i_j| \neq 0,$$

и

$$\left\| \begin{matrix} 0 & \mathfrak{A}^i \\ 0 & \mathfrak{A}^i_j \end{matrix} \right\| (i, j = 1, \ldots, n).$$

В силу теоремы Картана — Лаптева g-значная 1-форма

$$\theta = \left\| \begin{matrix} 0 & \omega^i \\ 0 & \omega^i_j \end{matrix} \right\|$$

на P является С. ф. нек-рой *аффинной связности* на M тогда и только тогда, когда

$$d\omega^i + \omega^i_j \wedge \omega^j = \frac{1}{2} T^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l.$$

Здесь T^i_{jk} и R^i_{jkl} составляют соответственно тензор кручения и тензор кривизны аффинной связности на M. Последние два уравнения на компоненты С. ф. наз. структурными уравнениями полученной на M аффинной связности.

Лит.: [1] Cartan E., «Acta math.», 1926, v. 48, p. 1—42; [2] Лаптев Г. Ф., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 275—382; [3] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, т. 2, пер. с англ., М., 1981.

Ю. Г. Лумисте.

СВЯЗНОСТИ ЧИСЛО — мощность семейства компонент связности топологич. пространства. Напр., если из числовой прямой выбросить n точек $a_1, \ldots, a_n$, то компонентами остатка являются множества

$$]-\infty,\ a_1[,\ ]a_1,\ a_2[,\ \ldots,\ ]a_n,\ \infty[$$

и, таким образом, С. ч. остатка равно $n+1$.

Термин «С. ч.» используется и в следующем смысле: область евклидова пространства наз. n-связной, если ее граница состоит из n непересекающихся связных подмножеств. Напр., внутренность круга — односвязная область, внутренность кольца — двусвязная.

В. И. Малыхин.

СВЯЗНОСТЬ — свойство топологич. пространства, состоящее в том, что пространство нельзя представить в виде суммы двух отделенных друг от друга частей, или, более строго, непустых непересекающихся открыто-замкнутых подмножеств. Пространство, не являющееся связным, наз. несвязным. Напр., обычная евклидова плоскость — связное пространство; если удалить из нее точку, то остаток связен; если удалить какую-нибудь окружность, не сводящуюся к точке, то остаток уже несвязен.

Абстрактное свойство С. выражает интуитивное представление о С. пространства в единое целое, об отсутствии в нем каких-либо изолированных «островков». С. топологич. пространства сохраняется при гомеоморфизмах и является одним из важнейших свойств топологич. пространства.

Подмножество топологич. пространства наз. связным, если оно — связное подпространство. После введения этого понятия можно утверждать, что пространство связно, если любые его две точки лежат в нек-ром связном подмножестве, т. е. их можно соединить нек-рым связным множеством. С этой точки зрения абстрактное свойство С. можно рассматривать как обобщение линейной связности, т. е. свойства пространства, заключающегося в возможности связать любые его две точки нек-рым путем — непрерывным образом отрезка. Открытое связное подмножество наз. областью. Области и выпуклые подмножества в евклидовых пространствах являются линейно связными и, тем более, связными.

Если семейство связных подмножеств имеет непустое пересечение, то объединение этого семейства — связное множество. Для всякой точки топологич. пространства объединение всех связных подмножеств, ее содержащих, есть наибольшее связное подмножество, ее содержащее, оно наз. компонентой этой точки. Компоненты — замкнутые множества, различные компоненты не пересекаются.

Квазикомпонентой точки наз. пересечение всех содержащих ее открыто-замкнутых подмножеств. Компонента точки содержится в ее квазикомпоненте. В бикомпактных пространствах компоненты и квазикомпоненты совпадают.

Пространство наз. наследственно несвязным (дисперсным), если все его компоненты одноточечны, т. е. все его связные подмножества только одноточечны. Пространство наз. вполне несвязным (нигде не связным), если все его квазикомпоненты одноточечны. Пространство наз. экстремально несвязным, если замыкание любого открытого множества открыто. Хаусдорфово экстремально несвязное пространство вполне несвязно, а всякое вполне несвязное пространство наследственно несвязно. Существует связное пространство, содержащее точку дисперсии, по удалении к-рой остаток есть вполне несвязное пространство. Пример — *Куратовского — Кнастера веер.*

Связное бикомпактное пространство наз. континуумом. Пересечение убывающего семейства непустых континуумов есть непустой континуум. Однако никакой континуум нельзя разложить в объединение счетного семейства непустых непересекающихся замкнутых подмножеств (теорема Серпиньского).

Пространство наз. неприводимым между нек-рыми своими двумя точками, если оно связно и эти две точки нельзя соединить никаким связным множеством, отличным от всего пространства. Всякий континуум для любых своих двух точек содержит неприводимый между ними подконтинуум (теорема Мазуркевича — Янишевского).

Пространство наз. локально связным в точке, если всякая окрестность этой точки содержит нек-рую связную ее окрестность.

Пространство наз. связным в размерности n, если каждое непрерывное отображение n-мерной сферы в него продолжается до непрерывного отображения n-мерного шара. С. в размерности 1 эквивалентна тривиальности *фундаментальной группы* пространства.

Непрерывное отображение одного топологич. пространства в другое наз. монотонным, если прообраз каждой точки — связное подмножество. Для замкнутых отображений монотонность эквивалентна связности прообраза каждого связного подмножества.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 2, М., 1969.

В. И. Малыхин.

СВЯЗНОСТЬ на расслоенном пространстве — *дифференциально-геометрическая структура* на гладком расслоенном пространстве со структурной группой Ли, обобщающая *связности на многообразии*, в частности, напр., *Леви-Чивита связность* в римановой геометрии. Пусть $p: E \to B$ является гладким локально тривиальным расслоением, на типовом слое F к-рого эффективно и гладко действует группа Ли G. С. в этом расслоении — это отображение категории кусочно гладких кривых базы B в категорию диффеоморфизмов слоя на слой, к-рое кривой $L = L(x_0, x_1)$ с началом x_0 и концом x_1 сопоставляет диффеоморфизм $\Gamma L: p^{-1}(x_1) \to p^{-1}(x_0)$ и удовлетворяет следующим аксиомам:

1) при $L(x_0, x_1)$, $L'(x_1, x_2)$, $L^{-1}(x_1, x_0)$ и $LL'(x_0, x_1)$ справедливы

$$\Gamma L^{-1} = (\Gamma L)^{-1},$$

$$\Gamma(LL') = (\Gamma L)(\Gamma L');$$

2) при произвольном тривиализующем диффеоморфизме $\varphi: U \times F \to p^{-1}(U)$ и при $L(x_0, x_1) \in U$ диффеоморфизм $\varphi_{x_0}^{-1}(\Gamma L)\varphi_{x_1}: (x_1, F) \to (x_0, F)$, где $\varphi_x = \varphi|_{(x, F)}$, определяется действием нек-рого элемента $g_\varphi^L \in G$;

3) для нек-рой кусочно гладкой параметризации $\lambda: [0,1] \to L(x_0, x_1) \subset U$ отображение $t \mapsto g_\varphi^{L_t}$, где L_t — образ отрезка $[0, t]$ при λ, определяет кусочно гладкую кривую в G, начинающуюся в единице $e = g_\varphi^{L_0}$, причем λ и $\lambda': [0, 1] \to L'(x_0, x_1) \in U$ с общим ненулевым касательным вектором $X \in T_{x_0}B$ определяют пути в G с общим касательным вектором $\theta_\varphi(x_0, X) \in T_e(G) = g$, гладко зависящим от x_0 и X.

Диффеоморфизм ΓL наз. *параллельным перенесением* вдоль L. Параллельные перенесения вдоль всевозможных замкнутых кривых $L(x_0, x_0)$ составляют *голономии группу* связности Γ в точке x_0, изоморфную нек-рой подгруппе Ли в G, не зависящей от x_0. Кривая $\Lambda(y_0, y_1)$ в E наз. горизонтальной для связности Γ, если $\Gamma(p\Lambda_t)y_t = y_0$ для любого $t \in [0, 1]$ при нек-рой ее кусочно гладкой параметризации. Если заданы $L(x_0, x_1)$ и $y_0 \in p^{-1}(x_0)$, то всегда существует единственная горизонтальная $\Lambda(y_0, y_1)$, наз. горизонтальным поднятием кривой L, такая, что $p\Lambda=L$; она состоит из $\Gamma L_t^{-1} y_0$. Множество горизонтальных поднятий всех L в B определяет связность Γ однозначно: ΓL отображает концы всех поднятий кривой L в их начала.

С. наз. линейной, если $\theta_\varphi(x, X)$ при произвольных φ и x зависит от X линейно или, что равносильно, если для любой $y \in E$ касательные векторы горизонтальных кривых с началом y образуют в $T_y(E)$ векторное подпространство Δ_y, наз. горизонтальным подпространством. При этом $T_y(E)=\Delta_y \oplus T_y(F_y)$, где F_y — слой, проходящий через y, то есть $F_y=p^{-1}(p(y))$. Гладкое распределение Δ: $y \mapsto \Delta_y$ наз. *горизонтальным распределением* линейной связности Γ. Оно определяет Γ однозначно: горизонтальными поднятиями являются его интегральные кривые.

Расслоенное пространство E наз. главным (соответственно пространством однородного типа) и обозначается P (соответственно Q), если G действует на F просто транзитивно (соответственно транзитивно), т. е. если для произвольных $z, z' \in F$ существует точно один (соответственно существует) элемент $g \in G$, к-рый переводит z в z'. Пусть G действует на F слева; тогда на P определяется ее естественное правостороннее действие, в к-ром g определяет $R_g: z \mapsto z \circ g$. При этом Q отождествимо с фактормногообразием P/H, составленном из орбит $y \circ H$, где H — стационарная подгруппа нек-рой точки из $F=G/H$. Общее E отождествимо с фактормногообразием $(P \times F)/G$ орбит $(y, z) \circ G$ относительно действия, определяемого формулой $(y, z) \circ g=(y \circ g, g^{-1} \circ z)$.

Гладкое распределение Δ на P является горизонтальным распределением нек-рой линейной С. (к-рую оно определяет однозначно) тогда и только тогда, когда

$$T_y(P)=\Delta_y \oplus T_y(F_y), \quad R_g^* \Delta_y=\Delta_y \circ g$$

для произвольных $y \in P$ и $g \in G$. Все горизонтальные распределения на Q (соответственно E) являются образами таких Δ при канонич. проекции $P \to Q=P/H$ (соответственно естественных поднятий таких Δ на $P \times F$ при канонич. проекции $P \times F \to E=(P \times F)/G$). Часто линейная С. определяется прямо как распределение с указанными выше свойствами. Известно, что в каждом P, а вместе с тем и в каждом Q и E, существует нек-рая линейная С.

Исследование линейной С. в P проводится обычно с помощью *связности формы*, к-рая определяет С. однозначно и может быть положена в основу еще одного ее определения. Важной ее характеристикой является *кривизны форма*, с помощью к-рой можно вычислить алгебру Ли группы голономии.

Впервые понятие С. возникло в 1917 в работе Т. Леви-Чивита [1] о параллельном перенесении вектора в римановой геометрии. Уже в 1918 Г. Вейль [2] дал понятие *аффинной связности*. В 20-е гг. Э. Картан (см. [3] — [5]) перешел к исследованию *проективной связности* и *конформной связности*, в 1926 дал общую концепцию «неголономного пространства с фундаментальной группой» (см. *Связности на многообразии*), где эти пространства освещены с точки зрения общей теории С. В 40-е гг. В. В. Вагнер развивал еще более общую концепцию, близкую по духу (но не по методу) к современному понятию С. Решающим был 1950, когда появились сводное изложение В. В. Вагнера [6], первые заметки Г. Ф. Лаптева, открывающие новые подходы, особенно в части аналитич. аппарата, и работа Ш. Эресмана [7], положившая начало современной глобальной теории С. См. также *Вейля связность*, *Линейная связность*, *Риманова связность*, *Симплектическая связность*, *Эрмитова связность*.

Лит.: [1] Levi-Civita T., «Rend. circ. mat. Palermo», 1917, t. 2, p. 173—205; [2] Weyl H., Raum, Zeit, Materie,

5 Aufl., B., 1923; [3] Cartan E., «Ann. Soc. pol. math.», 1923, t. 2, p. 171—221; [4] его же, «Bull. Soc. math. de France», 1924 t. 52, p. 205—41; [5] его же, «Acta math.», 1926, t. 48, p. 1—42; [6] Вагнер В. В., «Тр. Семин. по вект. и тенз. анализу», 1950, в. 8, с. 11—72; [7] Ehresmann C., в кн.: Coll. de Topologie. Bruxelles, 1950, P., 1951, p. 29—55; [8] Лаптев Г. Ф., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 275—382; [9] Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, пер. с англ., М., 1960; [10] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [11] Лумисте Ю. Г., в кн.: Итоги науки. Сер. Математика, в. 21 — Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1971, с. 123—68.
Ю. Г. Лумисте.

СГУЩЕНИЯ ТОЧКА, накопления точка,— то же, что *предельная точка.* *М. И. Войцеховский.*

СДВИГ — аффинное преобразование плоскости, при к-ром каждая точка смещается по направлению оси Ox на расстояние, пропорциональное ее ординате. В декартовой системе координат С. задается соотношениями

$$x'=x+ky,\ y'=y,\ k\neq 0.$$

При С. сохраняются площади и ориентация.

С. пространства по направлению оси Ox задается соотношениями

$$x'=x+kz,\ y'=y,\ z'=z,\ k\neq 0.$$

При С. пространства сохраняются объемы и ориентация. *А. Б. Иванов.*

СДВИГА ОПЕРАТОР — оператор T_t, зависящий от параметра t и действующий на нек-ром множестве Φ отображений $\varphi: A\rightarrow E$ (где A — абелева полугруппа, E — множество) по формуле

$$T_t\varphi(\cdot)=\varphi(\cdot+t)$$

(говорят также, что T_t — оператор сдвига на t). В качестве A часто фигурируют $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ (тогда T_t — сдвиг в том или ином пространстве функций действительного переменного), $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{N}$ (тогда T_t — сдвиг в том или ином пространстве последовательностей). Множество E, а соответственно этому и множество Φ, обычно наделено нек-рой структурой (векторного, векторного топологического, нормированного, метрического, вероятностного пространства).

С. о. используется, в частности, в теории динамич. систем (см. *Сдвигов динамическая система*, *Бернулли автоморфизм*). Употребляется также термин «С. о. по траекториям дифференциальных уравнений» (см. *Коши оператор*). *В. М. Миллионщиков.*

СДВИГА ПАРАМЕТР — параметр θ, $\theta\in\Theta\subset R^k$, семейства функций $\{\varphi_\theta(\cdot)\}$, заданных на R^k по следующему правилу:

$$\varphi_\theta(\cdot)=\varphi(\cdot-\theta)\text{ для любого }\theta\in\Theta,$$

где $\varphi(\cdot)$ — нек-рая заданная функция на R^k.

Лит.: [1] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.
М. С. Никулин.

СДВИГИ ПОЛУГРУПП — преобразования полугрупп, удовлетворяющие специальным условиям: правым сдвигом полугруппы S наз. преобразование ρ такое, что для любых $x, y\in S$ имеет место $(xy)\rho=x(y\rho)$; левый сдвиг определяется симметричным образом, при этом ради удобства левые сдвиги чаще записывают как левые операторы. Таким образом, левый сдвиг полугруппы S — такое ее преобразование λ, что для любых $x, y\in S$ имеет место $\lambda(xy)=(\lambda x)y$. Соответственно последовательность выполнения двух левых сдвигов в произведении (см. *Преобразований полугруппа*) осуществляется справа налево. Произведение двух левых (правых) С. п. само будет левым (правым) С. п., так что множество $\Lambda(S)$ (соответственно $P(S)$) всех левых (правых) С. п. S будет подполугруппой симметрич. полугруппы $\mathcal{T}_S$. Для произвольного элемента $a\in S$ преобразование λ_a (ρ_a), заданное формулой $\lambda_a x=ax$ ($x\rho_a=xa$) является левым (правым) сдвигом, соответствующим элементу a. Он наз. внутренним левым (п р а в ы м) с д в и г о м. Множество $\Lambda_0(S)$ (соответственно $P_0(S)$) всех внутренних левых (правых) С. п. S есть левый идеал в $\Lambda(S)$ (правый идеал в $P(S)$).

Левый сдвиг λ и правый сдвиг ρ полугруппы S наз. с в я з а н н ы м и, если $x(\lambda y)=(x\rho)y$ для любых x, $y\in S$; в этом случае пару (λ, ρ) наз. б и с д в и г о м S. Для любого $a\in S$ пара (λ_a, ρ_a) есть бисдвиг; он наз. в н у т р е н н и м б и с д в и г о м, соответствующим элементу a. В полугруппах с единицей и только в них всякий бисдвиг внутренний. Множество $\mathrm{T}(S)$ всех бисдвигов полугруппы S есть подполугруппа декартова произведения $\Lambda(S)\times \mathrm{P}(S)$; она наз. с д в и г о в о й о б о л о ч к о й полугруппы S. Множество $\mathrm{T}_0(S)$ всех внутренних бисдвигов есть идеал в $\mathrm{T}(S)$; он наз. в н у т р е н н е й ч а с т ь ю $\mathrm{T}(S)$. Отображение $\tau: S\to \mathrm{T}_0(S)$, заданное формулой $\tau(a)=(\lambda_a, \rho_a)$, есть гомоморфизм S на $\mathrm{T}_0(S)$, называемый к а н о н и ч е с к и м. Полугруппа S наз. с л а б о р е д у к т и в н о й, если для любых $a, b\in S$ из того, что $ax=bx$ и $xa=xb$ для всех $x\in S$, следует $a=b$; т. е. канонич. гомоморфизм полугруппы S есть изоморфизм. Если S слабо редуктивна, то $\mathrm{T}(S)$ совпадает с идеализатором $\mathrm{T}_0(S)$ в $\Lambda(S)\times \mathrm{P}(S)$, т. е. с наибольшей подполугруппой из $\Lambda(S)\times \mathrm{P}(S)$, содержащей $\mathrm{T}_0(S)$ в качестве идеала.

С. п. и, в частности, сдвиговые оболочки играют существенную роль при изучении идеальных *расширений* полугрупп. Роль сдвиговой оболочки при этом в известной степени аналогична роли *голоморфа группы* в теории групп.

Лит.: [1] К л и ф ф о р д А., П р е с т о н Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [2] P e t r i c h M., Introduction to semigroups, Columbus, Ohio, 1973; [3] е г о ж е, «Semigroup Forum», 1970, v. 1, p. 283—360.

Л. Н. Шеврин.

СДВИГОВ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — динамическая система f^t (или, в иных обозначениях, $f(t, \cdot)$) на пространстве непрерывных функций $\varphi: \mathbb{R}\to S$ (S — метрич. пространство), наделенном к о м п а к т н о о т к р ы т о й т о п о л о г и е й (т. е. топологией равномерной сходимости на отрезках), заданная формулой

$$f^t\varphi=T_t\varphi,$$

где T_t — *сдвига оператор* на t, то есть

$$T_t\varphi(\cdot)=\varphi(\cdot+t).$$

Таким образом, траектория точки φ в С. д. с. есть множество всех сдвигов функции φ, т. е. всех функций вида $\varphi(t+\tau)$ переменного $\tau\in\mathbb{R}$, а замыкание этой траектории — множество всех функций вида

$$\tilde{\varphi}(\tau)=\lim_{k\to\infty}\varphi(t_k+\tau),$$

где предел равномерен на каждом отрезке. С. д. с. наделяется нормированными *инвариантными мерами*, существующими в силу теоремы Боголюбова — Крылова (инвариантные меры Боголюбова — Крылова сосредоточены на компактах).

С. д. с. используется в теории динамич. систем, главным образом — для построения примеров (при этом в качестве S обычно берут $\mathbb{R}$; п р и м е р М а р к о в а не строго эргодич. системы на компакте, каждая траектория к-рой всюду плотна, и др.), а также в теории неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где в качестве S берется обычно $\mathbb{R}^n$ или нек-рое пространство отображений $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (в теории линейных однородных неавтономных систем обычно берется $S=\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$).

См. также *Особые показатели, Центральные показатели.*

В. М. Миллионщиков.

СЕГМЕНТ — 1) С. н а п л о с к о с т и — плоская фигура, заключенная между кривой и ее хордой. Площадь С. круга (кругового сегмента) $S=2\sqrt{2hr-h^2}$, где r — радиус круга, h — высота С.

2) С. в пространстве — часть тела, ограниченная плоскостью и отсекаемой ею частью поверхности. Объем С. шара (шарового сегмента): $V=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$, где R — радиус шара, h — высота С. шара. Площадь кривой поверхности С. шара: $S=2\pi Rh$.

А. Б. Иванов.

СЕГМЕНТ — см. *Интервал и сегмент.*

СЕГРЕ ВЛОЖЕНИЕ — вложение $\varphi: P^n \times P^m \to P^N$ произведения проективных пространств $P^n \times P^m$ в проективное пространство P^N, где $N=nm+n+m$. Если $x=(u_0 \ldots u_n) \in P^n$, $y=(v_0 \ldots v_m) \in P^m$, а $w_{i,j}$, $i=0, \ldots, n$, $j=0, \ldots, m$, — однородные координаты в P^N, то отображение определяется формулами

$$\varphi(x \times y)=(w_{i,j}) \in P^N,$$

где $w_{ij}=u_iv_j$. Отображение φ корректно определено и является замкнутым вложением. Образ С. в. $\varphi(P^n \times P^m)$ наз. многообразием Сегре. Случай $n=m=1$ имеет простой геометрич. смысл: $\varphi(P^1 \times P^1)$ — это невырожденная квадрика в P^3 с уравнением $w_{11}w_{00}=w_{01}w_{10}$. Образы $\varphi(x \times P^1)$ и $\varphi(P^1 \times y)$ дают два семейства прямолинейных образующих на квадрике.

Названо в честь Б. Сегре (B. Segre).

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Вал. С. Куликов.

СЕДЛО — тип расположения траекторий автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\dot{x}=f(x),\ x \in \mathbb{R}^2,\ f: G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (*)$$

$f \in C(G)$, G — область единственности, в окрестности особой точки (*равновесия положения*) x_0. Этот тип характеризуется следующим образом. Существует окрестность U точки x_0 такая, что для всех траекторий системы, начинающихся в $U \setminus \{x_0\}$, как положительные, так и отрицательные полутраектории являются уходящими (с течением времени покидают любой компакт $V \subset U$). Исключение составляют лишь четыре траектории (сепаратрисы седла). Для двух из них отрицательные полутраектории являются уходящими, а положительные полутраектории примыкают к точке x_0, для двух других — наоборот. Первые две сепаратрисы наз. устойчивыми, две вторые — неустойчивыми. Устойчивые сепаратрисы, будучи дополнены точкой x_0, образуют проходящую через x_0 гладкую кривую — устойчивое многообразие седла. Неустойчивые сепаратрисы вместе с точкой x_0 образуют гладкое неустойчивое многообразие седла. С. при этом наз. и сама точка x_0.

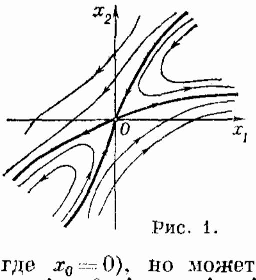


Рис. 1.

Седло x_0 неустойчиво по Ляпунову. Его индекс Пуанкаре равен -1. Для системы (*) класса C^1 ($f \in C^1(G)$) с ненулевой матрицей $A=f'(x_0)$ точка покоя x_0 является С. в случае, когда собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A удовлетворяют условию $\lambda_1\lambda_2<0$ (простое С., рис. 1, где $x_0=0$), но может быть С. и в тех случаях, когда $\lambda_1=0\neq\lambda_2$ или $\lambda_1=\lambda_2=0$. В любом из этих случаев сепаратрисы С. касаются в точке x_0 направлений, определяемых собственными векторами матрицы A.

Если система (*) линейна ($f(x)=A(x-x_0)$, A — постоянная матрица с собственными значениями λ_1, λ_2), то для нее точка x_0 является С. лишь при условии $\lambda_1\lambda_2<0$. Сепаратрисы седла x_0 в этом случае прямолинейны, а все остальные траектории (отличные от точки

x_0) суть аффинные образы гипербол вида $x_2 = c|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (рис. 2).

Термин «С.» применяют и для наименования любого расположения траекторий системы (*) в окрестности U изолированной точки покоя x_0, при к-ром из $U \setminus \{x_0\}$ к точке x_0 примыкает лишь конечное число m ($\geqslant 2$) траекторий, и каждая из них, будучи дополнена точкой x_0, касается в ней определенного направления (m-сепаратрисное С.). С. наз. и нек-рые типы точек покоя автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $n \geqslant 3$.

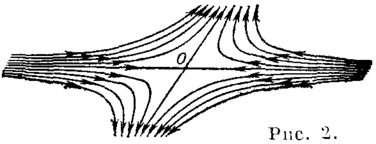


Рис. 2.

Лит. см. при ст. *Особая точка* дифференциального уравнения. *А. Ф. Андреев.*

СЕДЛО В БЕСКОНЕЧНОСТИ, несобственная седловая точка,— тип расположения траекторий динамич. системы. Говорят, что динамич. система f^t (или, иначе, $f(\ ,p)$, см. [1]), заданная на $\mathbb{R}^n$, имеет С. в б., если найдутся точки x_k и числа $\tau_k < 0$, $\theta_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что последовательности

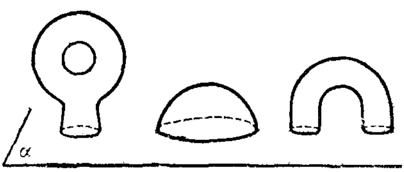
$$\{f^{\tau_k} x_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \ \{f^{\theta_k} x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

— сходящиеся, а $|x_k| \to \infty$ при $k \to \infty$. Это определение В. В. Немыцкого было обобщено М. В. Бебутовым на динамич. системы, заданные на произвольном метрич. пространстве; при этом требование «$|x_k| \to \infty$ при $k \to \infty$» заменяется требованием: «последовательность $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ не содержит ни одной сходящейся подпоследовательности».

Отсутствие С. в б.— необходимое условие глобальной выпрямляемости динамич. системы (см. *Полная неустойчивость*). Для того чтобы вполне неустойчивая динамич. система, заданная на метрич. пространстве, не имела С. в б., необходимо и достаточно, чтобы факторпространство динамич. системы было хаусдорфовым.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М., 1949. *В. М. Миллионщиков.*

СЕДЛОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — обобщение *поверхности отрицательной кривизны*. Пусть M — поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, определяемая погружением $f: W \to E^3$ двумерного многообразия W в E^3. Плоскость α отсекает от M горбушку, если среди компонент прообраза множества $M \setminus \alpha$ в W имеется компонента с компактным замыканием. Часть поверхности M, соответствующая этой компоненте, наз. горбушкой (см. рис.). Поверхность M наз.



С. п., если от нее нельзя отсечь горбушки никакой плоскостью. Примерами С. п. являются однополостный гиперболоид, гиперболич. параболоид, линейчатые поверхности. Для того чтобы дважды непрерывно дифференцируемая поверхность была С. п., необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке поверхности ее гауссова кривизна была неположительна. Поверхность, все точки к-рой *седловые точки*, является С. п.

С. п., ограниченная спрямляемым контуром, по своей внутренней метрике, индуцированной метрикой пространства, является двумерным многообразием неположительной кривизны. На класс С. п. можно обобщить ряд свойств поверхностей отрицательной кривизны, однако эти поверхности не образуют, по-видимому, столь же естественного класса поверхностей, как выпуклые поверхности.

Лит.: [1] Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е., Введение в дифференциальную геометрию «в целом», М., 1973; [2] Шефель С. З., Исследования по геометрии седловых поверхностей, Новосиб., 1963.

Д. Д. Соколов.

СЕДЛОВАЯ ТОЧКА — точка гладкой поверхности, вблизи к-рой поверхность лежит по разные стороны от своей касательной плоскости. Если С. т. является точкой двукратно непрерывно дифференцируемой поверхности, то ее гауссова кривизна в этой точке неположительна. С. т. является обобщением гиперболич. точки.

Д. Д. Соколов.

СЕДЛОВАЯ ТОЧКА (в теории игр) функции F, заданной на декартовом произведении двух множеств $X \times Y$,— точка $(x^*, y^*) \in X \times Y$, для к-рой

$$F(x^*, y^*) = \max_{x \in X} F(x, y^*) = \min_{y \in Y} F(x^*, y).$$

Наличие С. т. у функции F равносильно существованию оптимальных стратегий у игроков в *антагонистической игре* $\Gamma = (X, Y, F)$.

В. Л. Крепс.

СЕДЛО-УЗЕЛ — тип расположения траекторий автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\dot{x} = f(x), \ x \in \mathbb{R}^2, \ f: G \to \mathbb{R}^2, \qquad (*)$$

$f \in C(G)$, G — область единственности, в окрестности особой точки x_0. Этот тип характеризуется следующим образом: нек-рая окрестность U точки x_0 разбивается примыкающими к x_0 полутраекториями (сепаратрисами С.-у.) на m криволинейных *секторов* $(3 \leqslant m < +\infty)$, из к-рых h, $2 \leqslant h < m$, являются седловыми, а остальные — открытыми узловыми; каждая примыкающая к x_0 полутраектория, будучи дополнена точкой x_0, касается в ней определенного луча. С.-у. наз. при этом и сама точка x_0.

С.-у. неустойчив по Ляпунову. Его индекс Пуанкаре равен $1-(h/2)$. Если $f \in C^1(G)$, а матрица $A = f'(x_0) \neq 0$, то особая точка x_0 может быть для системы (*) С.-у. лишь в случаях, когда собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\text{а) } \lambda_1 = 0 \neq \lambda_2; \text{ б) } \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

В любом из этих случаев точка x_0 может быть для системы (*) также *седлом* или *узлом*, а в случае б) и точкой иного типа. Если же она является С.-у., то для

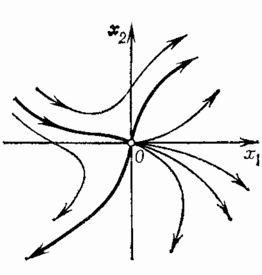


Рис. 1.

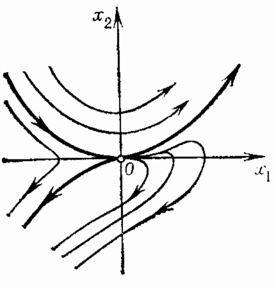


Рис. 2.

нее $m=3$, $h=2$, а все примыкающие к x_0 полутраектории системы касаются в этой точке направлений, определяемых собственными векторами матрицы A (см. рис. 1 и 2, где жирными линиями изображены сепаратрисы С.-у. $x_0=0$, а стрелки указывают направление движения по траекториям системы с возрастанием t; оно может быть и противоположным).

Лит.: [1] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А., Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, М., 1976. *А. Ф. Андреев.*

СЕКАНС — одна из *тригонометрических функций:*

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x},$$

другое обозначение $\operatorname{sc} x$. Область определения — вся числовая прямая за исключением точек, абсциссы к-рых

$$x = \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

С. — неограниченная четная периодическая (с периодом 2π) функция. Производная С.:

$$(\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x.$$

Интеграл от С.:

$$\int \sec x\, dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

С. разлагается в ряд

$$\sec x = \frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} - \frac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - x^2} - \ldots$$

Ю. А. Горьков.

СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство (условие Больцано — Вейерштрасса), любая бесконечная последовательность точек к-рого содержит сходящуюся подпоследовательность. В классе T_1-пространств С. к. п. является счетно компактным пространством. Если к тому же пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, то из его счетной компактности следует секвенциальная компактность. С. к. п. не обязательно является бикомпактным пространством: таково, напр., множество всех порядковых чисел, меньших первого несчетного числа, наделенное топологией, база к-рой — всевозможные интервалы. *М. И. Войцеховский.*

СЕКВЕНЦИАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X такое, что из $A \subset X$ и $A \neq [A]$ (т. е. множество A незамкнуто) следует существование последовательности x_k, $k=1, 2, \ldots$, точек из A, сходящихся к нек-рой точке $[A] \setminus A$. Если из $x \in [A] \subset X$ всегда следует, что существует последовательность x_k точек из A, сходящаяся к x, то X наз. пространством Фреше — Урысона. *М. И. Войцеховский.*

СЕКВЕНЦИЙ ИСЧИСЛЕНИЕ — одна из формулировок *предикатов исчисления.* Благодаря удобной форме вывода С. и. находит широкое применение в *доказательств теории*, основаниях математики, при автоматич. поиске вывода. С. и. было предложено Г. Генценом в 1934 (см. [1]). Ниже приводится один из вариантов классич. исчисления предикатов в форме С. и.

Набором формул наз. конечное множество формул нек-рого логико-математического языка Ω, причем в этом множестве допускаются повторения формул. Порядок формул в наборе Γ несуществен, но для каждой формулы указано, в скольких экземплярах она присутствует в Γ. Набор формул может быть и пустым. Набор $\varphi\Gamma$ получается из Γ присоединением одного экземпляра формулы φ. Секвенцией наз. фигура вида $\Gamma \to \Delta$, где Γ и Δ — наборы формул, Γ наз. антецедентом секвенции, а Δ — ее сукцедентом.

Аксиомы С. и. имеют вид $\varphi\Gamma \to \Delta\varphi$, где Γ, Δ — произвольные наборы формул, а φ — произвольная атомарная (элементарная) формула. Правила вывода исчисления устроены очень симметрично и вводят логич. связки в антецедент или сукцедент секвенции:

$$(\wedge \to)\ \frac{\varphi\psi\Gamma \to \Delta}{(\varphi \wedge \psi)\,\Gamma \to \Delta}\ ;\ (\to \wedge)\ \frac{\Gamma \to \Delta\varphi;\ \Gamma \to \Delta\psi}{\Gamma \to \Delta\,(\varphi \wedge \psi)}\ ;$$

$$(\vee \to)\ \frac{\varphi\Gamma \to \Delta;\ \psi\Gamma \to \Delta}{(\varphi \vee \psi)\,\Gamma \to \Delta}\ ;\ (\to \vee)\ \frac{\Gamma \to \Delta\varphi\psi}{\Gamma \to \Delta\,(\varphi \vee \psi)}\ ;$$

$$(\supset \to)\ \frac{\Gamma \to \Delta\varphi;\ \psi\Gamma \to \Delta}{(\varphi \supset \psi)\,\Gamma \to \Delta}\ ;\ (\to \supset)\ \frac{\varphi\Gamma \to \Delta\psi}{\Gamma \to \Delta\,(\varphi \supset \psi)}\ ;$$

$$(\neg \to)\ \frac{\Gamma \to \Delta\varphi}{\neg\varphi\Gamma \to \Delta}\ ;\ (\to \neg)\ \frac{\varphi\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta\neg\varphi}\ ;$$

$$(\forall \to)\ \frac{\forall x\varphi\ \varphi\,(x \mid t)\ \Gamma \to \Delta}{\forall x\varphi\Gamma \to \Delta}\ ;\ (\to \forall)\ \frac{\Gamma \to \Delta\varphi}{\Gamma \to \Delta\forall x\varphi\,(y|x)}\ ;$$

$$(\exists \to)\ \frac{\varphi\Gamma \to \Delta}{\exists x\varphi\,(y \mid x)\ \Gamma \to \Delta}\ ;\ (\to \exists)\ \frac{\Gamma \to \Delta\varphi\,(x \mid t)\ \exists x\varphi}{\Gamma \to \Delta\exists x\varphi}\ .$$

Здесь в правилах $(\to \forall)$ и $(\exists \to)$ предполагается, что переменная y не есть параметр Γ и Δ, а x не есть параметр φ.

С. и. эквивалентно обычной форме исчисления предикатов в том смысле, что формула φ выводима в исчислении предикатов тогда и только тогда, когда секвенция $\to \varphi$ выводима в С. и. Для доказательства этого утверждения существенна основная теорема Генцена (или теорема о нормализации), к-рая для С. и. может быть сформулирована следующим образом: если в С. и. выводимы секвенции $\Gamma \to \Delta\varphi$ и $\varphi\Gamma \to \Delta$, то выводима и секвенция $\Gamma \to \Delta$. Правило вывода $\frac{\Gamma \to \Delta\varphi;\ \varphi\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta}$ наз. правилом сечения, и теорема о нормализации утверждает, таким образом, что правило сечения допустимо в С. и. или что добавление правила сечения не изменяет объема выводимых секвенций. Ввиду этого теорему Генцена наз. также теоремой об устранении сечения.

Симметричное устройство С. и. в значительной мере облегчает изучение его свойств, поэтому в теории доказательств важное место занимает поиск секвенциальных вариантов прикладных исчислений: арифметики, анализа, теории типов и доказательство для таких исчислений теоремы об устранении сечения в той или иной форме (см. [2], [3]). Найдены секвенциальные варианты и для многих исчислений, основанных на неклассич. логиках — интуиционистской, модальных и релевантных логиках и др. (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Математическая теория логического вывода. Сб. переводов, М., 1967; [2] Такеути Г., Теория доказательств, пер. с англ., М., 1978; [3] Драгалин А. Г., Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979; [4] Фейс Р., Модальная логика, пер. [с англ.], М., 1974.

А. Г. Драгалин.

СЕКВЕНЦИЯ — выражение вида

$$A_1,\ \ldots,\ A_n \to B_1,\ \ldots,\ B_m,$$

где $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ — формулы. Читается: «при допущениях $A_1, \ldots, A_n$ имеет место B_1 или B_2, или ..., или B_m». Часть С., стоящая слева от стрелки, наз. антецедентом; часть С., стоящая справа от стрелки, наз. сукцедентом (консеквентом). Формула $(A_1 \& \ldots \& A_n) \supset (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$ (пустая конъюнкция обозначает ложь, пустая дизъюнкция — истину) наз. формульным образом С.

Г. Е. Минц.

СЕКТОР — 1) С. на плоскости — плоская фигура, ограниченная двумя полупрямыми, исходящими из внутренней точки фигуры, и дугой контура. С. круга (круговой сектор) — фигура, ограниченная двумя радиусами и дугой, на к-рую они опираются. Площадь С. круга: $S = lr/2$, где r — радиус круга, l — длина дуги.

2) С. в пространстве — часть тела, ограниченная конич. поверхностью, вершина к-рой нахо-

дится внутри тела, и вырезаемой частью поверхности тела. Шаровой сектор — тело, возникающее при вращении сектора большого круга вокруг одного из радиусов (шаровой С. 1-го рода) или вокруг диаметра, не пересекающего его дуги (шаровой С. 2-го рода). Объем шарового сектора: $V = {}^1/_3 \pi R^2 h$, где R — радиус сферы, h — проекция хорды, стягивающей дугу С. на ось вращения. *БСЭ-3.*

СЕКТОР в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 1) С. — открытый криволинейный сектор S с вершиной в изолированной особой точке O *автономной системы* обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\dot{x} = f(x), \ x \in \mathbb{R}^2, \qquad (*)$$

$f \in C(G)$, G — область единственности, удовлетворяющая следующим четырем условиям. 1) Каждая из боковых стенок S является TO-кривой системы (*) (полутраекторией, примыкающей при $|t| \to +\infty$ к точке O, касаясь в ней определенного направления). 2) Задней стенкой S является простая параметрич. дуга (гомеоморфный образ отрезка). 3) В $\bar{S} \setminus \{0\}$ нет особых точек системы (*). Четвертым условием является

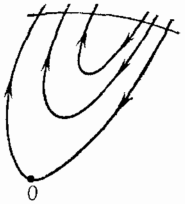


Рис. 1.

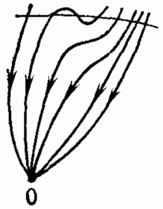


Рис. 2.

Рис. 3.

одно из трех следующих. 4а) Все траектории системы (*), начинающиеся в S, покидают этот сектор как с возрастанием, так и с убыванием t; такой С. наз. гиперболическим, или седловым (рис. 1). 4б) Все траектории системы (*), начинающиеся в S в достаточной близости от O, с возрастанием t, не выходя из S, примыкают к точке O, а с убыванием t покидают S (или наоборот); такой С. наз. параболическим, или открытым узловым (рис. 2). 4в) Все траектории системы (*), начинающиеся в S в достаточной близости от O, как с возрастанием, так и с убыванием t, не выходя из S, примыкают к точке O, образуя вместе с O замкнутые кривые (петли), причем из любых двух петель одна охватывает другую; такой С. наз. эллиптическим, или замкнутым узловым (рис. 3).

Для аналитич. системы (*), имеющей TO-кривые, круг Q достаточно малого радиуса с центром в точке O всегда может быть разбит на конечное число С. описанного вида: h гиперболических, p параболических и e эллиптических (см. [1], [2]). Выявить все эти С., определить тип каждого из них и установить для них закон следования друг за другом при обходе точки O по границе круга Q (и тем самым выяснить топологич. структуру расположения траекторий системы (*) в окрестности точки O) можно, напр., с помощью *Фроммера метода*. Для чисел h, p и e имеются априорные оценки сверху через порядок малости нормы $\|f(x)\|$ при $x \to O$ (см. [1], [4], [5]).

Иногда (см., напр., [3]) понятие «С.» определяется свободнее: в гиперболич. и параболич. С. допускается наличие петель, покрывающих множество, не имеющее предельных точек на задней стенке С., а в эллиптич. С. — наличие петель, не охватывающих друг друга.

При этом первая фраза предыдущего абзаца сохраняет силу и для систем (*) общего вида, а индекс Пуанкаре особой точки O системы (*) выражается формулой Бендиксона:

$$i = 1 + (e - h)/2.$$

Лит.: [1] Bendixson I., «Acta math.», 1901, v. 24, p. 1—88; [2] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [3] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [4] Берлинский А. Н., «Докл. АН СССР», 1969, т. 187, № 3, с. 502—05; [5] Сагалович М. Е., «Дифференц. уравнения», 1979, т. 15, № 2, с. 360—62.

2) Сектор Фроммера, нормальная область Фроммера,— круговой С.

$$N = \{(r, \varphi) \mid 0 < r \leqslant \delta, \ |\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon\}$$

с вершиной в изолированной особой точке $O\,(x = x_0)$ системы (*) (см. п. 1), боковыми стенками OA и OB, $\varphi_A = \varphi_0 - \varepsilon$, $\varphi_B = \varphi_0 + \varepsilon$, и задней стенкой AB (здесь r, φ — полярные координаты на x-плоскости с полюсом в точке O, δ, ε, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$), удовлетворяющий следующим условиям:

(1) $\varphi = \varphi_0$ — исключительное направление системы (*) в точке O, т. е. существует последовательность $x_k = x_0 + (r_k \cos \varphi_k, \ r_k \sin \varphi_k)$, $k = 1, \ 2, \ \ldots, \ r_k \to 0, \ \varphi_k \to \varphi_0$ при $k \to +\infty$, такая, что если $\alpha\,(x) = (f\,(x) \ \widehat{,} \ x - x_0)$, то $\operatorname{tg} \alpha\,(x_k) \to 0$ при $k \to +\infty$, и такое направление единственно в N,

(2) $\operatorname{tg} \alpha\,(x) \neq 0$ для любого $x \in OA \cup OB$,

(3) $\alpha\,(x) \neq \pi/2$ для любого $x \in N$.

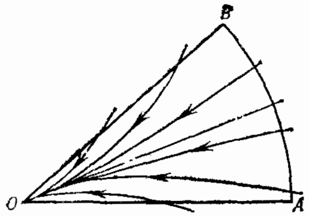


Рис. 4.

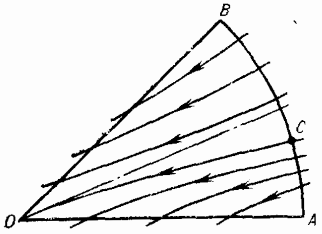


Рис. 5.

Пусть угол $\alpha\,(x)$ отсчитывается от вектора $x - x_0$ и имеет знак направления отсчета. Сектор N называется: нормальной областью Фроммера 1-го типа (обозначение N_1), если $\operatorname{tg} \alpha\,(x) < 0$ при $x \in OA$, $\operatorname{tg} \alpha\,(x) > 0$ при $x \in OB$;

нормальной областью 2-го типа (N_2), если $\operatorname{tg} \alpha\,(x) > 0$ на OA, $\operatorname{tg} \alpha\,(x) < 0$ на OB;

нормальной областью 3-го типа (N_3), если $\operatorname{tg} \alpha\,(x)$ на OA и на OB имеет один и тот же знак. Эти области были введены М. Фроммером [1].

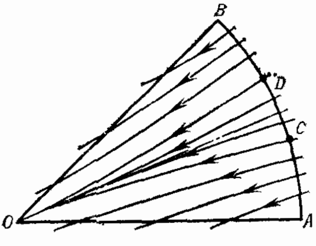


Рис. 6.

Траектории системы (*) в нормальных областях Фроммера ведут себя следующим образом. Область N_1 покрыта O-кривыми системы (рис. 4). Они образуют открытый пучок — семейство одноименных O-кривых, непрерывно зависящее от параметра, пробегающего открытый промежуток. В области N_2 существует либо (а) единственная O-кривая (рис. 5), либо (б) бесконечно много O-кривых (замкнутый пучок, рис. 6). В области N_3 либо (а) существует бесконечно много O-кривых (полуоткрытый пучок, рис. 7), либо (б) не существует O-кривых (рис. 8). В нормальной области N любого типа O-кривые при $t \to +\infty$ (или $t \to -\infty$)

примыкают к точке O по направлению $\varphi=\varphi_0$, а с убыванием (возрастанием) t покидают область N; все остальные траектории покидают область N как с возрастанием, так и с убыванием t. Задачи различения случаев (а) и (б) для областей N_2 и N_3 наз. соответственно 1-й и 2-й проблемами различения Фроммера.

Если система (*) имеет в точке O конечное число (>0) исключительных направлений, каждое из них

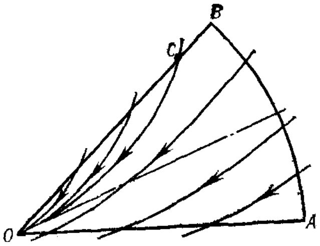


Рис. 7.

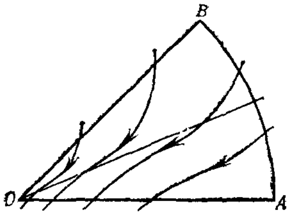


Рис. 8.

можно заключить в нормальную область N, и для всех областей N_2 и N_3 будут решены проблемы различения Фроммера, то топологич. структура расположения траекторий системы в окрестности точки O будет выяснена полностью, ибо секторы с вершиной в O, расположенные между нормальными областями, в достаточной близости от точки O полностью пересекаются траекториями системы (как на рис. 8). Такая ситуация имеет место, напр., в случае, когда

$$f(x)=P(x)+p(x),\quad P=(P_1,\ P_2),$$

P_1, P_2 — формы степени $n\geqslant 1$ от компонент x_1, x_2 вектора x,

$$p(x)=o(\|x\|^n)\ \text{при}\ \|x\|\to 0,$$

причем выполняются следующие условия: форма $x_1P_2(x)-x_2P_1(x)$ имеет действительные линейные множители; формы P_1, P_2 не имеют общих действительных линейных множителей; $p\in C^{n+1}$. При этом в каждой из областей N_2, N_3 будет иметь место расположение (а).

Аналоги нормальных областей Фроммера введены и для систем вида (*) порядка $\geqslant 3$.

Лит.: [1] Frommer M., «Math. Ann.», 1928, Bd 99, S. 222—72; [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [3] Андреев А. Ф., *в сб.:* Тр. Четвертого Всесоюзного матем. съезда, т. 2, Л., 1964, с. 394—402.

А. Ф. Андреев.

СЕКУНДА — единица измерения плоских углов, равная $^1/_{3600}$ части градуса или $^1/_{60}$ части минуты; обозначается знаком ″. Метрическая С.—$1/10^6$ часть прямого угла; обозначается знаком ^{cc}.

СЕКУЩИХ МЕТОД — метод вычисления нулей непрерывных функций. Пусть в $[a, b]$ содержится нуль α непрерывной функции $f(x)$; x_0, x_1 — различные точки этого отрезка. Итерационная формула С. м.:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{(f(x_{k-1})-f(x_k))\,/\,(x_{k-1}-x_k)},\quad k=1,\ 2,\ \ldots \qquad (1)$$

Если последовательность $\{x_k\}$ сходится, то обязательно к нулю функции $f(x)$. При наличии у f непрерывной производной на $[a, b]$ локальная сходимость С. м. к простому корню будет сверхлинейной. Если усилить требования к гладкости f, можно указать точный порядок (локальной) сходимости [1]. Именно, для $f\in C^2[a, b]$ и α такого, что $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$, $f''(\alpha)\neq 0$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p}=k.$$

Здесь $p=(\sqrt{5}+1)/2\approx 1{,}618$, $k=|f''(\alpha)/2f'(\alpha)|$.

Сверхлинейная сходимость С. м. для гладких функций — очень важное обстоятельство, поскольку вычисления производных не требуется и на каждом шаге вычисляется лишь одно новое значение функции. Так, для сравнения, в методе Ньютона, порядок (локальной) сходимости к-рого равен 2, на каждом шаге требуется вычисление значения функции и ее производной, что, как правило, не менее трудоемко, чем вычисление двух значений функции.

Поскольку сходимость С. м. зависит от гладкости функции и выбора начальных приближений, в стандартных машинных подпрограммах вычисления нулей непрерывных функций этот метод комбинируется с каким-либо методом, обладающим гарантированной сходимостью, напр. методом деления отрезка пополам. На каждом шаге такого комбинированного метода корень α локализован в отрезке $[a_k, b_k]$, на концах к-рого функция меняет знак (предполагается, что это условие выполнено для исходного отрезка $[a, b]$). В соответствии с нек-рым тестом очередное приближение выбирается либо по формуле (1), либо по формуле деления пополам. При этом если $f(x)$ — гладкая функция, то итерации, начиная с нек-рого номера k_0, автоматически идут по С. м. Возможна еще более сложная комбинация методов, напр. алгоритм ZEROIN (см. [2]), в к-ром, кроме упомянутых выше, используется еще метод обратной квадратичной интерполяции. Иногда С. м. называют метод с итерационной формулой

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{(f(x_k)-f(x_0))/(x_k-x_0)},\quad k=1,\ 2,\ \ldots \qquad (2)$$

Другое название метода (2) — **метод ложного положения**, или regula falsi. Такой метод сходится лишь линейно.

При обобщении С. м. на случай системы уравнений возможен двоякий взгляд на итерационную формулу (1). Можно считать, что она получена из формулы метода Ньютона дискретной аппроксимацией производной. Другая возможность — считать, что для $f(x)$ произведена линейная интерполяция по точкам $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ и $(x_k, f(x_k))$ и за x_{k+1} взят нуль линейной интерполянты. Обе интерпретации позволяют получить большое количество многомерных аналогов С. м.; нек-рые из них (но далеко не все) имеют тот же порядок (локальной) сходимости $p=(1+\sqrt{5})/2$ (см. [3]).

Лит.: [1] Brent R. P., Algorithms for minimization without derivatives, Englewood cliffs (N. J.), 1973; [2] Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К., Машинные методы математических вычислений, пер. с англ., М., 1980; [3] Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975.

Х. Д. Икрамов.

СЕКЦИОННАЯ КРИВИЗНА — *риманова кривизна* дифференцируемого риманова многообразия M в точке p в направлении двумерной плоскости α (в направлении бивектора, определяющего плоскость α в точке p многообразия M).

Л. А. Сидоров.

СЕЛЬБЕРГА РЕШЕТО, **Сельберга метод**, — специальный и в то же время достаточно универсальный *решета метод*, созданный А. Сельбергом [1]. С. р. позволяет хорошо оценивать сверху просеивающую функцию $S(A;\ P,\ z)$, обозначающую количество элементов конечного множества A целых чисел, к-рые не делятся на простые числа $p<z$ и принадлежат нек-рому множеству P простых чисел.

Пусть $P(z)=\prod_{p<z;\ p\in P}p$. Метод Сельберга основан на очевидном неравенстве

$$S(A;\ P,\ z)\leqslant\sum_{a\in A}\Big(\sum_{d|a;\ d|P(z)}\lambda_d\Big)^2, \qquad (*)$$

к-рое верно при $\lambda_1=1$ для произвольных действительных чисел λ_d $(d\geqslant 2)$. Идея Сельберга состоит в том, чтобы, положив $\lambda_d=0$ для $d\geqslant z$, минимизировать правую часть неравенства (*) путем надлежащего выбора оставшихся чисел $\lambda_d\,(2\leqslant d<z)$.

В комбинации с другими методами решета С. р. позволяет получать оценки снизу, особенно сильные при использовании весовых функций.

Лит.: [1] Selberg A., «Norske Vid. Selsk. Forh.», 1947, Bd 19, № 18, p. 64—67; [2] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [3] Halberstam H., Richert H., Sieve methods, L.— [a. o.], 1974.

Б. М. Бредихин.

СЕМАНТИКА в математической логике — исследование интерпретаций *логического исчисления*, формальной аксиоматич. теории; изучение смысла и значения конструкций формализованного языка теории, способа понимания его логич. связок и формул. С. уделяет внимание возможности точного описания и определения таких понятий, как «истина», «определимость», «обозначение», по крайней мере применительно к точно описанным языкам. В несколько более узком смысле под С. формализованного языка понимают систему соглашений, определяющих понимание формул языка, задающих условия истинности этих формул.

С. логич. связок в классической и интуиционистской логике носит экстенсиональный характер, т. е. истинность сложного высказывания определяется только характером истинности составляющих его высказываний. В иных классич. логиках, напр. релевантных, может учитываться и смысловое содержание понятий (такие логики наз. интенсиональными). В такого рода логиках, напр., не обязательно, чтобы все истинные высказывания были эквивалентны.

Построение четкой С. достаточно сложных формализованных языков типа языков *аксиоматической теории множеств* является трудной проблемой. Это связано по существу с тем, что процесс абстрагирования в математике является весьма сложным и многоступенчатым с привлечением таких глубоких и неочевидных абстракций, как *абстракция актуальной бесконечности* или *абстракция потенциальной осуществимости*. В результате объем объектов исследования в математике, способы обращения с этими объектами и способы доказательства утверждений относительно таких объектов, как множества произвольной природы, становятся весьма неопределенными. При неосторожном обращении с принципами доказательства в рамках теории возникают *антиномии*, напр. парадокс Рассела в теории множеств. В такой ситуации приходится отказываться от построения исчерпывающей и интуитивно убедительной С. языка и ограничиваться формулировкой нек-рых семантич. соглашений. При формализации теории при этом стремятся, чтобы правила вывода полученного исчисления были корректны по отношению к этим соглашениям, т. е. при применении к верным формулам вновь давали верные формулы. Полученная формальная система может уже изучаться в рамках нек-рой *метатеории* с более ясной С.

Часто семантич. понятия для нек-рого языка могут быть точно сформулированы в рамках более богатого языка, играющего для первого роль *метаязыка*. Напр., средствами теории множеств можно дать строгое математич. определение (классической) истинности формулы данного языка 1-го порядка на алгебраич. системе. Это понятие является основным в *моделей теории*. С другой стороны, как показал А. Тарский (A. Tarski, 1936), для достаточно богатых теорий их истинность не может быть выражена на языке самой теории.

Широко изучаются С. неклассич. теорий, напр. математич. теорий, развиваемых в рамках *интуиционизма*. Роль моделей в таких исследованиях играют алгебраич. структуры, учитывающие неклассич. характер понимания логич. связок. Таковы, напр., *Крипке мо-*

дели, реализуемость по Клини, *ступенчатая семантическая система* А. А. Маркова.

Лит.: [1] Карнап Р., Значение и необходимость пер. с англ., М., 1959; [2] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [4] Драгалин А. Г., Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979; [5] Фейс Р., Модальная логика, пер. с англ., М., 1974.

А. Г. Драгалин.

СЕМИИНВАРИАНТ — 1) С.— то же, что *полуинвариант*. 2) С.— одна из числовых характеристик случайных величин, родственная понятию *момента* старшего порядка. Если $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ — случайный вектор, $\varphi_\xi(t)=\mathsf{E}e^{i(t, \xi)}$ — его характеристич. функция, $t=(t_1, \ldots, t_k)$, $t_i\in R$,

$$(t, \xi)=\sum_{i=1}^{k} t_i\xi_i$$

и для нек-рого $n\geqslant 1$ моменты $\mathsf{E}|\xi_i|^n<\infty$, $i=1, \ldots, k$, то существуют (смешанные) моменты

$$m_\xi^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)}=\mathsf{E}\xi_1^{\nu_1}\ldots\xi_k^{\nu_k}$$

для всех неотрицательных целочисленных $\nu_1, \ldots, \nu_k$ таких, что $\nu_1+\ldots+\nu_k\leqslant n$. Тогда

$$\varphi_\xi(t)=\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_k\leqslant n}\frac{i^{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\nu_1!\ldots\nu_k!}m_\xi^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)}\times$$
$$\times t_1^{\nu_1}\ldots t_k^{\nu_k}+o(|t|^n),$$

где $|t|=|t_1|+\ldots+|t_k|$ и для достаточно малых $|t|$ главное значение $\ln\varphi_\xi(t)$ представимо по формуле Тейлора в виде

$$\ln\varphi_\xi(t)=\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_k\leqslant n}\frac{i^{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\nu_1!\ldots\nu_k!}s_\xi^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)}\times$$
$$\times t_1^{\nu_1}\ldots t_k^{\nu_k}+o(|t|^n),$$

где коэффициенты $s_\xi^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)}$ наз. (**смешанными**) **семиинвариантами**, или **кумулянтами**, порядка $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ вектора $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Для независимых случайных векторов $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ и $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_k)$

$$s_{\xi+\eta}^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)}=s_\xi^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)}+s_\eta^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)},$$

то есть С. суммы независимых случайных векторов есть сумма С. Именно это и послужило причиной термина «семиинвариант», отражающего свойство аддитивности для случая независимых величин (но это свойство уже, вообще говоря, не верно для зависимых величин).

Между моментами и С. справедливы следующие формулы связи:

$$m_\xi^{(\nu)}=\sum{}^{*}\frac{1}{q!}\frac{\nu!}{\lambda^{(1)}!\ldots\lambda^{(q)}!}\prod_{p=1}^{q}s_\xi^{(\lambda^{(p)})},$$

$$s_\xi^{(\nu)}=\sum{}^{*}\frac{(-1)^{q-1}}{q}\frac{\nu!}{\lambda^{(1)}!\ldots\lambda^{(q)}!}\prod_{p=1}^{q}m_\xi^{(\lambda^{(p)})},$$

где $\sum^*$ означает суммирование по всем упорядоченным наборам целых неотрицательных векторов $\lambda^{(p)}$, $|\lambda^{(p)}|>0$, дающих в сумме вектор ν. В частности, если ξ — случайная величина ($k=1$), $m_n=m_\xi^{(n)}=\mathsf{E}\xi^n$, $s_n=s_\xi^{(n)}$, то

$$m_1=s_1,$$
$$m_2=s_2+s_1^2,$$
$$m_3=s_3+3s_1s_2+s_1^3,$$
$$m_4=s_4+3s_2^2+4s_1s_3+6s_1^2s_2+s_1^4,$$

и

$$s_1=m_1\ (=\mathsf{E}\xi),$$
$$s_2=m_2-m_1^2(=\mathsf{D}\,\xi),$$
$$s_3=m_3-3m_1m_2+2m_1^3,$$
$$s_4=m_4-3m_2^2-4m_1m_3+12m_1^2m_2-6m_1^4.$$

Лит.: [1] Леонов В. П., Ширяев А. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 342—55.

А. Н. Ширяев.

СЕМИМАРТИНГАЛ — стохастический процесс, представимый в виде суммы локального мартингала и процесса локально ограниченной вариации. При формальном определении С. исходят из допущения, что все рассмотрения ведутся на стохастич. базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$, где $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Стохастич. процесс $X=(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ наз. семимартингалом, если его траектории непрерывны справа и имеют пределы слева и он представим в виде $X_t=M_t+V_t$, где $M=(M_t, \mathcal{F}_t)$ — локальный мартингал, а $V=(V_t, \mathcal{F}_t)$ — процесс локально ограниченной вариации, т. е.

$$\int_0^t |dV_s(\omega)| < \infty, \ t>0, \ \omega\in\Omega.$$

Такое представление, вообще говоря, неоднозначно. Однако в классе разложений с предсказуемыми процессами V рассматриваемое представление единственно (с точностью до стохастич. эквивалентности). К классу С. относятся (помимо локальных мартингалов и процессов с локально ограниченными вариациями) локальные супермартингалы и субмартингалы, процессы X с независимыми приращениями, для к-рых функция $f(t)=\mathsf{E}e^{i\lambda X_t}$ является функцией локально ограниченной вариации для любого $\lambda\in\mathbb{R}$ (и значит — все процессы со стационарными независимыми приращениями), процессы Ито, процессы диффузионного типа и др. Класс С. инвариантен относительно эквивалентной замены меры. Если X есть С., а $f=f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, то $f(X)=(f(X_t), \mathcal{F}_t)$ также С. При этом (формула Ито)

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_{s-})dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s-})\,d[X,X]_s^c+$$
$$+\sum_{0<s\leqslant t}[f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s]$$

или, что эквивалентно,

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_{s-})\,dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s-})\,d[X,X]_s+$$
$$+\sum_{0<s\leqslant t}\Big[f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s-$$
$$-\frac{1}{2}f''(X_{s-})(\Delta X_s)^2\Big],$$

где $[X, X]=([X, X]_t, \mathcal{F}_t)$ — квадратич. вариация семимартингала X, то есть

$$[X, X]_t=X_0^2+2\int_0^t X_{s-}\,dX_s,$$
$$[X, X]_t^c=[X, X]_t-\sum_{0<s\leqslant t}(\Delta X_s)^2$$

— непрерывная часть квадратич. вариации $[X, X]$, $\Delta X_s=X_s-X_{s-}$, а рассматриваемые интегралы понимаются как стохастич. интегралы по С.

Если X есть С., то процесс $X^{(\leqslant 1)}=(X_t^{(\leqslant 1)}, \mathcal{F}_t)$ с

$$X_t^{(\leqslant 1)}=X_t-\sum_{0<s\leqslant t}\Delta X_s I(|\Delta X_s|>1)$$

имеет ограниченные скачки, $|\Delta X_t^{(\leqslant 1)}|\leqslant 1$, и в силу этого он допускает единственное представление вида

$$X_t^{(\leqslant 1)}=X_0+B_t+M_t,$$

где $B=(B_t, \mathcal{F}_t)$ — предсказуемый процесс локально ограниченной вариации, а $M=(M_t, \mathcal{F}_t)$ — локальный мартингал. Этот мартингал однозначным образом представим как $M=M^c+M^d$, где $M^c=(M_t^c\mathcal{F}_t)$ — непрерывный локальный мартингал (непрерывная мартингальная составляющая семимартингала X), а

$M^d=(M_t^d, \mathcal{F}_t)$ — чисто разрывный локальный мартингал, к-рый может быть записан в виде

$$M_t^d=\int_0^t \int_{|x| \leqslant 1} x d(\mu-\nu),$$

где $d\mu=\mu(\omega, dt, dx)$ — случайная мера скачков семимартингала X, то есть

$$\mu(\omega, (0, t], \Gamma)=\sum\nolimits_{0<s \leqslant t} I(\Delta X_s \in \Gamma),\ \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \diagdown \{0\}),$$

а $d\nu=\nu(\omega, dt, dx)$ — ее компенсатор. Поскольку

$$\sum\nolimits_{0<s \leqslant t} \Delta X_s I(|\Delta X_s|>1)=\int_0^t \int_{|x|>1} x\, d\mu,$$

то всякий семимартингал X допускает представление

$$X_t=X_0+B_t+M_t^c+\int_0^t \int_{|x| \leqslant 1} x d(\mu-\nu)+\int_0^t \int_{|x|>1} x d\mu,$$

к-рое наз. каноническим представлением (разложением).

Набор (предсказуемых) характеристик $(B, \langle M^c \rangle, \nu)$, где $\langle M^c \rangle$ — квадратич. характеристика M^c, т. е. такой предсказуемый возрастающий процесс, что $(M^c)^2-\langle M^c \rangle$ является локальным мартингалом, наз. триплетом локальных (предсказуемых) характеристик X.

Лит.: [1] Jacod J., Calcul stochastique et problemès de mar-tingales, B., 1979 (Lecture notes in mathematics, № 714).

А. Н. Ширяев.

СЕПАРАБЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА — конечномерная полупростая ассоциативная алгебра A над полем k, остающаяся полупростой при любом расширении K поля k (т. е. алгебра $A \otimes_k K$ полупроста для любого поля $K \supseteq k$). Алгебра A сепарабельна тогда и только тогда, когда центры простых компонент этой алгебры (см. *Ассоциативные кольца и алгебры*) являются сепарабельными расширениями поля k.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [2] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969.

Л. А. Бокуть.

СЕПАРАБЕЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — доминантный морфизм f неприводимых алгебраич. многообразий X и Y, $f: X \to Y$, для к-рого поле $K(X)$ является сепарабельным расширением подполя $f^*K(Y)$ (изоморфного $K(Y)$ ввиду доминантности). Несепарабельные отображения существуют только тогда, когда характеристика p основного поля больше нуля. Если f — конечный морфизм и его степень не делится на p, то он сепарабелен. При С. о. для точек в нек-ром открытом подмножестве $U \subset X$ дифференциал $(df)_x$ отображения f сюръективно отображает касательное пространство $T_{X,x}$ в $T_{Y, f(x)}$ и наоборот: если точки x и $f(x)$ неособые и $(df)_x$ — сюръективен, то f есть С. о.

Термин «сепарабельность» употребляется для морфизмов и в ином смысле. Морфизм $f: X \to Y$ схем X и Y наз. сепарабельным, или (чаще) отделимым, если диагональ в $X \times_Y X$ замкнута. Композиция отделимых морфизмов отделима; $f: X \to Y$ отделим тогда и только тогда, когда для любой точки $y \in Y$ существует такая окрестность $V \ni y$, что морфизм $f: f^{-1}(V) \to V$ отделим. Морфизм аффинных схем всегда отделим. Существует критерий отделимости для нётеровых схем.

А. Н. Рудаков.

СЕПАРАБЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, обладающее счетной базой. Про такие пространства иногда говорят, что они удовлетворяют второй аксиоме счетности.

М. И. Войцеховский.

СЕПАРАБЕЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ поля — расширение K/k такое, что для нек-рого натурального n поля K и $k^{p^{-n}}$ линейно разделены над k (см. *Линейно разделенные расширения*). Расширение, не являющееся сепарабельным, наз. несепарабельным.

В дальнейшем рассматриваются только алгебраич. расширения (о трансцендентных сепарабельных расширениях см. *Трансцендентное расширение*). Конечное расширение сепарабельно тогда и только тогда, когда отображение *следа* $\mathrm{Sp}: K \to k$ является ненулевой функцией. Алгебраич. расширение сепарабельно, если любое конечное его подрасширение сепарабельно. В характеристике 0 все расширения сепарабельны.

С. р. образуют отмеченный класс расширений, т. е. в башне полей $L \supset K \supset k$ расширение L/k сепарабельно тогда и только тогда, когда сепарабельны и L/K и K/k. Если K_1/k и K_2/k суть С. р., то и K_1K_2/k сепарабельно; для С. р. K/k и произвольного расширения L/k расширение KL/L снова сепарабельно. Расширение K/k сепарабельно тогда и только тогда, когда оно допускает погружение в нек-рое расширение Галуа L/k. При этом для конечного расширения K/k число различных k-изоморфизмов поля K в L совпадает со степенью $[K:k]$. Любое конечное С. р. является простым.

Многочлен $f(x) \in k[X]$ наз. сепарабельным над k, если его неприводимые множители не имеют кратных корней. Алгебраич. элемент α наз. сепарабельным (над k), если он является корнем сепарабельного над k многочлена. В противном случае α наз. несепарабельным. Элемент α наз. чисто несепарабельным над k, если $\alpha^{p^n} \in k$ для нек-рого n. Неприводимый многочлен $f(x)$ несепарабелен тогда и только тогда, когда производная $f'(x)$ тождественно равна 0 (это возможно только в случае, когда k имеет характеристику p и $f(x) = f_1(x^p)$. Произвольный многочлен $f(x)$ однозначно представим в виде $f(x) = g(x^{p^e})$, где $g(x)$ — сепарабельный многочлен. Степень многочлена $g(x)$ и число e наз. соответственно редуцированной степенью и индексом многочлена $f(x)$.

Пусть L/k — произвольное алгебраич. расширение. Все элементы поля L, сепарабельные над k, образуют поле K, к-рое является максимальным С. р. поля k, содержащимся в L. Поле K наз. сепарабельным замыканием поля k в L. Степень $[K:k]$ наз. сепарабельной степенью расширения L/k, а степень $[L:K]$ — несепарабельной степенью, или степенью несепарабельности. Несепарабельная степень равна нек-рой степени числа $p = \mathrm{char}\, k$. Если $K = k$, то поле k наз. сепарабельно замкнутым в L. В этом случае расширение L/k наз. чисто несепарабельным. Расширение K/k чисто несепарабельно тогда и только тогда, когда

$$K \subset k^{p^{-\infty}} = \bigcup_n k^{p^{-n}},$$

т. е. когда любой элемент поля K чисто несепарабелен над k. Чисто несепарабельные расширения поля k образуют отмеченный класс расширений. Если расширение K/k одновременно сепарабельно и чисто несепарабельно, то $K = k$.

Лит. см. при ст. *Расширение поля*. *Л. В. Кузьмин.*

СЕПАРАБЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс, поведение траекторий к-рого по существу определяется их поведением на нек-ром счетном пространстве. Именно, определенный на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ действительный случайный процесс $\{X_t, t \in T\}$, где T — подмножество действительной прямой $\mathbb{R}$, сепарабелен относительно класса $\mathcal{A}$ подмножеств $\mathbb{R}$, если существует счетное множество $T_1 \subset T$ (сепаранта) и множество $N \subset \mathcal{F}$, $\mathsf{P}(N) = 0$, такое, что для любого $A \subset \mathcal{A}$ и любого открытого интервала $I \subset \mathbb{R}$

$$\bigcap_{t \in IT_1} \{X_t \in A\} \setminus \bigcap_{t \in IT} \{X_t \in A\} \subset N.$$

Наиболее важны понятия сепарабельности относительно класса замкнутых множеств и относительно класса замкнутых интервалов (в последнем случае процесс называется просто сепарабельным). Если процесс $\{X_t,\ t\in T\}$ сепарабелен, то для любого $\omega\notin N$ и любого открытого интервала $I\subset\mathbb{R}$

$$\inf_{t\in IT_1} X_t(\omega)=\inf_{t\in IT} X_t(\omega),\quad \sup_{t\in IT_1} X_t(\omega)=\sup_{t\in IT} X_t(\omega), \tag{1}$$

$$\inf_{t\in IT_1} X_t(\omega)\leqslant X_t(\omega)\leqslant \sup_{t\in IT_1} X_t(\omega),\quad t\in IT, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\liminf_{u\to t,\ u\in T_1} X_u(\omega)&=\liminf_{u\to t,\ u\in T} X_u(\omega),\\ \limsup_{u\to t,\ u\in T_1} X_u(\omega)&=\limsup_{u\to t,\ u\in T} X_u(\omega),\quad t\in\overline{T},\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\liminf_{u\to t,\ u\in T_1} X_u(\omega)\leqslant X_t(\omega)\leqslant \limsup_{u\to t,\ u\in T} X_u(\omega),\quad t\in T. \tag{4}$$

Каждое из свойств (1) — (4) равносильно сепарабельности. Если t — левая предельная точка множества T, то существует последовательность $t_n\downarrow t$ точек из T такая, что

$$\liminf_n X_{t_n}=\liminf_{u\to t+0} X_u,\quad \limsup_n X_{t_n}=\limsup_{u\to t+0} X_u$$

с вероятностью 1 (аналогично для пределов справа). Если X_t — сепарабельный случайный процесс, непрерывный по вероятности, то любое всюду плотное в T счетное множество $T_1\subset T$ является сепарантой; кроме того, для любого открытого интервала I, $I\cap T\neq\phi$ и любой последовательности $s_n=\{s_{nk},\ k\leqslant k_n\}$ конечных подмножеств IT, удовлетворяющей условию $\sup_{t\in IT}\inf_k |t-s_{nk}|\to 0$,

$$\inf_k X_{s_{nk}}\to\inf_{t\in IT} X_t,\quad \sup_k X_{s_{nk}}\to\sup_{t\in IT} X_t \tag{5}$$

по вероятности. Сходимость в (5) можно заменить сходимостью с вероятностью 1, если X_t непрерывен с вероятностью 1.

Для всякого случайного процесса X_t, $t\in T$, существует на том же вероятностном пространстве сепарабельный относительно класса замкнутых множеств процесс $\tilde{X}_t$, $t\in T$, принимающий значения из расширенной числовой прямой, и такой, что $\mathsf{P}\{\tilde{X}_t=X_t\}=1$, $t\in T$. Понятие сепарабельности и его свойства обобщаются на процессы, у к-рых T и область значений суть различные общие топологич. пространства. Переход к С. п. позволяет утверждать применимость ряда важных функционалов и множеств, связанных с процессом. Альтернативный подход состоит не в изменении случайных величин, образующих процесс, а в расширении σ-алгебры, на к-рой он определен (напр., в случае функционального пространства — произведения хаусдорфовых компактов меру с обычной σ-алгебры, порожденной цилиндрич. множествами, можно однозначно продолжить на весьма богатую σ-алгебру борелевских множеств).

Лит.: [1] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [4] Doob T. L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 53, № 1, p. 15—30; [5] Nelson E., «Ann. Math.», 1959, v. 69, № 3, p. 630—43.

В. В. Сазонов.

СЕПАРАТИВНАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, в к-рой для любых элементов x, y из $x^2=xy=y^2$ следует $x=y$. Если полугруппа S обладает разбиением на подполугруппы, удовлетворяющие закону сокращения, то S будет С. п. Для коммутативных полугрупп верно и обратное; более того, всякая коммутативная С. п. разложима в *связку полугрупп* (автоматически в полурешетку) с законом сокращения. Коммутативная полугруппа будет С. п. тогда и только тогда, когда она вложима в клиффордову полугруппу. Периодич. полугруппа будет С. п. тогда и только тогда, когда она клиффордова. Коммутативная полугруппа S будет С. п. тогда и только тогда, когда ее характеры отделяют элементы S.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т.1, М., 1972. *Л. Н. Шеврин.*

СЕПАРАТРИСА — термин качественной теории дифференциальных уравнений.

1) С. в первоначальном смысле слова — траектория $\{S_tp\}$ *потока* $\{S_t\}$ на плоскости, стремящаяся (при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$) к нек-рому *равновесия положению* p_0, причем сколь угодно близко к ней имеются траектории, к-рые вначале приближаются к p_0, как бы «идя вдоль траектории $\{S_tp\}$», а затем отходят от него на нек-рое конечное расстояние. Формально последнее означает существование таких окрестности U точки p_0, последовательности точек $p_n \to p$ и последовательностей чисел s_n, t_n, что $s_n \to \infty$ (соответственно $s^n \to -\infty$),

$$S_{s_n} p_n \to p_0, \ S_{t_n} p_n \notin U, \ t_n > s_n \quad (t_n < s_n).$$

Основной пример — С. невырожденного (или простого) *седла*. Для последнего под С. может пониматься также его устойчивое (соответственно неустойчивое) *многообразие*, т. е. (в данном случае) линия, включающая седло и обе траектории, стремящиеся к нему при $t \to +\infty$ (соответственно при $t \to -\infty$).

Название «С.» связано с наблюдением, что С. наряду с замкнутыми траекториями делят фазовую плоскость на области с одинаковым поведением траекторий. Это наблюдение может быть строго формализовано (см. [1], [3]). С. могут входить в состав *предельных множеств* траекторий. Так, траектория может навиваться на «петлю С.» — замкнутую кривую, образованную траекторией, стремящейся к одному и тому же седлу как при $t \to -\infty$, так и при $t \to \infty$, или на «сепаратрисный контур (цикл)» — замкнутую кривую, состоящую из нескольких С., соединяющих седла. При малом возмущении из петли С. может возникнуть *предельный цикл* (это один из основных типов *бифуркаций* для потоков на плоскости; см. [2], [3]).

2) В многомерном случае под С. (или **сепаратрисными многообразиями**) чаще всего понимают устойчивое и неустойчивое многообразия гиперболич. положения равновесия или периодич. траектории.

Имеются попытки выделить под названием «С.» класс траекторий, входящих в множества, которые в некотором смысле «разделяют» траектории с различным поведением. Непосредственное обобщение случая плоскости имело бы ограниченную применимость, поскольку в многомерном случае фазовое пространство, вообще говоря, не разбивается на области, заполненные траекториями с одинаковыми предельными множествами (тогда как на плоскости такая ситуация «типична»). Предложенные формулировки являются довольно сложными (см. [4]), и не приходится ожидать полного описания различных типов С. и составленных из них множеств.

Лит.: [1] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [2] их же, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, М., 1967; [3] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А., Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, М., 1976; [4] Hartzman C. S., «Aequationes math.», 1980, v. 20, № 1, p. 59—72. *Д. В. Аносов.*

СЕРВАНТНАЯ ПОДГРУППА, чистая подгруппа, — такая подгруппа C абелевой группы G, что для любого элемента $c \in C$ из разрешимости в G уравнения $nx=c$ следует его разрешимость в подгруппе C. Примерами С. п. служат нулевая подгруппа, сама группа G, периодич. часть данной группы и прямые слагаемые. Даже для примарной группы не всякая С. п. должна быть ее прямым слагаемым. Однако если C — периодическая С. п. абелевой группы G, причем порядки ее элементов ограничены в совокупности, то C — прямое слагаемое в G. Имеется (см. [1]) полное описание абелевых групп, в к-рых каждая С. п. служит прямым слагаемым. Полностью исследован также вопрос о мощности множества С. п. абелевой группы.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

О. А. Иванова.

СЕРИАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ — статистика, к-рая служит оценкой *автокорреляции* (автокорреляционной функции) временного ряда. Именно, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — временной ряд. С. к. к. порядка k наз. статистика r_k, задаваемая формулой

$$r_k = \frac{\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}\left\{\left(x_i - \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k} x_i\right)\left(x_{i+k} - \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k} x_{i+k}\right)\right\}}{\left[\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}\left\{x_i - \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k} x_i\right\}^2 \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}\left\{x_{i+k} - \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k} x_{i+k}\right\}^2\right]^{1/2}}. \quad (*)$$

В качестве С. к. к. используются статистики, близкие к (*) несколько упрощенного вида. Совокупность С. к. к. наз. коррелограммой; этот термин употребляется также для обозначения графика r_k как функции k.

При различных предположениях относительно распределений x_i имеются точные и приближенные выражения для распределения С. к. к. и их моментов. С. к. к. используются в статистич. задачах для обнаружения зависимости членов временного ряда.

Наряду с термином «С. к. к.» используется термин «выборочная автокорреляция».

Лит.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964.

В. Г. Ушаков.

СЕРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ — семейства (непрерывных неприводимых унитарных) представлений локально компактной группы (точнее, неприводимые множества классов унитарной эквивалентности таких представлений), обладающие общими свойствами по отношению к регулярному представлению этой группы. Так, семейство неприводимых унитарных представлений группы, матричные элементы к-рых являются равномерными на компактах пределами матричных элементов регулярного представления, образуют основную серию представлений; остальные неприводимые унитарные представления (если они существуют) образуют дополнительную серию представлений; семейство (классов эквивалентности) неприводимых прямых слагаемых регулярного представления образует дискретную серию представлений данной группы. Для редуктивных групп Ли или групп Шевалле понятие С. п. имеет смысл также для подмножеств множества классов эквивалентности представлений этой группы, элементы к-рых обладают теми или иными свойствами по отношению к регулярному представлению редуктивных факторгрупп параболич. подгрупп этой группы. Так, семейство представлений редуктивной группы, индуцированных конечномерными представлениями ее параболич. подгруппы, образует связанную с этой параболич. подгруппой часть пространства представлений, называемую соответствующей основной (основной вырожденной, если параболич. подгруппа не является борелевской) С. п.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Nguen Huu Anh., «Ann. Inst. Fourier», 1980, v. 30, fasc. 1, p. 152—92; [3] Callez J., Les sous-groups paraboliques de $SU(p, q)$ et $Sp(n, R)$ et applications, P., 1979.

А. И. Штерн.

СЕРИЙ СХЕМА, последовательность серий, — двойная последовательность случайных величин ξ_{nk}, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $k_n \to \infty$, $n \geqslant 1$, в к-рой случайные величины $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$, образующие n-ю серию, взаимно независимы при любом n. Простейшая С. с. соответствует случаю $k_n = n$. Класс случайных величин, образующих С. с., играет в предельных теоремах теории вероятностей особую роль, к-рая определяется предельным поведением при $n \to \infty$ распределений сумм случайных величин:

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}. \quad (1)$$

При определенных условиях класс предельных распределений для таких последовательностей совпадает с классом безгранично делимых распределений. Именно, пусть С. с. ξ_{nk} удовлетворяет условию бесконечной малости (условию асимптотической пренебрегаемости), то есть при $n \to \infty$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \mathsf{P}\{|\xi_{nk}| \geqslant \varepsilon\} \to 0. \quad (2)$$

Говорят, что ξ_{nk} образуют нулевую схему серий. Тогда множество распределений, предельных в смысле слабой сходимости для распределений (1), где ξ_{nk} — нулевая С. с., удовлетворяющая условию бесконечной малости, совпадает с множеством безгранично делимых распределений.

Известны условия сходимости распределений η_n к заданному безгранично делимому распределению (см. [1]). В частности, условие сходимости к *нормальному распределению* имеет следующий вид.

Пусть ξ_{nk} есть С. с., F_{nk} — функция распределения ξ_{nk}. Для того чтобы ξ_{nk} удовлетворяла условию (2) и распределение сумм (1) слабо сходилось к нормальному распределению с параметрами a и b, необходимо и достаточно, чтобы для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выполнялись условия:

1) $\sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{P}\{|\xi_{nk}| \geqslant \varepsilon\} \to 0$,

2) $\sum_{k=1}^{k_n} \left\{\int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x)\right)^2\right\} \to b^2$,

3) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \to a$.

Изучение предельных распределений для нормированных частичных сумм последовательности независимых случайных величин сводится к С. с.

По поводу С. с. см. также *Безгранично делимое распределение*, *Больших чисел закон*, *Предельные теоремы*. Так, напр., в классич. вариантах центральной предельной теоремы и закона больших чисел рассматриваются частные случаи С. с., образованные случайными величинами

$$\xi_{nk} = \frac{\xi_k - \mathsf{E}\xi_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\xi_k}},$$

$$\xi_{nk} = \frac{\xi_k - \mathsf{E}\xi_k}{n},$$

где ξ_k — независимые случайные величины.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [4] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967.

Н. Г. Ушаков.

СЕРПИНЬСКОГО КРИВАЯ, ковер Серпинского, — пример *канторовой кривой*, содержащей подмножество, гомеоморфное любой наперед заданной

СЕРИЙ СХЕМА, последовательность серий,— двойная последовательность случайных величин ξ_{nk}, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $k_n \to \infty$, $n \geqslant 1$, в к-рой случайные величины $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$, образующие n-ю серию, взаимно независимы при любом n. Простейшая С. с. соответствует случаю $k_n = n$. Класс случайных величин, образующих С. с., играет в предельных теоремах теории вероятностей особую роль, к-рая определяется предельным поведением при $n \to \infty$ распределений сумм случайных величин:

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}. \tag{1}$$

При определенных условиях класс предельных распределений для таких последовательностей совпадает с классом безгранично делимых распределений. Именно, пусть С. с. ξ_{nk} удовлетворяет условию бесконечной малости (условию асимптотической пренебрегаемости), то есть при $n \to \infty$

$$\xi\sum_{i=1}^{N-k} x_{i+k}\Big)\Big\} \qquad \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k} x_{i+k}\Big\}^2\Big]^{1/2} \Big\}*$$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \mathsf{P}\{|\xi_{nk}| \geqslant \varepsilon\} \to 0. \tag{2}$$

Говорят, что ξ_{nk} образуют нулевую схему серий. Тогда множество распределений, предельных в смысле слабой сходимости для распределений (1), где ξ_{nk} — нулевая С. с., удовлетворяющая условию бесконечной малости, совпадает с множеством безгранично делимых распределений.

Известны условия сходимости распределений η_n к заданному безгранично делимому распределению (см. [1]). В частности, условие сходимости к *нормальному распределению* имеет следующий вид.

Пусть ξ_{nk} есть С. с., F_{nk} — функция распределения ξ_{nk}. Для того чтобы ξ_{nk} удовлетворяла условию (2) и распределение сумм (1) слабо сходилось к нормальному распределению с параметрами a и b, необходимо и достаточно, чтобы для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выполнялись условия:

1) $\sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{P}\{|\xi_{nk}| \geqslant \varepsilon\} \to 0$,

2) $\sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \to b^2$,

3) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \to a$.

Изучение предельных распределений для нормированных частичных сумм последовательности независимых случайных величин сводится к С. с.

По поводу С. с. см. также *Безгранично делимое распределение*, *Больших чисел закон*, *Предельные теоремы*. Так, напр., в классич. вариантах центральной предельной теоремы и закона больших чисел рассматриваются частные случаи С. с., образованные случайными величинами

$$\xi_{nk} = \frac{\xi_k - \mathsf{E}\xi_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\xi_k}},$$

$$\xi_{nk} = \frac{\xi_k - \mathsf{E}\xi_k}{n},$$

где ξ_k — независимые случайные величины.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [4] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967. *Н. Г. Ушаков.*

СЕРПИНЬСКОГО КРИВАЯ, ковер Серпиньского,— пример *канторовой кривой*, содержащей подмножество, гомеоморфное любой наперед заданной канторовой кривой. Построена В. Серпиньским [1], конструкцию см. в ст. *Линия*. Эта кривая в каждой точке имеет континуальный индекс ветвления.

Лит.: [1] Sierpiński W., «Compt. Rend. Acad. sci.», 1915, v. 160, p. 302; 1916, v. 162, p. 629; [2] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [3] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 2, М., 1969. *М. И. Войцеховский.*

СЕРРА ПОДКАТЕГОРИЯ — ненулевая полная локально малая подкатегория $\mathfrak{S}$ абелевой категории $\mathfrak{A}$ такая, что для каждой точной последовательности

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

в $\mathfrak{A}$ верно, что $B \in \mathfrak{S}$ эквивалентно $A \in \mathfrak{S}$ и $C \in \mathfrak{S}$. Локальная малость категории есть условие: совокупность представителей классов эквивалентных подобъектов любого объекта составляет множество. С. п. можно охарактеризовать как ядро точного функтора в категории $\mathfrak{A}$.

С. п. позволяет определить факторкатегорию $\mathfrak{A}/\mathfrak{S}$, объектами к-рой являются объекты категории $\mathfrak{A}$, а морфизмы определяются равенством

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{S}}(X, Y) = \varinjlim_{Y',\ X/X' \in \mathfrak{S}} \mathrm{Mor}_{\mathfrak{A}}(X', Y/Y').$$

Факторкатегория $\mathfrak{A}/\mathfrak{S}$ является абелевой.

С. п. наз. локализующей, если канонич. функтор $T: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathfrak{S}$ имеет правый сопряженный функтор $S: \mathfrak{A}/\mathfrak{S} \to \mathfrak{A}$, наз. функтором сечений. Если $\mathfrak{A}$ — *Гротендика категория*, обладающая копроизведениями, то локализующий функтор существует. Таким образом получается обобщение классич. теории локализации модулей над коммутативным кольцом. Этот метод охватывает многочисленные конструкции колец частных и теории кручений (радикалов) модулей над ассоциативными кольцами.

Понятие «С. п.» было введено Ж. П. Серром [1] и названо им классом. Используя это понятие, он получил далеко идущее обобщение теоремы Гуревича (см. *Гомотопическая группа*).

Лит.: [1] Serre J.-P., «Ann. Math.», 1953, v. 58, № 2, p. 258—94 (рус. пер., в сб.: Расслоенные пространства и их приложения, М., 1958, с. 124—59); [2] Фейс К., Алгебры: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1, М., 1977; [3] Popesco N., Gabriel P., «C. r. Acad. sci.», 1964, t. 258, № 17, p. 4188—90. *В. Е. Говоров.*

СЕРРА РАССЛОЕНИЕ — тройка (X, p, Y), где X, Y — топологич. пространства, $p: X \to Y$ — непрерывное отображение, обладающее следующим свойством (наз. свойством существования накрывающей гомотопии для полиэдров). Для любых конечного полиэдра K и отображений

$$f: K \times [0, 1] \to Y, \ F_0: K = K \times \{0\} \to Y$$

с

$$f \mid (K \times \{0\}) = p \circ F_0$$

существует отображение

$$F: (K \times [0, 1]) \to X$$

такое, что $F \mid (K \times \{0\}) = F_0$, $p \circ F = f$. С. р. было определено Ж. П. Серром (J.-P. Serre) в 1951 (см. [1]).

Лит.: [1] Расслоенные пространства и их приложения. Сб. пер., М., 1958, с. 9—114. *А. Ф. Харшиладзе.*

СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ — интерпретация программы (плана) реализации нек-рого комплекса взаимосвязанных работ в виде *графа ориентированного* без контуров, отражающего естественный порядок выполнения работ во времени с нек-рыми дополнительными данными комплекса (стоимость, ресурсы, продолжительность и т. д.). Обычно С. м. изображают графически на плоскости и в этом случае ее наз. сетевым графиком. С. м. лежит в основе метода *сетевого планирования* и управления и календарного планирования. В зависимости от условий при обработке информации С. м. может иметь и другие формы представления — табличную, цифровую и т. п. Все формы представления С. м. равносильны.

Основой С. м. является ее структура, т. е. граф комплекса работ, к-рый, как правило, определяется следующим образом. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — комплекс работ (напр., возведение многоэтажного здания), для к-рого определены стадии $x_1, x_2, \ldots, x_m$: начало x_1, конец x_m и, в зависимости от логики частичного порядка, обусловленной взаимосвязью работ, каждая промежуточная стадия x_i (напр., нельзя закончить монтаж каркаса десятого этажа, не выполнив соответствующие работы по девятому этажу). Промежуточные стадии, равно как и их число, являются в достаточной мере условными и во многом определяются ответственными за реализацию комплекса. Пусть $V=\{v_i\}$ — комплекс работ, а $X=\{x_i\}$ — множество стадий. Если теперь определить граф G, для к-рого X является множеством вершин, а работа v_j, $j=1, 2, \ldots, n$, имеющая началом стадию x_r и концом стадию x_s, является его дугой, то полученный ориентированный граф $G=(X, V)$ без контуров и есть искомая структура С. м. рассматриваемого комплекса работ. На языке С. м. работы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ наз. операциями, а стадии $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — событиями.

С. м. строится на основе своей структуры в зависимости от целей, к-рые ставятся при этом относительно комплекса работ. Напр., в случае, когда относительно комплекса ставится задача выполнить его в минимальный срок при заданных ресурсах, то С. м. включает в себя и данные о времени, необходимом для выполнения каждой работы v_j, и в этом случае говорят, что С. м. построена по критерию времени. С. м. может быть построена и по другому критерию или одновременно по нескольким критериям. В зависимости от этого С. м. наз. одномерной или многомерной. Различают С. м. канонические и альтернативные (см. [1], [3]). Первые определяются при помощи фиксированной структуры и условия, что любая операция $v_j=(x_r, x_s)$ не может быть начата, пока не выполнены все операции с концом в x_r. Вторые имеют переменную структуру и допускают начало нек-рой операции $v_j=(x_r, x_s)$ после выполнения какой-либо одной операции с концом в x_r. С. м. бывают также детерминированными и вероятностными в зависимости от того, точны критерии или прогнозированы с какой-либо вероятностью.

Лит.: [1] Основные положения по разработке и применению систем сетевого планирования и управления, 3 изд., М., 1974; [2] Энциклопедия кибернетики, К., 1974; [3] Лопатников Л. И., Краткий экономико-математический словарь, М., 1979.

П. С. Солтан.

СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ, сетевой метод планирования и управления,— метод управления при реализации нек-рого комплекса работ (проекта, программы, темы и т. п.) на основе *сетевой модели* комплекса, известной также под названием ПЕРТ (см. [2]). С. п. позволяет существенно поднять качество планирования и управления при реализации комплекса работ, в частности оно дает возможность четко координировать деятельность всех сторон (организаций), участвующих в реализации комплекса, выделить наиболее важные задачи, судить о наиболее целесообразных сроках реализации проекта, своевременно корректировать планы реализации и т. д.

С. п. может быть условно разбито на два этапа: 1) построение сетевой модели (с. м.) комплекса работ, 2) использование с. м. для планирования и управления при реализации комплекса работ (см. [1]—[3]). Построение с. м. комплекса сводится к отображению в виде специально ориентированного графа множества стадий (событий) и естественного порядка (вообще говоря, частичного) самих работ (операций) комплекса, а также и нек-рой числовой информации, необходимой при этом (время выполнения каждой операции, ресурсы и др.). В зависимости от сформулированных целей, после составления с. м. приступают к ее анализу для лучшей подготовки плана их достижения. Напр., если с. м. построена по критерию времени, т. е. когда необходимо добиться минимальной продолжительности всего комплекса работ при заданных ресурсах, то этот анализ сводится к нахождению критич. пути и выяснению того времени, меньше к-рого делает задачу реализации комплекса неразрешимой. Это означает следующее. Пусть $G=(X, V)$ — структура с. м. комплекса, где

$$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \text{ и } V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

— соответственно множества событий и операций, а $t(v_j)$ — время выполнения операции $v_j \in V$. Рассматривается множество P всех путей графа G, максимальных по включению. Таких путей в G, вообще говоря, много, и для более простой ситуации, когда имеется одно начальное событие x_1 и одно конечное событие x_m, все эти пути начинаются в x_1 и кончаются в x_m. Среди всех путей множества P ищется тот, к-рый обладает наибольшей длиной (под длиной пути $p=\{v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jk}\}$ понимается число $t(p)=t(v_{j1})+t(v_{j2})+\ldots+t(v_{jk})$). Путь $p\in P$, обладающий этим свойством, наз. критическим путем с. м., и его длина выражает, что реализация комплекса работ за меньшее время, чем $t(p)$, невозможна. Поэтому метод С. п. наз. также методом критического пути (см. [1] — [4]).

С. п. на период самой реализации комплекса работ играет роль механизма в управлении, помогающего обрабатывать информацию о фактич. состоянии работ для данного момента времени и о прогнозируемых изменениях и необходимой корректировке планов для выполнения оставшихся работ.

Лит.: [1] Основные положения по разработке и применению систем сетевого планирования и управления, 3 изд., М., 1974; [2] Кофман А., Дебазей Г., Сетевые методы планирования. Применение системы ПЕРТ и ее разновидностей при управлении производственными и научно-исследовательскими проектами, пер. с франц., М., 1968; [3] Сетевое планирование и управление, М., 1967; [4] Абрамов С. А., Мариничев М. И., Поляков П. Д., Сетевые методы планирования и управления, М., 1965; [5] Энциклопедия кибернетики, К., 1974; [6] Лопатников Л. И., Краткий экономико-математический словарь, М., 1979. *П. С. Солтан.*

СЕТЕВОЙ ГРАФИК — *сетевая модель*, изображенная графически на плоскости. *П. С. Солтан.*

СЕТОК МЕТОД — собирательное название группы приближенных методов решения дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Применительно к дифференциальным уравнениям с частными производными термин «С. м.» используется в качестве синонима терминов «метод конечных разностей» и «разностный метод». С. м. — один из наиболее распространенных приближенных методов решения задач, связанных с дифференциальными уравнениями. Широкое применение С. м. объясняется его большой универсальностью и сравнительной простотой реализации на ЭВМ.

См. *Разностных схем теория.*

По материалам одноименной статьи в БСЭ-3.

СЕТЬ — обобщение понятия *графа*. С. задается парой вида $(V, \mathscr{E})$, в к-рой V — нек-рое множество, $\mathscr{E}=(E_0; E_1, E_2, \ldots)$ — семейство наборов элементов из V. В наборах $E_i \in \mathscr{E}$ элементы могут, вообще говоря, повторяться. Элементы множества V наз. вершинами С., элементы набора E_0 — полюсами С., наборы E_i, $i=1, 2, \ldots,$ — ребрами С. В случае, когда множество полюсов пусто и каждый из наборов E_i является множеством, С. представляет собой гиперграф. Если каждый из наборов E_i, $i=1, 2, \ldots,$ содержит ровно два элемента, С. есть граф с выделенными полюсами. Часто под С. *понимается граф (с полюсами или без них)*, элементам к-рого приписаны символы из нек-рого множества. Напр., граф с полюсами, ребрам к-рого приписаны неотрицательные числа, называемые пропускными способностями, представляет собой транспортную сеть.

Понятие С. используется в определении и описании *управляющей системы* и специальных классов управляющих систем (контактные схемы, схемы из функциональных элементов), диаграмм переходов автоматов, коммуникационных сетей и др.

Лит.: [1] Яблонский С. В., «Проблемы кибернетики», 1959, в. 2, с. 7—38; [2] Форд Л., Фалкерсон Д., *Потоки в сетях*, пер. с англ., М., 1966; [3] Kuntzmann J., Théorie des réseaux Graphes, P., 1972. *А. А. Сапоженко.*

СЕТЬ — система $\Sigma_n=\{\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^n\}$ n семейств ($n\geqslant 2$) достаточно гладких линий, определенных в области G n-мерного дифференцируемого многообразия M так, что 1) через каждую точку $x\in G$ проходит точно по одной линии каждого семейства σ^i; 2) векторы, касательные к этим кривым в точке x, образуют базис пространства T_x — касательного пространства к многообразию M в точке x. Векторы, касательные к линиям одного семейства σ^i, принадлежат одномерному распределению Δ_1^i, определенному в области G. Условия того, что семейства линий составляют С. в нек-рой окрестности точки, могут не выполняться при продолжении линий. Линии семейства σ^i являются интегральными кривыми распределения Δ_1^i. Сеть $\Sigma_n\subset G$ определяется заданием n одномерных распределений Δ_1^i таких, что в каждой точке $x\in G$ касательное пространство T_x является прямой суммой подпространств Δ_1^i, $i=1, 2, \ldots, n$. Сеть $\Sigma_n\subset G$ определяет в области G $(n-1)$-мерные распределения Δ_{n-1}^i такие, что в каждой точке $x\in G$ подпространство $\Delta_{n-1}^i(x)\subset T_x$ является прямой суммой $n-1$ одномерных подпространств $\Delta_1^j(x)$, $j\neq i$. Различают следующие типы С.: голономные С., для к-рых каждое из распределений Δ_{n-1}^i интегрируемо (при $n=2$ всякая С. голономна); частично голономные С., для к-рых нек-рые из распределений Δ_{n-1}^i интегрируемы, а остальные неинтегрируемы (такие С. подразделяются по числу неинтегрируемых распределений); неголономные С., для к-рых все распределения Δ_{n-1}^i неинтегрируемы.

Если распределение Δ_{n-1}^i, $n>2$, интегрируемо и γ^i — интегральная кривая распределения Δ_1^i, то через каждую точку $x\in\gamma^i$ проходит интегральное многообразие распределения Δ_{n-1}^i, несущее сеть $\Sigma_{n-1}(x)$ из кривых, принадлежащих семействам σ^j, $j\neq i$.

Сеть $\Sigma_n\subset G$ можно задать также одним из следующих способов: а) системой векторных полей $X_i\subset\Delta_1^i$, б) системой дифференциальных 1-форм ω^i таких, что $\omega^i(X_j)=\delta_j^i$, в) полем аффинора Φ такого, что $\Phi^n=E$ (E — единичный аффинор).

При изучении С. рассматриваются три основные проблемы: внутренние свойства С., внешние свойства С. и исследование диффеоморфизмов С.

Внутренние свойства С. индуцируются структурой многообразия, несущего С. Напр., сеть Σ_n в пространстве M аффинной связности ∇ наз. геодезической сетью, если все ее линии геодезические. Если риманово многообразие M со связностью без кручения, в к-рой метрич. тензор ковариантно постоянен, несет ортогональную *чебышевскую сеть* 1-го рода, то M — локально евклидово. Связь таких С. с параллельным перенесением векторов на поверхности была установлена Л. Бьянки (L. Bianchi, 1922). Эта связь была положена А. П. Норденом в основу определения чебышевской С. 1-го рода в пространстве аффинной связности.

Внешние свойства С. индуцируются структурой объемлющего пространства E. Так, напр., пусть сеть Σ_n, заданная в нек-рой области G на гладкой поверхности V_n проективного $(n+k)$-мерного пространства $(k \geqslant 1)$, — **сопряженная** С., то есть в каждой точке $x \in G$ сопряжены направления $\Delta_1^i(x)$, $\Delta_j^i(x)$ касательных к любым двум линиям С., проходящим через точку x (два направления сопряжены, если каждое из них принадлежит характеристике касательной плоскости T_x при ее смещении в другом направлении). Если V_n не вмещается в проективное пространство размерности, меньшей $n+k$, то при $k=1$ поверхность V_n несет бесконечное множество сопряженных С.; при $k=2$ поверхность несет в общем случае единственную сопряженную С., но существуют и такие n-мерные поверхности, на к-рых нет ни одной сопряженной С.; при $k>2$ только n-мерные поверхности специального строения несут сопряженную С. При $n>2$ сопряженная С. может и не быть голономной (см. [3]). Частным случаем голономной сопряженной С. является **n-сопряженная система**: сеть Σ_n, обладающая тем свойством, что касательные к линиям каждого семейства, взятые вдоль любой линии любого другого семейства, образуют развертывающуюся поверхность. Сопряженные системы существуют в проективном пространстве любой размерности $n+k$ при $n \geqslant 2$, $k \geqslant 0$. Поверхности V_n, несущие n-сопряженную систему в проективном $(n+k)$-мерном пространстве, когда $k \geqslant n$, и в каждой точке $x \in V_n$ соприкасающееся к V_n пространство (пространство вторых дифференциалов точки x) размерности $2n$, впервые рассматривал Э. Картан [4] под названием «многообразия особого проективного типа» (**поверхности Картана**). На такие С. было распространено понятие *Лапласа преобразования* (см. [5], [6]).

При изучении диффеоморфизмов С. по известным свойствам сети $\Sigma_n \subset M$ описываются свойства сети $\varphi(\Sigma_n) \subset N$ при заданном диффеоморфизме $\varphi: M \to N$ (напр., при изгибании или при конформном отображении поверхности, несущей С.) или ищется диффеоморфизм φ, сохраняющий нек-рые из свойств сети Σ_n. Так, напр., сеть Σ_2 на поверхности евклидова пространства наз. *ромбической сетью* (конформно-чебышевской), если она допускает конформное отображение на чебышевскую С. На всякой поверхности вращения *асимптотическая сеть* является ромбической.

Лит.: [1] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976; [2] Дубнов Я. С., Фукс С. А., «Докл. АН СССР», 1940, т. 28, № 2, с. 102—04; [3] Базылев В. Т., в кн.: Итоги науки. Геометрия, 1963, М., 1965; [4] Cartan E., «Bull. Soc. math. de France», 1919, t. 47, p. 125—60; [5] Chern S. S., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1944, v. 30, p. 95—97; [6] Смирнов Р. В., «Докл. АН СССР», 1950, т. 71, № 3, с. 437—439.

В. Т. Базылев.

СЕТЬ — отображение *направленного множества* в (топологическое) пространство. *М. И. Войцеховский.*

СЕТЬ сфер — совокупность всех сфер, относительно к-рых данная точка (**центр** С., или **радикальный центр**) имеет данную степень p — **степень** С. Существуют три типа С. сфер:

1) **гиперболическая** С. $(p>0)$, состоящая из всех сфер, ортогональных нек-рой данной сфере;

2) **эллиптическая** С. $(p<0)$, состоящая из всех сфер, пересекающих нек-рую данную сферу по какому-либо большому кругу последней;

3) **параболическая** С. $(p=0)$, состоящая из всех сфер, проходящих через нек-рую данную точку. Совокупность всех общих сфер двух С. наз. *связкой* сфер. Совокупность всех общих сфер, центры к-рых не лежат на одной прямой, наз. *пучком* сфер.

А. Б. Иванов.

СЕТЬ топологического пространства X — семейство $\mathcal{P}$ подмножеств этого пространства такое, что для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности Ox найдется элемент M семейства $\mathcal{P}$ такой, что $x \in M \subset Ox$.

Семейство всех одноточечных подмножеств пространства и каждая его *база* всегда является его С. Отличие С. от базы в том, что элементы С. не обязаны быть открытыми множествами. С. появляются при непрерывных отображениях: если f — непрерывное отображение топологич. пространства X на топологич. пространство Y и $\mathcal{B}$ — база пространства X, то образы элементов базы $\mathcal{B}$ при f составляют сеть $\mathcal{P} = \{fU : U \in \mathcal{B}\}$ пространства Y. Далее, если пространство X покрыто каким-либо семейством $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ своих подпространств, то, фиксируя при каждом $\alpha \in A$ какую-либо $\mathcal{B}_\alpha$ пространства X_α и соединяя все эти базы вместе, получают сеть $\mathcal{P} = U\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \in A\}$ пространства X. Пространства со счетной С. характеризуются как образы сепарабельных метрич. пространств при непрерывных отображениях.

Минимум мощностей всевозможных С. пространства X наз. **сетевым весом** этого пространства и обозначается $nw(X)$. Сетевой вес пространства всегда не превосходит его *веса*, но, как показывают примеры счетных пространств без счетной базы, сетевой вес может отличаться от веса. Для всех бикомпактных хаусдорфовых пространств сетевой вес совпадает с весом. Это утверждение распространяется на локально бикомпактные пространства, пространства, полные по Чеху, и на *перистые пространства*. Отсюда, в частности, следует, что вес не увеличивается при отображениях на такие пространства. Другое следствие: если перистое пространство X (в частности, бикомпакт) представлено в виде объединения семейства мощности $\leqslant \tau$ своих подпространств, вес каждого из к-рых не превосходит кардинала τ, предполагаемого бесконечным, то и вес всего пространства X не больше, чем τ.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Архангельский А., «Докл. АН СССР», 1959, т. 126, № 2, с. 239—41. *А. В. Архангельский.*

СЕЧЕНИЕ, секущая поверхность, расслоения $p: X \to Y$ — непрерывное отображение $s: Y \to X$ такое, что $p \circ s = \mathrm{id}_Y$. Если (X, p, Y) — расслоение Серра, обладающее С., то

$$\pi_n(X) = \pi_n(p^{-1}(pt)) \oplus \pi_n(Y).$$

Для главного расслоения из существования С. следует его тривиальность. Векторное расслоение всегда обладает т. н. **нулевым сечением**.

А. Ф. Харшиладзе.

СЕЧЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ $p: X \to Y$ — отображение $s: Y \to X$, для к-рого $p \circ s = \mathrm{id}_Y$. В более широком смысле С. о. любого морфизма в произвольной категории — обратный справа морфизм.

А. Ф. Харшиладзе.

СЖАТИЕ — аффинное преобразование плоскости, при к-ром каждая точка смещается к оси Ox по направлению оси Oy на расстояние, пропорциональное ее ординате. В декартовой системе координат С. задается соотношениями

$$x' = x, \ y' = ky, \ k > 0.$$

С. пространства к плоскости Oxy по направлению оси Oz задается соотношениями

$$x' = x, \ y' = y, \ z' = kz, \ k > 0.$$

Н. В. Реверук.

СЖАТИЕ, сжимающий оператор,— ограниченное линейное отображение T гильбертова пространства H в гильбертово пространство H' с $\|T\| \leqslant 1$. При $H = H'$ сжатие T наз. вполне неунитарным, если оно не является унитарным оператором ни при каком отличном от $\{0\}$ приводящем T подпространстве. Таковы, напр., односторонние сдвиги (в отличие от двусторонних сдвигов, являющихся унитарными С.). Всякому С. в H отвечает единственное ортогональное разложение $H=H_0 \oplus H_1$ на приводящие T подпространства такое, что $T_0=T|_{H_0}$ унитарен, а $T_1=T|_{H_1}$ вполне неунитарен. $T=T_0 \oplus T_1$ наз. **каноническим разложением** сжатия T.

Дилатацией, или **растяжением**, данного сжатия T, действующего в H, наз. ограниченный оператор B, действующий в нек-ром объемлющем гильбертовом пространстве $K \supset H$ и такой, что $T^n=PB^n$, $n=1, 2, \ldots$, где P — ортопроектор из K на H. Всякое С. в гильбертовом пространстве H обладает унитарной дилатацией U в пространстве $K \supset H$ и притом минимальной в том смысле, что $K=$ з. л. о. $\{U^n H\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ (**теорема Сёкефальви-Надя**). Минимальные унитарные дилатации и определенные на основе спектральной теории функции от них позволяют построить функциональное исчисление для С., развитое в основном для ограниченных аналитич. функций в открытом единичном круге D (класс Харди H^∞). Вполне неунитарное сжатие T принадлежит, по определению, классу C_0, если существует функция $u \in H^\infty$, $u(\lambda) \not\equiv 0$, такая, что $u(T)=0$. Класс C_0 содержится в классе C_{00} сжатий T, для к-рых $T^n \to 0$, $T^{*n} \to 0$ при $n \to \infty$. Для всякого сжатия T класса C_0 существует т. н. **минимальная функция** $m_T(\lambda)$ (т. е. внутренняя функция $u \in H^\infty$, $|u(\lambda)| \leqslant 1$ в D, $|u(e^{it})|=1$ почти всюду на границе D) такая, что $u(T)=0$ и $u(\lambda)$ является делителем всех прочих внутренних функций, обладающих тем же свойством. Множество нулей минимальной функции $m_T(\lambda)$ сжатия T в D вместе с дополнением до единичной окружности к объединению тех дуг, через к-рые $m_T(\lambda)$ допускает аналитич. продолжение, совпадает со спектром $\sigma(T)$. Понятие минимальной функции сжатия T класса C_0 позволяет распространить для этого класса С. функциональное исчисление на нек-рые мероморфные в D функции.

Теоремы об унитарных дилатациях получены не только для индивидуальных С., но и для дискретных $\{T^n\}$, $n=0, 1, \ldots$, и непрерывных $\{T(s)\}$, $0 \leqslant s \leqslant \infty$, полугрупп С.

Как и для *диссипативных операторов*, для С. построена теория их характеристич. оператор-функций и на ее основе — функциональная модель, позволяющая изучать структуру С. и соотношения между спектром, минимальной функцией и характеристич. функцией (см. [1]). Преобразованием Кэли

$$A=(I+T)(I-T)^{-1}, \quad 1 \notin \sigma_p(T),$$

сжатие T связано с максимальным аккретивным оператором A, т. е. таким, что iA — максимальный диссипативный оператор. На этой основе строится теория диссипативных расширений B_0 симметрич. операторов A_0 (соответственно диссипативных по Филлипсу расширений iB_0 консервативных операторов iA_0).

Для С. разработана теория подобия, квазиподобия и одноклеточности. Теория С. тесно связана с теорией прогнозирования стационарных случайных процессов и теорией рассеяния. В частности, схему Лакса — Филлипса [2] можно рассматривать как континуальный аналог теории Сёкефальви-Надя—Фояша С. класса C_{00}.

Лит.: [1] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970; [2] Лакс П. Д., Филлипс Р. С., Теория рассеяния, пер. с англ., М., 1971. *И. С. Иохвидов.*

СЖАТИЕ алгебры Ли, **стягивание алгебры Ли**, — операция, противоположная *деформации* алгебры Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная вещественная алгебра Ли, $\{c_{ij}^k\}$ — набор ее структурных констант в фиксированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ и $A(t)$, $0<t\leqslant 1$,— кривая в группе невырожденных линейных преобразований пространства $\mathfrak{g}$ такая, что $A(1)=E$. Пусть $e_i(t)=A(t)e_i$ и $c_{ij}^k(t)$ — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ в базисе $\{e_i(t)\}$. Если $c_{ij}^k(t)$ при $t\to 0$ стремятся к нек-рому пределу $c_{ij}^k(0)$, то алгебра $\overline{\mathfrak{g}}$, определяемая этими константами в исходном базисе, наз. **сжатием** исходной алгебры $\mathfrak{g}$. Сжатие $\overline{\mathfrak{g}}$ также является алгеброй Ли, причем $\mathfrak{g}$ можно получить путем деформации алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$. Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G, то группу Ли $\overline{G}$, соответствующую $\overline{\mathfrak{g}}$, также наз. **сжатием группы** G.

Хотя $\dim \mathfrak{g}=\dim \overline{\mathfrak{g}}$, эти алгебры, вообще говоря, не изоморфны: напр., если $A(t)=tE$, то $c_{ij}^k(t)=tc_{ij}^k\to 0$, так что при таком С. предельная алгебра всегда коммутативна. Естественное обобщение этого примера состоит в следующем: пусть $\mathfrak{a}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ — дополнительное к $\mathfrak{a}$ подпространство, причем $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]\subseteq \mathfrak{b}$, и $A(t)v=v$ для $v\in\mathfrak{a}$, $A(t)v=tv$ для $v\in\mathfrak{b}$. Тогда в пределе $\mathfrak{b}$ становится коммутативным идеалом алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$, в то время как умножение в $\mathfrak{a}$ и присоединенное действие алгебры $\mathfrak{a}$ на $\mathfrak{b}$ остаются неизменными.

В частности, пусть G — группа Лоренца, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — подалгебра, соответствующая подгруппе вращений 3-мерного пространства. Тогда описанное С. алгебры $\mathfrak{g}$ дает алгебру Ли группы Галилея $\overline{G}$ (см. *Галилея преобразование*, *Лоренца преобразование*). Соответственно алгебра Лоренца является деформацией алгебры Галилея и можно показать, что комплексификация алгебры Галилея других деформаций не имеет; в вещественном случае алгебру Галилея можно получить также С. ортогональной алгебры Ли $so(4)$. Эквивалентный способ получения алгебры Галилея из алгебры Лоренца состоит в том, чтобы определить алгебру Лоренца как алгебру, сохраняющую форму Минковского $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$, и затем устремить скорость света c к ∞. Пока $c<\infty$, возникающие алгебры изоморфны $\mathfrak{g}$. Аналогично, деформируя алгебру Пуанкаре (неоднородную алгебру Лоренца), можно получить алгебры де Ситтера $so(4,1)$ и $so(3,2)$ движений пространства постоянной кривизны. Соответственно, устремляя кривизну к 0, получают группу Пуанкаре как С. групп де Ситтера.

Связь между этими алгебрами продолжается на представления. Если, как в описанных примерах, существует матрица $A(0)=\lim\limits_{t\to 0} A(t)$, то каждое представление S алгебры $\mathfrak{g}$ порождает представление $\overline{S}$ сжатой алгебры по формуле

$$\overline{S}(x)=S(A(0)x)$$

для любого $x\in\overline{\mathfrak{g}}$. Обратная операция (деформация представлений), вообще говоря, невозможна.

Лит.: [1] Барут А., Рончка Р., Теория представлений групп и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1980; [2] Inönü E., Wigner E. P., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1953, v. 39, p. 510—24; [3] Saletan E. J., «J. Math. Phys.», 1961, v. 2, p. 1—22. *А. К. Толпыго.*

СЖАТИЙ ПОЛУГРУППА — однопараметрически сильно непрерывная полугруппа $T(t)$, $0\leqslant t<\infty$, $T(0)=I$, линейных операторов в банаховом пространстве E, для к-рых $\|T(t)\|\leqslant 1$. Плотно определенный в E оператор A будет **производящим оператором** (**генератором**) С. п. тогда и только тогда, когда выполнено условие Хилле — Иосиды

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\lambda}$$

при всех $\lambda>0$. В других терминах: плотно определенный оператор A — генератор С. п. тогда и только тогда, когда он является максимальным *диссипативным оператором*.

Детально изучены С. п. в гильбертовом пространстве H. Частными видами С. п. являются полугруппы изометрий ($\|Tx\|=\|x\|$), унитарные полугруппы ($T^*(t)=T^{-1}(t)$), самосопряженные полугруппы ($T^*(t)=T(t)$), нормальные полугруппы ($T^*(t)T(t)=T(t)T^*(t)$). Вместо генератора A иногда удобно рассматривать его преобразование Кэли: $B=(A+I)(A-I)^{-1}$ (когенератор). Оказывается, что полугруппа будет полугруппой изометрий, унитарной, самосопряженной, нормальной полугруппой тогда и только тогда, когда когенератор соответственно будет изометрическим, унитарным, самосопряженным, нормальным оператором.

С. п. наз. вполне неунитарной, если ее сужение на любое инвариантное подпространство не является унитарным. Для вполне неунитарной полугруппы $(T(t)x, \ y)\to 0$ при $t\to\infty$ и любых $x, y\in H$. Для того чтобы С. п. была вполне неунитарной, достаточно, чтобы она была устойчивой, т. е. чтобы $\|T(t)x\|\to 0$ при $t\to\infty$ и $x\in H$.

Для всякой С. п. $T(t)$ существует такое ортогональное разложение $H=H_1\oplus H_2$ на инвариантные относительно $T(t)$ подпространства, что на H_1 полугруппа унитарна, а на H_2 вполне неунитарна.

Если $T(t)$ есть С. п. в гильбертовом пространстве H, то существует более широкое гильбертово пространство $\tilde{H}$, содержащее H как подпространство, и в нем такая унитарная группа $U(t)$, $-\infty<t<\infty$, что $T(t)=PU(t)$ при $t\geq 0$, где P — ортогональный проектор из $\tilde{H}$ на H. Группа $U(t)$ наз. унитарной дилатацией полугруппы $T(t)$. Дилатация определяется однозначно с точностью до изоморфизма, если потребовать, чтобы $\tilde{H}$ совпадало с замкнутой линейной оболочкой множества $\bigcup U(t)H$ $(-\infty<t<\infty)$ (минимальная дилатация).

Пусть N — гильбертово пространство и $L_2(\mathbb{R}, N)$ — гильбертово пространство всех измеримых N-значных функций $f(s)$, $s\in\mathbb{R}$, с интегрируемым квадратом нормы. В этом пространстве определена унитарная группа двустороннего сдвига $(U(t)f)(s)=f(s-t)$. Аналогично, в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, \ N)$, $\mathbb{R}_+=(0, \ \infty)$ определена полугруппа одностороннего сдвига

$$(U(t)f)(s)=f(s-t) \text{ при } 0\leq t<s \text{ и } 0 \text{ при } t>s.$$

Всякая вполне неунитарная полугруппа изометрий изоморфна одностороннему сдвигу в $L_2(\mathbb{R}_+, N)$, при нек-ром вспомогательном пространстве N.

Если $T(t)$ — вполне неунитарная С. п. и $U(t)$ — ее минимальная унитарная дилатация, то на нек-ром инвариантном подпространстве $\tilde{H}$ (а если $T(t)$ устойчива, то и на всем $\tilde{H}$) группа изоморфна двустороннему сдвигу. О полугруппах сжатия с нелинейными операторами см. *Полугруппа нелинейных операторов*.

Лит.: [1] Davies E., One-parameter semigroups, L.—[a.o.], 1980; [2] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970. *С. Г. Крейн.*

СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРИНЦИП — одно из основных положений теории метрич. пространств о существовании и единственности неподвижной точки множества при нек-ром специальном («сжимающем») отображении его в себя. См. *Сжимающих отображений принцип*.

СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРИНЦИП, сжатых отображений принцип,— теорема, утверждающая существование и единственность *неподвижной точки* у отображения f полного метрич. пространства (X, ρ) (или замкнутого подмножества такого пространства) в себя, если для любых x', x'' выполняется неравенство

$$\rho(f(x'), f(x'')) \leqslant q\rho(x', x''), \qquad (1)$$

где $0<q<1$. Этот принцип широко используется для доказательства существования и единственности решения не только уравнения вида $f(x)=x$, но и уравнений $f(x)=y$ путем замены такого уравнения на эквивалентное: $\tilde{f}(x)=x$, где $\tilde{f}(x)=x\pm(f(x)-y)$.

Схема применения С. о. п. обычно такова: исходя из свойств отображением f находят сначала замкнутое множество $M\subset X$, обычно замкнутый шар, такое, что $f(M)\subset M$, а затем доказывают, что на этом множестве f является отображением сжатия. После этого, отправляясь от произвольного элемента $x_0\in M$, строят последовательность $\{s_n\}$, $x_n=f(x_{n-1})$, $n=1, 2, \ldots$, принадлежащую M, к-рая сходится к нек-рому элементу $\tilde{x}\in M$. Это и будет единственное решение уравнения $f(x)=x$, а x_n будут последовательными приближениями решения.

В общем случае условие (1) нельзя заменить условием

$$\rho(f(x'), f(x'')) < \rho(x', x''), \qquad (2)$$

однако если это условие выполняется на компактном множестве K, к-рое f отображает в себя, то условие (2) обеспечивает у f существование единственной неподвижной точки $\tilde{x}\in K$.

Имеет место следующее обобщение С. о. п. Пусть снова f отображает полное метрич. пространство X в себя и

$$\rho(f(x'), f(x'')) \leqslant q(\alpha, \beta)\rho(x', x'')$$

при $\alpha\leqslant\rho(x', x'')\leqslant\beta$, где $0<q(\alpha, \beta)<1$ для $0<\alpha\leqslant\beta<\infty$. Тогда отображение f имеет на X единственную неподвижную точку.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [3] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [4] Треногин В. А., Функциональный анализ, М., 1980.

В. И. Соболев.

СИГНАТУРА — 1) С. алгебраической системы — совокупность отношений и операций, действующих на основном множестве данной алгебраич. системы, вместе с указанием их арностей. Алгебраич. система (универсальная алгебра) с сигнатурой Ω наз. также Ω-системой (соответственно Ω-алгеброй).

2) С. квадратичной или симметрической билинейной формы над упорядоченным полем — пара целых неотрицательных чисел (p, q), где p — положительный, а q — отрицательный индекс инерции данной формы (см. *Инерции закон*, *Квадратичная форма*). Иногда С. формы наз. число $p-q$.

О. А. Иванова.

3) С. многообразия M^n — сигнатура квадратичной формы

$$Q_M(x)=(x\cup x, O),$$

где $\cup$ — внутреннее когомологическое умножение, $O\in H_n(M; \mathbb{Z})$ — фундаментальный класс. Многообразие предполагается компактным и ориентируемым. С. обозначается $\sigma(M)$.

Если $n\not\equiv 0 \bmod 4$, то полагают $\sigma(M)=0$. С. обладает свойствами:

1) $\sigma(M+M')=\sigma(M)+\sigma(M')$;

2) $\sigma(M\times M')=\sigma(M)\sigma(M')$;

3) $\sigma(\partial N)=0$.

С. многообразия может быть представлена как линейная функция от его *Понтрягина классов* (см. [2]).

О представлении С. как индекса нек-рого дифференциального оператора см. *Индекса формулы*.

Лит.: [1] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976; [2] Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979.

М. И. Войцеховский.

СИГНУМ — функция действительного переменного x, равная 1, если x положительно, равная 0, если x равно нулю, и равная -1, если x отрицательно. Обозначение: $\operatorname{sgn} x$ или $\operatorname{sign} x$. Таким образом,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Ю. А. Горьков.

СИЗИГИЯ — астрономический термин, означающий расположение трех небесных тел на одной прямой. В алгебре употребляется в значении соотношения. Пусть M — левый A-модуль, $(m_i)_{i \in I}$ — семейство элементов из M; соотношением, или сизигией, между (m_i) наз. набор $(a_i)_{i \in I}$ элементов кольца A такой, что $\sum_i a_i m_i = 0$. Так возникает модуль сизигий, цепь сизигий и т. д. См. *Гильберта теорема* о сизигиях.

В. И. Данилов.

СИЛОВА ПОДГРУППА, силовская подгруппа, — максимальная π-подгруппа группы, где π — нек-рое множество простых чисел, т. е. периодич. подгруппа, порядки элементов к-рой делятся только на простые числа из π, и не содержащаяся ни в какой большей подгруппе с таким свойством (силовская π-подгруппа). Основное значение для теории групп имеют силовские p-подгруппы, то есть С. п., множество π у к-рых состоит из единственного простого числа p. Название дано в честь Л. Силова (L. Sylow), доказавшего ряд теорем о таких подгруппах в конечной группе (см. *Силова теоремы*).

С. п. играют важную роль в теории конечных групп. Так, вопрос о дополняемости нормальной абелевой подгруппы сводится к такому же вопросу для силовских подгрупп; существование нетривиальной p-факторгруппы связано с существованием нетривиальной p-факторгруппы у нормализатора силовской p-подгруппы; строение конечной простой группы во многом определяется строением ее силовской 2-подгруппы. В теории бесконечных групп, исключая теорию локально конечных групп, роль С. п. меньше, поскольку уже основной вопрос о сопряженности силовских p-подгрупп решается положительно только в отдельных классах бесконечных групп.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982; [2] Шеметков Л. А., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, № 2, с. 179—98; [3] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 45—61; [4] Huppert B., Endliche Gruppen, [Bd] 1, B., 1974.

В. Д. Мазуров.

СИЛОВА ТЕОРЕМЫ — три теоремы о максимальных p-подгруппах конечной группы, доказанные Л. Силовым [1] и играющие большую роль в теории конечных групп. Иногда объединение всех трех теорем наз. теоремой Силова.

Пусть G — конечная группа порядка $p^m s$, где p — простое число, не делящее число s. Тогда имеют место следующие теоремы.

Первая теорема Силова: группа G содержит подгруппы порядков p^i для всех $i=1, 2, \ldots, m$, причем каждая подгруппа порядка p^{i-1} является нормальной подгруппой по крайней мере в одной подгруппе порядка p^i. Из этой теоремы, в частности, следуют такие важные утверждения: в группе G существует *Силова подгруппа* порядка p^m; любая p-подгруппа группы G содержится в нек-рой силовской p-подгруппе порядка p^m, индекс силовской p-подгруппы не делится на p; если $G=P$ есть группа порядка p^m, то любая ее собственная подгруппа содержится в нек-рой максимальной подгруппе порядка p^{m-1} и все максимальные подгруппы группы P нормальны.

Вторая теорема Силова: все силовские p-подгруппы конечной группы сопряжены между собой. Для бесконечных групп аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно.

Третья теорема Силова: число силовских p-подгрупп конечной группы делит порядок группы и сравнимо с единицей по модулю p.

Для произвольных множеств π простых чисел аналогичные теоремы о силовских π-подгруппах получены лишь в классе конечных разрешимых групп (см. *Холла подгруппа*). В неразрешимых группах ситуация иная. Напр., в знакопеременной группе A_5 степени 5 для $\pi=\{2, 3\}$ есть силовская π-подгруппа S порядка 6, индекс к-рой делится на число из π. Кроме того, в A_5 есть силовская π-подгруппа, изоморфная A_4 и несопряженная с S. Число силовских π-подгрупп в A_5 не делит порядок группы A_5.

Лит.: [1] Sylow L., «Math. Ann.», 1872, Bd 5, S. 584—94; [2] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

В. Д. Мазуров.

СИЛЬНАЯ ГОМОЛОГИЯ — см. *Слабая гомология*.

СИЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — то же, что *Фреше производная*.

СИЛЬНО НЕПРЕРЫВНАЯ ПОЛУГРУППА — семейство линейных ограниченных операторов $T(t)$, $t>0$, в банаховом пространстве X, обладающее свойствами:

1) $T(t+\tau)x=T(t)T(\tau)x$, t, $\tau>0$, $x\in X$;

2) функции $T(t)x$ непрерывны на $(0, \infty)$ при любом $x\in X$.

При выполнении 1) из измеримости всех функций $T(t)x$, $x\in X$, и, в частности, из односторонней (справа или слева) слабой непрерывности следует сильная непрерывность $T(t)$. Для С. н. п. конечное число

$$\omega=\inf_{t>0} t^{-1}\ln\|T(t)\|=\lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln\|T(t)\|$$

наз. типом полугруппы. Таким образом, нормы всех функций $T(t)x$ растут на ∞ не быстрее экспоненты $e^{\omega t}$. Классификация С. н. п. основана на их поведении при $t\to 0$. Если существует такой ограниченный оператор J, что $\|T(t)-J\|\to 0$ при $t\to 0$, то J — проекционный оператор и $T(t)=Je^{tA}$, где A — ограниченный линейный оператор, коммутирующий с J. В этом случае $T(t)$ непрерывна по норме операторов. Если $J=I$, то $T(t)=e^{tA}$, $-\infty<t<\infty$,— равномерно непрерывная группа операторов.

Если $T(t)x\to Jx$ при каждом $x\in X$, то J — также проекционный оператор, проектирующий X на подпространство X_0 — замыкание объединения всех значений $T(t)x$, $t>0$, $x\in X$.

Для того чтобы J существовал и равнялся I, необходимо и достаточно, чтобы $\|T(t)\|$ была ограничена на (0,1) и чтобы $X_0=X$. В этом случае полугруппа $T(t)$, доопределенная равенством $T(0)=I$, сильно непрерывна при $t\geqslant 0$ (удовлетворяет C_0-условию). Для более широких классов полугрупп предельное соотношение $T(t)\to I$ выполняется в обобщенном смысле:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)x\,d\tau=x,\ x\in X$$

(суммируемость по Чезаро, C_1-условие), или

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}T(\tau)x\,d\tau=x,\ x\in X$$

(суммируемость по Абелю, A - условие). При этом предполагается, что функции $\|T(t)x\|$, $x\in X$, интегрируемы на [0,1] (а значит, и на любом конечном отрезке).

Поведение С. н. п. при $t \to 0$ может быть совсем нерегулярным. Напр., функции $\|T(t)x\|$ могут иметь при $t=0$ степенную особенность.

Для плотного в X_0 множества элементов x функции $T(t)x$ дифференцируемы на $[0, \infty)$. Важную роль играют С. н. п., для к-рых функции $T(t)x$ дифференцируемы при всех x для $t>0$. В этом случае оператор $T'(t)$ ограничен при каждом t и его поведение при $t \to 0$ дает новые возможности для классификации полугрупп. Выделены классы С. н. п., для к-рых $T(t)$ допускает голоморфное продолжение в сектор комплексной плоскости, содержащий полуось $(0, \infty)$.

См. *Полугруппа операторов*, *Производящий оператор полугруппы*.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., М., 1962. *С. Г. Крейн.*

СИЛЬНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ неопределенного интеграла — нахождение сильной производной неопределенного интеграла

$$F(I) = \int_I f(x)\,dx$$

действительнозначной функции f, суммируемой на открытом подмножестве G n-мерного евклидова пространства, рассматриваемого как функция сегмента. Если

$$|f|\,(\ln(1+|f|))^{n-1}$$

суммируема на G (в частности, если $f \in L^p(G)$, $p>1$), то интеграл F от f сильно дифференцирует почти всюду на G. Для любой $\varphi(u)$, $u \geqslant 0$, положительной, неубывающей и такой, что

$$\varphi(u) = o(u \ln^{n-1} u)$$

при $u \to \infty$, существует такая суммируемая на G функция $f \geqslant 0$, что $\varphi(f(t))$ также суммируема и отношение $F(I)/|I|$ неограниченно в каждой точке $x \in G$ при I, стремящемся к x, то есть F не является С. д.

Лит.: [1] Jessen B., Marcinkiewicz J., Zygmund A., «Fund. Math.», 1935, v. 25, p. 217—34; [2] Saks S., «Fund. Math.», 1935, v. 25, p. 235—52; [3] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., [2 изд.], т. 2, М., 1965.

Т. П. Лукашенко.

СИЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ дифференциального уравнения

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f \qquad (*)$$

в области D — это локально интегрируемая функция u, к-рая имеет локально интегрируемые обобщенные производные всех порядков $\leqslant m$ и удовлетворяет уравнению (*) почти всюду в области D.

Понятие «С. р.» может быть введено и таким образом. Функция u наз. С. р. уравнения (*), если существуют такие последовательности гладких (напр., класса C^∞) функций $\{u_n\}$, $\{f_n\}$, что $u_n \to u$, $f_n \to f$ и $Lu_n = f_n$ при каждом n, где сходимость понимается в $L_1(K)$ для любого компакта $K \subseteq D$. В этих определениях L_1 можно заменить классом L_p локально интегрируемых со степенью $p \geqslant 1$ функций. Наиболее употребительным является класс L_2.

В случае эллиптич. уравнения (*) оба понятия С. р. совпадают. *А. П. Солдатов.*

СИЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл лебеговского типа от функций со значениями в линейном топологич. пространстве по скалярной мере или от скалярной функции по мере со значениями в векторном пространстве. При этом предельные процессы, с помощью к-рых определяется интеграл, понимаются в смысле сильной топологии. Примерами С. и. являются:

1) *Бохнера интеграл* от векторнозначной функции;
2) *Даниеля интеграл*, если значения подынтеграль-

ной функции принадлежат σ-полной векторной решетке;

3) интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dF_\lambda$, дающий *спектральное разложение* самосопряженного оператора, действующего в гильбертовом пространстве.

В С. и. от скалярных функций по векторной мере значения меры во многих случаях предполагаются принадлежащими векторному *полуупорядоченному пространству*.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Д ж.-Т., Линейные операторы, пер. с англ., т. 1—2, М., 1962—66; [2] Hildebrandt T. H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 59, p. 111—139.

В. И. Соболев.

СИЛЬНЫЙ ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ МИНИМУМ — минимальное значение $J(\tilde{y})$, достигаемое функционалом $J(y)$ на кривой $\tilde{y}(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, такое, что

$$J(\tilde{y}) \leqslant J(y) \qquad (1)$$

для всех кривых сравнения $y(x)$, удовлетворяющих условию ε-близости нулевого порядка:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (2)$$

на всем промежутке $[x_1, x_2]$. Предполагается, что кривые $\tilde{y}(x)$, $y(x)$ удовлетворяют заданным граничным условиям.

Если, помимо условия (2), требующего ε-близости по ординате, добавить условие ε-близости по производной:

$$|y'(x) - \tilde{y}'(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (3)$$

на всем промежутке $[x_1, x_2]$, то говорят об условии ε-близости первого порядка.

Значение, достигаемое функционалом $J(y)$ на кривой $\tilde{y}(x)$, для к-рого неравенство (1) выполняется для всех кривых сравнения $y(x)$, удовлетворяющих условию ε-близости первого порядка, наз. слабым относительным минимумом.

Поскольку условие ε-близости нулевого порядка (2) выделяет более широкий класс кривых по сравнению с условием ε-близости первого порядка (2), (3), то всякий сильный минимум является одновременно слабым минимумом, но не всякий слабый минимум является сильным. В связи с указанным различием необходимые, а также достаточные условия оптимальности для сильного и слабого относительного минимума имеют неодинаковый вид.

Наряду с понятием С. о. м. можно ввести понятие абсолютного минимума. Абсолютный минимум — это минимальное значение $J(\tilde{y})$, достигаемое функционалом $J(y)$ на всем множестве кривых, на к-рых функционал $J(y)$ имеет смысл. Абсолютный минимум является глобальным, а сильный и слабый относительные минимумы — локальными минимумами.

Абсолютный минимум является одновременно и С. о. м., но не всякий С. о. м. является абсолютным минимумом.

Вариационную задачу, имеющую более одного С. о. м., наз. *многоэкстремальной задачей*. При решении практических вариационных задач С. о. м. находят приближенно, используя численные методы вариационного исчисления (см. *Вариационное исчисление*; численные методы).

Для задач, в к-рых С. о. м. единственный, необходимые условия оптимальности С. о. м. являются одновременно достаточными условиями абсолютного минимума. Такая ситуация имеет место, напр., в теории оптимального управления для линейных задач оптимального быстродействия (см. *Оптимального быстродействия задача*), а также для нек-рых других классов задач вариационного исчисления.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.—Л., 1950; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М.,
И. Б. Вапнярский.

СИЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ — минимальное или максимальное значение $J(\tilde{y})$, достигаемое функционалом $J(y)$ на кривой $\tilde{y}(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, для к-рого выполняется одно из неравенств

$$J(\tilde{y}) \leqslant J(y) \text{ или } J(\tilde{y}) \geqslant J(y)$$

для всех кривых сравнения $y(x)$, находящихся в ε-окрестности кривой $\tilde{y}(x)$. Кривые $\tilde{y}(x)$, $y(x)$ должны удовлетворять заданным граничным условиям.

Поскольку максимизация функционала $J(y)$ эквивалентна минимизации функционала $-J(y)$, то часто вместо сильного экстремума говорят о сильном минимуме. Термин «сильный» подчеркивает, что на кривые сравнения $y(x)$ наложено условие ε-близости только по $y(x)$:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant \varepsilon$$

на всем промежутке $[x_1, x_2]$, тогда как по производной кривые $y(x)$ и $\tilde{y}(x)$ могут отличаться как угодно «сильно».

По самому своему определению С. э. является сильным относительным экстремумом, поскольку дает экстремум не абсолютный, т. е. не на всем классе допустимых кривых сравнения $y(x)$, на к-рых функционал $J(y)$ имеет смысл, а локальный, относительный, соответствующий подмножеству всех допустимых кривых сравнения, находящихся в ε-окрестности кривой $\tilde{y}(x)$. Однако для краткости термин «относительный» часто опускают и говорят о С. э., имея в виду сильный относительный экстремум (см. *Сильный относительный минимум*).

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.—Л., 1950; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957.
И. Б. Вапнярский.

СИМВОЛ ОПЕРАТОРА — скалярная или матричная функция, ассоциированная с оператором и обладающая свойствами, в той или иной форме отражающими свойства этого оператора. Обычно считается, что С. о. заданы для операторов, принадлежащих нек-рой алгебре. Тогда, как правило, при сложении операторов их символы складываются, а при умножении — перемножаются с точностью до членов, в нек-ром смысле являющихся младшими, но иногда и точно. Бывает, что С. о. — это функция со значениями в нек-рой алгебре (в частности, операторной алгебре), более простой, чем исходная.

Обычно символы ассоциируются с операторами, действующими в функциональных пространствах. Тогда одна из типичных ситуаций состоит в том, что если оператор действует на функции от n переменных (или, более общо, на функции на n-мерном многообразии), то его символ — функция от $2n$ переменных (или на $2n$-мерном многообразии). На основе использования таких С. о. строится теория *псевдодифференциальных операторов*. Соответствие между символами и операторами является основой квантования, при к-ром символ является классич. величиной, а сам оператор — соответствующей квантовой величиной.

Символы операторов в $\mathbb{R}^n$. Пусть дан полином

$$a(p, q) = \sum\nolimits_{|\alpha+\beta| \leqslant m} a_{\alpha\beta} q^{\alpha} p^{\beta},$$

где $q, p \in \mathbb{R}^n$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — мультииндексы (т. е., напр., $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geqslant 0$, α_j — целые, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$). Тогда по нему несколькими различными способами можно построить оператор A, действующий на функциях на $\mathbb{R}^n$, подставляя вместо q_j оператор $\hat{q}_j$ умножения на одну из координат x_j в $\mathbb{R}^n$, а вместо p_j — оператор $\hat{p}_j = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, где $i=\sqrt{-1}$, h — произвольная постоянная (играющая роль постоянной Планка). Если при этом менять порядок букв q и p, то получатся разные операторы. Если положить

$$A = a\left(\overset{2}{\hat{q}}, \overset{1}{\hat{p}}\right) = \sum_{|\alpha+\beta| \leqslant m} a_{\alpha\beta}\hat{q}^{\alpha}\hat{p}^{\beta},$$

то $a(q, p)$ наз. qp-символом, или левым символом оператора A. Получаемое таким образом соответствие между левыми символами и операторами является взаимно однозначным соответствием между полиномами и дифференциальными операторами с полиномиальными коэффициентами и может быть распространено на значительно более широкие классы операторов и символов, если воспользоваться формулой

$$(Au)(x) = (2\pi h)^{-n} \int e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} a(x, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi,$$

где $z\xi = z_1\xi_1 + \ldots + z_n\xi_n$ для n-мерных векторов $z = (z_1, \ldots, z_n)$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $dy = dy_1, \ldots, dy_n$, $d\xi = d\xi_1 \ldots d\xi_n$.

Оператор A с pq-символом, или правым символом $a(q, p)$ определяется формулой

$$A = a\left(\overset{1}{\hat{q}}, \overset{2}{\hat{p}}\right) = \sum_{|\alpha+\beta| \leqslant m} a_{\alpha\beta}\hat{p}^{\beta}\hat{q}^{\alpha}$$

или для более общих символов

$$(Au)(x) = (2\pi h)^{-n} \int e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} a(y, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi.$$

Более симметричный способ построения оператора по полиному $a(q, p)$ получается, если ввести для некоммутирующих операторов B, C симметризованное произведение (B^kC^l) формулой

$$(sB+tC)^n = \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!\, l!} s^k t^l (B^kC^l),$$

а затем положить

$$A = \sum_{|\alpha+\beta| \leqslant m} a_{\alpha\beta}\left(\hat{q}_1^{\alpha_1}\hat{p}_1^{\beta_1}\right)\ldots\left(\hat{q}_n^{\alpha_n}\hat{p}_n^{\beta_n}\right).$$

Тогда $a(q, p)$ наз. символом Вейля оператора A. Оператор A может быть записан через символ Вейля по формуле

$$(Au)(x) = (2\pi h)^{-n} \int e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy\, d\xi.$$

Вторичное квантование приводит к появлению еще двух видов символов операторов на $\mathbb{R}^n$ — виковского и антивиковского. А именно, если ввести операторы рождения $a_j^+ = \hat{q}_j - i\hat{p}_j$ и операторы уничтожения $a_j^- = \hat{q}_j + i\hat{p}_j$ и записать дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами в виде

$$A = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta}(a^+)^{\alpha} a^{\beta}$$

или в виде

$$A = \sum_{\alpha, \beta} c'_{\alpha\beta} a^{\beta} (a^+)^{\alpha},$$

то его виковский символ $c(q, p)$ и антивиковский символ $a(q, p)$ задаются соответственно формулами

$$c(q, p) = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta}(q-ip)^{\alpha}(q+ip)^{\beta},$$

$$a(q, p) = \sum_{\alpha, \beta} c'_{\alpha\beta}(q-ip)^{\alpha}(q+ip)^{\beta}.$$

О формулах, связывающих разные виды символов одного и того же оператора, см. в [1]—[4].

Символы операторов на многообразии. Если символы описанных выше типов на $\mathbb{R}^n$ взаимно однозначно соответствуют операторам нек-рых достаточно широких классов, то на многообразии, как правило, нет естественных символов, для к-рых существовало бы такое взаимно однозначное соответствие. На многообразии важную роль играет т. н. главный символ, к-рый определяется для нек-рых псевдодифференциальных операторов и является однородной функцией на $T^*X \setminus O$ — кокасательном расслоении многообразия X без нулевого сечения. Его обратимость означает, что рассматриваемый оператор A является эллиптическим и гарантирует выполнение теоремы регулярности, т. е. гладкости решений уравнения $Au=f$ с гладкой правой частью f, а также фредгольмовость оператора A (в случае компактного X) в подходящих пространствах Соболева. При сложении и умножении операторов их главные символы соответственно складываются и перемножаются. Главный символ не меняется при добавлении к оператору членов меньшего порядка.

Символы операторов на многообразии с краем. На многообразии с краем X псевдодифференциальный оператор имеет вид матрицы (см. [5]):

$$\mathfrak{A}=\begin{Vmatrix} A+B & K \\ T & Q \end{Vmatrix} : \begin{matrix}\Gamma(E_1)\\ \oplus \\ \Gamma(G_1)\end{matrix} \to \begin{matrix}\Gamma(E_2)\\ \oplus \\ \Gamma(G_2)\end{matrix},$$

где E_1, E_2 — векторные расслоения на X, G_1, G_2 — векторные расслоения на Y, A — псевдодифференциальный оператор на X, удовлетворяющий *трансмиссии условию*, T — граничный оператор, т. е. оператор взятия каких-то граничных условий (вообще говоря, псевдодифференциальных), K — кограничный оператор, или оператор типа потенциала, B — сингулярный оператор Грина (так называются композиции граничных и кограничных операторов и нек-рые более общие операторы аналогичной структуры), Q— псевдодифференциальный оператор на Y. Оператор $\mathfrak{A}$ имеет символы двух типов: внутренний и граничный. Внутренний символ $\sigma^0(\mathfrak{A})$ — это обычный символ оператора A, являющийся функцией на $T^*X \setminus O$, точнее, сечением расслоения $\mathrm{Hom}(\pi^*E_1, \pi^*E_2)$, где $\pi : T^*X \setminus O \to X$ — канонич. проекция. Граничный символ $\sigma_Y(\mathfrak{A})$ — это функция на $T^*Y \setminus O$, значения к-рой — операторы на полуоси $[0, \infty)$, получающиеся из $\mathfrak{A}$ замораживанием коэффициентов главной части в точке границы (в координатах, в к-рых граница является гиперплоскостью) и последующим преобразованием Фурье по касательным переменным. Обратимость $\sigma^0(\mathfrak{A})$ — это обычная эллиптичность оператора A. Если предположить эту эллиптичность, то обратимость $\sigma_Y(\mathfrak{A})$ в классах убывающих функций на полуоси — это фактически условие эллиптичности граничной задачи, определяемой оператором $\mathfrak{A}$, или т. н. условие Шапиро—Лопатинского. Таким образом, символом $\mathfrak{A}$ естественно называть пару $\{\sigma^0(\mathfrak{A}), \sigma_Y(\mathfrak{A})\}$. Если обратимы оба символа $\sigma^0(\mathfrak{A})$ и $\sigma_Y(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{A}$ наз. эллиптическим, и в этом случае для него верны обычные теоремы о регулярности и фредгольмовости (последняя — когда X компактно).

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965; [2] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973; [3] Шубин М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978; [4] Березин Ф. А., «Матем. сб.», 1971, т. 86, № 4, с. 578—610; [5] Boutet de Monvel L., «Acta math.», 1971 v. 126, p. 11—51. *М. А. Шубин.*

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА — 1) С. д. в узком смысле слова — исследование определяемого ниже топологич. автоморфизма Бернулли σ — его инвариантных замкнутых подмножеств, инвариантных мер и т. д. Топологический автоморфизм Бернулли σ действует в пространстве Ω бесконечных двусторонних последовательностей символов из нек-рого алфавита A (обычно конечного), снабженном топологией прямого произведения бесконечного числа экземпляров A (в каждом из к-рых обычно берется дискретная топология). А именно, σ переводит последовательность $\omega=\{\omega_i\}$ в $\omega'=\{\omega'_i\}$, где $\omega'_i=\omega_{i+1}$ («сдвиг последовательности на один шаг налево»). Очевидное обобщение — действие группы (или полугруппы) G в пространстве A^G.

Пусть нек-рые пары (a, b) символов из A объявлены «допустимыми». Всевозможные последовательности $\{\omega_i\}$, для к-рых при всех i пары (ω_i, ω_{i+1}) допустимы, образуют нек-рое замкнутое инвариантное (относительно σ) подмножество $\Omega_1\subset\Omega$. Это — важнейший пример инвариантного подмножества топологич. автоморфизма Бернулли. Динамич. система в Ω_1, порожденная сдвигом $\sigma|\Omega_1$, наз. топологической цепью Маркова.

2) С. д. в широком смысле слова — применение С. д. в узком смысле слова к исследованию динамич. систем, к-рые сами по себе определяются совершенно независимо от Ω и σ.

Лит.: [1] Алексеев В. М., Символическая динамика, К., 1976 (Одиннадцатая [летняя] математическая школа, ч. 1); [2] Боуэн Р., *Методы символической динамики*, пер. с англ., М., 1979 (Новое в зарубежной науке. Математика, в. 13).

Д. В. Аносов.

СИММЕТРИЗАЦИИ МЕТОД (в теории функций) — один из методов решения экстремальных задач геометрич. теории функций. В основе метода лежит понятие *симметризации* замкнутых и открытых множеств n-мерного евклидова пространства. Впервые С. м. в теории функций был применен к изучению свойств трансфинитного диаметра (см. [1]), несколько позднее — к решению проблемы Карлемана — Миллу (см. [2]), а затем использовался достаточно широко (см. [3] — [6], [9]).

Использование С. м. в теории функций основано на монотонном характере изменения емкости конденсатора и внутреннего радиуса области при различных видах симметризаций. Возможность применения С. м. при решении экстремальных задач геометрич. теории функций обусловливается определенной симметрией экстремальных отображений. Опираясь на свойство неубывания внутреннего радиуса области при ее симметризации относительно прямой или луча, с помощью теоремы об изменении внутреннего радиуса области при отображении ее посредством регулярной функции был получен следующий принцип симметризации (см. [4]): если функция $w=f(z)$, $f(0)=w_0$, $f'(0)=a_1$, регулярна в круге E: $|z|<1$, E_f — множество значений функции $w=f(z)$ в E, E_f^* — результат симметризации E_f относительно луча или прямой, проходящих через $w=w_0$, а $r(E_f^*, w_0)$ — внутренний радиус области E_f^* относительно точки $w=w_0$, то

$$r(E_f^*, w_0)\geqslant|a_1|. \qquad (*)$$

Равенство в (*) имеет место тогда и только тогда, когда функция $w=f(z)$ однолистна в E, а область E_f^* совпадает с E_f (при симметризации Штейнера) или получается из E_f в результате поворота вокруг $w=w_0$ (при симметризации Пойа). Аналогичный результат имеет место и для других видов симметризаций, для к-рых справедливо свойство неубывания внутреннего радиуса. Дополнительное исследование обычно необходимо для выяснения условий достижимости в (*) равенства.

Имеются обобщения принципа симметризации на случай кольца и областей произвольной связности (см. [6]). Плодотворным оказывается сочетание С. м. с другими методами решения экстремальных задач геометрич. теории функций (*экстремальной метрики методом*, теорией *квадратичных дифференциалов* и др.). Таким путем был получен ряд теорем покрытия и искажения для различных классов регулярных в данной области функций (однолистных, однолистных в среднем, слабо p-листных в круге или в кольце и др., см. [4] — [6]).

С. м. применяется также при изучении свойств пространственных квазиконформных отображений. Это обстоятельство особенно существенно в связи с ограниченными возможностями исследования таких отображений. С. м. позволяет находить среди двусвязных пространственных областей, обладающих определенными геометрич. свойствами, область с наибольшим конформным модулем. Определение такой области в свою очередь позволяет установить нек-рое экстремальное свойство квазиконформного отображения. В частности, с помощью С. м. установлены нек-рые теоремы искажения для квазиконформных отображений в трехмерном евклидовом пространстве (см. [7], [8]).

Лит.: [1] Faber G., «Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl.», 1920, Bd 20, S. 49—64; [2] Beurling A., Études sur un problème de majoration, Uppsala, 1933; [3] Полиа Г., Сегё Г., Изопериметрические неравенства в математической физике, пер. [с англ.], М., 1962; [4] Хейман В. К., Многолистные функции, пер. с англ., М., 1960; [5] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [6] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [7] Шабат Б. В., «Докл. АН СССР», 1960, т. 132, № 5, с. 1045—48; [8] Gehring F. W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1961, v. 101, № 3, p. 499—519; [9] Baernstein A., «Acta math.», 1974, v. 133, p. 139—69.

И. П. Митюк.

СИММЕТРИЗАЦИЯ — сопоставление каждому объекту F объекта F^* (того же класса), обладающего нек-рой симметрией. Обычно С. подвергают замкнутые множества F в евклидовом пространстве E^n (или в пространстве постоянной кривизны), а также отображения, причем С. строится так, что F^* непрерывно зависит от F. С. сохраняют одни и монотонно изменяют другие характеристики объекта. С. используются в геометрии, математич. физике, теории функций при решении экстремальных задач. Впервые С. введена Я. Штейнером (J. Steiner) в 1836 для доказательства *изопериметрического неравенства*.

С. относительно плоскости E^{n-k} в E^n: для каждого непустого сечения множества F плоскостью $E^k \perp E^{n-k}$ в E^k строят шар с центром $E^k \cap E^{n-k}$ и тем же k-мерным объемом, что $F \cap E^k$; заполняемое шарами множество F^* есть результат симметризации. С. относительно плоскости сохраняет объем, выпуклость, не увеличивает площадь границы и интегралы поперечных мер (см. [2]). При $k=1$ эта С. есть симметризация Штейнера, при $k=n-1$ — симметризация Шварца.

С. относительно полуплоскости H^{n-k} в E^n: для каждого непустого сечения F сферой S^k, имеющей центр на границе ∂H^{n-k} и лежащей в $E^{k+1} \perp \partial H^{n-k}$, строят сферич. шапочку $S^k \cap D^n$ (D^n — шар с центром $H^{n-k} \cap S^k$) того же k-мерного объема, что $F \cap S^k$; заполняемое шапочками множество F^* есть результат С. При $k=n-1$ это — сферическая С., если $n=2$ — круговая С.

С. смещением: для выпуклого множества $F \subset E^n$ строят симметричное ему относительно плоскости E^k множество F'; результатом С. является множество $F^*=(F+F')/2$, где сложение множеств понимается как векторная сумма.

С. окатыванием: для выпуклого тела $F \subset E^n$ его *опорная функция* усредняется на параллельных сечениях единичной сферы; результатом С. считается тело F^*, восстановленное по получившейся опорной функции.

В E^3 симметризация Штейнера не увеличивает емкость; симметризация Шварца сохраняет непрерывность гауссовой кривизны границы и не уменьшает ее минимум; С. относительно полуплоскости не увеличивает основную частоту области и площадь границы; сферическая С. не увеличивает емкость; С. смешением сохраняет интеграл средней кривизны границы и не уменьшает площадь последней; С. окатыванием сохраняет ширину (см. [1], [3]).

В E^2 симметризация Штейнера не увеличивает полярный момент инерции, внешний радиус, емкость, основную частоту; не уменьшает жесткость кручения, максимальный внутренний конформный радиус (см. [3]).

В связи с многократным применением С. рассматриваются вопросы сходимости С. Определения аналогов С. для незамкнутых множеств допускают ветвления. О применении С. в теории функций см. *Симметризации метод*.

Лит.: [1] Бляшке В., Круг и шар, пер. с нем., М., 1967; [2] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., М., 1966; [3] Полиа Г., Сегё Г., Изопериметрические неравенства в математической физике, пер. с англ., М., 1962; [4] Leichtweiss K., Konvexe Mengen, B., 1980. *С. Л. Печерский.*

СИММЕТРИИ КРИТЕРИЙ — статистический критерий для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой одномерная плотность вероятности симметрична относительно нуля.

Пусть проверяется гипотеза симметрии H_0, согласно к-рой плотность вероятности $p(x)$ вероятностного закона, к-рому подчиняются независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$, симметрична относительно нуля, то есть $p(x)=p(-x)$ для любого x из области определения плотности $p(x)$. Любой статистич. критерий, предназначенный для проверки H_0, наз. критерием симметрии.

Наиболее часто в качестве альтернативы к H_0 рассматривается гипотеза H_1, согласно к-рой все рассматриваемые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют плотность вероятности $p(x-\Delta)$, $\Delta \neq 0$. Иначе говоря, согласно гипотезе H_1 плотность вероятности случайной величины X_i получается в результате сдвига плотности $p(x)$ вдоль оси Ox на расстояние $|\Delta|$ вправо или влево, в зависимости от знака Δ. Если знак смещения Δ известен, то конкурирующая гипотеза H_1 наз. односторонней, в противном случае — двусторонней. Простой пример С. к. дает *знаков критерий*. С. к. является частным случаем *рандомизации критерия*.

Лит.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973. *М. С. Никулин.*

СИММЕТРИИ ПРИНЦИП, принцип симметрии Шварца, принцип симметрии Римана — Шварца для аналитических функций: пусть область G расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ ограничена замкнутой жордановой кривой Γ, в состав к-рой входит дуга l окружности L расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть, далее, функция $f(z)$ определена и непрерывна на $G \cup l$, аналитична в G, а на l принимает значения, принадлежащие нек-рой окружности C расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда $f(z)$ продолжается через дугу l в область G^*, симметричную с G относительно L, до функции, аналитической в области $G \cup l \cup G^*$. Такое продолжение (через l) единственно и определяется следующим свойством продолженной функции $f(z)$: если точки $z \in G$ и $z^* \in G^*$ симметричны (инверсны) относительно L, то точки $w=f(z)$ и $w^*=f(z^*)$ симметричны относительно C. В частности, если L и C совпадают с действительной осью плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, то $f(z)=\overline{f(\overline{z})}$ при $z \in G \cup l \cup G^*$. Под окружностями расширенной комплексной плоскости понимаются как собственно окружности, так и прямые. Непрерывность также может пониматься как в обычном, так и в обобщенном смысле, т. е. когда $f(z)$ наз. непрерывной в точке z_0, если $f(z) \to f(z_0)$ при $z \to z_0$, независимо от конечности или бесконечности величины $f(z_0)$. Кривая Γ, равно как и l, может проходить через точку ∞. По условию, $f(l) \subset C$, но не обязательно $f(l)=C$. Кроме того, если G и G^* имеют общие внутренние точки, то продолженная функция в этих точках может быть неоднозначной.

С. п. для гармонических функций при тех же G, L, l и G^* формулируется так: если функция $u(x, y)$ гармонична в G, непрерывна на $G \cup l$ и равна нулю на l, то u продолжается через l в G^* до функции, гармонической в $G \cup l \cup G^*$. При этом если точки $(x, y) \in G$ и $(x^*, y^*) \in G^*$ симметричны относительно L, то $u(x^*, y^*)=-u(x, y)$.

Обобщением С. п. на случай аналитич. дуг l (и C) является принцип Шварца аналитич. продолжения аналитических и гармонич. функций (см. [1], [2]). Обобщение С. п. для гармонич. функций на случай функции любого числа переменных наз. *отражения принципом*. С. п. широко используется в приложениях теории аналитических и гармонич. функций (при конформных отображениях областей с одной или несколькими осями симметрии, в теории упругости, гидромеханике, электростатике и т. д.).

Лит.: [1] Schwarz H., Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd 2, B., 1890; [2] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977, с. 350—60; [3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973, с. 158—97, 214—15. *Е. П. Долженко.*

СИММЕТРИКА на множестве X — неотрицательная действительная функция d, определенная на множестве пар всех элементов множества X и удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $d(x, y)=0$ в том и только в том случае, если $x=y$;
2) $d(x, y)=d(y, x)$ при любых $x, y \in X$.

В отличие от *метрики* и *псевдометрики* С. может не удовлетворять аксиоме треугольника. По симметрике d на множестве X определяется топология на X: множество $A \subset X$ замкнуто (относительно симметрики d) в том и только в том случае, если $d(x, A)>0$ для каждого $x \in X \setminus A$. При этом

$$d(x, A)=\inf\{d(x, y): y \in A\}.$$

Замыкание множества A в так определенном топологич. пространстве содержит множество всех тех точек $x \in X$, для к-рых $d(x, A)=0$, но может этим множеством не исчерпываться. Соответственно, ε-шары вокруг точек множества X могут иметь пустую внутренность. Топологич. пространство наз. симметризуемым, если топология его порождается по указанному правилу нек-рой С. Класс симметризуемых пространств гораздо шире класса *метризуемых пространств*: симметризуемое пространство может не быть ни паракомпактным, ни нормальным, ни хаусдорфовым. Кроме того, симметризуемое пространство может не удовлетворять первой аксиоме счетности.

Но каждое симметризуемое пространство X секвенциально, т. е. его топология определяется сходящимися последовательностями по правилу: множество A замкнуто в том и только в том случае, если предел каждой сходящейся в X последовательности точек множества A принадлежит A. Для бикомпактных хаусдорфовых пространств симметризуемость равносильна метризуемости.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Недев С. Й., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 24, с. 201—36.

А. В. Архангельский.

СИММЕТРИРОВАНИЕ, симметризация,— одна из операций тензорной алгебры, при помощи к-рой по данному тензору строится симметричный (по группе индексов) тензор. С. всегда производится над несколькими верхними или нижними индексами. Тензор S с координатами $\{s^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q},\ 1 \leqslant i_\nu,\ j_\mu \leqslant n\}$ является результатом С. тензора T с координатами $\{t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q},\ 1 \leqslant i_\nu,\ j_\mu \leqslant n\}$ по m верхним индексам, напр. по группе индексов $I=(i_1, i_2, \ldots, i_m)$, если

$$s^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}=\frac{1}{m!}\sum\nolimits_{I\to\alpha} t^{\alpha_1\ldots\alpha_m i_{m+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}. \qquad (*)$$

Здесь суммирование производится по всем $m!$ перестановкам $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ группы индексов I. С. по группе нижних индексов определяется аналогично. С. по группе индексов обозначается взятием этих индексов в круглые скобки ( ). Посторонние индексы (не участвующие в С.) отделяются вертикальными черточками. Напр.,

$$t^{(4|5|17)}=\frac{1}{3!}\left[t^{4517}+t^{1574}+t^{7541}+t^{4571}+t^{7514}+t^{1547}\right].$$

Последовательное С. по группам индексов I_1 и I_2, $I_1\subset I_2$, совпадает с С. по группе индексов I_2. Другими словами, если $s_{j_1\ldots j_q}=t_{(j_1\ldots(j_k\ldots j_l)\ldots j_q)}$, то $s_{j_1\ldots j_q}=t_{(j_1\ldots j_q)}$ (внутренние скобки снимаются).

Тензор, не изменяющийся при С. по нек-рой группе индексов, наз. *симметрическим тензором.*

С. по нек-рой группе индексов тензора, альтернированного (см. *Альтернирование*) по этой группе, дает нулевой тензор.

Умножение двух и более тензоров с последующим С. их произведения по всем индексам наз. симметрическим умножением. С. тензоров, наряду с операцией альтернирования, применяется для разложения тензора на тензоры более простого строения. С. применяется также для образования сумм вида (*) с многоиндексными слагаемыми. Напр., если элементы матрицы

$$\left\|\begin{matrix} a^1_1 & a^1_2 \ldots & a^1_n\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ a^n_1 & a^n_2 \ldots & a^n_n\end{matrix}\right\|$$

коммутируют при умножении, то выражение

$$n!\,a^{(1}_1 a^2_2\ldots a^{n)}_n = n!\left(a^{\ 1}_{(1} a^2_2\ldots a^n_{n)}\right)=n!\,a^{(1}_{(1} a^2_2\ldots a^{n)}_{n)}$$

наз. перманентом матрицы.

Лит.: [1] Широков П. А., Тензорное исчисление, 2 изд., Казань, 1961; [2] Беклемишев Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., 1971; [3] Схоутен Я. А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965.

Л. П. Купцов.

СИММЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА — обобщение алгебры многочленов. Если M — унитарный модуль над коммутативно-ассоциативным кольцом A с единицей, то С. а. модуля M наз. алгебра $S(M)=T(M)/I$, где $T(M)$ — *тензорная алгебра* модуля M, I — ее идеал, порожденный элементами вида $x\otimes y - y\otimes x$ $(x,\ y\in M)$. С. а.— коммутативно-ассоциативная A-алгебра с единицей; она градуирована:

$$S(M)=\sum\nolimits_{p\geqslant 0} S^p(M),$$

где $S^p(M)=T^p(M)/I\cap T^p(M)$, причем $S^0(M)=A$, $S^1(M)=M$. Модуль $S^p(M)$ наз. p-й симметрической степенью модуля M. Если M —

свободный модуль с конечным базисом $x_1, \ldots, x_n$, то соответствие $x_i \to X_i$ $(i=1, \ldots, n)$ продолжается до изоморфизма алгебры $S(M)$ на алгебру многочленов $A[X_1, \ldots, X_n]$ (см. *Многочленов кольцо*).

Для любого гомоморфизма A-модулей $f: M \to N$ p-я тензорная степень $T^p(f): T^p(M) \to T^p(N)$ индуцирует гомоморфизм $S^p(f): S^p(M) \to S^p(N)$ (p-я симметрическая степень гомоморфизма f). Получается гомоморфизм A-алгебр $S(f): S(M) \to S(N)$. Соответствия $f \to S^p(f)$ и $f \to S(f)$ являются соответственно ковариантными функторами из категории A-модулей в себя и в категорию A-алгебр. Для любых двух A-модулей M и N имеет место естественный изоморфизм $S(M \oplus N) \cong S(M) \otimes S(N)$.

Если M — векторное пространство над полем характеристики 0, то *симметрирование* $\sigma: T(M) \to T(M)$ определяет изоморфизм С. а. $S(M)$ на алгебру $\tilde{S}(M) \subset T(M)$ симметрических контравариантных тензоров на M относительно симметрич. умножения:

$$u \vee v = \sigma(u \otimes v),\ u \in \tilde{S}^p(M),\ v \in \tilde{S}^q(M).$$

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [2] Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980.

А. Л. Онищик.

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа всех подстановок (биекций) нек-рого множества X с операцией суперпозиции (см. *Подстановок группа*). С. г. подстановок множества X обозначается $S(X)$. Для равномощных X и X' группы $S(X)$ и $S(X')$ подобны. В случае конечного множества $X=\{1, 2, \ldots, n\}$ С. г. обозначается S_n. Всякая абстрактная группа изоморфна подходящей подгруппе симметрич. группы $S(X)$ нек-рого множества X (теорема Кэли).

Пусть множество X конечно. Всякая подстановка π на X однозначно записывается в виде произведения независимых или взаимно простых циклов (цикловая запись подстановки); числовой вектор

$$z(\pi) = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где a_i — число циклов длины i в цикловой записи подстановки π, наз. цикловым типом подстановки π. Две подстановки π и π' сопряжены в группе S_n тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же цикловой тип. Подстановки с цикловым типом

$$\{n-2, 2, 0, \ldots, 0\}$$

наз. транспозициями; их совокупность является системой образующих группы S_n. Множество транспозиций $\Sigma = \{(i, i+1) | i=1, \ldots, n-1\}$ является минимальной системой образующих (базой) для S_n. Вообще, множество $\Delta = \{(i_k, j_k) | i_k \neq j_k\}$ образует базу для S_n, если граф с X в качестве множества вершин и с парами (i_k, j_k) в качестве ребер является *деревом* [2]. Число таких баз равно n^{n-2}.

Знакопеременная группа A_n — нормальный делитель в группе S_n, причем если $n \neq 4$, то A_n — единственный нетривиальный собственный нормальный делитель, а S_4 содержит еще один нетривиальный нормальный делитель — четверную группу Клейна: $K_4 = \{1, (1\,2), (3\,4), (1\,3), (2\,4), (1\,4), (2\,3)\}$. При $n \leqslant 4$ группа S_n разрешима, а при $n \geqslant 5$ неразрешима и A_n — простая неабелева группа. Теорема Гёльдера: при $n \neq 2,6$ группа S_n совершенна (см. *Совершенная группа*). Группа S_2 коммутативна, а группа S_6 обладает внешним автоморфизмом порядка 2.

Известны все максимальные интранзитивные и импримитивные подгруппы в S_n. Для всякого разбиения $n = m_1 + m_2$, $m_1 \neq m_2$, максимальными интранзитивными в S_n будут все подгруппы $S_{m_1} + S_{m_2}$ и только они. Транзитивными импримитивными максимальными подгруппами в S_n будут сплетения S_{m_1} с S_{m_2} (для всякого разложения $n=m_1m_2$) и только они. Примитивные максимальные подгруппы в S_n не описаны (1983), но известны нек-рые их бесконечные серии. Напр., группа S_n естественным образом действует на множестве B_n^m всех подмножеств мощности m множества конечной мощности n; при $n\neq 2m$ тем самым определяется примитивная группа подстановок множества B_n^m. Она максимальна в $S(B_n^m)$, если $(m, n)\neq(2,6)$, $(2,8)$, $(3,10)$, $(4,12)$, $(m, 2m)$, $(m, 2m+1)$ (см. [1]). Другая серия (см. [6]) получается при рассмотрении группы $\Gamma L_n(GF(q))$ полулинейных преобразований пространств $G(F(q))$ над конечным полем из q элементов. Эта группа определяет примитивную группу подстановок *Грассмана многообразия* $G_{n,m}(GF(q))$, $1\leqslant m\leqslant n-1$, к-рая максимальна в $S(G_{n,m}(GF(q))$ при $n\geqslant 3$.

Пусть X — бесконечное множество. Группа всех подстановок множества X, перемещающих лишь конечное число элементов из X, наз. **финитной**, или **ограниченной симметрической группой** множества X и обозначается $SF(X)$, а ее подгруппа, состоящая из всех четных подстановок, наз. **финитной**, или **ограниченной знакопеременной**, **группой** множества X и обозначается $AF(X)$. Подгруппы $SF(X)$ и $AF(X)$ — нормальные делители в $S(X)$. Более общо, пусть α — мощность множества X и $\beta\leqslant\alpha$ — нек-рое бесконечное кардинальное число; совокупность всех подстановок множества X, перемещающих не более чем β элементов множества X, является подгруппой в $S(X)$, обозначаемой $S_\beta(X)$. Наряду с $SF(X)$ и $AF(X)$ группы $S_\beta(X)$ — нормальные делители в $S(X)$ для всех $\beta\leqslant\alpha$, и других нетривиальных нормальных делителей у $S(X)$ нет (**теорема Шрейера — Улама — Бэра**, см. [3]).

Лит.: [1] Калужнин Л. А., Клин М. Х., «Матем. сб.», 1972, т. 87, № 1, с. 91—121; [2] Оре О., Теория графов, пер. с англ., 2 изд., М., 1980; [3] Плоткин Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966; [4] Устименко-Бакумовский В. А., «Докл. АН СССР», 1978, т. 240, № 6, с. 1305—08. См. также лит. при ст. *Подстановок группа*.

Л. А. Калужнин.

СИММЕТРИЧЕСКАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица, в к-рой любые два элемента, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой, т. е. матрица $A=\|a_{ik}\|_1^n$, совпадающая со своей транспонированной матрицей

$$a_{ik}=a_{ki},\ i,\ k=1,\ \ldots,\ n.$$

Действительная С. м. порядка n имеет ровно n действительных собственных значений (с учетом кратности). Если A есть С. м., то A^{-1} и A^p суть С. м., если A и B суть С. м. одного порядка, то $A+B$ есть С. м., а произведение AB есть С. м. тогда и только тогда, когда $AB=BA$.

Т. С. Пиголкина.

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ — комплексное многообразие D, изоморфное ограниченной области в $\mathbb{C}^n$, для каждой точки p к-рого существует инволютивное голоморфное преобразование σ_p: $D\to D$, имеющее p единственной неподвижной точкой. С. о. является эрмитовым симметрич. пространством отрицательной кривизны относительно метрики Бергмана. Группа ее автоморфизмов как комплексного многообразия содержится в группе движений и имеет ту же связную компоненту $G(D)$, к-рая является некомпактной вещественной полупростой группой Ли без центра. Стационарная подгруппа $H(D)$ точки $p\in D$ в группе $G(D)$ есть связная компактная группа Ли с одномерным центром. Как вещественное многообразие С. о. диффеоморфна $\mathbb{R}^{2n}$.

Всякая С. о. единственным образом разлагается в прямое произведение неприводимых С. о., перечисленных в следующей таблице (где $M_{p,q}$ обозначает пространство комплексных матриц размера $p\times q$).

Тип по Э. Картану	Тип $G(D)$	Тип $H(D)'$	$\dim D$	Модель D
I	A_{p+q-1}	$A_{p-1}+$ $+A_{q-1}$ $(p \geqslant q)$	pq	$\{Z \in M_{p,\,q}: Z^*Z < E\}$
II	D_p	A_{p-1}	$\frac{p(p-1)}{2}$	$\{Z \in M_{p,\,p}: Z^t = -Z,$ $Z^*Z < E\}$
III	C_p	A_{p-1}	$\frac{p(p+1)}{2}$	$\{Z \in M_{p,\,p}: Z^t = Z,$ $Z^*Z < E\}$
IV	$D_{p/2+1}$ $B_{(p+1)/2}$	$D_{p/2-1}$ $B_{(p-1)/2}$	p	$\left\{ z \in \mathbb{C}^p: \sum \lvert z_i \rvert^2 < \right.$ $\left. < \frac{1}{2}\left(1 + \left\lvert \sum z_i^2 \right\rvert^2\right) < 1 \right\}$
V	E_6	D_5	16	
VI	E_7	E_6	27	

С. о. типа III может быть представлена как верхняя полуплоскость Зигеля:

$$\{Z \in M_{p,\,p}: Z^t = Z,\ \operatorname{Im} Z > 0\}.$$

Ее точки параметризуют главно поляризованные абелевы многообразия. Остальные С. о. также могут быть представлены как *Зигеля области* первого или второго рода (см. [2]).

Лит.: [1] Зигель К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1954; [2] Пятецкий-Шапиро И. И., Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, М., 1961; [3] Cartan E., «Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg», 1935, Bd 1, S. 116—62; [4] Drucker D., Exceptional Lie algebras and the structure of hermitian symmetric spaces, Providence, 1978 (Mem. Amer. Math. Soc., v. 16, № 208).

Э. Б. Винберг.

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — обобщение понятия производной на случай функций множества Φ в n-мерном евклидовом пространстве. С. п. в точке x есть предел

$$\lim_{r \to +0} \frac{\Phi(S(x;\, r))}{|S(x;\, r)|} = D_{\mathrm{sym}}\Phi(x),$$

где $S(x;\, r)$ — замкнутый шар с центром в точке x и радиусом r. С. п. порядка n в точке x функции действительного переменного $f(x)$ наз. предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_s^n f(x,\, h)}{h^n} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k f\left(x + \frac{n-2k}{2} h\right)}{h^n} = D^n f(x).$$

Функция действительного переменного $f(x)$ имеет С. п. в точке x порядка $2r$:

$$D^{2r} f(x) = \beta_{2r},$$

если

$$\frac{1}{2}\left(f(x+h) + f(x-h)\right) - \sum_{k=0}^{r} \beta_{2r} \frac{h^{2k}}{(2k)!} = o(h^{2r});$$

порядка $2r+1$:

$$D^{2r+1} f(x) = \beta_{2r+1},$$

если

$$\frac{1}{2}\left(f(x+h) - f(x-h)\right) - \sum_{k=0}^{r} \beta_{2k+1} \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!} = o(h^{2r+1}).$$

Если в точке x существует n-я производная $f^{(n)}(x)$, то в этой точке существует (в обоих смыслах) С. п. и она равна $f^{(n)}(x)$. Если $f(x)$ имеет в точке x производную $D^{2l}f(x)$ или $D^{2r+1}f(x)$, то она имеет производную $D^n f(x)$. Обратное утверждение справедливо при условии существования всех производных $D^n f(x)$ меньшего порядка той же четности.

Лит.: [1] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [2] James R. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1954, v. 76, № 1, p. 149—76. *Т. П. Лукашенко.*

СИММЕТРИЧЕСКАЯ РАЗНОСТЬ множеств — одна из операций над множествами. Пусть имеются два множества A и B. Тогда их симметрическая разность обозначается $A\Delta B$ и определяется равенствами

$$A\Delta B=(A\diagdown B)\bigcup(B\diagdown A)=(A\bigcap B')\bigcup(B'\bigcap A),$$

где символы $\bigcup, \bigcap, \diagdown, {}'$ означают соответственно операции объединения, пересечения, разности и дополнения надлежащих множеств. *М. И. Войцеховский.*

СИММЕТРИЧЕСКАЯ РАЗНОСТЬ порядка n в точке x функции действительного переменного $f(x)$ — выражение

$$\Delta_s^n f(x,\ h)=\sum\nolimits_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k f\left(x+\frac{n-2k}{2}h\right).$$

Часто также симметрич. разностью называют выражение

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k f(x+(n-2k)h),$$

получающееся из вышеприведенного заменой h на $2h$. Если функция $f(x)$ имеет в точке x производную $f^n(x)$ порядка n, то

$$\Delta_s^n f(x,\ h)=f^{(n)}(x)h^n+o(h^n).$$

Т. П. Лукашенко.

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция, не изменяющаяся при любой перестановке своих аргументов. С. ф. являются, напр., $x_1+x_2+\ldots+x_n$, $x_1x_2\ldots x_n$,

$$\sum\nolimits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j,\ \max(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),$$
$$x_1+\ldots+x_n \pmod m,$$

цифры в десятичной записи суммы произвольного количества одноразрядных чисел, «функция голосования», к-рая характеризуется тем, что ее аргументы принимают лишь два значения: 1 («за») и 0 («против»), а сама функция равна 1, если больше половины ее аргументов равны 1, и 0 в противном случае. Тривиальными примерами С. ф. являются константы и функция одной переменной.

Любая С. ф., отличная от константы, существенно зависит от всех своих переменных. Поэтому при добавлении несущественных переменных отличная от константы функция становится несимметрической, а при их изъятии может стать С. ф. Таким образом, понятие С. ф. связано с точным указанием всех ее переменных. Простой критерий симметричности функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ состоит в одновременном выполнении двух равенств:

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n)=f(x_2,\ x_1,\ x_3,\ \ldots,\ x_n),$$
$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n)=f(x_n,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$$

или n равенств вида

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,x_n)=f(x_1,\ \ldots,x_{i+1},x_i,\ \ldots,x_n).$$

К С. ф. относятся *симметрические многочлены*. Всякая рациональная С. ф. (над полем характеристики 0) является отношением двух симметрич. многочленов. Любая булева С. ф. на наборах значений аргументов, содержащих одинаковое число единиц, принимает одинаковые значения. Эти функции играют важную роль в математич. кибернетике и ее приложениях, в частности они встречаются при схемной реализации арифметических и нек-рых других операций.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [2] Яблонский С. В., Введение в дискретную математику, М., 1979. *В. М. Храпченко.*

СИММЕТРИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН — многочлен f с коэффициентами из нек-рого поля или ассоциативно-коммутативного кольца K с единицей, являющийся *симметрической функцией* от своих переменных, т. е. инвариантный при любых подстановках переменных:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)). \qquad (*)$$

С. м. образуют алгебру $S(x_1, \ldots, x_n)$ над K.

Важнейшие примеры С. м.— элементарные симметрические многочлены

$$s_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum\nolimits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$

и степенные суммы, т. е. многочлены

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k.$$

Для выражения степенных сумм $p_k(x_1, \ldots, x_n)$ в виде многочленов от элементарных симметрич. многочленов имеются рекуррентные формулы, называемые формулами Ньютона:

$$p_k - p_{k-1}s_1 + p_{k-2}s_2 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} p_1 s_{k-1} + (-1)^k k s_k = 0 \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant n;$$
$$p_k - p_{k-1}s_1 + p_{k-2}s_2 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} p_{k-n+1} s_{n-1} + (-1)^n p_{k-n} s_n = 0 \text{ при } k > n.$$

Элементарные С. м. от корней произвольного многочлена одной переменной со старшим коэффициентом 1 с точностью до знака совпадают с остальными коэффициентами этого многочлена (см. *Виета теорема*).

Основная теорема о симметрических многочленах: каждый С. м. является многочленом от элементарных С. м., причем представим в этом виде единственным образом. Другими словами, элементарные С. м. являются свободной системой образующих алгебры $S(x_1, \ldots, x_n)$. Если поле имеет характеристику 0, то многочлены $p_1, \ldots, p_n$ также являются системой свободных образующих алгебры $S(x_1, \ldots, x_n)$.

Кососимметрическим, или знакопеременным, многочленом наз. многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий соотношению (*), если подстановка π четная, и соотношению

$$f(x_1, \ldots, x_n) = -f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)),$$

если π нечетная. Любой кососимметрич. многочлен представим в виде $\Delta_n g$, где g есть С. м., а

$$\Delta_n = \prod\nolimits_{i<j} (x_i - x_j).$$

Это представление не однозначно, поскольку имеется соотношение $\Delta_n^2 = \mathrm{Dis}(s_1, \ldots, s_n)$.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [2] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [3] Мишина А. П., Проскуряков И. В., Высшая алгебра, 2 изд., М., 1965. *О. А. Иванова.*

СИММЕТРИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР — отображение A множества D_A гильбертова пространства H (в общем случае комплексного) в себя такое, что $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ для любых $x, y \in D_A$. Если D_A — линейное многообразие, всюду плотное в H (что предполагается в дальнейшем), то A — линейный оператор. Если $D_A = H$, то A ограничен и, следовательно, непрерывен на H. С. о. A порождает на D_A билинейную эрмитову форму $B(x, y) = \langle Ax, y\rangle$, т. е. такую, что $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$. Соответствующая квадратичная форма $\langle Ax, x\rangle$ действительна. Обратно, действительная на D_A форма $\langle Ax, x\rangle$ влечет симметричность A. Сумма $A + B$ С. о. A и B с общей областью определения $D_A = D_B$ есть снова С. о., и если λ действительно, то λA также симметричен. Для всякого С. о. A существует однозначно определенное замыкание $\bar{A}$ и сопряженный оператор $A^* \supset \bar{A}$. В общем случае A^* не является С. о. и $A^* \neq \bar{A}$. Если $A^* = A$, то С. о. наз. **самосопряженным оператором**. Таким будет, в частности, С. о., определенный на всем H. С. о., ограниченный на D_A, допускает продолжение на все H с сохранением симметричности и ограниченности.

Примеры. 1) Пусть бесконечная матрица $\|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots$, такова, что $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, и

$$\sum_{i,\ j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

Тогда система равенств

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

ставящая в соответствие элементу $x = \{\xi_i\} \in l_2$ элемент $y = \{\eta_i\}$, определяет ограниченный С. о., причем он оказывается самосопряженным в комплексном пространстве l_2.

2) В комплексном пространстве $L_2(0, 1)$ оператор $A = i \frac{d}{dt}$, определенный на множестве D_A абсолютно непрерывных на $[0, 1]$ функций, имеющих суммируемую с квадратом производную и удовлетворяющих условию $x(0) = x(1) = 0$, есть С. о., не являющийся самосопряженным.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., М., 1954. *В. И. Соболев.*

СИММЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР, симметричный тензор, по паре индексов — тензор, к-рый не меняется при перестановке данной пары индексов. Результат *альтернирования* С. т. по этой паре индексов равен нулю. Тензор симметричен по группе индексов, если он симметричен по любым двум индексам из этой группы. *А. Б. Иванов.*

СИММЕТРИЧЕСКОЕ ПРОИЗВОДНОЕ ЧИСЛО в точке x — обобщение понятия производного числа на случай функций множества Φ в n-мерном евклидовом пространстве. С. п. ч. в точке x есть предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\Phi(S(x;\ r_k))}{|S(x;\ r_k)|},$$

где $S(x, r_k)$ — нек-рая последовательность замкнутых шаров с центрами в точке x и радиусами r_k, $r_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. С. п. ч. порядка n в точке x функции действительного переменного $f(x)$ наз. предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\Delta_s^n f(x,\ h_k)}{h_k^n} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n} C_n^m (-1)^m f\left(x + \frac{n-2m}{2} h_k\right)}{h_k^n},$$

где $h_k \to 0$ при $k \to \infty$, $\Delta_s^n f(x, h_k)$ — *симметрическая разность* f.

Лит.: [1] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949. *Т. П. Лукашенко.*

СИММЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — общее название нескольких видов пространств, встречающихся в дифференциальной геометрии.

1) Многообразие с аффинной связностью наз. **аффинным локально симметрическим пространством**, если тождественно равны нулю тензор кручения и ковариантная производная тензора кривизны.

2) (Псевдо) риманово многообразие наз. (псевдо) **римановым локально симметриче-**

ским пространством, если ковариантная производная тензора его кривизны тождественно равна нулю.

3) Псевдориманово многообразие (соответственно многообразие с аффинной связностью) M наз. псевдоримановым (аффинным) глобально симметрическим пространством, если с каждой точкой $x \in M$ связана изометрия (аффинное преобразование) S_x многообразия M такая, что $S_x^2 = \mathrm{id}$ и x есть изолированная неподвижная точка преобразования S_x.

4) Пусть G — связная группа Ли, Φ — ее инволютивный автоморфизм ($\Phi^2 = \mathrm{id}$), G^{Φ} — замкнутая подгруппа всех Φ-неподвижных точек, G_0^{Φ} — компонента единицы группы G_0^{Φ} и H — замкнутая подгруппа в G, удовлетворяющая условию

$$G_0^{\Phi} \subset H \subset G^{\Phi}.$$

Тогда однородное пространство G/H наз. симметрическим однородным пространством.

5) Симметрическим пространством в смысле Лоса наз. многообразие M, на к-ром задано умножение

$$M \times M \longrightarrow M, \quad (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

удовлетворяющее следующим четырем условиям:

а) $x \cdot x = x$;

б) $x \cdot (x \cdot y) = y$;

в) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$;

г) для каждой точки $x \in M$ существует такая окрестность U, что $x \cdot y = y \Rightarrow y = x$ для $\forall y \in U$.

Каждое аффинное (псевдориманово) глобально симметрич. пространство является аффинным (псевдоримановым) локально симметрич. пространством и однородным С. п. Любое однородное С. п. есть аффинное глобально симметрич. пространство и симметрич. пространство в смысле Лоса. Всякое связное С. п. Лоса есть однородное С. п.

Пусть M — связное С. п. Лоса, а значит и однородное пространство: $M = G/H$. Пространство G/H можно снабдить инвариантной аффинной связностью без кручения, обладающей следующими свойствами: 1) ковариантная производная тензора кривизны равна нулю, 2) каждая геодезическая γ есть траектория нек-рой однопараметрич. подгруппы ψ группы G, и параллельный перенос векторов вдоль γ совпадает с их трансляцией с помощью ψ; 3) геодезические замкнуты относительно умножения и наз. одномерными подпространствами. Аналогично вводится понятие произвольного подпространства M как такого подмногообразия N в M, к-рое замкнуто относительно умножения и с индуцированным умножением является С. п. Замкнутое подмножество N в M, устойчивое относительно умножения, является подпространством. Аналог алгебры Ли для С. п. G/H вводится следующим образом. Пусть g и h — алгебры Ли групп G и H, а $\varphi = d\Phi_e$ (дифференциал в единице), где Φ — инволютивный автоморфизм, определяющий симметрическое однородное пространство G/H. Собственные векторы эндоморфизма пространства φ, соответствующие собственному значению -1, образуют подпространство m такое, что g есть прямая сумма подпространств m и h, а m можно отождествить с касательным пространством к пространству G/H в точке $o = H$. Если ввести в векторном пространстве m трилинейную композицию

$$m \times m \times m \longrightarrow m, \ (X, Y, Z) \longmapsto R(X, Y)Z,$$

где R — тензор кривизны, то m станет *Ли тройной системой*. Если N — подпространство пространства M, проходящее через точку o, то касательное пространство к N в точке o есть подсистема в m и обратно.

Если M есть С. п. Лоса, то произведение $M \times M$ также является С. п. Лоса. Пусть R есть подпространство в $M \times M$ и отношение эквивалентности в M. Тогда R наз. конгруэнцией. Это понятие используется для построения теории накрывающих для С. п. Две точки $x, y \in M$ наз. коммутирующими, если

$$x \cdot (a \cdot (y \cdot b)) = y \cdot (a \cdot (x \cdot b)), \ \forall a, \ b \in M.$$

Центром $Z(M)$ пространства M относительно точки $o \in M$ наз. множество всех точек из M, к-рые коммутируют с точкой o. Центр $Z(M)$ есть замкнутое подпространство в M, к-рое можно снабдить структурой абелевой группы. Пусть M — односвязное С. п. Тогда разыскание С. п., для к-рых M является накрывающим пространством, сводится к классификации дискретных подгрупп группы $Z(M)$.

Большое внимание при построении теории С. п. уделяется вопросам классификации (см. [2]). Пусть M — локально симметрическое риманово пространство; оно наз. приводимым, если в нек-рой системе координат его основная квадратичная форма может быть представлена в виде

$$ds^2 = g_{ij}(x^1, \ \ldots, \ x^k)\, dx^i\, dx^j + g_{\alpha\beta}(x^{k+1}, \ \ldots, x^n)\, dx^\alpha dx^\beta,$$
$$i, \ j = 1, \ \ldots, \ k; \ \alpha, \ \beta = k+1, \ \ldots, \ n.$$

В противном случае пространство наз. неприводимым. Э. Картан (E. Cartan) показал, что разыскание всех неприводимых локально симметрических римановых пространств сводится к классификации инволютивных автоморфизмов вещественных компактных алгебр Ли, и проделал эту классификацию. Вместе с тем была решена задача локальной классификации симметрических однородных пространств с простыми компактными основными группами. Получена классификация симметрических однородных пространств с простыми некомпактными основными группами (см. [2], [3], [5]).

Лит.: [1] Широков П. А., Избранные работы по геометрии, Казань, 1966; [2] Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, пер. с франц., М., 1949; [3] Berger M., «Ann. Sci. École norm. supér.», 1957, v. 74, p. 85—177; [4] Loos O., Symmetric spaces, t. 1—2, N. Y.— Amst., 1969; [5] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.

А. С. Феденко.

СИММЕТРИЧНАЯ АЛГЕБРА — алгебра E над полем комплексных чисел, снабженная *инволюцией* $x \to x^*$, $x \in E$. Примерами С. а. являются: алгебра непрерывных функций на компакте, в к-рой инволюция определяется как переход к комплексно-сопряженной функции; алгебра ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве, в к-рой инволюция определяется как переход к сопряженному оператору; групповая алгебра локально компактной группы; алгебра мер на локально компактной группе. Элемент x^* алгебры E наз. сопряженным к элементу x; элемент $x \in E$ наз. самосопряженным, или эрмитовым, если $x^* = x$, и нормальным, если $x^* x = x x^*$; если алгебра E содержит единичный элемент 1, то элемент $x \in E$, удовлетворяющий условию $x^* x = x x^* = 1$, наз. унитарным. Множество E_h эрмитовых элементов алгебры есть действительное векторное подпространство в E, и любой элемент $x \in E$ однозначно представляется в виде $x = x_1 + i x_2$, где x_1, $x_2 \in E_h$; элемент $x \in E$ нормален тогда и только тогда, когда элементы x_1, x_2 перестановочны. Всякий элемент вида $x^* x$ эрмитов; единичный элемент эрмитов. Если x обратим, то x^* также обратим и $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$. Спектр каждого эрмитова элемента симметричен относительно действительной оси. С. а. E наз. вполне симметричной алгеброй, если спектр любого элемента вида $x^* x$, $x \in E$, содержится в множестве неотрицательных действительных чисел. Примерами вполне симметричных алгебр являются: С. а. непрерывных функций на компакте; С. а. ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве; групповые алгебры компактных и коммутативных локально компактных групп. Групповые алгебры некомпактных полупростых групп Ли не являются вполне симметричными. Коммутативная С. а. E тогда и только тогда вполне симметрична, когда все максимальные идеалы в E симметричны, или тогда и только тогда, когда всякий характер коммутативной алгебры E эрмитов. Любая C^*-алгебра вполне симметрична.

Подмножество M С. а. E наз. симметричным, если $x^* \in M$ для всех $x \in M$. Отображение φ С. а. E в С. а. F наз. симметричным, если $\varphi(x)^* = \varphi(x^*)$ для всех $x \in E$. Ядро симметричного гомоморфизма С. а. E в С. а. F есть симметричный двусторонний идеал; всякий симметричный односторонний идеал является двусторонним, и факторалгебра С. а. по симметричному идеалу естественно снабжается структурой С. а. Радикал С. а. симметричен. Симметричная подалгебра F в С. а. E является С. а. Пусть $\tilde{E}$ — прямая сумма С. а. E и поля $\mathbb{C}$, в к-рой линейные операции и инволюция определяются покомпонентно, а умножение определяется формулой

$$\{x,\ \lambda\}\{y,\ \mu\} = \{xy + \lambda y + \mu x,\ \lambda\mu\}$$

для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $x, y \in E$; тогда $\tilde{E}$ есть С. а. с единичным элементом.

Линейный функционал f на С. а. наз. эрмитовым, если $f(x^*) = \overline{f(x)}$ для всех $x \in E$, и положительным, если $f(x^*, x) \geqslant 0$ для всех $x \in E$. Множество E'_h эрмитовых линейных функционалов на E есть действительное векторное подпространство пространства E', сопряженного E, и E' есть прямая сумма подпространств E'_h и iE'_h. Если E содержит единицу 1, то всякий положительный функционал f на E эрмитов и $|f(x)|^2 \leqslant f(1) f(x^* x)$ для всех $x \in E$. Если f — положительный функционал на С. а. E, то $f(y^* x) = f(x^* y)$ и $|f(y^* x)|^2 \leqslant f(y^* y) f(x^* x)$ для всех $x, y \in E$.

Пусть С. а. E снабжена нормой, превращающей E в нормированную алгебру и удовлетворяющей условию $\|x^*\| = \|x\|$ для всех $x \in E$; тогда E наз. нормированной С. а. Если E полна относительно рассматриваемой нормы, то E наз. банаховой С. а. Всякая нормированная С. а. E может быть вложена в нек-рую банахову С. а. $\bar{E}$, содержащую E как плотную симметричную подалгебру; $\bar{E}$ определена однозначно с точностью до изометрического симметричного изоморфизма: $\bar{E}$ наз. пополнением E. Если E — банахова С. а., причем E имеет аппроксимативную единицу, то всякий положительный функционал f на E непрерывен и допускает продолжение до положительного линейного функционала на $\tilde{E}$. Если E содержит единичный элемент 1 и $\|1\| = 1$, то для любого положительного линейного функционала f на E выполняются соотношения $\|f\| = f(1)$ и $f(x^* x) \leqslant f(1) r(x^* x)$, где $r(x^* x)$ — спектральный радиус элемента $x^* r$ (см. *Банахова алгебра*).

Эрмитов элемент вполне С. а. имеет действительный спектр, для любого максимального замкнутого левого идеала I во вполне С. а. E с единичным элементом существует такой положительный линейный функционал f на E, что $I = \{x \in E : f(x^* x) = 0\}$, и элемент $x \in E$ обратим слева в E тогда и только тогда, когда $f(x^* x) > 0$ для всех ненулевых положительных функционалов f на E. Радикал вполне С. а. E совпадает с множеством таких элементов $x \in E$, что $f(x^* x) = 0$ для всех положительных линейных функционалов f на E. Банахова С. а. E

с единичным элементом 1 тогда и только тогда вполне симметрична, когда $r(x^*x) = \sup f(x^*x)$, где верхняя грань берется по множеству таких положительных линейных функционалов f на E, что $f(1)=1$.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [2] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [3] Pták V., «Manuscripta Math.», 1972, v. 6, № 3, p. 245—90; [4] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 2, М., 1975. *А. И. Штерн.*

СИММЕТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — представление π *симметричной алгебры* A непрерывными линейными операторами в гильбертовом пространстве такое, что $\pi(x)^* = \pi(x^*)$ для всех $x \in A$ (здесь x^* — образ x при инволюции A). *А. И. Штерн.*

СИММЕТРИЧНОСТЬ — одно из свойств *бинарных отношений*. Отношение R на множестве A наз. симметричным, если для любой пары элементов a, $b \in A$ из aRb следует, что bRa, т. е. если $R^{-1} \subseteq R$. Примером симметричного отношения является *эквивалентность*. *Т. С. Фофанова.*

СИММЕТРИЧНЫЙ ОПЕРАТОР — см. *Симметрический оператор.*

СИММЕТРИЯ — 1) С.— инволютивное ортогональное преобразование, изменяющее ориентацию; инволютивность преобразования означает, что двукратное применение его дает тождественное преобразование. Напр., отражение относительно плоскости α в пространстве (относительно прямой a на плоскости) есть С., при к-рой каждая точка M переходит в точку M' такую, что отрезок MM' перпендикулярен плоскости α (прямой a) и делится ею пополам. Плоскость α (прямая a) наз. плоскостью (осью) С. (рис. 1). Любое ортогональное преобразование можно осуществить последовательным выполнением конечного числа отражений.

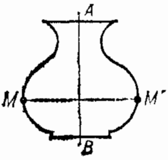


Рис. 1.

2) С.— свойство геометрич. фигуры Ф совмещаться с собой при действии нек-рой группы G ортогональных преобразований, наз. группой симметрии Ф; таким образом, С. отражает нек-рую правильность формы фигуры, инвариантность ее при действии преобразований из G. Напр., если на плоскости фигура Ф такова, что повороты относительно какой-либо точки O на угол $360°/n$, n — целое, переводят ее в себя, то Ф обладает С. n-го порядка, а O наз. центром С. n-го порядка (рис. 2); здесь G — циклическая группа n-го порядка. Окружность обладает С. бесконечного порядка (поскольку совмещается с собой поворотом на любой угол).

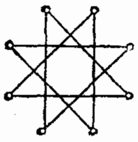


Рис. 2.

Простейшими видами пространственной С., помимо С., порожденной отражениями, являются:

а) С. относительно прямой n-го порядка: в этом случае фигура накладывается на себя вращением вокруг нек-рой прямой (оси С.) на угол $360°/n$. Напр., плоская фигура, симметричная относительно прямой AB, имеет в пространстве эту прямую осью С. 2-го

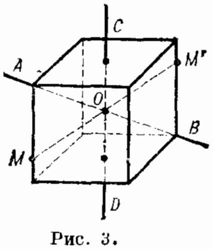


Рис. 3.

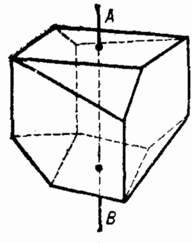


Рис. 4.

порядка (рис. 3). Куб имеет прямую AB осью С. 3-го порядка, а прямую CD — осью С. 4-го порядка (рис. 4); вообще, правильные и полуправильные многогранники симметричны относительно ряда прямых. Расположение, количество и порядок осей С. играют основную роль в кристаллографии.

б) С. переноса; в этом случае фигура накладывается на себя переносом вдоль нек-рой прямой (оси переноса) на какой-либо отрезок. Напр., фигура с единственной осью переноса обладает бесконечным множеством плоскостей С. (поскольку любой перенос можно осуществить двумя последовательными отражениями), перпендикулярных оси переноса (рис. 5). Фигуры, имеющие несколько осей переноса, играют важную роль при исследовании кристаллич. решеток.

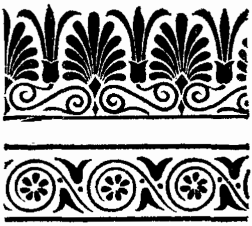


Рис. 5.

Рис. 6.

Комбинации С., порожденные отражениями и вращениями (исчерпывающие простейшие виды С. конечных фигур), а также переносами, представляют интерес и являются предметом исследования в различных областях естествознания, искусства и т. д. Напр., винтовая С., осуществляемая поворотом на нек-рый угол вокруг оси, дополненным переносом вдоль той же оси, наблюдается в расположении листьев у растений (рис. 6). С. широко распространена как один из приемов построения бордюров и орнаментов (плоских фигур, обладающих одной или несколькими С. переноса в сочетании с отражениями) (рис. 7, 8).

Рис. 7.

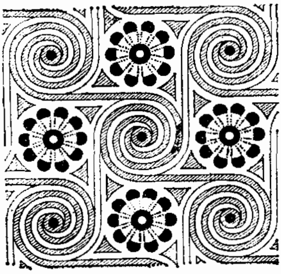


Рис. 8.

Лит.: [1] Шубников А. В., Симметрия. (Законы симметрии и их применение в науке, технике и прикладном искусстве), М.— Л., 1940; [2] Коксте р Г. С. М., Введение в геометрию, пер. с англ., М., 1966; [3] Вейль Г., Симметрия, пер. с англ., М., 1968.

М. И. Войцеховский.

СИМПЛЕКС — n-мерный многогранник, являющийся выпуклой оболочкой $n+1$ точек (вершин С.), к-рые не лежат в $(n-1)$-мерной плоскости. При $n=0$, 1, 2, 3 С.— точка, отрезок, треугольник, тетраэдр. Грани С. суть С. меньшей размерности. Два С. одинаковой размерности аффинно эквивалентны. Каждой точке С. соответствует единственный способ распределения единичной массы между вершинами С. так, чтобы центр тяжести был в данной точке С. Это используется при введении в С. барицентрич. координат, а также служит источником обобщения понятия С. для бесконечномерного случая (см. *Шоке симплекс*). С. может приписываться одна из двух ориентаций, что индуцирует определенную ориентацию его $(n-1)$-мерных граней.

В. А. Залгаллер.

СИМПЛЕКС — топологическое пространство $|A|$, точками к-рого служат неотрицательные функции $\varphi: A \to \mathbb{R}$, определенные на конечном множестве A и удовлетворяющие условию $\sum_{a \in A} \varphi(a) = 1$. Топология в $|A|$ полагается индуцированной из $\mathbb{R}^A$ — пространства всех функций из A в $\mathbb{R}$. Действительное число $\varphi(a)$ наз. a-й барицентрической координатой точки φ, размерностью симплекса $|A|$ наз. число car dA — 1. В случае, когда A является линейно независимым подмножеством евклидова пространства, симплекс $|A|$ гомеоморфен выпуклой оболочке множества A (гомеоморфизм задается соответствием $\varphi \to \sum_{a \in A} \varphi(a) \cdot a$). В связи с этим выпуклая оболочка линейно независимого подмножества евклидова пространства наз. евклидовым С.

Для любого отображения $f: A \to B$ конечных множеств формула $(|f|\varphi)(b) = \sum_{f(a)=b} \varphi(a)$, $b \in B$, определяет непрерывное отображение $|f|:|A| \to |B|$, являющееся для евклидовых С. аффинным (неоднородным линейным) отображением, продолжающим отображение f. Этим задается функтор из категории конечных множеств в категорию топологич. пространств. Если $B \subset A$ и $i: B \to A$ — соответствующее вложение, то $|i|$ — гомеоморфизм на замкнутое подмножество, наз. гранью симплекса $|A|$ и обычно отождествляемое с $|B|$. Нульмерные грани наз. вершинами (как правило, вершины отождествляются с элементами множества A).

Топологическим упорядоченным С. наз. топологич. пространство X, для к-рого задан гомеоморфизм $h: \Delta^n \to X$, где Δ^n — *стандартный симплекс*. Образ граней Δ^n при гомеоморфизме h наз. гранью топологического упорядоченного симплекса X. Отображение $X \to Y$ топологических упорядоченных симплексов X и Y наз. линейным, если оно имеет вид $k \circ F \circ h^{-1}$, где k и h — заданные гомеоморфизмы, F — произвольное отображение $\Delta^n \to \Delta^n$ вида $|f|$.

Топологическим С. (размерности n) наз. топологич. пространство X, наделенное $(n+1)!$ гомеоморфизмами $\Delta^n \to X$ (то есть $(n+1)!$ структурами топологического упорядоченного С.), отличающимися на гомеоморфизмы $\Delta^n \to \Delta^n$ вида $|f|$, где f — произвольная перестановка вершин. Аналогично, отображение топологического С. наз. линейным, если оно является линейным отображением соответствующих топологических упорядоченных С.

С. наз. также элементы *симплициальных множеств* и отмеченные подмножества *симплициальных схем*.

А. В. Хохлов.

СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД, симплекс-метод, метод последовательного улучшения плана, — метод решения общей задачи *линейного программирования*:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = A_0; \ x_j \geqslant 0, \ j = 1, \ldots, n,$$

где $A_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^{\tau}$, $j = 0, \ldots, n$.

С. м. — наиболее распространенный метод линейного программирования (л. п.). Он состоит в движении по соседним вершинам многогранного множества задачи л. п., определяемого ее ограничениями, и реализуется в виде конечной последовательности итераций. Базисом вершины $x = (x_1, \ldots, x_n)$ многогранного множества задачи наз. такая система m линейно независимых векторов $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$ ($s_\alpha \geqslant 1$, $\alpha = 1, \ldots, m$), что $x_j = 0$, если $j \notin \{s_1, \ldots, s_m\}$. Исходная информация для каждой итерации С. м. складывается из базиса $A_x = (A_{s_1}, \ldots, A_{s_m})$ вершины x, параметров x_{ij}, определяемых из соотношений

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_{s_i}, \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

(в частности, $x_{i0}=x_{s_i}$ — базисные компоненты вершины x), и параметров

$$\Delta_j=\sum\nolimits_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij}-c_j,\ j=1,\ \ldots,\ n.$$

Если $\Delta_j \geqslant 0$, $\forall j$ (1), то x — искомое решение задачи л. п. В противном случае выбирается отрицательный параметр Δ_k. Отсутствие среди x_{ik}, $i=1,\ \ldots,\ m$, положительных величин (2) указывает на неразрешимость задачи л. п., обусловленную неограниченностью целевой функции задачи на ее многогранном множестве. В случае положительности нек-рых x_{ik} (3) вершина x заменяется вершиной $x'=x+\theta x^k$, где

$$x^k=(x_1^k,\ \ldots,\ x_n^k),\ x_{s_i}^k=-x_{ik},\ i=1,\ \ldots,\ m,\ x_k^k=1,$$

остальные компоненты x^k — нули,

$$\theta=\min_{i:\, x_{ik}>0} \frac{x_{i0}}{x_{ik}}=\frac{x_{r0}}{x_{rk}}.$$

Вершина x' имеет базис $A_{x'}$, отличающийся от A_x тем, что A_{s_r} заменен на A_k. Параметры x'_{ij} и Δ'_j, связанные с $A_{x'}$, определяются по простым рекуррентным формулам, исходя из x_{ij} и Δ_j.

Случай (1) означает, что вдоль каждого ребра многогранного множества задачи, выходящего из вершины x, целевая функция задачи не возрастает. Случаи (2) и (3) соответствуют наличию ребра, вдоль к-рого целевая функция возрастает, причем в случае (2) это ребро — луч, а в случае (3) — отрезок, другой конец к-рого — вершина x'. Итерации проводятся до получения оптимальной вершины либо до выяснения неразрешимости задачи л. п.

Программная реализация С.м., рассчитанная на задачи достаточно большого размера, обычно основывается на иной его алгоритмич. реализации, в к-рой основой исходной информации для каждой итерации служит обратная матрица A_x^{-1} базиса A_x (метод обратной матрицы). Она предназначена для задач л. п., матрица условий $A=(A_1 A_2 \ldots A_n)$ к-рых обладает свойством слабой заполненности (число ненулевых a_{ij} мало по сравнению с mn). Слабо заполненные матрицы хранятся в запоминающих устройствах ЭВМ в компактном виде, когда фиксированы лишь ненулевые элементы и их позиции. Разработаны специальные приемы хранения обратного базиса, направленные на сокращение информации, необходимой для восстановления A_x^{-1}. Они основаны на представлении A_x^{-1} в виде произведения матричных множителей (мультипликаторов), отличающихся от единичной матрицы лишь одним столбцом. Заполненность нетривиальных столбцов мультипликаторов зависит от порядка введения векторов в базис. Поэтому после накопления нек-рого числа мультипликаторов организуется т. н. повторение, в результате к-рого образуется более экономное мультипликативное представление A_x^{-1}.

Важная часть алгоритма С. м. — стратегия выбора вектора A_k для включения в базис. С одной стороны, она должна способствовать сокращению информации, необходимой для хранения A_x^{-1}; с другой стороны — препятствовать попаданию в плохо обусловленный базис.

Существуют программные реализации С. м., позволяющие решать на ЭВМ задачи л. п. с мало заполненной матрицей условий при m порядка тысяч и n порядка десятков тысяч. Разработаны многочисленные варианты С. м., учитывающие особенности различных специальных классов задач л. п. (блочные задачи, задачи транспортного типа и др.).

Несмотря на то, что С. м. теоретически не достаточно эффективен (он имеет экспоненциальную оценку трудоемкости на всем классе задач л. п., хотя алгоритмич. сложность этого класса всего лишь полиномиальна), опыт его применения и сравнения с другими методами позволяет сделать вывод, что для него пока (1983) нет серьезного конкурента.

Лит.: [1] Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование, М., 1963; [2] Данциг Дж., Линейное программирование, его применения и обобщения, пер. с англ., М., 1966; [3] Ашманов С. А., Линейное программирование, М., 1981.

Е. Г. Гольштейн.

СИМПЛЕКСНЫЙ ПОИСК — один из методов максимизации и минимизации функций многих переменных, при к-ром выбор направления спуска (подъема) производится упорядоченным перебором вершин допустимого многогранного множества (см. *Симплексный метод*).

А. Б. Иванов.

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГРУППА — одна из *классических групп*, определяемая как группа автоморфизмов знакопеременной билинейной формы Φ на левом K-модуле E, где K — коммутативное кольцо. В случае, когда $E=K^{2m}$ и матрица формы Φ в канонич. базисе $\{e_i\}$ модуля E имеет вид

$$J_m=\left\|\begin{matrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{matrix}\right\|,$$

где I_m — единичная матрица порядка m, соответствующая С. г. называется С. г. от $2m$ переменных над кольцом K и обозначается $\mathrm{Sp}(m, K)$ или $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$. Матрица любого автоморфизма из $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ в базисе $\{e_i\}$ наз. симплектической матрицей.

Пусть K — поле и Φ — невырожденная знакопеременная билинейная форма в n-мерном векторном пространстве E над K. Тогда n четно, ассоциированная с формой Φ С. г., изоморфная группе $\mathrm{Sp}_n(K)$, порождается всевозможными линейными преобразованиями пространства E вида $\sigma_{e,\alpha}$,

$$x \longmapsto \sigma_{e,\alpha}(x)=x+\alpha\Phi(e, x)\,e,$$

где $e\in E$, $\alpha\in K$. Линейные преобразования вида $\sigma_{e,\alpha}$ наз. симплектическими трансвекциями, или сдвигами, в направлении прямой Ke. Центр Z группы $\mathrm{Sp}_n(K)$ состоит из матриц I_n и $-I_n$, если $\mathrm{char}\,K\neq 2$; если же $\mathrm{char}\,K=2$, то $Z=\{I_n\}$. Факторгруппа $\mathrm{Sp}_n(K)/Z$ наз. проективной симплектической группой и обозначается $\mathrm{PSp}_n(K)$. Все проективные С. г. просты за исключением

$$\mathrm{PSp}_2(F_2)=\mathrm{Sp}_2(F_2),\ \mathrm{PSp}_4(F_2)=\mathrm{Sp}_4(F_2)\ \text{и}\ \mathrm{PSp}_2(F_3),$$

к-рые изоморфны соответственно симметрич. группам S_3 и S_6 и знакопеременной группе A_4 (через F_q обозначено поле из q элементов). Порядок С. г. $\mathrm{Sp}_{2m}(F_q)$ равен

$$(q^{2m}-1)\,q^{2m-1}\,(q^{2m-2}-1)\,q^{2m-3}\ldots(q^2-1)\,q.$$

С. г. $\mathrm{Sp}_2(K)$ совпадает со специальной линейной группой $\mathrm{SL}_2(K)$; если $\mathrm{char}\,K\neq 2$, то группа $\mathrm{PSp}_4(K)$ изоморфна факторгруппе группы $\Omega_5(K, f)$ по ее центру (где $\Omega_5(K, f)$ — коммутант ортогональной группы симметрической билинейной формы f от пяти переменных индекса 2).

За исключением случая $m=2$, $\mathrm{char}\,K=2$, всякий автоморфизм φ группы $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ может быть представлен в виде

$$\varphi(g)=h_1h_2g^{\tau}h_2^{-1}h_1^{-1},$$

где τ — автоморфизм поля K, $h_1\in\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ и h_2 — линейное преобразование пространства E, представляющееся в базисе $\{e_i\}$ матрицей вида

$$\begin{Vmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \beta I_m \end{Vmatrix}$$

(β — ненулевой элемент поля K).

С. г. $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ совпадает с группой K-точек линейной алгебраич. группы Sp_{2m}, задаваемой уравнением $A^{\perp} J_m A = J_m$. Эта алгебраич. группа, тоже называемая С. г., является простой односвязной линейной алгебраич. группой типа C_m, ее размерность равна $2m^2+m$.

В случае, когда $K=\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, С. г. $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ есть связная односвязная простая комплексная (соответственно вещественная) группа Ли. Группа $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ является одной из вещественных форм комплексной С. г. $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$. Остальные вещественные формы этой группы тоже иногда называют С. г. Это — подгруппы $\mathrm{Sp}(p, q)$, $p, q \geqslant 0$, $p+q=m$, выделяемые из группы $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$ условием сохранения эрмитовой формы вида

$$\sum_{i=1}^{2m} \varepsilon_i z_i \bar{z}_i,$$

где $\varepsilon_i = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant p$ и $m+1 \leqslant i \leqslant m+p$ и $\varepsilon_i = -1$ при остальных i. Группа $\mathrm{Sp}(0, m)$ — компактная вещественная форма комплексной С. г. $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$. С. г. $\mathrm{Sp}(p, q)$ изоморфна группе всех линейных преобразований правого векторного пространства $\mathbb{H}^m$ над телом кватернионов $\mathbb{H}$ размерности $m=p+q$, к-рые сохраняют кватернионную эрмитову форму индекса $\min(p, q)$, то есть форму вида

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{p} x_i \bar{y}_i - \sum_{i=p+1}^{m} x_i \bar{y}_i,$$

где

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{H}^m,$$

а черта означает переход к сопряженному кватерниону.

Лит.: [1] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [3] Дьёдонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [4] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [5] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948. *В. Л. Попов.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ — *аффинная связность* на гладком многообразии M размерности $2n$, обладающая ковариантно постоянной относительно нее невырожденной 2-формой Φ. Если аффинная связность на M задана с помощью локальных форм связности

$$\omega^i = \Gamma^i_k \, dk^k, \quad \det \| \Gamma^i_k \| \neq 0,$$
$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk} \omega^k$$

и

$$\Phi = a_{ij} \omega^i \wedge \omega^j, \ a_{ij} = -a_{ji},$$

то условие ковариантного постоянства Φ выражается в виде

$$da_{ij} = a_{kj} \omega^k_i + a_{ik} \omega^k_j.$$

2-форма Φ определяет на M симплектич. структуру (или почти гамильтонову структуру), превращая каждое касательное пространство $T_x(M)$ в симплектич. пространство с кососимметрич. скалярным произведением $\Phi(X, Y)$. С. с. можно определить так же, как аффинную связность на M, сохраняющую при параллельном перенесении векторов это произведение. Репер в каждом $T_x(M)$ может быть выбран так, что

$$\Phi = 2 \sum_{\alpha=1}^{n} \omega^\alpha \wedge \omega^{n+\alpha}.$$

Все такие реперы образуют главное расслоенное пространство над M, структурной группой к-рого является симплектич. группа. С. с.—это связность в этом главном расслоенном пространстве. Существуют многообразия M четной размерности, на к-рых нет невырожденной глобально определенной 2-формы Φ и, следовательно, нет С. с. Однако если Φ существует, то С. с., относительно к-рой Φ ковариантно постоянно, определяется неоднозначно.

Лит.: [1] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970. *Ю. Г. Лумисте.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА — *инфинитезимальная структура* 1-го порядка на четномерном гладком ориентируемом многообразии M^{2n}, к-рая определяется заданием на M^{2n} невырожденной 2-формы Φ. В каждом касательном пространстве $T_x(M^{2n})$ возникает структура симплектич. пространства с кососимметрическим скалярным произведением $\Phi(X, Y)$. Все касательные к M^{2n} реперы, адаптированные к С. с. (т. е. реперы, относительно к-рых Φ имеет канонич. вид

$$\Phi=2\sum\nolimits_{\alpha=1}^{n}\omega^{\alpha}\wedge\omega^{n+\alpha}),$$

образуют главное расслоенное пространство над M^{2n}, структурной группой к-рого является симплектич. группа $\mathrm{Sp}(n)$. Вообще, задание С. с. на M^{2n} равносильно заданию $\mathrm{Sp}(n)$-структуры на M^{2n}, как нек-рой *G-структуры*.

На M^{2n} со С. с. существует изоморфизм между модулями векторных полей и 1-форм на M^{2n}, к-рый векторному полю X ставит в соответствие 1-форму $\omega_X: Y\to\Phi(X, Y)$. Образ скобки Ли $[X, Y]$ наз. при этом скобкой Пуассона $[\omega_X, \omega_Y]$; в частности, когда ω_X и ω_Y полные дифференциалы, получается понятие скобки Пуассона двух функций на M^{2n}, к-рое обобщает соответствующее классич. понятие.

С. с. наз. **почти гамильтоновой структурой**, а если Φ замкнута, т. е. $d\Phi=0$, то **гамильтоновой структурой**; впрочем, иногда условие $d\Phi=0$ включают в определение С. с. Эти структуры, находящие применения в глобальной аналитич. механике, основаны на том факте, что на касательном расслоенном пространстве $T^*(M)$ любого гладкого многообразия M существует каноническая гамильтонова структура. Она определяется формой $\Phi=d\theta$, где 1-форма θ на $T^*(M)$, наз. **формой Лиувилля**, задается следующим образом: $\theta_u(X_u)=$ $=u(\pi_*X_u)$ для любого касательного вектора X_u в точке $u\in T^*(M)$, где π — проекция $T^*(M)\to M$. Если на M выбраны локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ и $u=y_i(u)dx^i_{\pi(u)}$, то $\theta=y_idx^i$, вследствие чего $\Phi=dy_i\wedge dx^i$. В классич. механике M интерпретируется как конфигурационное пространство, а $T^*(M)$ как фазовое пространство.

Векторное поле X на M^{2n} с гамильтоновой структурой наз. **гамильтоновым** (или **гамильтоновой системой**), если 1-форма ω_X замкнута. Если она, кроме того, точна, т. е. $\omega_X=-dH$, то функция H на M^{2n} наз. **гамильтонианом** и является обобщением соответствующего классического понятия.

Лит.: [1] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [2] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973. *Ю. Г. Лумисте.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — многообразие, снабженное *симплектической структурой*.

СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — нечетномерное проективное пространство P_{2n+1} над полем k с заданной в нем инволюционной корреляцией — нуль-системой; обозначается Sp_{2n+1}.

Пусть характеристика поля k не равна 2. Абсолютная нуль-система в Sp_{2n+1} всегда может быть записана в виде $u_i=a_{ij}x^j$, где $\|a_{ij}\|$ — кососимметрич. матрица

($a_{ij}=-a_{ji}$). В векторной форме абсолютная нуль-система может быть записана в виде $u=Ax$, где A — кососимметрич. оператор, матрица к-рого надлежащим выбором базиса приводится к виду

$$\|A\|=\left\|\begin{matrix} 0 & +1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & +1 & \\ & & & -1 & 0 & +1 \\ & & & & -1 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

В этом случае абсолютная нуль-система принимает канонич. вид:

$$u_{2i}=x^{2i+1}, \quad u_{2i+1}=-x^{2i}.$$

Абсолютная нуль-система порождает билинейную форму, к-рая записывается в канонич. виде:

$$xAy=\sum_i (x^{2i}y^{2i+1}-x^{2i+1}y^{2i}).$$

Коллинеации пространства Sp_{2n+1}, перестановочные с его нуль-системой, наз. симплектическими преобразованиями; операторы, определяющие эти коллинеации,— симплектическими. Для указанной выше канонич. формы матрицы $\|A\|$ определяется $(2n+2)$-матрица симплектич. оператора U, элементы к-рой удовлетворяют условиям

$$\sum_i (U_j^{2i}U_k^{2i+1}-U_j^{2i+1}U_k^{2i})=\delta_{j,\,k-1}-\delta_{j,\,k+1},$$

где $\delta_{a,\,b}$ — символ Кронекера, а матрица такого оператора U наз. симплектической; ее определитель равен единице. Симплектич. преобразования образуют группу, являющуюся группой Ли.

Всякая точка пространства Sp_{2n+1} лежит в $(2n-1)$ плоскости, соответствующей ей в абсолютной нуль-системе. Можно определить также и нулевые m-плоскости в Sp_{2n+1}. Многообразие нулевых прямых пространства Sp_{2n+1} наз. его абсолютным линейным комплексом. В связи с этим симплектич. группа наз. также группой линейного комплекса, или комплекс-группой.

Всякая пара прямых и соответствующих в нуль-системе двух $(2n-1)$-плоскостей определяют единственный в пространстве Sp_{2n+1} симплектич. инвариант относительно группы симплектич. преобразований этого пространства. Через каждую точку обеих прямых проходит трансверсаль этих прямых и $(2n-1)$-плоскостей так, что определяет проективные четверки точек. Это составляет геометрический смысл симплектического инварианта, который утверждает равенство двойных отношений получаемых четверок точек.

Симплектич. 3-пространство допускает интерпретацию в гиперболич. пространстве, что указывает, в частности, на связь симплектич. пространств с гиперболическими. Так, группа симплектич. преобразований пространства Sp_3 изоморфна группе движений гиперболич. пространства ${}^2S_4$. В этой интерпретации симплектич. инвариант связан с расстоянием между точками гиперболич. пространства.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Л. А. Сидоров.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО ОДНОРОДНОЕ — симплектическое многообразие (M, ω) вместе с транзитивной группой Ли G его автоморфизмов. Элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G можно рассматривать как симплектические векторные поля на M, т. е. поля X, сохраняющие симплектическую 2-форму ω:

$$X\cdot\omega=di_X\omega=0,$$

где точкой обозначена производная Ли, i_X — оператор внутреннего умножения на X, d — внешний дифференциал. С. п. о. наз. строго симплектическим, если все поля $X \in \mathfrak{g}$ гамильтоновы, то есть $i_X\omega = dH_X$, где H_X функция на M (гамильтониан поля X), причем гамильтониан H_X можно выбрать так, чтобы отображение $X \longmapsto H_X$ было гомоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли функций на M относительно скобки Пуассона. Примером строго С. п. о. является орбита $M_\alpha = (\mathrm{Ad}^*G)\alpha$ группы Ли G относительно коприсоединенного представления Ad^*G группы G в пространстве $\mathfrak{g}^*$ линейных форм на $\mathfrak{g}$, проходящая через произвольную точку $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Инвариантная симплектическая 2-форма ω на M_α задается формулой

$$\omega(X_\beta, Y_\beta) = d\beta(X, Y) = \beta([X, Y]),$$

где X_β, Y_β — значения векторных полей X, $Y \in \mathfrak{g}$ в точке $\beta \in M_\alpha$. Поле $X \in \mathfrak{g}$ имеет гамильтониан $H_X(\beta) = \beta(X)$.

Для произвольного строго С. п. о. (M, ω, G) определено G-эквивариантное отображение момента

$$\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*,\ x \longmapsto \mu_x,\ \mu_x(X) = H_X(x),$$

к-рое отображает M на орбиту $\mu(M)$ группы G в $\mathfrak{g}^*$ и является локальным изоморфизмом симплектич. многообразий. Таким образом, любое строго С. п. о. группы G является накрытием над орбитой группы G в коприсоединенном представлении.

Односвязные С. п. о. с односвязной, но не обязательно эффективно действующей группой автоморфизмов G находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами естественного действия группы G в пространстве $Z^2(\mathfrak{g})$ замкнутых 2-форм на ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Соответствие определяется следующим образом: ядро $\mathfrak{K}^\sigma$ любой 2-формы $\sigma \in Z^2(\mathfrak{g})$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Соответствующая $\mathfrak{K}^\sigma$ связная подгруппа K^σ группы Ли G замкнута и определяет односвязное однородное пространство $M^\sigma = G/K^\sigma$. Форма σ задает невырожденную 2-форму в касательном пространстве $T_0M^\sigma \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{K}^\sigma$ точки $o = eK^\sigma$ многообразия M^σ, к-рая продолжается до G-инвариантной симплектич. формы ω^σ на M^σ. Таким образом, форме σ отвечает односвязное С. п. о. $(M^\sigma, \omega^\sigma)$. Если $\mathfrak{K}^\sigma$ не содержит идеалов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то действие G на M^σ локально эффективно. С. п. о. M^σ и $M^{\sigma'}$ изоморфны тогда и только тогда, когда формы σ, σ' принадлежат одной орбите группы G в $Z^2(\mathfrak{g})$. Для точной 2-формы $\sigma = d\alpha$ С. п. о. M^σ отождествляется с универсальной накрывающей С. п. о. M_α, являющегося орбитой точки α в коприсоединенном представлении. Если $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, то орбита $G\sigma$ любой точки $\sigma \in Z^2(\mathfrak{g})$ канонически снабжается структурой С. п. о. и любое С. п. о. односвязной группы G изоморфно накрытию над одной из таких орбит. В частности, M^σ есть универсальная накрывающая орбиты $G\sigma$.

Пусть (M, ω) — компактное С. п. о. односвязной связной группы G, действующей локально эффективно. Тогда G есть прямое произведение полупростой компактной группы S и разрешимой группы R, разлагающейся в полупрямое произведение абелевой подгруппы и абелева нормального делителя, а С. п. о. (M, ω) разлагается в прямое произведение С. п. о. с группами автоморфизмов S и R соответственно.

Частным случаем С. п. о. является симплектическое групповое пространство — группа Ли вместе с левоинвариантной симплектич. формой ω. Известно, что из редуктивности группы Ли, допускающей левоинвариантную симметрич. форму, следует ее коммутативность, а из унимодулярности — разрешимость. Все такие группы размерности $\leqslant 4$ разрешимы, но начиная с размерности 6 существуют неразрешимые симплектические групповые пространства [3].

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Гийемин В., Стернберг С., Геометрические асимптотики, пер. с англ., М., 1981; [3] Chu B.-Y., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1974, v. 197, p. 145—59; [4] Zwart Ph. B., Boothby W. M., «Ann. Inst. Fourier», 1980, t. 30, № 1, p. 129—57. *Д. В. Алексеевский.*

СИМПЛИЦИАЛЬНАЯ СХЕМА (прежние названия — симплициальный комплекс, абстрактный симплициальный комплекс) — множество, элементы к-рого наз. вершинами и в к-ром выделены такие конечные непустые подмножества, наз. симплексами, что каждое непустое подмножество симплекса s является симплексом, наз. гранью симплекса s, и каждое одноэлементное подмножество является симплексом.

Симплекс наз. q-мерным, если он состоит из $q+1$ вершин. Размерностью $\dim K$ симплициальной схемы K наз. максимальная размерность ее симплексов (она может быть и бесконечной). С. с. наз. локально конечной, если каждая ее вершина принадлежит лишь конечному числу симплексов. С. с. наз. упорядоченной, если на ней задано частичное упорядочение, линейное на каждом симплексе.

Пример С. с. Пусть X — множество и $U=\{U_\alpha|\alpha\in A\}$ — нек-рое семейство его непустых подмножеств. Непустое конечное подмножество $a\in A$ наз. симплексом, если множество $\bigcap_{\alpha\in A}U_\alpha$ непусто. Получающаяся С. с. A наз. нервом семейства U.

Симплициальным отображением С. с. K_1 в симплициальную схему K_2 наз. такое отображение $f: K_1\to K_2$, что для каждого симплекса s в С. с. K_1 его образ $f(s)$ является симплексом в С. с. K_2. С. с. и их симплициальные отображения составляют категорию.

Если симплициальное отображение $f: L\to K$ является вложением, то С. с. L наз. симплициальной подсхемой С. с. K. Все симплексы С. с. K размерности, меньшей или равной n, составляют симплициальную подсхему С. с. K, к-рая обозначается K^n и наз. n-мерным (или n-м) остовом С. с. K. Симплициальная подсхема L С. с. K наз. полной, если каждый симплекс в K, все вершины к-рого принадлежат L, сам лежит в L.

Каждой С. с. K канонически сопоставляется *симплициальное множество* $O(K)$, симплексами размерности n к-рого являются $(n+1)$-членные последовательности $(x_0, \ldots, x_n)$ вершин С. с. K, обладающие тем свойством, что в K существует такой симплекс s, что $x_i\in s$ для любого $i=0, 1, \ldots, n$. Операторы граней d_i и вырождения s_i этого симплициального множества определяются формулами

$$d_i(x_0, \ldots, x_n)=(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n),$$
$$s_i(x_0, \ldots, x_n)=(x_0, \ldots, x_i, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

где знак $\wedge$ означает, что символ, стоящий под ним, опускается. Для упорядоченной С. с. K определено симплициальное подмножество $O^+(K)\subset O(K)$, состоящее из тех симплексов $(x_0, \ldots, x_n)$, для к-рых $x_0\leqslant x_1\leqslant\ldots\leqslant x_n$. Группы (ко)гомологий симплициального множества $O(K)$ изоморфны группам (ко)гомологий симплициального множества $O^+(K)$ и наз. группами (ко)гомологий С. с.

Каждому симплициальному разбиению (симплициальному пространству) X отвечает С. с. симплициального разбиения, вершинами к-рой являются вершины разбиения X, а симплексами — те непустые конечные множества вершин, на к-рые в X натянут симплекс. Для каждой С. с. K существует однозначно определенное с точностью до изоморфизма симплициальное разбиение, С. с. к-рого является K. Оно наз. геометрической реализацией (или телом) С. с. K и обозначается $|K|$. Им является геометрич. реализация в смысле Дживера — Ху (см. *Симплициальное множество*) $\|O(K)\|$ симплициального множества $O(K)$, а если С. с. K упорядочена — геометрич. реализация в смысле Милнора $|O^+(K)|$ симплициального множества $O^+(K)$. Соответствие $K \to \|O(K)\|$ является ковариантным функтором из категории С. с. в категорию клеточных разбиений (клеточных пространств). Топологич. пространство X, гомеоморфное телу $|K|$ нек-рой С. с. K, наз. полиэдром (а также триангулируемым пространством), а пара (K, f), где $f: |K| \to X$ — гомеоморфизм, наз. триангуляцией пространства X.

Точки топологич. пространства $|K|$ можно отождествить с функциями $\alpha: K \to [0, 1]$, для к-рых множество $\{x \in K | \alpha(x) \neq 0\}$ является симплексом в K и

$$\sum_{x \in K} \alpha(x) = 1.$$

Число $\alpha(x)$ наз. x-й барицентрической координатой точки α. Формула

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{x \in K} (\alpha(x) - \beta(x))^2}$$

определяет на множестве $|K|$ метрику, но соответствующая метрич. топология, вообще говоря, сильнее топологии пространства $|K|$. Множество $|K|$, снабженное метрич. топологией, обозначается $|K|_d$.

С. с. K изоморфна нерву семейства звезд вершин пространства $|K|$, т. е. открытых подмножеств $\mathrm{St}x = \{\alpha \in |K| | \alpha(x) \neq 0\}$, где $x \in K$.

Следующие утверждения равносильны: 1) С. с. K локально конечна; 2) пространство $|K|$ локально компактно; 3) $|K| = |K|_d$; 4) пространство $|K|$ метризуемо; 5) пространство $|K|$ удовлетворяет первой аксиоме счетности. Пространство $|K|$ сепарабельно (компактно) тогда и только тогда, когда С. с. K не более чем счетна (конечна).

Клетки клеточного разбиения $|K|$ находятся в биективном соответствии с симплексами С. с. $|K|$, и замыкание $|s|$ клетки, соответствующей симплексу s, определяется формулой

$$|s| = \{\alpha \in |K| \,|\, \alpha(x) \neq 0 \Rightarrow x \in s\}.$$

Оно гомеоморфно q-мерному ($q = \dim s$) замкнутому шару (так что клеточное разбиение $|K|$ регулярно). Более того, на каждом множестве $|s|$ имеется канонич. линейная (аффинная) структура, по отношению к к-рой оно изоморфно *стандартному симплексу* Δ^q. Отсюда и из того, что $|s \cap s'| = |s| \cap |s'|$ для любых симплексов $s, s' \subset K$, вытекает, что пространство $|K|$ может быть гомеоморфно отображено (вложено) в пространство $\mathbb{R}^n$ (возможно, с трансфинитным n) так, чтобы все замкнутые клетки $|s|$ оказались (прямолинейными) симплексами. Это означает, что образ $|K|$ в $\mathbb{R}^n$ является *симплициальным пространством* (полиэдром), т. е. объединением замкнутых симплексов, пересекающихся только по целым граням. Это симплициальное пространство наз. реализацией С. с. K в $\mathbb{R}^n$.

С. с. K тогда и только тогда реализуется в пространстве $\mathbb{R}^n$ с конечным n, когда С. с. K локально конечна, не более чем счетна и ее размерность конечна. При этом, если $\dim K \leqslant n$, то K реализуется в $\mathbb{R}^{2n+1}$. С. с., состоящая из $2n+3$ вершин, каждое $(n+1)$-элементное подмножество к-рой является симплексом, в $\mathbb{R}^{2n}$ не реализуется.

По любой С. с. K можно построить новую С. с. $\mathrm{Bd}K$, вершинами к-рой являются симплексы С. с. K, а симплексами — такие семейства $(s_0, \ldots, s_q)$ симплексов из K, что $s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_q$. С. с. $\mathrm{Bd}K$ наз. барицентрическим измельчением (или подразделением) С. с. K. Клеточные пространства $|\mathrm{Bd}K|$ и $|K|$ естественно гомеоморфны (но не изоморфны). При этом гомеоморфизме каждая вершина $|s|$ из $|\mathrm{Bd}K|$ (т. е. нульмерная клетка, отвечающая вершине $s\in\mathrm{Bd}K$) переходит в центр тяжести (барицентр) замкнутого симплекса $|s|\subset|K|$.

С. с. $\mathrm{Bd}K$ естественным образом упорядочена. Если С. с. K упорядочена, то соответствие $s\to$ (первая вершина s) определяет симплициальное отображение $\mathrm{Bd}K\to K$, сохраняющее упорядоченность. Оно наз. канонически сдвигом. Его геометрич. реализация (являющаяся непрерывным отображением $|\mathrm{Bd}K|\to|K|$) гомотопна естественному гомеоморфизму $|\mathrm{Bd}K|\to|K|$.

Симплициальное отображение $\varphi: K\to L$ (или его геометрич. реализация $|\varphi|: |K|\to|L|$) наз. симплициальной аппроксимацией непрерывного отображения $f:|K|\to|L|$, если для каждой точки $\alpha\in|K|$ точка $|\varphi|(\alpha)$ принадлежит минимальному замкнутому симплексу, содержащему точку $f(\alpha)$, т. е., что равносильно, если для каждой вершины $x\in K$ имеет место вложение $f(\mathrm{St}x)\subset\mathrm{St}\varphi(x)$. При этом отображения f и $|\varphi|$ гомотопны.

Теорема о симплициальной аппроксимации утверждает, что если С. с. K конечна, то для каждого непрерывного отображения $f:|K|\to|L|$ найдется такое число N, что для всех $n\geqslant N$ существует симплициальная аппроксимация $\mathrm{Bd}^nK\to L$ отображения f (рассматриваемого как отображение $|\mathrm{Bd}^nK|\to$ $\to|L|$).

Лит.: [1] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [2] Хилтон П. Дж., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, пер. с англ., М., 1966; [3] Whitehead J. H. C., «Proc. London Math. Soc.», 1939, v. 45, p. 243—327.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников.

СИМПЛИЦИАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО (прежние названия — полусимплициальный комплекс, полный полусимплициальный комплекс) — *симплициальный объект* категории множеств Ens, т. е. система множеств (n-х слоев) K_n, $n\geqslant0$, связанных отображениями $d_i: K_n\to K_{n-1}$, $0\leqslant i\leqslant n$ (операторами граней), и $s_i: K_n\to$ $\to K_{n+1}$, $0\leqslant i\leqslant n$ (операторами вырождения), удовлетворяющих соотношениям

$$\left.\begin{array}{l} d_id_j=d_{j-1}d_i, \text{ если } i<j,\\ s_is_j=s_{j+1}s_i, \text{ если } i\leqslant j;\\ d_is_j=\begin{cases} s_{j-1}d_i, \text{ если } i<j,\\ \mathrm{id}, \text{ если } i=j \text{ или } i=j+1,\\ s_jd_{i-1}, \text{ если } i>j+1. \end{cases}\end{array}\right\} \quad (*)$$

Точки слоя K_n наз. n-мерными симплексами С. м. K. Если заданы только операторы d_i, удовлетворяющие соотношениям $d_id_j=d_{j-1}d_i$, $i<j$, то система $\{K_n, d_n\}$ наз. полусимплициальным множеством.

Симплициальным отображением $f: K\to K'$ С. м. K в С. м. K' наз. морфизм функторов, т. е. последовательность отображений $f_n: K_n\to K_n'$, $n\geqslant0$, удовлетворяющих соотношениям

$$d_if_{n+1}=f_nd_i,\quad 0\leqslant i\leqslant n+1;\quad s_if_n=f_{n+1}s_i,\ 0\leqslant i\leqslant n.$$

С. м. и их симплициальные отображения образуют категорию $\Delta^0\mathrm{Ens}$. Если все отображения f_n являются вложениями, то С. м. K наз. симплициальным подмножеством С. м. K'. При этом операторы граней и вырождения в С. м. K представляют собой ограничения соответствующих операторов в С. м. K'.

Для любого топологич. пространства X определено С. м. $S(X)$, наз. **сингулярным** С. м. пространства X, симплексами к-рого являются сингулярные симплексы пространства X (см. *Сингулярные гомологии*), т. е. непрерывные отображения $\sigma: \Delta^n \to X$, где Δ^n — n-мерный геометрический *стандартный симплекс*

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \ldots, t_n) \mid 0 \leqslant t_i \leqslant 1, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Операторы граней d_i и вырождения s_i этого С. м. определяются формулами

$$(d_i\sigma)(t_0, \ldots, t_{n-1}) = \sigma(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}),$$
$$(s_i\sigma)(t_0, \ldots, t_{n+1}) =$$
$$= \sigma(t_0, \ldots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_{n+1}).$$

Соответствие $X \mapsto S(X)$ является функтором (наз. **сингулярным функтором**) из категории топологич. пространств Top в категорию С. м. $\Delta^0\mathrm{Ens}$.

Произвольная *симплициальная схема* K определяет С. м. $O(K)$, симплексами размерности n к-рого являются $(n+1)$-членные последовательности $(x_0, \ldots, x_n)$ вершин схемы K, обладающие тем свойством, что в K существует такой симплекс s, что $x_i \in s$ для любого $i=0, 1, \ldots, n$. Операторы граней d_i и вырождения s_i этого С. м. определяются формулами

$$d_i(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n),$$
$$s_i(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_i, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

где знак $\wedge$ означает, что символ, стоящий под ним, опускается. Если симплициальная схема K упорядочена, то симплексы $(x_0, \ldots, x_n)$, для к-рых $x_0 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, образуют симплициальное подмножество $O^+(K)$ С. м. $O(K)$. Соответствие $K \mapsto O(K)$ (и $K \mapsto O^+(K)$) является функтором из категории симплициальных схем (упорядоченных симплициальных схем) в категорию $\Delta^0\mathrm{Ens}$. Для произвольной группы π определено С. м. $K(\pi)$, симплексами размерности n к-рого являются классы пропорциональных $(n+1)$-членных последовательностей $(x_0, \ldots, x_n)$, $x_i \in \pi$ (по определению $(x_0, \ldots, x_n) \sim (x_0', \ldots, x_n')$, если существует такой элемент $y \in \pi$, что $x_i' = yx_i$ для всех $i=0, \ldots, n$). Операторы граней d_i и вырождения s_i С. м. $K(\pi)$ определяются формулами

$$d_i(x_0 : \ldots : x_n) = (x_0 : \ldots : x_{i-1} : x_{i+1} : \ldots : x_n),$$
$$s_i(x_0 : \ldots : x_n) = (x_0 : \ldots : x_{i-1} : x_i : x_i : x_{i+1} : \ldots : x_n).$$

С. м. $K(\pi)$ является на самом деле симплициальной группой.

Для произвольной абелевой группы π и любого целого $n \geqslant 1$ определено С. м. (на самом деле, симплициальная абелева группа) $E(\pi, n)$, симплексами размерности q к-рого являются n-мерные коцепи q-мерного геометрического стандартного симплекса Δ^q с коэффициентами в группе π (таким образом, $E(\pi, n)_q = C^n(\Delta^q; \pi)$). Обозначая вершины симплекса Δ^q символами e_j^q, $j=0, \ldots, q$, определяют симплициальные отображения $\delta_i: \Delta^{q-1} \to \Delta^q$ и $\sigma_i: \Delta^q \to \Delta^{q-1}$ формулами

$$\delta_i(e_j^{q-1}) = \begin{cases} e_j^q, & \text{если } j < i, \\ e_{j+1}^q, & \text{если } j \geqslant i; \end{cases}$$

$$\sigma_i(e_j^q) = \begin{cases} e_j^{q-1}, & \text{если } j \leqslant i, \\ e_{j-1}^{q-1}, & \text{если } j > i. \end{cases}$$

Индуцированные гомоморфизмы групп коцепей

$$d_i = \delta_i^*: C^n(\Delta^q; \pi) \longrightarrow C^n(\Delta^{q-1}; \pi),$$
$$s_i = \sigma_i^*: C^n(\Delta^{q-1}; \pi) \longrightarrow C^n(\Delta^q; \pi)$$

являются, по определению, операторами граней и вырождения С. м. $E(\pi, n)$. Симплексы, являющиеся коциклами, образуют симплициальное подмножество С. м. $E(\pi, n)$, к-рое наз. С. м. Эйленберга — Маклейна и обозначается $K(\pi, n)$. Кограничный оператор на группах $C^*(\Delta^q; \pi)$ определяет каноническое симплициальное отображение $E(\pi, n) \to K(\pi, n+1)$, к-рое обозначается δ. Поскольку понятие одномерного коцикла имеет смысл и для неабелевой группы π (см. *Неабелевы когомологии*), С. м. $K(\pi, 1)$ определено и без предположения, что группа π абелева. Это С. м.изоморфно С. м. $K(\pi)$ (следует каждому симплексу $z \in K(\pi, 1)_q = Z^1(\Delta^q, \pi)$ сопоставить значения нульмерной коцепи, кограницей к-рой является коцикл z, на вершинах e_j^q).

Сопоставив каждому слою K_n С. м. K свободную абелеву группу, им порожденную, получают симплициальную абелеву группу и, следовательно, цепной комплекс. Этот комплекс обозначается $C(K)$ и наз. комплексом цепей С. м. K. Группы (ко)гомологий комплекса $C(K)$ (с коэффициентами в группе G) наз. группами (ко)гомологий $H_*(K; G)$ и $H^*(K; G)$ С. м. K. Группы (ко)гомологий сингулярного С. м. $S(X)$ являются сингулярными группами (ко)гомологий топологич. пространства X. Группы (ко)гомологий С. м. $O(K)$ и $O^+(K)$ изоморфны и наз. группами (ко)гомологий симплициальной схемы K. Группы (ко)гомологий С. м. $K(\pi)$ суть группы (ко)гомологий группы π.

Симплекс $x \in K_n$ С. м. K наз. вырожденным, если существует такой симплекс $y \in K_{n-1}$ и такой оператор вырождения s_i, что $x = s_i y$. Лемма Эйленберга — Зильбера утверждает, что любой симплекс $x \in K_n$ С. м. K единственным образом представляется в виде $x = K(s)y$, где s — нек-рый эпиморфизм $s_i : [n] \to [m]$, $m \leqslant n$, а $y \in K_m$ — невырожденный симплекс. Наименьшее симплициальное подмножество С. м. K, содержащее все его невырожденные симплексы размерности, меньшей или равной n, обозначается K^n или $\mathrm{Sk}^n K$ и наз. n-мерным остовом С. м. K.

Геометрические стандартные симплексы

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \ldots, t_n) \mid 0 \leqslant t_i \leqslant 1, \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

составляют косимплициальное топологич. пространство относительно операторов кограней δ_i и ковырождения σ_i, определенных формулами

$$\delta_i(t_0, \ldots, t_{n-1}) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}),$$
$$\sigma_i(t_0, \ldots, t_{n+1}) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_{n+1}).$$

В дизъюнктьом объединении $U_{n=0}^{\infty} K_n \times \Delta^n$, где все K_n рассматриваются как дискретные множества, формулы

$$(d_i x, u) \sim (x, \delta_i u), \ x \in K_n, \ u \in \Delta^{n-1};$$
$$(s_i x, u) \sim (x, \sigma_i u), \ x \in K_n, \ u \in \Delta^{n+1},$$

определяют отношение эквивалентности, факторпространство по к-рому является клеточным разбиением (клеточным пространством), клетки к-рого находятся в биективном соответствии с невырожденными симплексами С. м. K. Это клеточное разбиение обозначается $|K|$ или RK и наз. геометрической реализацией в смысле Милнора С. м. K. Каждое симплициальное отображение $f : K \to L$ индуцирует по формуле

$$Rf[x, u] = [f(x), u]$$

непрерывное отображение $Rf : RK \to RL$, и соответствия $K \mapsto RK$, $f \mapsto Rf$ представляют собой функтор R: $\Delta^0\mathrm{Ens} \to \mathrm{Top}$. Этот функтор сопряжен слева к сингулярному функтору $S : \mathrm{Top} \to \Delta^0\mathrm{Ens}$. Соответствующие изоморфизмы функторов

$$\varphi : \Delta^0\,\mathrm{Ens}\,(K,\ S\,(X)) \longrightarrow \mathrm{Top}\,(RK,\ X),$$
$$\psi : \mathrm{Top}\,(RK,\ X) \longrightarrow \Delta^0\,\mathrm{Ens}\,(K,\ S\,(X))$$

определяются формулами

$$\varphi\,(f)\,[x,\ u] = f\,(x)\,(u),$$
$$(\psi\,(g)\,(x))\,(u) = g\,[x,\ u],$$

где

$x \in K_n,\ u \in \Delta^n,\ f \in \Delta^0\,\mathrm{Ens}\,(K, S\,(X)),\ g \in \mathrm{Top}\,(RK, X)$.

Морфизм сопряжения $\Phi(X) : RS(X) \to X$ является для любого топологич. пространства X слабой гомотопич. эквивалентностью (это, в частности, доказывает, что произвольное топологич. пространство слабо гомотопически эквивалентно клеточному разбиению).

Конструкция геометрич. реализации $|K|$ обобщается на симплициальные топологич. пространства K. Можно также определить геометрическую реализацию в смысле Дживера — Ху $\|K\|$, учитывающую только операторы граней d_i (в этой реализации имеются клетки для всех симплексов из K, а не только невырожденных). Если каждый оператор вырождения s_i является замкнутым корасслоением (условие, автоматически выполненное для С. м.), то естественное отображение $p : \|K\| \to |K|$ является гомотопич. эквивалентностью.

Категория $\Delta^0\mathrm{Ens}$ допускает произведения, при этом для любых С. м. $K = \{K_n,\ d_i^K,\ s_i^K\}$ и $L = \{L_n,\ d_i^L,\ s_i^L\}$ их произведением будет С. м. $K \times L$, для к-рого

$$(K\times L)_n = K_n \times L_n,$$
$$d_i^{K\times L} = d_i^K \times d_i^L,$$
$$s_i^{K\times L} = s_i^K \times s_i^L.$$

В частности, для каждого С. м. K определено его произведение на симплициальный отрезок Δ^1. Проекции $\pi_1 : K \times L \to K$ и $\pi_2 : K \times L \to L$ определяют биективное отображение

$$R\pi_1 \times R\pi_2 : R\,(K \times L) \longrightarrow RK \times RL,$$

к-рое является гомеоморфизмом, когда произведение $RK \times RL$ представляет собой клеточное разбиение (напр., если оба С. м. K и L счетны или же если одно из клеточных разбиений RK или RL локально конечно). Отсюда, в частности, следует, что геометрич. реализация любого счетного симплициального моноида (группы, абелевой группы) является топологич. моноидом (группой, абелевой группой).

Симплициальные отображения $f,\ g : K \to L$ наз. гомотопными, если существует такое симплициальное отображение (гомотопия) $F : K \times \Delta^1 \to L$, что

$$F\,(x,\ sd_0\iota_1) = f\,(x),$$
$$F\,(x,\ sd_1\iota_1) = g\,(x)$$

для любого симплекса $x \in K_n$ и для любой композиции s (длины n) операторов вырождения. Это определение (моделирующее обычное определение гомотопии непрерывных отображений) равносильно (для случая С. м.) общему определению гомотопности симплициальных отображений любых симплициальных объектов.

Имея понятие гомотопии, можно развивать теорию гомотопий С. м. аналогично теории гомотопий полиэдров. Оказывается, что эти две теории полностью параллельны; это находит свое выражение в том, что соответствующие категории эквивалентны (эквивалентность осуществляется функтором геометрич. реализации). В частности, геометрич. реализации гомотопных симплициальных отображений гомотопны, и, напр., геометрич. реализация С. м. $K(\pi, n)$ будет *Эйленберга — Маклейна пространством* $K(\pi, n)$. Однако фактич. построение теории гомотопий для С. м. в деталях несколько отличается от построения теории гомотопий для топологич. пространств. Основное отличие состоит в том, что отношение гомотопности симплициальных отображений не является, вообще говоря, отношением эквивалентности. Эта трудность преодолевается следующим образом.

Симплициальное отображение $\Lambda_k^n \to K$ стандартного фунтика (см. *Стандартный симплекс*) в С. м. K наз. фунтиком в K. Каждый фунтик однозначно задается $(n+1)$-членной последовательностью n-мерных симплексов $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}$, для к-рых $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ при любых $i<j$, $i \neq k$. Говорят, что фунтик заполняется, если он распространяется на все С. м. Δ^{n+1}, т. е. найдется такой $(n+1)$-мерный симплекс x, что $d_i x = x_i$ для каждого $i \neq k$. С. м. K наз. полным (или удовлетворяющим условию Кана), если каждый его фунтик заполняется.

Сингулярное С. м. $S(X)$ произвольного топологич. пространства X всегда полно. Любая симплициальная группа полна, в частности полны С. м. Эйленберга — Маклейна $K(\pi)$ и $K(\pi, n)$. Значение полных С. м. состоит в том, что отношение гомотопности симплициальных отображений произвольного С. м. в полное С. м. является отношением эквивалентности. Поэтому на подкатегории полных С. м. построение теории гомотопий принципиальных трудностей не вызывает. Вместе с тем существует [4] функтор $\mathrm{Ex}^\infty : \Delta^0\mathrm{Ens} \to \Delta^0\mathrm{Ens}$, сопоставляющий каждому С. м. K полное С. м. $\mathrm{Ex}^\infty K$, геометрич. реализация к-рого гомотопически эквивалентна геометрич. реализации С. м. K и к-рое поэтому вполне заменяет С. м. K во всех гомотопических вопросах.

Два n-мерных симплекса x и x' С. м. K наз. сравнимыми, если $d_i x = d_i x'$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Сравнимые симплексы наз. гомотопными, если существует такой $(n+1)$-мерный симплекс y, что $d_n y = x$, $d_{n+1} y = x'$ и $d_i y = s_{n-1} d_i x = s_{n-1} d_i x'$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Для полных С. м. это отношение является отношением эквивалентности, причем симплексы тогда и только тогда гомотопны, когда их характеристические симплициальные отображения гомотопны $\mathrm{rel}\,\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^n$.

С. м. K наз. пунктированным, если в нем отмечен нек-рый нульмерный симплекс θ (тем же символом θ обозначаются все вырождения этого симплекса, а также порожденное им симплициальное подмножество, к-рое обычно наз. отмеченной точкой в K). Для полного пунктированного С. м. K множество $\pi_n(K)$ классов гомотопных n-мерных симплексов, сравнимых с симплексом θ, является при $n \geqslant 1$ группой. Эта группа наз. n-мерной гомотопической группой пунктированного полного С. м. K; эта терминология оправдывается тем, что $\pi_n(K) = \pi_n(|K|)$, и в частности $\pi_n(K(\pi, n)) = \pi$ и $\pi_i(K(\pi, n)) = 0$ при $i \neq n$. С. м. K, для к-рого $\pi_i(K) = 0$ при всех $i \leqslant n$, наз. n-связным; при этом 0-связное С. м. наз. связным, а 1-связное С. м. — односвязным. Сложение в группе $\pi_n(K)$, $n \geqslant 1$, индуцируется операцией, сопоставляющей симплексам x и y (сравнимым с θ) симплекс $d_n z$, где z — симплекс размерности $n+1$, заполняющий фунтик $x_i = \theta$, $i \leqslant n-2$, $x_{n-1} = x$, $x_{n+1} = y$. Если С. м. K является симплициальным моноидом с единицей θ, то сложение индуцируется также умножением в этом моноиде (произведение двух симплексов, сравнимых с θ, сравнимо с θ).

Поскольку любой симплекс x, сравнимый с θ, является циклом (цепного комплекса $C(K)$, определяемого С. м. K), то возникает естественный гомоморфизм Гуревича $h:\pi_n(K)\to H_n(K)$, при $n=1$ индуцирующий изоморфизм

$$\pi_1(K)/[\pi_1(K),\ \pi_1(K)]\longrightarrow H_1(K)$$

(теорема Пуанкаре), а при $n>1$ являющийся изоморфизмом, когда С. м. K $(n-1)$-связно (теорема Гуревича). Для полных С. м. справедлива также и теорема Уайтхеда в обоих ее вариантах, т. е. симплициальное отображение $f:K\to L$ полных С. м. тогда и только тогда является гомотопич. эквивалентностью, когда оно индуцирует изоморфизм гомотопич. групп, причем для односвязных С. м. это условие равносильно тому, что индуцированные гомоморфизмы групп гомологий являются изоморфизмами.

В случае, когда K является симплициальной группой, гомотопич. группа $\pi_n(K)$ изоморфна группе гомологий $H_n(\overline{K})$ цепного (не обязательно абелева) комплекса $\overline{K}$, для к-рого

$$\overline{K}_n=K_n\cap\operatorname{Ker}d_0\cap\ldots\cap\operatorname{Ker}d_{n-1},$$

а граничный оператор является ограничением на $\overline{K}_n$ оператора $(-1)^n d_n$. Если симплициальная группа K абелева, то комплекс $\overline{K}$ является подкомплексом этой группы, рассматриваемой как цепной комплекс, и, более того, ее цепным деформационным ретрактом, и, в частности, ее прямым слагаемым. Оказывается, что дополнительным прямым слагаемым служит подкомплекс, порожденный вырожденными симплексами. Поэтому соответствующий факторкомплекс комплекса K ему цепно эквивалентен. Напр., для групп когомологий произвольного С. м. K отсюда следует (теорема о нормализации), что они изоморфны нормализованным группам когомологий, т. е. группам, получающимся, если ограничиться коцепями, равными нулю на всех вырожденных симплексах. Кроме того, $\pi_n(C(K))=H_n(K)$.

Функтор $K\longmapsto\overline{K}$ осуществляет эквивалентность теории гомотопий симплициальных абелевых групп с теорией гомологий цепных комплексов. Отсюда, в частности, следует, что любая связная симплициальная абелева группа K гомотопически эквивалентна произведению С. м. Эйленберга — Маклейна $K(\pi_n(K),\ n)$.

Полное С. м. K наз. минимальным, если сравнимые симплексы тогда и только тогда гомотопны, когда они совпадают. С. м. $K(\pi,\ n)$ минимально. Всякая гомотопич. эквивалентность минимальных С. м. является изоморфизмом. Каждое полное С. м. K обладает минимальным симплициальным подмножеством. Оно является его деформационным ретрактом, и поэтому с точностью до изоморфизма определено однозначно.

Симплициальное отображение $p:E\to B$ наз. расслоением в смысле Кана, если в E заполняется любой фунтик $f:\Lambda_k^n\to E$, для к-рого фунтик $p\circ f:\Lambda_k^n\to B$ заполнен, причем для любого заполнения $g:\Delta^{n+1}\to B$ фунтика $p\circ f$ существует такое заполнение $\tilde{f}:\Delta^{n+1}\to E$ фунтика f, что $p\circ\tilde{f}=g$. Расслоение в смысле Кана является симплициальным аналогом расслоения в смысле Серра и для него имеет место теорема о накрывающей гомотопии в следующей форме: если для симплициальных отображений $\tilde{f}:K\to E$ и $\Phi:K\times\Delta^1\to B$ имеет место равенство $\Phi\circ(\mathrm{id}\times\delta_1)=p\circ\tilde{f}$, то существует такое симплициальное отображение $\tilde{\Phi}:K\times\Delta^1\to E$, что $\tilde{\Phi}\circ(\mathrm{id}\times\delta_1)=\tilde{f}$ и $p\circ\tilde{\Phi}=\Phi$. Если расслоение p является сюръективным отображением, то С. м. E полно тогда и только тогда, когда полно С. м. B. Слоем расслоения $p:E\to B$ наз. (автоматически полное) С. м. $F=p^{-1}(\theta)$, где θ — отмеченная точка в B. Для любого расслоения в смысле

Серра $p: E \to B$ симплициальное отображение $S(p)$: $S(E) \to S(B)$ является расслоением в смысле Кана, и для любого расслоения в смысле Кана $p: E \to B$ отображение $R_p: RE \to RB$ является расслоением в смысле Серра (см. [5]).

Пусть K — полное пунктированное С. м. и $n \geqslant 0$. Положим $x \underset{\sim}{n} y$, где $x, y \in K_q$, если $d_i x = d_i y$ для всех $i \leqslant n$, т. е. если

$$\chi_x \Big|_{Sk^n \Delta^q} = \chi_y \Big|_{Sk^n \Delta^q}$$

(см. *Стандартный симплекс*). Это отношение является эквивалентностью, и фактормножества $(\mathrm{Cosk}^n K)_q = K_q / n$ составляют (по отношению к индуцированным операторам граней и вырождения) С. м. $\mathrm{Cosk}^n K$, к-рое наз. n-м к о о с т о в о м С. м. K. По определению, полагается $\mathrm{Cosk}^n K = K$. Для любого $n \geqslant 0$ С. м. $\mathrm{Cosk}^n K$ полно и $\pi_q(\mathrm{Cosk}^n K) = 0$ при $q > n$. Кроме того, для любого $m \leqslant n$ естественное сюръективное симплициальное отображение

$$p^n_m: \mathrm{Cosk}^n K \longrightarrow \mathrm{Cosk}^m K$$

является расслоением, индуцирующим в размерностях, меньших или равных m, изоморфизм гомотопич. групп. В частности, слой расслоения p^n_{n-1} гомотопически эквивалентен С. м. Эйленберга — Маклейна $K(\pi_n(K), n)$. Последовательность расслоений

$$K \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{Cosk}^{n+1} K \longrightarrow \mathrm{Cosk}^n K \longrightarrow \mathrm{Cosk}^{n-1} K \longrightarrow \ldots$$

наз. *Постникова системой* полного С. м. K. Если С. м. K минимально, то эта последовательность является его резольвентой (см. *Гомотопический тип*).

Конструкция системы Постникова непосредственно обобщается на произвольное расслоение $p: E \to B$ полного С. м. E над полным С. м. B. Пусть $\mathrm{Cosk}^n p$ есть С. м., слоями $(\mathrm{Cosk}^n p)_q$ к-рого являются фактормножества слоев E_q по отношению $x \overset{n}{\sim} y$, к-рое имеет место тогда и только тогда, когда $p(x) = p(y)$ и $d_i x = d_i y$ при всех $i \leqslant n$. По определению, полагается $\mathrm{Cosk}^\infty p = E$. При этом $\mathrm{Cosk}^0 p = B$. При $m \leqslant n \leqslant \infty$ естественное сюръективное симплициальное отображение

$$p^n_m: \mathrm{Cosk}^n p \longrightarrow \mathrm{Cosk}^m p$$

является расслоением, индуцирующим в размерностях, меньших или равных m и больших $n+1$, изоморфизм гомотопич. групп. В частности, слой расслоения p^n_{n-1} гомотопически эквивалентен С. м. Эйленберга — Маклейна $K(\pi_n(F), n)$. Слоем расслоения $p^n_0: \mathrm{Cosk}^n p \to B$ является С. м. $\mathrm{Cosk}^n F$, где F — слой расслоения $p: E \to B$. Последовательность расслоений

$$E \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{Cosk}^{n+1} p \longrightarrow \mathrm{Cosk}^n p \longrightarrow \mathrm{Cosk}^{n-1} p \longrightarrow \ldots \longrightarrow B$$

наз. с и с т е м о й М у р а — П о с т н и к о в а расслоения $p: E \to B$.

На языке С. м. удобно определять спектры. С и м п л и ц и а л ь н ы м с п е к т р о м наз. последовательность $\{X_{(q)}\}$ пунктированных множеств (его элементы наз. симплексами, отмеченный симплекс обозначается θ), определенных для произвольного целого числа q, снабженная отображениями $d_i: X_{(q)} \to X_{(q-1)}$, $i \geqslant 0$ (о п е р а т о р а м и г р а н е й), и $s_i: X_{(q)} \to X_{(q-1)}$, $i \geqslant 0$ (о п е р а т о р а м и в ы р о ж д е н и я), к-рые удовлетворяют соотношениям (*) и следующему условию: для каждого симплекса $x \in X$ существует такое целое n, что $d_i x = \theta$ при $i > n$. Каждому спектру X и произвольному целому n можно сопоставить С. м. X_n, определив его формулой

$$(X_n)_q = \{x \in X_{(q-n)} \mid d_i x = \theta$$

при $i > q$, $d_0, \ldots, d_q x = \theta\}$.

Для так определенных С. м. X_n имеют место вложения $SX_n \subset X_{n+1}$, где S — надстройка. По последовательности С. м. X_n и вложений $SX_n \subset X_{n+1}$ симплициальный спектр X, в свою очередь, восстанавливается однозначно. Если все С. м. X полны, то $X_n = \Omega X_{n+1}$, где Ω — функтор петель. Функтор геометрич. реализации осуществляет эквивалентность категории симплициальных спектров с категорией топологич. спектров. Симплициальные спектры могут быть определены для произвольной категории. Категория абелевых групповых спектров изоморфна категории (абелевых) цепных комплексов.

Лит.: [1] Габриель П., Цисман М., Категории частных и теория гомотопий, пер. с англ., М., 1971; [2] May J. P., Simplicial objects in algebraic topology, Princeton, 1967; [3] Lamotke K., Semisimpliziale algebraische Topologie, B.— [u. a.], 1968; [4] Kan D., «Amer. J. Math.», 1957, v. 79, p. 449—76; [5] Quillen D., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 19, p. 1499—500; [6] Браун Э. Х., «Математика», 1958, т. 2, № 2, с. 3—24; [7] Кан Д., там же, 1962, т. 6, № 1, с. 3—32; [8] его же, там же, 1966, т. 10, № 3, с. 12—28.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников.

СИМПЛИЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — морфизм либо категории *симплициальных пространств*, либо категории *симплициальных схем*. *А. В. Хохлов.*

СИМПЛИЦИАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X, снабженное таким покрытием топологическими симплексами (наз. триангуляцией), что грани любого симплекса триангуляции принадлежат триангуляции, пересечение любых двух симплексов триангуляции является гранью каждого из них (возможно, пустой); множество $F \subset X$ тогда и только тогда замкнуто, когда замкнуто его пересечение с любым симплексом триангуляции. Каждое С. п. является *клеточным пространством*. Задание триангуляции равносильно заданию гомеоморфизма $|S| \to X$, где $|S|$ — геометрич. реализация нек-рой *симплициальной схемы*. С. п. наз. также симплициальными комплексами, симплициальными разбиениями. С. п. являются объектами категории, морфизмами к-рой $X \to Y$ служат отображения такие, что каждый симплекс триангуляции пространства X линейно отображается на нек-рый симплекс триангуляции пространства Y. Морфизмы наз. также симплициальными отображениями. *А. В. Хохлов.*

СИМПЛИЦИАЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС — то же, что *симплициальное пространство*.

СИМПЛИЦИАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ категории $\mathscr{C}$ — произвольный контравариантный функтор X: $\Delta \to \mathscr{C}$ (или, что то же самое, ковариантный функтор $X: \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}$) из категории Δ, объектами к-рой являются упорядоченные множества $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$, $n \geqslant 0$, а морфизмами — неубывающие отображения μ: $[n] \to [m]$. Ковариантный функтор $X: \Delta \to \mathscr{C}$ (или, что то же самое, контравариантный функтор X: $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}$) наз. косимплициальным объектом категории $\mathscr{C}$.

Морфизмы

$$\delta_i = \delta_i^n : [n-1] \to [n], \ 0 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\sigma_i = \sigma_i^n : [n+1] \to [n], \ 0 \leqslant i \leqslant n,$$

категории Δ, определенные формулами

$$\delta_i^n(j) = \begin{cases} j, & \text{если } j < i, \\ j+1, & \text{если } j \geqslant i, \end{cases}$$

$$\sigma_i^n(j) = \begin{cases} j, & \text{если } j \leqslant i, \\ j-1, & \text{если } j \geqslant i, \end{cases}$$

порождают любой морфизм категории Δ, так что С. о. X полностью определен, если для любого $n \geqslant 0$ задан объект $X([n]) = X_n$ (наз. n-м слоем, или n-й компонентой, С. о. X) и морфизмы

$$d_i = X(\delta_i): X_n \to X_{n-1} \quad \text{и} \quad s_i = X(\sigma_i): X_n \to X_{n-1}$$

(наз. соответственно операторами граней и операторами вырождения). В случае, когда $\mathscr{C}$ является категорией структуризованных множеств, точки множества X_n наз. обычно n-мерными симплексами С. о. X. Отображения δ_i и σ_i удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\delta_j\delta_i=\delta_i\delta_{j-1}, \text{ если } i<j,\\ &\sigma_j\sigma_i=\sigma_i\sigma_{j+1}, \text{ если } i\leqslant j;\\ &\sigma_j\delta_i=\begin{cases}\delta_i\sigma_{j-1}, & \text{если } i<j,\\ \mathrm{id}, & \text{если } i=j \text{ или } i=j+1,\\ \delta_{i-1}\sigma_j, & \text{если } i>j+1;\end{cases}\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

причем любое соотношение между этими отображениями является следствием соотношений (*). Это означает, что С. о. X можно отождествить с системой $\{X_n,\ d_i,\ s_i\}$, состоящей из объектов X_n, $n\geqslant 0$, категории $\mathscr{C}$ и морфизмов d_i: $X_n\rightarrow X_{n-1}$, $0\leqslant i\leqslant n$, и s_i: $X_n\rightarrow X_{n+1}$, $0\leqslant i\leqslant n$, удовлетворяющих соотношениям

$$d_id_j=d_{j-1}d_i, \text{ если } i<j;$$
$$s_is_j=s_{j+1}s_i, \text{ если } i\leqslant j;$$
$$d_is_j=\begin{cases}s_{j-1}d_i, & \text{если } i<j,\\ \mathrm{id}, & \text{если } i=j \text{ или } i=j+1,\\ s_jd_{i-1}, & \text{если } i>j+1.\end{cases}$$

Аналогично, косимплициальный объект X можно рассматривать как систему $\{X_n,\ d^i,\ s^i\}$, состоящую из объектов X^n, $n\geqslant 0$ (n-х кослоев), и морфизмов d^i: $X^{n-1}\rightarrow X^n$, $0\leqslant i\leqslant n$ (операторов кограней), и s^i: $X^{n+1}\rightarrow X^n$, $0\leqslant i\leqslant n$ (операторов ковырождения), удовлетворяющих соотношениям (*) (в к-рых положено $\delta_i=d^i$, $\sigma_i=s^i$).

Симплициальным отображением f: $X\rightarrow Y$ С. о. X в С. о. Y (одной и той же категории $\mathscr{C}$) наз. произвольное преобразование (морфизм) функтора X: $\Delta\rightarrow\mathscr{C}$ в функтор Y: $\Delta\rightarrow\mathscr{C}$, т. е. такая система морфизмов f_n: $X_n\rightarrow Y_n$, $n\geqslant 0$, критерии $\mathscr{C}$, что

$$d_if_{n+1}=f_nd_i,\quad 0\leqslant i\leqslant n+1,$$
$$s_i f_n=f_{n+1}s_i,\quad 0\leqslant i\leqslant n.$$

Симплициальные объекты категории $\mathscr{C}$ и их симплициальные отображения образуют категорию $\Delta^\circ\mathscr{C}$.

Симплициальной гомотопией h: $f\simeq g$, связывающей симплициальные отображения f, g: $X\rightarrow Y$ симплициальных объектов категории С, наз. такое семейство морфизов $h_i: X_n\rightarrow Y_{n+1}$, $0\leqslant i\leqslant n$, категории $\mathscr{C}$, что

$$d_0h_0=f_n;$$
$$d_nh_n=g_n;$$
$$d_ih_j=\begin{cases}h_{j-1}d_i, & \text{если } i<j,\\ d_jh_{j-1}, & \text{если } i=j>0,\\ h_jd_{i-1}, & \text{если } i>j+1;\end{cases}$$
$$s_ih_j=\begin{cases}h_{j+1}s_i, & \text{если } i\leqslant j,\\ h_js_{i-1}, & \text{если } i>j.\end{cases}$$

На основе этого определения в категории $\Delta^\circ\mathscr{C}$ над произвольной категорией $\mathscr{C}$ можно воспроизвести по существу всю обычную теорию гомотопий. В случае категории множеств или топологич. пространств функтор геометрич. реализации (см. *Симплициальное множество*) переводит эту «симплициальную» теорию в обычную.

Примеры С. о.: симплициальное множество, симплициальное топологич. пространство, симплициальное алгебраич. многообразие, симплициальная группа, симплициальная абелева группа, симплициальная алгебра Ли, симплициальное гладкое многообразие и т. д.

Каждая симплициальная абелева группа является цепным комплексом с граничным оператором $d = \Sigma (-1)^i d_i$.

Лит.: [1] Габриель П., Цисман М., Категории частных и теории гомотопий, пер. с англ., М., 1971; [2] May J. P., Simplicial objects in algebraic topology, Princeton, 1967; [3] Lamotke K., Semisimpliziale algebraische Topologie, B.— [u. a.], 1968. *С. Н. Малыгин, М. М. Постников.*

СИМПСОНА ФОРМУЛА — частный случай *Ньютона — Котеса квадратурной формулы*, в к-рой берутся три узла:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]. \qquad (1)$$

Пусть промежуток $[a, b]$ разбит на n частичных промежутков $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, 2, \ldots, n-1$, длины $h = (b-a)/n$, при этом n считается четным числом, и для вычисления интеграла по промежутку $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ использована квадратурная формула (1):

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right].$$

Суммирование по k от 0 до $n/2-1$ левой и правой частей этого равенства приводит к составной С. ф.:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\{f(a)+f(b)+2[f(x_2)+f(x_4)+\ldots$$
$$\ldots+f(x_{n-2})]+4[f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1})]\}, \qquad (2)$$

где $x_j = a+jh$, $j=0, 1, 2, \ldots, n$. Квадратурную формулу (2) также называют С. ф. (без добавления слова составная). Алгебраич. степень точности квадратурной формулы (2), как и формулы (1), равна 3.

Если подинтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную производную 4-го порядка на $[a, b]$, то погрешность $R(f)$ квадратурной формулы (2) — разность между левой и правой частями приближенного равенства (2) — имеет представление

$$R(f) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(\mathrm{IV})}(\xi),$$

где ξ — нек-рая точка из промежутка $[a, b]$.

С. ф. названа по имени Т. Симпсона (Th. Simpson), получившего ее в 1743, хотя эта формула была известна ранее, напр. Дж. Грегори (J. Gregory, 1668). *И. П. Мысовских.*

СИМСОНА ПРЯМАЯ — прямая, на к-рой лежат основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки P окружности, описанной вокруг треугольника, на его стороны. С. п. делит на две равные части отрезок, соединяющий точку P с точкой пересечения высот треугольника. С. п. названа по имени Р. Симсона (R. Simson), хотя она впервые была указана ранее. *А. Б. Иванов.*

СИМУЛА (от англ. «SIMUlation LAnguage», т. е. «язык моделирования») — название двух алгоритмич. языков, разработанных на основе *алгола* в Норвежском вычислительном центре и неофициально различаемых как симула 1 и симула-67.

Симула 1 — *проблемно-ориентированный язык* для моделирования систем с дискретными событиями (напр., систем массового обслуживания), разработан в 1964. Спецификация модели сопоставляет компонентам системы (клиентам, станкам, материалам и т. п.) процессы. Процесс имеет атрибуты (структуру данных) и программу действий (алгоритм). Модель работает по принципу квазипараллелизма: в каждый момент активен только один процесс; исполняя свою программу, он может использовать свои и чужие атрибуты, порождать новые процессы, планировать себе и другим процессам события — новые фазы активности (применяя встроенное в язык понятие дискретного времени), приостановить себя. Реализация С.1 привела к разработке алгоритмич.

средств большой общности, позволяющих выразить также иные подходы к моделированию (и не только дискретному). Включение их в язык привело к созданию С.-67.

Симула-67 определена как база для построения проблемно-ориентированных языков. Ее элементарные средства включают весь алгол-60 (с небольшими изменениями), а механизм расширения основан на концепции класса объектов.

Понятие объекта возникло из понятия процесса С.1 путем абстрагирования от сравнительно частной организации квазипараллельного исполнения в терминах дискретного времени. Оригинальные средства задания программы и атрибутов объектов через описания классов составляют главное достижение С.-67. Особенно важен принцип префиксации классом, позволяющий включить в описание нового класса объектов (напр., класса «студент») атрибуты и действия более общего класса (напр., «человек»). Префиксация применима и к блокам в смысле алгола; такой блок с префиксом получает «пролог» и «эпилог» из программы своего префикса, а также все его атрибуты (переменные и *процедуры*). Это позволяет оформить разработку проблемно-ориентированного языка как описание класса. В частности, поставив префиксом стандартный класс SIMULATION, пользователь получает доступ к средствам, эквивалентным средствам С. 1 (и описанным через базу).

Идеи С.-67 оказали большое влияние на позднейшие языки программирования. Понятие объекта как сочетания действий и данных привело к концепции актора во многих языках программирования задач искусственного интеллекта и повлияло на развитие концепции абстрактных типов данных. Непосредственно средствами С.-67, помимо языков моделирования, описаны языки работы с базами данных, машинной графики и т. д.

С.-67 реализована на БЭСМ-6 и ЕС ЭВМ.

Лит.: [1] Дал О. И., Нигард К., СИМУЛА — язык для программирования и описания систем с дискретными событиями, пер. с англ., «Алгоритмы и алгоритмические языки», 1967, в. 2, с. 3—72; [2] Дал У. И., Мюрхауг Б., Нюгорд К., СИМУЛА-67 универсальный язык программирования, пер. с англ., М., 1969. *В. В. Окольнишников, С. Б. Покровский.*

СИНГУЛЯРНАЯ ФУНКЦИЯ — отличная от постоянной непрерывная *ограниченной вариации функция*, производная к-рой почти всюду на рассматриваемом отрезке равна нулю. С. ф. входят в качестве слагаемых в *Лебега разложение* функций ограниченной вариации. Напр., всякая непрерывная функция ограниченной вариации $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ единственным образом представима в виде суммы $f(x)=\varphi(x)+r(x)$, где $\varphi(x)$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\varphi(a)=f(a)$, а $r(x)$ есть С. ф. или тождественный нуль.

Пример. Пусть $X=[0, 1]$. Любое $x\in X$ может быть представлено в виде

$$x=\sum\nolimits_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}=0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots,$$

где $\alpha_i=0$, 1 или 2, $i=1, 2, \ldots$ При этом если $x\in C$, где C — *канторово множество*, то $\alpha_i=0$ или 2, $i=1, 2, \ldots$. Пусть $n=n(x)$ — первый индекс, при к-ром $\alpha_n=1$; если таких индексов нет, то полагают $n(x)=\infty$. Функция

$$\psi(x)=\sum\nolimits_{1\leqslant i<n}\frac{\alpha_i}{2^{i+1}}+\frac{1}{2^n}$$

является монотонной С. ф.

Лит.: [1] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.—Л., 1934; [2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974; [3] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.
Б. И. Голубов.

СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, содержащее искомую функцию под знаком несобственного интеграла в смысле главного значения по Коши. В зависимости от размерности многообразия, по к-рому распространены интегралы, различают одномерные и многомерные С. и. у. По сравнению с теорией уравнений Фредгольма теория С. и. у. является более сложной. Так, напр., теории одномерных и многомерных С. и. у. как в смысле формулировок окончательных результатов, так и применяемых для их установления методов значительно отличаются друг от друга. Теория одномерных С. и. у. разработана более полно, причем ее результаты формулируются проще, чем аналогичные результаты в многомерном случае. Ниже в основном будет рассмотрен одномерный случай.

Важным классом одномерных С. и. у. являются уравнения с ядром Коши:

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\int_{\Gamma}k(t,\ \tau)\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),\quad t\in\Gamma, \tag{1}$$

где a, b, k, f — известные функции, из к-рых k — ядро Фредгольма (см. *Интегральный оператор*), φ — искомая функция, Γ — плоская линия, а несобственный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, т. е.

$$\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_{\varepsilon}}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,\quad t\in\Gamma,$$

где $\Gamma_{\varepsilon}=\Gamma\setminus l_{\varepsilon}$, l_{ε} обозначает дугу $t'tt''$ линии Γ такую, что длины дуг tt' и tt'' равны ε.

Оператор K, определяемый левой частью равенства (1), наз. сингулярным оператором (иногда его наз. общим сингулярным оператором):

$$K=aI+bS+V, \tag{2}$$

где I — тождественный оператор, S — сингулярный интегральный оператор (иногда его наз. сингулярным интегральным оператором с ядром Коши), т. е.

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,\ t\in\Gamma,$$

V — интегральный оператор с ядром $k(t,\ \tau)$.

Оператор $K_0=aI+bS$ наз. характеристической частью сингулярного оператора K, или характеристическим сингулярным оператором, а уравнение

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau=f(t),\ t\in\Gamma, \tag{3}$$

— характеристическим С. и. у., функции a, b — коэффициентами соответствующего оператора или уравнения.

Уравнение

$$a(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+$$
$$+\int_{\Gamma}k(\tau,\ t)\psi(\tau)\,d\tau=g(t),\ t\in\Gamma,$$

наз. союзным с уравнением (1), а оператор $K'=aI+SbI+V'$ (V' — интегральный оператор с ядром $k(\tau,\ t)$) — союзным с оператором K. В частности, $K_0'=aI+SbI$ является союзным с K_0.

Операторы K, K_0, K', K_0' или соответствующие им уравнения наз. нормального типа, если функции

$$A=a+b,\ B=a-b$$

не обращаются в нуль нигде на Г. В этом случае говорят также, что коэффициенты оператора или уравнения удовлетворяют условию нормальности.

Пусть $H_\alpha(\Gamma)$, $0<\alpha\leqslant 1$,— класс функций $\{f\}$, определенных на Г и удовлетворяющих условию

$$\forall (t_1,\ t_2 \in \Gamma)\, |f(t_1)-f(t_2)| \leqslant \text{const}\, |t_1-t_2|^\alpha.$$

Когда предполагается, что функция f принадлежит классу $H_\alpha(\Gamma)$ при нек-ром допустимом значении α и не требуется знания численного значения α, то будет употребляться обозначение $f\in H(\Gamma)$ или $f\in H$, если из контекста ясно, о какой линии Г идет речь.

Множество H наз. функциональным классом Гёльдера; если $f\in H$, то говорят, что f удовлетворяет условию Гёльдера или что f является H-функцией.

Пусть G — комплекснозначная непрерывная функция, не обращающаяся в нуль на ориентированной замкнутой простой гладкой линии Г, и

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}\,[\arg G(t)]_\Gamma, \tag{4}$$

где $[\ \ ]_\Gamma$ обозначает приращение функции, заключенной в скобках, при однократном обходе линии Г в положительном направлении. Целое число $\varkappa$ наз. индексом функции G: $\varkappa=\operatorname{ind} G$.

Решение характеристического и союзного с ним С. и. у. Пусть Г — простая замкнутая, ориентированная гладкая линия, на к-рой положительное направление выбрано так, что оно оставляет конечную область с границей Г слева, начало координат лежит в этой области и a, b, $f\in H(\Gamma)$, причем a, b удовлетворяют условию нормальности. Пусть, далее $\varkappa$ определено равенством (4), в к-ром

$$G=\frac{a-b}{a+b}\ . \tag{5}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если $\varkappa\geqslant 0$, то уравнение (3) разрешимо в классе $H(\Gamma)$ при любой правой части $f\in H(\Gamma)$ и все его H-решения представляются (см. [1], [2]) формулой

$$\varphi(f)=a_*(t)\,f(t)-\frac{b_*(t)\,\omega(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\tau)}{\omega(\tau)\,(\tau-t)}\,d\tau+ \\ +b_*(t)\,\omega(t)\,p_{\varkappa-1}(t), \tag{6}$$

где

$$a_*=\frac{a}{a^2-b^2}\,,\ b_*=\frac{b}{a^2-b^2}\,,$$

$$\omega(t)=t^{-\frac{\varkappa}{2}}\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\ln[\tau^{-\varkappa}G(\tau)]}{\tau-t}d\tau\right],$$

$p_{\varkappa-1}$— произвольный многочлен степени $\varkappa-1$ ($p_{-1}=0$). Если $\varkappa<0$, то уравнение (3) разрешимо в классе $H(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда правая часть f удовлетворяет условиям

$$\int_\Gamma \frac{t^k}{\omega(t)}\,f(t)\,dt=0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ -\varkappa-1.$$

При соблюдении этих условий уравнение (3) имеет единственное H-решение, определяемое формулой (6), в к-рой $p_{\varkappa-1}=0$.

2) Союзное с (3) С. и. у.

$$a(t)\,\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{b(\tau)\,\psi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=g(t),\ t\in\Gamma, \tag{7}$$

разрешимо в классе H при любой правой части $g\in H(\Gamma)$, если $\varkappa\leqslant 0$, и все его H-решения представляются формулой

$$\psi(t)=a_*(t)\,g(t)+ \\ +\frac{1}{\pi i\omega(t)}\int_\Gamma\frac{\omega(\tau)\,b_*(\tau)\,g(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{p_{-\varkappa-1}(t)}{\omega(t)}. \tag{8}$$

Если же $\varkappa > 0$, то уравнение (7) разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть g удовлетворяет $\varkappa$ условиям:

$$\int_\Gamma t^k b_*(t)\,\omega(t)\,g(t)\,dt = 0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ \varkappa-1,$$

при соблюдении к-рых решение дается формулой (8), где нужно положить $p_{-\varkappa-1}=0$.

Теоремы Нётера. Пусть ν и ν' — числа линейно независимых решений однородных уравнений $K_0'\varphi=0$ и $K_0'\psi=0$ соответственно. Тогда разность $\nu-\nu'$ наз. индексом оператора K_0 или уравнения $K_0\varphi=0$:

$$\operatorname{ind} K_0 = \nu - \nu'.$$

Теорема 1. Однородные С. и. у. $K_0\varphi=0$ и $K_0'\psi=0$ имеют конечное число линейно независимых решений.

Теорема 2. Необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородного уравнения (3) заключаются в том, что

$$\int_\Gamma f(t)\,\psi_j(t)\,dt = 0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu',$$

где $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_{\nu'}$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения $K_0'\psi=0$.

Теорема 3. Индекс оператора K_0 равен индексу функции G, определяемой равенством (5), т. е.

$$\operatorname{ind} K_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-b}{a+b}\right]_\Gamma. \qquad (9)$$

Эти теоремы остаются в силе и в случае общего С. и. у. (1), то есть в сформулированных теоремах операторы K_0, K_0' можно заменить операторами K, K'. Надо только иметь в виду, что в случае общих С. и. у. числа ν и ν', вообще говоря, оба отличны от нуля, в отличие от характеристических С. и. у., когда одно из этих чисел обязательно равно нулю.

Теоремы 1—3 наз. теоремами Нётера, в честь Ф. Нётера (F. Noether), впервые доказавшего их [9] в случае одномерного С. и. у. с *Гильберта ядром*:

$$a(s)\,\varphi(s) + \frac{b(s)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,dt +$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}k(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt = f(s),\ -\pi\leqslant s\leqslant\pi. \qquad (10)$$

Эти теоремы аналогичны теоремам Фредгольма (см. *Фредгольма уравнение*) и отличаются от них только тем, что числа линейно независимых решений однородного уравнения и союзного с ним уравнения, вообще говоря, различны, т. е. тогда как индекс уравнения Фредгольма всегда равен нулю, С. и. у. может иметь отличный от нуля индекс.

Формулы (6), (8) так же, как теоремы Нётера, остаются в силе и в случае, когда $\Gamma=\bigcup\Gamma_k$ состоит из конечного числа гладких взаимонепересекающихся замкнутых линий. В этом случае в равенстве (4) символ $[\ \ ]_\Gamma$ обозначает сумму приращений выражения, заключенного в скобках при обходе отдельных линий Γ_k. Случай же, когда Γ— конечная совокупность гладких разомкнутых взаимонепересекающихся линий ($\Gamma=\bigcup\Gamma_k$), требует специального рассмотрения.

Если функция φ является H-функцией внутри каждой из закрытой части линий Γ_k, не содержащей концов этой линии, вблизи же любого конца c представима в виде $\varphi(t)=\varphi_*(t)|t-c|^{-\alpha}$, $0\leqslant\alpha=\mathrm{const}<1$, где φ_* является H-функцией в окрестности c, включая c, то говорят, что φ принадлежит классу H^*. Если a, $b\in H$, f, $g\in H^*$ и решения уравнений (3), (7) разыскиваются в классе H^*, то можно так определить число $\varkappa$ и функцию ω, что и в этом случае остаются в силе формулы (6), (8). Далее, если соответствующим образом определить подклассы класса H^*, в к-рых разыскиваются решения данного и союзного с ним С. и. у., то остаются в силе и теоремы Нётера (см. [1]).

Указанные выше результаты обобщены в различных направлениях. Показано (см. [1]), что при нек-рых условиях они остаются справедливыми и в случае кусочно гладкой линии Γ (т. е. когда Γ-объединение конечного числа гладких разомкнутых дуг, к-рые могут попарно пересекаться только по своим концам). С. и. у. исследованы также в функциональных пространствах Лебега $L_p(\Gamma)$ и $L_p(\Gamma, \rho)$, где $p>1$, а ρ — нек-рый вес (см. [4] — [7]). В работах [4] — [6] приведены результаты, к-рые непосредственно обобщают выше сформулированные утверждения.

Пусть уравнение простой спрямляемой линии Γ есть $t=t(s)$, $0\leqslant s\leqslant \gamma$, где s — дуга этой линии, отсчитываемая от нек-рой фиксированной точки на ней, γ — длина Γ. Говорят, что функция f, определенная на Γ, почти всюду конечна, измерима, интегрируема и т. д., если функция $f(t(s))$ на сегменте $[0, \gamma]$ обладает соответствующим свойством. Интеграл Лебега от f на Γ определяют равенством

$$\int_{\Gamma} f(t)\, dt = \int_0^{\gamma} f(t(s))\, t'(s)\, ds.$$

Через $L_p(\Gamma)$ обозначается множество измеримых на Γ функций таких, что $|f|^p$ интегрируема на Γ. Функциональный класс $L_p(\Gamma)$, $p\geqslant 1$, превращается в банахово пространство, если норму элемента f определить равенством

$$\|f\| = \left(\int_{\Gamma} |f|^p\, ds\right)^{1/p}.$$

Если в уравнениях (3), (7), в к-рых равенства соблюдаются почти всюду, коэффициенты a, b непрерывны и удовлетворяют условию нормальности, f, $g\in L_p(\Gamma)$, $p>1$, то остаются в силе утверждения 1) и 2), если в них класс H заменить классом $L_p(\Gamma)$, $p>1$. Далее, если решения уравнения $K\varphi=f$, где оператор K имеет вид (2), разыскиваются в банаховом пространстве $L_p(\Gamma)$, $p>1$, а решения союзного однородного с ним уравнения $K'\psi=0$ — в пространстве $L_{p'}(\Gamma)$, где $p'=p/(p-1)$, то остаются в силе и теоремы Нётера, причем V может быть любым вполне непрерывным оператором в $L_p(\Gamma)$.

Когда Γ является конечной совокупностью разомкнутых линий или Γ замкнута, но коэффициенты С. и. у. терпят разрывы, то решения уравнений часто разыскиваются в весовых функциональных пространствах $L_p(\Gamma, \rho)$, $p>1$ $(f\in L_p(\Gamma, \rho) \Longleftrightarrow \rho f\in L_p(\Gamma))$. При определенных условиях относительно весовой функции ρ остаются справедливыми результаты, аналогичные вышеприведенным.

Задача регуляризации. Одной из основных задач, возникающих при построении теории С. и. у., является задача регуляризации, т. е. задача приведения С. и. у. к уравнению Фредгольма.

Пусть E и E_1 — банаховы пространства, к-рые могут и совпадать, A — линейный ограниченный оператор $A\colon E\to E_1$. Ограниченный оператор В наз. *левым регуляризатором оператора* A, если $BA=I+V$, где I, V — тождественный и вполне непрерывный операторы в E. Если уравнения $A\varphi=f$ и $BA\varphi=Bf$ эквивалентны, каков бы ни был элемент $f\in E_1$, то B наз. *левым эквивалентным регуляризатором оператора* A. Ограниченный оператор B наз. *правым регуляризатором оператора* A, если $AB=I_1+V_1$, где I_1, V_1 — тождественный и вполне непрерывный операторы в E_1 соответственно. Если при любом $f\in E_1$ уравнения $A\varphi=f$ и $AB\psi=f$ одновременно разрешимы или неразрешимы, причем в случае разрешимости между их решениями существует связь $\varphi = B\psi$, то B наз. правым эквивалентным регуляризатором оператора A. Если B является одновременно левым и правым регуляризатором оператора A, то его наз. двусторонним регуляризатором, или просто регуляризатором, оператора A. Говорят, что оператор A допускает регуляризацию левую, правую, двустороннюю, эквивалентную, если существует его регуляризатор (соответственно левый, правый, двусторонний, эквивалентный).

Пусть K — оператор, определяемый равенством (2), где Γ — замкнутая простая гладкая линия, a, b суть H-функции (или непрерывные функции), удовлетворяющие условию нормальности, V — вполне непрерывный оператор в пространстве $L_p(\Gamma)$, $p>1$. Тогда в этом последнем пространстве оператор K имеет бесчисленное множество регуляризаторов, среди к-рых находится, напр., оператор

$$M = \frac{a}{a^2-b^2} I - \frac{b}{a^2-b^2} S.$$

Для того чтобы оператор K допускал левую эквивалентную регуляризацию, необходимо и достаточно, чтобы индекс $\varkappa$ оператора K был неотрицательным [7]. В качестве эквивалентного левого регуляризатора можно взять оператор M. Если $\varkappa<0$, то оператор K допускает правую эквивалентную регуляризацию, к-рую можно осуществить с помощью оператора M (см. [1]).

Системы С. и. у. Если в (1) a, b, k — квадратные матрицы n-го порядка, рассматриваемые как матрицы линейных преобразований искомого вектора $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, а $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — известный вектор, то (1) наз. системой С. и. у. Система (1) наз. нормального типа, если матрицы $A = a+b$ и $B = a-b$ неособенные на Γ, то есть $\forall (t \in \Gamma)\ \det A \neq 0$, $\det B \neq 0$.

Теоремы Нётера остаются в силе для системы С. и. у. в классе H (см. [1], [3]) и обобщаются на случай функциональных пространств Лебега (см. [4], [5]). В отличие от одного уравнения характеристич. системы С. и. у. в общем случае не решаются в квадратурах, но для вычисления индекса и в этом случаен айдена (см. [1]) формула, аналогичная формуле (9):

$$\operatorname{ind} K = \frac{1}{2\pi} [\arg \det A^{-1} B]_\Gamma .$$

В случае системы С. и. у. задачи регуляризации (см. [3]) аналогичны задачам регуляризации для одного С. и. у.

В различных постановках исследованы как одно С. и. у., так и их системы, когда нарушаются условия нормальности (см. [11] и указанную там библиографию).

Многомерные С. и. у. Так называются уравнения вида

$$a(t)\varphi(t) + \int_\Gamma \frac{g(t,\vartheta)}{r^m} \varphi(\tau)\, d\tau + (V\varphi)(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{11}$$

где Γ — область евклидова пространства E_m, $m>1$; Γ может быть конечной или бесконечной, в частности может совпасть с E_m; t, τ — точки пространства E_m, $r = |t-\tau|$, $\vartheta = (\tau - t)/r$, $d\tau$ — элемент объема в пространстве E_m, V — вполне непрерывный оператор в банаховом функциональном пространстве, в к-ром ищется решение φ; a, g — заданные функции; несобственный сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения, т. е.

$$\int_\Gamma \varphi(\tau) \frac{g(t,\vartheta)}{r^m} d\tau = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma \setminus \{r<\varepsilon\}} \varphi(\tau) \frac{g(t,\vartheta)}{r^m} d\tau; \tag{12}$$

точка t наз. полюсом, функция $g(t,\vartheta)$ — характеристикой, функция φ — плотностью сингулярного интеграла (12). Предел в равенстве (11), как правило, не существует, если не выполняется условие

$$\int_{\sigma} g(t, \vartheta)\, d\sigma = 0, \tag{13}$$

где σ — единичная сфера с центром в начале координат. Поэтому условие (13) всегда предполагается выполненным.

В теории многомерных С. и. у. важную роль играет понятие символа сингулярного оператора A, к-рый строится с помощью функций a, g, причем по данному символу сингулярный оператор восстанавливается с точностью до вполне непрерывного слагаемого. Композиции сингулярных операторов соответствует произведение их символов. Доказано [7], что при нек-рых ограничениях уравнение (11) допускает регуляризацию в пространстве L_p, $p>1$, тогда и только тогда, когда модуль его символа имеет положительную нижнюю грань и в этом случае справедливы теоремы Фредгольма.

Историческая справка. Исследование одномерных С. и. у. было начато почти одновременно с построением теории *Фредгольма уравнения* в работах Д. Гильберта (D. Hilbert) и А. Пуанкаре (A. Poincaré). В одном частном случае С. и. у. с ядром Коши было рассмотрено гораздо раньше в докторской диссертации Ю. В. Сохоцкого, опубликованной в Петербурге в 1873; однако это исследование осталось незамеченным.

Основополагающие результаты по построению общей теории уравнения (1), (10) были получены в нач. 20-х гг. 20 в. Ф. Нётером [9] и Т. Карлеманом [10]. Ф. Нётер впервые ввел понятие индекса и доказал сформулированные выше теоремы 1—3 с помощью применения способа левой регуляризации. Этот способ впервые был указан (в различных частных случаях) А. Пуанкаре и Д. Гильбертом, но в общем виде он появляется именно у Ф. Нётера. Основным моментом в реализации упомянутого способа является применение формулы перестановки (композиции) в повторных сингулярных интервалах в смысле главного значения по Коши *(Пуанкаре — Бертрана формула)*. Т. Карлеман для нек-рых частных классов уравнения (3) дал основную идею метода редукции этого уравнения к следующей *граничной задаче теории аналитических функций* (задача линейного сопряжения, см. [1]):

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\,\Phi^{-}(t) + g(t), \ t \in \Gamma,$$

и указал путь построения явного решения. Т. Карлеману и И. Н. Векуа принадлежит способ регуляризации уравнения (1) с привлечением решения характеристич. уравнения (3).

Большое теоретическое и прикладное значение С. и. у. особенно проявилось с кон. 30-х гг. в связи с решением нек-рых весьма важных задач механики сплошной среды (теории упругости, гидро- и аэромеханики и др.) и теоретич. физики. Теория одномерных С. и. у. была значительно продвинута в 40-х гг. и получила в определенном смысле законченный вид в трудах советских математиков. Изложение такой теории одномерных С. и. у. в гёльдеровых классах функций дано в монографии одного из создателей этой теории Н. И. Мусхелишвили (см. [1]). Эта монография стимулировала научные исследования и в нек-рых других направлениях, напр. в теории С. и. у., не удовлетворяющих условию нормальности по Хаусдорфу, С. и. у. с недиагональными особенностями (со смещениями), уравнений Винера — Хопфа, многомерных С. и. у. и т. д.

Первые исследования по многомерным С. и. у. принадлежат Ф. Трикоми (F. Tricomi, 1928), к-рый установил формулу перестановки двумерных сингулярных интегралов и применил ее к решению одного класса С. и. у. В этом направлении фундаментальное исследование принадлежит Ж. Жиро (G. Giraud, 1934), доказавшему справедливость теорем Фредгольма для нек-рых классов многомерных С. и. у. на ляпуновских многообразиях.

Лит.: [1] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [2] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977; [3] Векуа Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, 2 изд., М., 1970; [4] Хведелидзе Б. В., «Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН Груз. ССР», 1956, т. 23, с. 3—158; [5] Данилюк И. И., Нерегулярные граничные задачи на плоскости, М., 1975; [6] Гохберг И. Ц., Крупник Н., Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Киш., 1973; [7] Михлин С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962; [8] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [9] Noether F., «Math. Ann.», 1921, Bd 82, S. 42—63; [10] Carleman T., «Arkiv mat., astron. och fys.», 1922, Bd 16, № 26, S. 1—19; [11] Пресдорф З., Некоторые классы сингулярных уравнений, пер. с нем., М., 1979. *А. В. Бицадзе, Б. В. Хведелидзе.*

СИНГУЛЯРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей в $\mathbb{R}^n$, сосредоточенное на множестве нулевой меры Лебега и приписывающее каждому одноточечному множеству нулевую вероятность.

На прямой $\mathbb{R}^1$ определение С. р. эквивалентно следующему: распределение *сингулярно*, если соответствующая функция распределения непрерывна, а ее множество точек роста имеет нулевую меру Лебега.

Примером С. р. на прямой может служить распределение, сосредоточенное на канторовом множестве, т. н. *канторово распределение*, к-рое можно описать следующим образом. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ ... — последовательность независимых случайных величин, каждая из к-рых принимает значения 0 и 1 с вероятностями $^1/_2$. Тогда случайная величина

$$Y = 2\sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j} X_j$$

имеет канторово распределение, и его характеристич. функция равна

$$f(t) = e^{it/2} \prod\nolimits_{j=1}^{\infty} \cos\frac{t}{3^j}.$$

Пример С. р. в $\mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ — равномерное распределение на сфере положительного радиуса.

Свертка двух С. р. может быть либо сингулярной, либо абсолютно непрерывной, либо представлять собой смесь сингулярного и абсолютно непрерывного распределений.

Любое вероятностное распределение P может быть единственным образом представлено в виде

$$P = a_1 P_d + a_2 P_a + a_3 P_s,$$

где P_d — дискретное, P_a — абсолютно непрерывное, а P_s — С. р., $a_i \geqslant 0$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ (*разложение Лебега*).

Иногда сингулярность понимается в более широком смысле: вероятностное распределение F является С. р. по отношению к мере P, если оно сосредоточено на множестве N таком, что $P\{N\} = 0$. При таком определении каждое дискретное распределение является С. р. по отношению к мере Лебега.

По поводу сингулярных функций множеств см. также *Абсолютная непрерывность* функции множества.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967. *В. Г. Ушаков.*

СИНГУЛЯРНЫЕ ГОМОЛОГИИ — гомологии, определяемые исходя из сингулярных симплексов топологич. пространства X таким же образом, как обычные (симплициальные) гомологии (и когомологии) полиэдра — исходя из линейных симплексов. Под *сингу-*

лярным симплексом σ^n понимается непрерывное отображение n-мерного *стандартного симплекса* Δ^n в X, причем образ σ^n обычно наз. **носителем** σ^n и обозначается $|\sigma^n|$. **Сингулярные цепи** — это формальные линейные комбинации сингулярных симплексов коэффициентами в абелевой группе G. Они образуют группу $S_n(X; G)$, изоморфную прямой сумме групп $G_{\sigma^n}=G$ (по всем σ^n). Группы цепей объединяются в сингулярный цепной комплекс $S_*(X; G)$ с граничным гомоморфизмом ∂: $S_n(X; G) \to \to S_{n-1}(X; G)$, определяемым соотношением

$$\partial\sigma^n = \sum_i (-1)^i \sigma_i^{n-1},$$

где σ_i^{n-1} — композиция с σ^n стандартного наложения Δ^{n-1} на i-ю грань Δ^n. Как обычно, циклами считаются цепи, принадлежащие ядру, а границами — цепи, содержащиеся в образе ∂^n. Группа n-мерных сингулярных гомологий $H_n^S(X; G)$ определяется как факторгруппа группы n-мерных циклов по подгруппе границ.

Если $A \subset X$, то группы $H_n^S(A; G)$ определяются подкомплексом в $S_*(X; G)$, состоящим из всех цепей с носителями в A, а группы пары $H_n^S(X, A; G)$ — соответствующим факторкомплексом. Имеет место точная гомологич. последовательность

$$\ldots \longrightarrow H_n^S(A; G) \longrightarrow H_n^S(X; G) \longrightarrow H_n^S(X, A; G) \xrightarrow{\delta} \longrightarrow H_{n-1}^S(A; G) \longrightarrow \ldots,$$

являющаяся ковариантным функтором на категории пар (X, A) топологич. пространств и их непрерывных отображений.

Гомоморфизм δ определяется границей в X цикла пары (X, A), представляющего соответствующий элемент из $H_n^S(X, A; G)$. С. г. — гомологии с компактными носителями в том смысле, что группы X равны прямому пределу гомологий компактных $C \subset X$.

Сингулярные когомологии определяются дуальным образом. Комплекс коцепей $S^*(X; G)$ определяется как комплекс гомоморфизмов в G комплекса целочисленных сингулярных цепей $S_*(X; \mathbb{Z})$. Менее формально, **коцепи** — это функции ξ, определенные на сингулярных симплексах и принимающие значения в G, а кограничный гомоморфизм d определяется формулой

$$(d\xi)(\sigma^{n+1}) = \sum_i (-1)^i \xi(\sigma_i^n).$$

Сингулярные когомологии $H_S^n(X; G)$ — это факторгруппы групп n-мерных **коциклов** (ядер d) по подгруппам **кограниц** (образов d). Когомологии подпространства A совпадают с когомологиями ограничения $S^*(X; G)$ на A, в то время как когомологии пары $H_S^n(X, A; G)$ — с подкомплексом в $S^*(X; G)$, состоящим из всех коцепей, обращающихся в нуль на сингулярных симплексах из A. Имеет место точная последовательность

$$\ldots \longrightarrow H_S^n(X, A; G) \longrightarrow H_S^n(X; G) \longrightarrow \longrightarrow H_S^n(A; G) \xrightarrow{\delta} H_S^{n+1}(X, A; G) \longrightarrow \ldots,$$

являющаяся контравариантным функтором (X, A). Отображение δ определяется кограницей в X коцикла из A, представляющего нужный элемент $H_S^n(A; G)$.

Гомологии и когомологии с коэффициентами в произвольной группе G могут быть выражены через целочисленные гомологии с помощью формул универсальных коэффициентов. *Когомологии с коэффициентами в группе G связаны с целочисленными когомологиями формулами универсальных коэффициентов только для конечно порожденных групп G.*

В категории полиэдров сингулярная теория эквивалентна симплициальной (а также клеточной). Этим обычно устанавливается топологич. инвариантность последних. Однако значение групп С. г. этим не исчерпывается. Имея простое описание, они применимы в достаточно широких категориях топологич. пространств, гомотопически инвариантны. Естественные связи с теорией гомотопий делают сигнулярную теорию незаменимой в гомотопич. топологии.

Однако, хотя группы С. г. определены для любых топологич. пространств без каких-либо ограничений, их применение оправдано лишь при существенных ограничениях типа локальной стягиваемости или гомологической локальной связности. Сингулярные цепи, будучи по своей природе «слишком» линейно связными, не несут в себе информацию о «непрерывных» циклах, если они не являются «достаточно» линейно связными. Возможны и другие «аномалии» (напр., гомологии компактных подпространств евклидова пространства могут отличаться от нуля в сколь угодно высоких размерностях, гомологии и когомологии пары (X, A) могут неизоморфно отображаться при отображении X на факторпространство X/A, отвечающее замкнутому подмножеству $A \subset X$, и т. п.). Поэтому в общих категориях топологич. пространств вместо сингулярных обычно используются когомологии Александрова — Чеха и ассоциированные с ними гомологии. Эти теории свободны от указанных недостатков и совпадают с сингулярной всякий раз, когда ее применение не вызывает сомнений.

Лит.: [1] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976; [2] Масси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981, гл. 8—9; [3] Скляренко Е. Г., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 6, с. 90—118; [4] Massey W., Singular homology theory, N. Y., 1980.

Е. Г. Скляренко.

СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл

$$I_n(f, x) = \int_a^b f(t)\, \Phi_n(t, x)\, dt$$

с особенностью в точке x, определенный для интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$, ядро к-рого $\Phi_n(t, x)$ удовлетворяет условиям: для любого $\delta > 0$ и произвольного интервала $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[a, b] \cap [x-\delta, x+\delta]} \Phi_n(t, x)\, dt = 1, \qquad (1)$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[\alpha, \beta] - [x-\delta, x+\delta]} \Phi_n(t, x)\, dt = 0 \qquad (2)$$

и

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t \in [a, x-\delta] \cup [x+\delta, b]} |\Phi_n(t, x)| \leqslant \Phi_x(\delta), \qquad (3)$$

причем $\Phi_x(\delta)$ зависит только от δ и x и не зависит от n. Если условия (1), (2) и (3) выполняются равномерно на x-множестве $E \subset [a, b]$, то интеграл $I_n(f, x)$ наз. **равномерно сингулярным** на E. Наиболее изучены свойства т. н. положительных ядер ($\Phi_n(t, x) \geqslant 0$), Дирихле ядер

$$D_n(t, x) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}},$$

ядер Фейера

$$F_n(t, x) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}(t-x)}{2(n+1) \sin^2 \frac{t-x}{2}},$$

ядер Пуассона — Абеля

$$P_r(t, x) = \frac{1-r^2}{2[1-2\cos(t-x)+r^2]}, \quad 0 \leqslant r < 1,$$

ядер, порожденных различными методами суммирования ортогональных разложений по ортонормированным полиномам.

Понятие «С. и.» введено А. Лебегом [1], указавшим на его важность при исследовании вопросов сходимости. Так, к исследованию сходимости С. и. приводят вопросы сходимости и суммируемости тригонометрич. рядов Фурье, рядов по ортогональным многочленам, а также разложений по общим ортогональным системам.

А. Лебегом был установлен критерий сходимости С. и. для непрерывных функций $f(x)$ с ограниченной вариацией. Д. К. Фаддеев [2] установил необходимые и достаточные условия для сходимости С. и. в точках Лебега суммируемой функции $f(x)$. Так как данные А. Лебегом и Д. К. Фаддеевым условия сходимости С. и. трудно проверяемы для конкретных С. и., то целый ряд работ был посвящен отысканию эффективных достаточных условий сходимости С. и. как в отдельных точках, так и для равномерной сходимости. Для сходимости С. и. в точках непрерывности достаточна ограниченность нормы оператора $I_n(f, x)$, т. е. ограниченность интеграла

$$\int_a^b |\Phi_n(t, x)| \, dt,$$

а для сходимости в точках Лебега необходимо существование т. н. «горбатой мажоранты» для ядра $\Phi_n(t, x)$, т. е. такой интегрируемой функции $\Psi_n(t, x) \geqslant 0$, к-рая монотонно возрастает на $[a, x)$, монотонно убывает на $(x, b]$ и для почти всех $t \in [a, b]$

$$|\Phi_n(t, x)| \leqslant \Psi_n(t, x),$$

причем

$$\int_a^b \Psi_n(t, x) \, dt = O(1).$$

Лит.: [1] Lebesque H., «Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse», 1909, v. 1, p. 25—117; [2] Фаддеев Д. К., «Матем. сб.», 1936, т. 1, с. 351—68; [3] Коровкин П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959; [4] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974; [5] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963; [6] Ефимов А. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1960, т. 24, в. 5, с. 743—56; [7] Теляковский С. А., там же, 1964, т. 28, в. 6, с. 1209—36.

А. В. Ефимов.

СИНТАКСИС в математической логике — описание и изучение формальной аксиоматич. теории как чисто знаковой системы (в отличие от *семантики*, исследующей смысл и содержание объектов формальной теории). Различие между С. и семантикой особенно существенно в основаниях математики, когда изучаются формальные теории, семантика к-рых интуитивно недостаточно ясна. В этом случае описание и исследование С. формальной теории часто может быть осуществлено гораздо более надежными и интуитивно убедительными средствами в рамках нек-рой *метатеории* и, таким образом, может служить обоснованием и косвенным разъяснением существенных черт сложной семантики изучаемой теории. Напр., в *аксиоматической теории множеств* известный результат К. Гёделя (K. Gödel) о совместности аксиомы выбора можно трактовать как синтаксическое и финитно доказываемое утверждение о том, что если формальная теория Цермело — Френкеля непротиворечива, то она остается таковой и после присоединения аксиомы выбора.

Вне рамок оснований математики в *доказательств теории* различие между С. и семантикой не столь существенно. Употребляются т. н. полуформальные системы, понятие вывода в к-рых зависит от тех или иных семантич. соглашений. Формальные языки могут определяться существенно теоретико-множественно, с привлечением бесконечно длинных формул и т. п. С другой стороны, для формальных языков с ограниченными выразительными возможностями типа языков *комбинаторной логики* или *алгоритмических языков* семантика может быть точно сформулирована в чисто синтаксических терминах самого языка.

Лит.: [1] Carnap R., Logische Syntax der Sprache, Wien, 1934; [2] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *А. Г. Драгалин.*

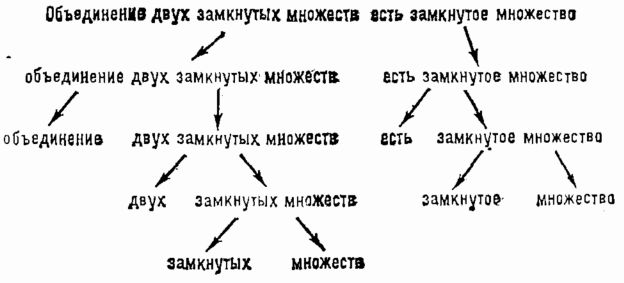
СИНТАКСИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА — математическая конструкция, используемая в *математической лингвистике* для описания строения предложений естественного языка. Наиболее широко употребляются два типа С. с.— системы составляющих и отношения синтаксического подчинения. Понятие системы составляющих можно определить следующим образом. Пусть x — непустая цепочка (*слово*) в *алфавите* V; *вхождения* символов (*букв*) в цепочку в дальнейшем наз. ее точками; множество точек цепочки, имеющее вид $\{x|a \leqslant x \leqslant b\}$, где a, b — фиксированные точки, наз. отрезком цепочки. Множество C отрезков цепочки x наз. системой составляющих этой цепочки, если 1) C содержит отрезок, состоящий из всех точек x, и все одноточечные отрезки x; 2) любые два отрезка из C либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом. Элементы C наз. составляющими. Если алфавит V интерпретируется как множество слов естественного языка и x — как предложение, то при подходящем выборе системы составляющих для x нетривиальные составляющие (т. е. отличные от входящих в C по п. 1) представляют собой словосочетания, т. е. группы слов, к-рые интуитивно ощущаются носителем языка как «синтаксически связные» куски предложения. Напр., предложение

„Объединение двух замкнутых множеств есть замкнутое множество"

допускает следующую «естественную» систему составляющих (границы нетривиальных составляющих отмечены скобками):

(Объединение (двух (замкнутых множеств))) (есть (замкнутое множество)).

Если на системе составляющих C введено отношение непосредственного включения, то C представляет собой по этому отношению дерево с корнем (корнем служит составляющая, состоящая из всех точек x) — дерево составляющих, к-рое для приведенного примера имеет следующий вид



Обычно составляющие снабжаются метками, к-рые представляют собой «синтаксические характеристики» словосочетаний (составляющая может иметь более одной метки). В приведенном примере составляющую, совпадающую со всем предложением, естественно пометить символом ПРЕДЛ, означающим «предложение», составляющую «объединение двух замкнутых множеств» — символом $S_{\text{ср.ед,им}}$, означающим «группа существительного среднего рода в единственном числе и именительном падеже», и т. д. Получаемый при этом объект — дерево с помеченными вершинами — наз. размеченным деревом составляющих.

Другой способ описания строения предложения получается, если определить на множестве X точек цепочки x бинарное отношение $\rightarrow$ таким образом, чтобы граф $(X; \rightarrow)$ был (ориентированным) деревом с корнем. Всякое такое отношение наз. отношением (синтаксического) подчинения, а соответствующее дерево — деревом (синтаксического) подчинения. Понятие отношения подчинения является формализацией обычного в «школьной» грамматике, в частности русского языка, представления о подчинении одних слов в предложении другим. При графич. изображении дерева подчинения обычно располагают точки цепочки на горизонтальной прямой и проводят стрелки сверху от нее. Приведенное выше предложение допускает следующее «естественное» дерево подчинения:

(корнем дерева подчинения принято считать сказуемое, т. к. оно представляет собой организующий элемент предложения).

Дуги дерева подчинения часто снабжаются метками, указывающими типы представляемых этими дугами синтаксич. связей. В рассмотренном примере связь между «есть» и «объединение» естественным образом получает «предикативный» тип, связь между «множеств» и «замкнутых» — «определительный» тип и т. д.

Деревья подчинения предложений, встречающихся в деловых и научных текстах, удовлетворяют, как правило, т. н. условию проективности, к-рое при указанном выше способе графич. изображения формулируется так: во всякую точку, лежащую под нек-рой стрелкой, идет путь из начала этой стрелки; отсюда следует, в частности, что никакие две стрелки не пересекаются (последнее условие иногда называют условием слабой проективности). В художественной литературе это условие часто нарушается, но такие нарушения обычно значимы, т. е. служат цели создания определенного художественного эффекта.

Одно предложение может допускать несколько различных «естественных» систем составляющих (деревьев подчинения). Чаще всего это бывает в тех случаях, когда смысл предложения можно понимать по-разному, и разные системы составляющих (деревья подчинения) отвечают разным толкованиям смысла (синтаксическая омонимия). Напр., предложение «Гости из Москвы уехали» может означать, что либо «московские гости уехали (откуда-то)», либо «(какие-то) гости уехали из Москвы»; первому смыслу отвечают система составляющих «(Гости (из Москвы)) уехали» и дерево подчинения

второму — соответственно «Гости ((из Москвы) уехали)» и

Если на цепочке задано дерево подчинения и α — точка цепочки, то множество точек цепочки, в к-рые идут пути из α (включая саму точку α), наз. группой зависимости точки α. Всякое множество, получающееся из группы зависимости точки α выбрасыванием групп зависимости нек-рых (или всех) точек, подчиненных α (т. е. таких, в к-рые из α идут дуги), наз. усеченной группой зависимости точки α.

Система составляющих C цепочки x и заданное на x дерево подчинения наз. согласованными, если группы зависимости всех точек x являются составляющими и каждая составляющая есть группа зависимости или усеченная группа зависимости нек-рой точки цепочки x. «Естественные» система составляющих и дерево подчинения, построенные для одного и того же предложения и отвечающие одному и тому же его смыслу, обычно согласованы (см. приведенные выше примеры). Дерево подчинения, согласованное с системой составляющих, проективно. Для данной системы составляющих может существовать больше одного согласованного с ним дерева подчинения; однако, если дополнительно задать нек-рое отношение «главенствования» между составляющими, можно добиться, чтобы «естественное» дерево подчинения определялось однозначно. Именно, если в системе составляющих C цепочки x для каждой неточечной составляющей выделить в множестве всех непосредственно вложенных в нее составляющих одну, называемую главной, то упорядоченная пара (C, C'), где C' — множество всех главных составляющих, наз. иерархизованной системой составляющих; иерархизованная система составляющих связана с деревом подчинения, если система C согласована с этим деревом и для каждой неточечной составляющей A корень отвечающего ей поддерева дерева подчинения совпадает с корнем поддерева, отвечающего главной из непосредственно вложенных в A составляющих. «Естественная» система составляющих предложения при «естественной» иерархизации, как правило, связана с «естественным» деревом подчинения. Так, если в рассмотренном выше примере иерархизовать систему составляющих следующим образом: ([Объединение] (двух [замкнутых [множеств]])) [[есть] (замкнутое [множество])] (главные составляющие выделены квадратными скобками), то полученная иерархизованная система составляющих будет связана с указанным выше для данного предложения деревом подчинения.

Не все типы предложений допускают достаточно адекватное описание с помощью систем составляющих и деревьев подчинения. В частности, затруднения возникают при описании предложений, содержащих словосочетания с «особо тесными» внутренними связями (напр., сложные формы глагола), а также сочиненные конструкции. Кроме того, при описании строения предложений и иных отрезков речи на более «глубоких» уровнях возникает необходимость использовать графы более сложного вида, чем деревья. Для большей адекватности описания языка нужно учитывать наряду с синтаксическими еще т. н. анафорические связи — связи между вхождениями слов, «называющими одно и то же»; напр.:

«Если f есть отображение E на F

и существует обратное отображение

f^{-1}, то последнее есть отображение F на E».

Поэтому разрабатываются и другие, более сложные концепции С. с.

Лит.: [1] Tesnière L., Eléments de syntaxe structurale, 2 изд., P., 1965; [2] Падучева Е. В., «Вопросы языкознания», 1964, № 2, с. 99—113; [3] Гладкий А. В., «Научно-техни-

ческая информация. Сер. 2», 1971, № 9, с. 35—38; [4] е г о ж е, Формальные грамматики и языки, М., 1973; [5] е г о ж е, «Slavica», 1981, v. XVII, XVIII. *А. В. Гладкий.*

СИНТАКСИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА — теорема *синтаксического языка*, т. е. теорема о формализованной теории. Примеры С. т.: теорема дедукции для исчисления предикатов, теорема Гёделя о неполноте арифметики. Эти теоремы относятся к элементарному синтаксису. Примером неэлементарной С. т., то есть теоремы, доказательство к-рой существенно использует бесконечные совокупности, может служить теорема о непротиворечивости элементарной арифметики. *В. Н. Гришин.*

СИНТАКСИЧЕСКИЙ ЯЗЫК — язык, предназначенный для изучения формализованного языка в отвлечении от его главной интерпретации. Понятие о С. я. возникло в математич. логике в связи с вопросами формализации и исследования содержательных математич. теорий. Результатом формализации какой-либо содержательной теории является *формальная система*, к-рую можно рассматривать как самостоятельный объект исследования, забыв о ее происхождении. Для исследования формальных систем в таком плане служит С. я.

В С. я. дается описание языка формальной системы, т. е. его исходных символов, термов, формул и пр., определяется понятие вывода в формальной системе, формулируются и доказываются теоремы о формальной системе. Таким образом, с формальной системой связываются два языка: один — исследуемый язык самой формальной системы (о б ъ е к т н ы й, или п р е д м е т н ы й, я з ы к), другой — язык, на к-ром ведется исследование формальной системы (С. я.).

С. я. должен содержать имена для символов и формул языка-объекта, а также переменные, значениями к-рых являются сами символы и формулы. При этом символы и формулы языка-объекта выступают в С. я. в качестве своих собственных имен (т. е. в качестве имен, обозначающих сами эти символы и формулы). С. я., как правило, не должен содержать языковых средств для рассуждения о бесконечных совокупностях как самостоятельных объектах. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, говорят об э л е м е н т а р н о м с и н т а к с и с е для данной формальной системы, в противоположность с и н т а к с и с у т е о р е т и ч е с к о м у, в к-ром допускается рассмотрение произвольных образований. Язык теоретич. синтаксиса наз. также *метаязыком*. Достаточно четко очерченный С. я. может быть формализован и стать объектным языком. Многие достаточно сильные формальные системы могут служить формализациями своего собственного элементарного С. я. На этом факте основано доказательство *Гёделя теоремы о неполноте* формальных систем.

В языках теоретич. синтаксиса можно рассматривать модели данной формальной системы и говорить об истинности формул формальной системы в моделях. В качестве примера формализованного языка теоретич. синтаксиса элементарной арифметики можно указать на язык арифметики 2-го порядка.

Лит.: [1] Ч ё р ч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960. *В. Н. Гришин.*

СИНТЕЗА ЗАДАЧИ — совокупность задач, концентрирующихся вокруг проблемы построения *управляющей системы* (у. с.), имеющей предписанное функционирование. У. с. строится из элементов, к-рые обычно сами являются простыми у. с. При синтезе заранее заданы состав элементов, правила их соединения между собой и способ определения по структуре у. с. функции, к-рую она реализует.

С каждым классом у. с. естественным образом связан определенный класс функций. З а д а ч а с и н т е з а в ее исходной постановке состоит в том, чтобы по заданной функции из этого класса построить реализующую ее у. с. Напр.: 1) задана *булева функция* —

требуется построить формулу, к-рая ее реализует; 2) задана система булевых функций — требуется построить многополюсную *контактную схему*, реализующую эту систему; 3) имеется точное описание поведения *автомата* — требуется построить такой автомат; 4) задана *вычислимая функция* — требуется найти алгоритм, к-рый ее вычисляет, либо составить соответствующую программу.

Приведенные примеры относятся к дискретной ветви математики. Однако аналогичные примеры характерны и для непрерывной ветви математики: 1) задана логарифмическая амплитудно-частотная характеристика системы автоматич. регулирования (или, в более общем случае, условия ее работы, т. е. возмущающие и управляющие воздействия, помехи, ограничения по времени работы и т. д.) — требуется синтезировать систему автоматич. регулирования, обладающую заданной характеристикой; 2) задана система линейных уравнений и неравенств, а также нек-рая линейная функция — требуется построить схему вычисления, к-рая максимизирует заданную линейную функцию на множестве решений заданной системы; 3) задана система дифференциальных уравнений и указана необходимая точность ее решения — требуется найти алгоритм численного решения этой системы с указанной точностью.

Имеется определенная условность в том, что последние три примера отнесены к непрерывной математике, ибо поиск приближенного численного решения уже предполагает аппроксимацию непрерывных функций дискретными, а значит, в этих задачах непрерывная ветвь математики тесно переплетается с дискретной.

Математическая постановка С. з. предполагает точное указание языка, на к-ром задается функция. От этого языка зависит, какие трудности могут возникнуть при решении С. з. В большинстве случаев существует сравнительно простой метод построения у. с. канонич. вида.

Однако (если только класс у. с. не слишком беден) задача имеет и много других решений; естественно возникает задача выбора среди них в каком-то смысле наилучшего. При таком подходе вводится параметр, характеризующий качество у. с. Это может быть число элементов у. с., ее стоимость, занимаемый ею объем, максимальное число ее элементов, находящихся в активном состоянии (т. е. мощность), время ее работы, вероятность выхода ее из строя и т. д. Важно, чтобы этот параметр, обычно наз. сложностью, правильно отражал требующееся свойство у. с. и по возможности просто по ней вычислялся. В уточненной постановке С. з. состоит в том, чтобы по заданной функции построить такую реализующую ее у. с., на к-рой достигается минимум сложности.

На самом деле столь определенная постановка задачи возможна лишь для конечных моделей у. с. Как следствие, для них и вся синтезная проблематика оказывается очерченной лучше. Поэтому ниже основное внимание уделено конечным моделям.

Для конечных моделей у. с. типична ситуация, когда существует тривиальное решение поставленной задачи. Напр., если минимизируется число элементов в схеме, то тривиальный метод решения состоит в переборе сначала всех схем, содержащих один элемент, с проверкой того, есть ли среди них схема, реализующая заданную функцию, затем в переборе всех схем, содержащих два элемента, и т. д. до тех пор, пока не встретится схема, реализующая заданную функцию. На этой схеме и достигается минимум числа элементов.

Однако из-за большого числа требующихся шагов тривиальный метод малоэффективен. Более того, если сложность реализуемой функции превышает нек-рый сравнительно невысокий порог, то тривиальный метод становится практически неосуществимым, причем использование самых быстрых вычислительных машин лишь несущественно расширяет границы его применимости. Это означает, что требуется дальнейшее уточнение постановки С. з.

Сложившиеся здесь тенденции продемонстрированы ниже на примере одного из классов у. с.— *схем из функциональных элементов* для одного частного случая, когда сложность понимается как число элементов в схеме. Функции, реализуемые этим классом у. с.,— это функции алгебры логики (булевы функции).

Прежде всего следует отметить, что неприемлемость решения, к-рое дает тривиальный метод,— это лишь одна из причин, ведущих к пересмотру постановки С. з. Существует гипотеза, что любой алгоритм, к-рый для каждой булевой функции строит схему с минимальным числом элементов, неизбежно содержит в себе в каком-то смысле перебор всех булевых функций. В пользу этой гипотезы говорит теорема о том, что если рассмотреть бесконечное множество булевых функций, содержащее при каждом числе переменных по одной самой сложной функции, и замкнуть это множество относительно операций переименования переменных (без отождествления) и подстановки констант, то получится множество, состоящее из всех вообще булевых функций (с точностью до несущественных переменных функции). Эта гипотеза получила много других косвенных подтверждений, причем нек-рые из них свидетельствуют о том, что если даже ослабить требование по числу элементов, допуская построение схем, близких к оптимальным, но сохранить требование применимости алгоритма к каждой булевой функции, то перебор не должен существенно уменьшиться. Идея о принципиальной неизбежности перебора и является основной причиной видоизменения постановки С. з. Здесь имеется несколько возможностей.

Шенноновский подход (по имени К. Э. Шеннона, к-рый впервые предложил его для контактных схем) связан с рассмотрением функции

$$L(n) = \max L(f),$$

где $L(f)$ — *минимально возможное число элементов* в схеме, реализующей функцию f, а максимум берется по всем булевым функциям f от n переменных. При этом $L(f)$ и $L(n)$ зависят от базиса, т. е. от множества функциональных элементов, к-рые можно использовать при построении схем. С. з. состоит в том, чтобы найти эффективный метод построения для каждой булевой функции от n переменных схем с числом элементов, существенно не превосходящим $L(n)$.

При более общей постановке задачи каждому функциональному элементу E сопоставляется *положительное число* $L(E)$ — *сложность* этого элемента, к-рая зависит только от функции, реализуемой элементом E, а каждой схеме S приписывается сложность

$$L(S) = \sum L(E),$$

где суммирование производится по всем элементам схемы S. Для каждой булевой функции f определяется сложность ее реализации (в заданном базисе):

$$L(f) = \min L(S),$$

где минимум берется по всем схемам S, реализующим функцию f. Затем, как и раньше, вводится $L(n) = \max L(f)$ и требуется для произвольной булевой функции от n переменных построить схему, имеющую сложность не выше (или не на много выше), чем $L(n)$.

При таком подходе нужно уметь вычислять или хорошо оценивать хотя бы снизу величину $L(n)$. Оказывается, что неплохую нижнюю оценку для $L(n)$ дает уже мощностной метод, основанный на следующем соображении: число всевозможных схем, реализующих булевы функции от n переменных и имеющих сложность не более $L(n)$, должно быть не меньше числа всех булевых функций от n переменных. В мощностном методе требуется только получить удовлетворительную верхнюю оценку для числа рассматриваемых схем.

После этого о качестве любого универсального метода синтеза (т. е. метода, пригодного для произвольной булевой функции) можно в значительной мере судить по тому, во сколько раз сложность построенных им схем при соответствующем n отличается от нижней оценки для $L(n)$. Одновременно сложность этих схем служит конструктивной верхней оценкой для $L(n)$. Основным достижением в этом направлении является создание эффективного универсального метода синтеза, к-рый дает схемы со сложностью, мало отличающейся от нижней оценки для $L(n)$, а при $n \to \infty$ асимптотически совпадающей с ней. Таким образом, это асимптотически наилучший метод синтеза, позволяющий к тому же установить асимптотич. поведение функции $L(n)$. Пусть

$$\rho = \min L(E)/(i-1),$$

где i — число входов элемента E, а минимум берется по всем элементам, имеющим не менее двух входов. Тогда

$$L(n) \sim \rho \frac{2^n}{n}.$$

Для других классов у. с. сложность $L(S)$, а с ней и сложности $L(f)$ и $L(n)$ вводятся аналогичным образом. Обычно $L(S)$ для контактной схемы S есть число контактов в ней, а для формулы S — это число символов переменных в ней. Для автоматов и машин Тьюринга $L(S)$ иногда вводится как число состояний автомата S или машины Тьюринга S. Соответствующее асимптотическое поведение величины $L(n)$ для этих классов показано в таблице 1.

Таблица 1

Классы управляющих систем	$L(n)$	Примечание
Схемы из функциональных элементов	$\sim \rho \frac{2^n}{n}$	$\rho = \min \frac{L(E)}{i-1}$
Контактные схемы	$\sim \frac{2^n}{n}$	
Формулы	$\sim \frac{2^n}{\log_2 n}$	
Автоматы	$\sim \alpha(n) \frac{2^n}{n}$	$1 \leqslant \alpha(n) \leqslant 2$
Машины Тьюринга	$\sim \frac{2^n}{n(k-1)}$	k — число букв во внешнем алфавите машины Тьюринга

Если понятие сложности вводится иначе, напр. как вероятность ошибки, или если рассматривается другой класс у. с., напр. автоматы, то соответствующее асимптотич. соотношение может содержать не один, а два и более параметров, причем в общем случае задача о получении асимптотики, напр. для автоматов, алгоритмически неразрешима.

Анализ нижней оценки для $L(n)$ показывает, что на самом деле для почти всех булевых функций от n переменных сложность реализации асимптотически не меньше $L(n)$. Это означает, что данный метод синтеза для почти всех булевых функций дает почти самые простые схемы.

Однако, во-первых, при достаточно большом n ни одну из функций этого класса, несмотря на то, что он содержит почти все булевы функции, не удается явно указать, а во-вторых, этот класс состоит из наиболее сложно реализуемых функций, к-рые, по-видимому, не встречаются в задачах прикладного характера. Поэтому такие функции не представляют большого интереса. И снова появляется необходимость в видоизменении постановки С. з.

При этом следует иметь в виду, что функции, для к-рых С. з. актуальна, составляют ничтожную долю всех булевых функций, и что любой эффективный универсальный метод синтеза (если гипотеза о необходимости перебора верна в полном объеме) для нек-рых из них заведомо даст далеко не самые простые схемы. Описать множество таких функций невозможно, но проблема классификации булевых функций для целей синтеза возникает. Такой подход к постановке С. з. связан с выделением важных классов функций, созданием для них специальных методов синтеза, каждый из к-рых ориентирован на функции определенного класса, а также с оценкой качества получающихся при этом схем.

Эффективно решать такие задачи позволяет п р и н ц и п л о к а л ь н о г о к о д и р о в а н и я. Этот принцип предполагает такое кодирование функций из рассматриваемого класса, при к-ром значение функции можно вычислять по сравнительно небольшой части кода. Если при этом удается достаточно просто реализовать нек-рые вспомогательные операторы, то принцип локального кодирования дает асимптотически наилучший метод синтеза для рассматриваемого класса, причем в довольно широких пределах справедливо соотношение

$$L(N_n) \sim \rho \frac{\log_2 |N_n|}{\log_2 \log_2 |N_n|},$$

где N_n — подмножество тех функций из рассматриваемого класса, к-рые зависят от заданных n переменных, а

$$L(N_n) = \max L(f),$$

где максимум берется по всем булевым функциям f из N_n. (здесь $\rho=1$).

Таблица 2

Число точек, в к-рых функция равна 1	$L(N_n)$
$(\log_2 n)^c,\ c>1$	$\sim n(\log_2 n)^{c-1}$
$n^c,\ c>0$	$\sim \frac{n^{c+1}}{(c+1)\log_2 n}$
$2^{n^c},\ 0<c<1$	$\sim n^{1-c}2^{n^c}$
$2^{cn},\ 0<c<1$	$\sim \frac{1-c}{c}2^{cn}$
$\frac{2^n}{n^c},\ c>0$	$\sim c\frac{2^n \log_2 n}{n^{c+1}}$

Конкретный вид, который может иметь это асимптотическое соотношение, удобнее всего проиллюстрировать на классах булевых функций, принимающих значение 1 в заданном числе точек. Наиболее характерные примеры приведены в таблице 2.

На основе принципа локального кодирования были получены хорошие методы синтеза и для весьма узких классов функций (напр., для симметрич. функций), т. е. для тех функций, к-рые с практической точки зрения наиболее интересны. Однако в данном случае нижняя оценка, получающаяся мощностным методом, оказывается слишком слабой, для того чтобы по ней судить о качестве схем. По мере сужения класса рассматриваемых функций в какой-то момент это неизбежно должно было произойти, поскольку предельным случаем узкого класса является класс, содержащий не более чем по одной функции от каждого числа переменных. Фактически это означает, что рассматриваются отдельные конкретные функции.

Здесь возникают две проблемы: 1) построить для заданной конкретной функции f схему с возможно меньшим числом элементов и тем самым получить верхнюю оценку для $L(f)$; 2) получить возможно лучшую нижнюю оценку для $L(f)$. Среди этих задач первая обычно бывает легче, так как для ее решения достаточно, в конечном счете, построить одну схему, а вторая требует в каком-то смысле просмотра всех схем, реализующих функцию f. По этой причине возникло целое направление, связанное с поиском методов получения нижних оценок для конкретных функций.

Получение нижних оценок, линейных относительно n — числа аргументов функции (или в общем случае относительно объема входной информации), обычно все-таки не вызывает больших трудностей. Получение более сильных нижних оценок — значительно более сложная задача. Первыми примерами в этом направлении были нижняя оценка порядка $n^{1,5}$ для формул в базисе $\{\&, \vee, {}^{-}\}$, реализующих линейную функцию (сумму по модулю 2) n аргументов, и нижняя оценка порядка $n^2/\log_2^2 n$ для *нормальных алгорифмов* Маркова, к-рые обращают слова длины n. Наиболее высокие нижние оценки, к-рые к настоящему времени (1984) удалось получить, имеют порядок n^2, если не считать оценок, получающихся при очень сильных ограничениях на класс у. с. (напр., неполнота системы элементов) либо при использовании столь мощных средств для задания функции, что они фактически содержат в себе перебор всех функций.

О нетривиальности исследования сложности реализации конкретных функций говорит и то, что многие задачи, такие, как умножение целых чисел, умножение матриц, распознавание симметрии слова на многоленточных машинах Тьюринга, для к-рых ожидались сравнительно высокие нижние оценки, оказались на самом деле проще, чем предполагалось раньше.

При минимизации других параметров схем — задержек, вероятности сбоя и т. д.— возникают примерно такие же задачи. При этом удается установить определенную связь между различными параметрами, причем благодаря моделированию одних объектов на других такую связь часто удается установить между различными параметрами у. с. из разных классов. Таким образом, полученные в С. з. результаты не являются изолированными, а тесно переплетаются друг с другом и часто переносятся из одной области в другую.

Многое из сказанного выше относится и к бесконечным моделям у. с. Однако с постановкой задачи синтеза, а тем более с ее решением дело обстоит значительно сложнее.

Лит.: [1] Лупанов О. Б., «Проблемы кибернетики», 1965, в. 14, с. 31—110; [2] Яблонский С. В., там же, 1959, в. 2, с. 75—121. *В. М. Храпченко.*

СИНУС — одна из тригонометрич. функций:

$$y = \sin x.$$

Область определения — вся числовая прямая, область значений — отрезок $[-1; 1]$; С.— функция нечетная, периодическая с периодом 2π. С. и косинус связаны формулой

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

С. и косеканс связаны формулой

$$\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}.$$

Производная С.:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Интеграл от С.:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$$

С. разлагается в степенной ряд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \quad -\infty < x < \infty.$$

Функция, обратная С., наз. **арксинусом**.

С. и косинус комплексного аргумента z связаны с показательной функцией **формулами Эйлера**

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

если $z=ix$ (чисто мнимое число), то

$$\sin ix=-\operatorname{sh} x,$$

где $\operatorname{sh}x$ — гиперболич. синус.

Ю. А. Горьков.

СИНУС АМПЛИТУДЫ, эллиптический синус,— одна из трех основных *Якоби эллиптических функций*, обозначаемая

$$\operatorname{sn} u=\operatorname{sn}(u,\ k)=\sin\operatorname{am} u.$$

Синус амплитуды определяется через тета-функции или при помощи рядов следующим образом:

$$\operatorname{sn} u=\operatorname{sn}(u,\ k)=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2'(0)}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}=$$

$$=u-(1+k^2)\frac{u^3}{3!}+(1+14k^2+k^4)\frac{u^5}{5!}-\ldots,$$

где k — модуль С. а. (чаще всего $0\leqslant k\leqslant 1$), $v=u/2\omega$, $2\omega=\pi\vartheta_3^2(0)$. При $k=0$, 1 соответственно $\operatorname{sn}(u,\ 0)=\sin u$, $\operatorname{sn}(u,\ 1)=\operatorname{th} u$.

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968, ч. 2, гл. 3. *Е. Д. Соломенцев.*

СИНУС ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ — см. *Гиперболические функции*.

СИНУС ГОРДОНА УРАВНЕНИЕ, Sine-Gordon уравнение,— релятивистски инвариантное уравнение, в пространственно-временных переменных имеющее вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+m^2\sin u=0;$$

$$-\infty<x,\ t<\infty,\ u\in\mathbb{R}^1,\ m>0. \qquad \text{(A)}$$

Название предложено М. Крускалом по аналогии с линейным *Клейна — Гордона уравнением* (где вместо $\sin u$ стоит u). В характеристических (светоподобных) переменных С. Г. у. выглядит так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma\,\partial\tau}+m^2\sin u=0,\ \sigma,\ \tau,\ u\in\mathbb{R}^1,\ m>0. \qquad \text{(B)}$$

Как в случае (А), так и в случае (В) С. Г. у. допускает **представление Лакса**

$$\frac{\partial L}{\partial t}=[L,\ M]$$

с линейными операторами L и M, что позволяет применить к нему метод обратной задачи рассеяния ($[L,\ M]=LM-ML$).

Задача Коши для С. Г. у. формулируется следующим образом.

Случай (А):

$$u\Big|_{t=0}=u_1,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_2;$$

$$\frac{du_1}{dx},\ u_2\in S(\mathbb{R}^1);\ \lim_{|x|\to\infty}u_1(x)\equiv o\ (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Случай (В):

$$u\,|_{\tau=0}=u_0;\ \frac{du_0}{d\sigma}\in S(\mathbb{R}^1);$$

$$\lim_{|\sigma|\to\infty}u_0(\sigma)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Здесь $S(\mathbb{R}^1)$ — пространство Шварца быстроубывающих функций. Задачи Коши (А) и (В) при нек-рых дополнительных ограничениях на начальные данные однозначно разрешимы в указанных классах, и множества их решений совпадают. Эволюция данных рассеяния соответствующих L-операторов дается явными формулами, а решения $u(x,\ t)$ и $u(\sigma,\ \tau)$ находятся с помощью интегральных уравнений типа Гельфанда — Левитана — Марченко.

Периодич. задача для С. Г. у. может быть исследована с помощью алгебро-геометрич. метода (подобно тому, как это делается для *Кортевега — де Фриса уравнения*); в частности, получены явные выражения для конечнозонных решений С. Г. у. через θ-функции на соответствующих абелевых многообразиях.

Гамильтонова формулировка С. Г. у. заключается в том, что, напр., в случае (А) оно представляет собой гамильтонову систему с гамильтонианом

$$p_0 = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\pi^2(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + m^2(1-\cos u)\right)dx, \quad \gamma > 0,$$

и симплектич. формой

$$\Omega = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} d\pi(x) \wedge du(x)\,dx, \ \ \pi = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Эта система является вполне интегрируемой, и переход от переменных u и π к данным рассеяния соответствующего оператора L является канонич. преобразованием к переменным типа действие-угол. Фазовое пространство параметризуется канонически сопряженными переменными трех типов:

1) $0 \leqslant \rho(p) < \infty$, $0 \leqslant \varphi(p) < 2\pi$, $p \in \mathbb{R}^1$;

2) p_a, $q_a \in \mathbb{R}^1$, $a = 1, \ldots, N_1$, $N_1 \geqslant 0$, $N_1 \in \mathbb{Z}$;

3) η_b, $\xi_b \in \mathbb{R}^1$, $0 \leqslant \alpha_b < \frac{8\pi}{\gamma}$, $0 \leqslant \beta_b < 2\pi$, $b = 1, \ldots, N_2$, $N_2 \geqslant 0$, $N_2 \in \mathbb{Z}$.

Полная энергия P_0 и полный импульс

$$P_1 = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\,dx$$

поля u в новых переменных выглядят следующим образом:

$$P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{p^2+m^2}\rho(p)\,dp + \sum_{a=1}^{N_1}\sqrt{p_a^2+M^2} + \sum_{b=1}^{N_2}\sqrt{\eta_b^2 + (2M\sin\theta_b)^2};$$

$$P_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p\rho(p)\,dp + \sum_{a=1}^{N_1} p_a + \sum_{b=1}^{N_2}\eta_b,$$

$$M = \frac{8m}{\gamma}, \ \ \theta = \frac{\gamma}{16}\alpha.$$

В случае (В) также получается вполне интегрируемая гамильтонова система.

Одно из приложений к квантовой теории поля. Пусть $u(x, t)$ — скалярное поле с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2m^2(1-\cos u)\right)dx$$

(здесь γ — константа связи). С. Г. у. является уравнением Эйлера — Лагранжа для этого лагранжиана. При квазиклассич. квантовании поля u основную роль играют приведенные выше выражения для P_0 и P_1. Первые члены в правых частях указанных формул отвечают частицам с массой m — частицам основного поля. Переменным второго и третьего типов соответствуют локализованные решения С. Г. у.— *солитоны* и двойные солитоны с массами M и $2M\sin\theta$. Система обладает законом сохранения (топологич. заряд):

$$Q = \frac{1}{2\pi}(u(+\infty, t) - u(-\infty, t)), \ \ Q \in \mathbb{Z}.$$

Частицы первого и третьего типов имеют заряд, равный 0, а у частиц второго типа заряд равен ± 1. Частицы с одинаковыми зарядами отталкиваются, а с разными зарядами — притягиваются. Наличие бесконечного числа законов сохранения означает, что при рассеянии сохраняются количества частиц каждого типа; n-частичная S-матрица сводится к парным S-матрицам. С помощью *интеграла по траекториям* можно вычислить квантовые поправки к массам и к квазиклассической S-матрице солитонов. Одним из нетривиальных свойств указанной модели является появление целого спектра частиц (солитонов), в то время как лагранжиан теории содержит только одно поле. Кроме того, в приближении слабого взаимодействия (т. е. когда γ мало) солитоны — тяжелые частицы и сильно взаимодействуют.

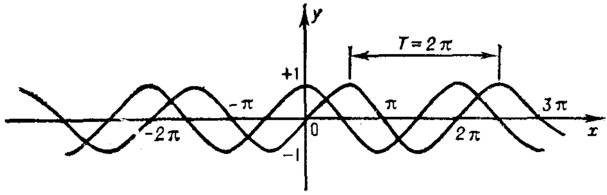
Лит.: [1] Ablowitz M. [и др.], «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. 30, p. 1262—64; [2] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., «Теоретич. и матем. физика», 1974, т. 21, № 2, с. 160—174; [3] их же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1976, т. 142, с. 254—66; [4] Козел В. А., Котляров В. П., «Докл. АН УССР, сер. А.», 1976, № 10, с. 878—81; [5] Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д., «Теоретич. и матем. физика», 1975, т. 25, № 2, с. 147—63; [6] Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale, v. 2, pt 1—2, Pisa, 1923—24; [7] Фиников С. П., Изгибание на главном основании..., М.— Л., 1937; [9] Пелиновский Е. Н., «Изв. вузов. Радиофизика», 1976, т. 19, № 5—6, с. 883—901.
Л. А. Тахтаджян.

СИНУСОВ ТЕОРЕМА: для произвольного треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими им углами A, B, C имеют место соотношения

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

где R — радиус описанного круга. *Ю. А. Горьков.*

СИНУСОИДА — график функции $y=\sin x$ (см. рис.). С.— непрерывная кривая с периодом $T=2\pi$. Пересе-



чения с осью Ox — точки $(k\pi, 0)$; они же — точки перегиба с углом $\pm\pi/4$ наклона к оси Ox; экстремумы $((k+{}^1/_2)\pi, (-1)^k)$.

График функции $y=\cos x=\sin(x+{}^{\pi}/_2)$ — косинусоида — представляет собой С., сдвинутую влево на ${}^{\pi}/_2$. Пересечения косинусоиды с осью Ox — точки $((k+{}^1/_2)\pi, 0)$; экстремумы $(k\pi, (-1)^k)$.

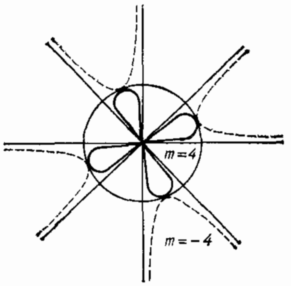
Многие колебательные процессы описываются периодич. функцией вида $y=a\sin(bx+c)$, где a, b и c — постоянные. График этой функции (т. н. общая синусоида, по сравнению с графиком функции $y=\sin x$ (обыкновенная синусоида) вытянут вдоль оси Oy в $|a|$ раз, сжат вдоль оси Ox в b раз, сдвинут влево на отрезок c/b и при $a<0$ зеркально отражен относительно оси Ox; период $T=2\pi/b$, пересечения с осью Ox — точки $\left(\frac{k\pi-c}{b}, 0\right)$; экстремумы $\left(\frac{(k+{}^1/_2)\pi-c}{b}, \left(-1\right)^k a\right)$. *Ю. А. Горьков.*

СИНУСОИДАЛЬНАЯ СПИРАЛЬ — плоская кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид

$$\rho^m=a^m\cos m\varphi.$$

При рациональном m С. с. является алгебраич. кривой. В частности, при $m=1$ — окружность, при $m=-1$ — равносторонняя гипербола, при $m={}^1/_2$ — *кардиоида*, при $m=-{}^1/_2$ — парабола.

В общем случае для $m>0$ С. с. проходит через полюс и полностью помещается внутри круга радиуса a. При отрицательном m радиус-вектор кривой может принимать сколь угодно большие значения и не проходит через полюс. С. с. симметрична относительно полярной оси, при рациональном $m=p/q$ (где p и q взаимно простые числа) имеет p осей симметрии, проходящих через полюс. При целом положительном m радиус-вектор С. с. является периодич. функцией с периодом $2\pi/m$. При изменении φ от 0 до 2π кривая состоит из m лепестков, каждый из которых располагается внутри угла, равного π/m. Полюс в этом случае — кратная точка (см. рис.). При дробном положительном $m=p/q$ кривая состоит из p пересекающихся лепестков. При целом отрицательном m С. с. состоит из $|m|$ бесконечных ветвей, к-рые могут быть получены инверсией спирали с $m'=-m$.



Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

СИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ — см. *Фурье преобразование.*

***A*-СИСТЕМА** — счетно ветвящаяся система множеств, т. е. семейство $\{A_{n_1 \ldots n_k}\}$ подмножеств множества X, занумерованных всеми конечными последовательностями натуральных чисел. A-С. $\{A_{n_1 \ldots n_k}\}$ наз. регулярной, если $A_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}} \subset A_{n_1 \ldots n_k}$. Последовательность $A_{n_1}, \ldots, A_{n_1 \ldots n_k}, \ldots$ элементов A-С., занумерованных всеми отрезками одной и той же бесконечной последовательности натуральных чисел, наз. цепью этой A-С. Пересечение всех элементов цепи наз. ее ядром, а объединение ядер всех цепей A-С. — ядром этой A-С., или результатом A-операции, примененной к этой A-С., или A-множеством, порожденным этой A-С. Всякая A-С. может быть регуляризована без изменения ядра (достаточно положить $A'_{n_1 \ldots n_k} = A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_1 \ldots n_k}$). Если $\mathscr{M}$ — нек-рая система множеств, то ядра A-С., составленных из элементов системы $\mathscr{M}$, наз. A-множествами, порожденными системой $\mathscr{M}$. A-множества, порожденные замкнутыми множествами топологич. пространства, наз. A-множествами этого пространства.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Куратовский К., Топология, пер. с франц., т. 1, М., 1966. *А. Г. Елькин.*

***K*-СИСТЕМА** $\{T^t\}$ — такой *измеримый поток* (K-поток) или каскад (K-каскад) в *Лебега пространстве*, что существует *измеримое разбиение* ξ фазового пространства со следующими свойствами: а) оно возрастающее (в более старой терминологии — инвариантное) относительно $\{T^t\}$, то есть $T^t\xi$ мельче ξ mod 0 при $t>0$; б) оно является двусторонним образующим для $\{T^t\}$, т. е. единственным mod 0 измеримым разбиением, к-рое мельче mod 0 всех $T^t\xi$, является разбиение на точки; в) единственным mod 0 измеримым разбиением, к-рое крупнее mod 0 всех $T^t\xi$, является тривиальное разбиение, единственный элемент к-рого — все фазовое пространство.

Автоморфизм пространства с мерой, итерации к-рого образуют K-каскад, наз. K-автоморфизмом. Если $\{T^t\}$ — K-С., то все T^t с $t\neq 0$ являются K-автоморфизмами; обратно, если для измеримого потока или каскада $\{T^t\}$ хоть одно T^t является K-автоморфизмом, то $\{T^t\}$ — K-С. K-система обладает сильными эргодич. свойствами: положительная энтропия, эргодичность, перемешивание всех степеней, счетнократный лебеговский спектр (см. *Спектр динамической системы*, а также [2]).

Эндоморфизм пространства Лебега имеет **вполне положительную энтропию**, если любой его нетривиальный факторэндоморфизм имеет положительную энтропию. Среди таких эндоморфизмов содержатся как K-автоморфизмы (именно последние суть в точности автоморфизмы с вполне положительной энтропией), так и другие интересные объекты (*точные эндоморфизмы*). Имеются обобщения K-С. в других направлениях: на случай бесконечной инвариантной меры (см. [6], [7], [11]) и для действия группы, отличной от $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ (см. [8] — [10], [12]).

K-С. наз. также **системами** (**потоками** и т. д.) **Колмогорова**, к-рый впервые ввел их (см. [1]) под названием «квазирегулярных». Последнее подчеркивает аналогию с регулярными случайными процессами (см. [4]). Если случайный процесс $\{X_t\}$, стационарный в узком смысле слова, интерпретировать как динамич. систему, то значения процесса «в прошлом» определяют нек-рое измеримое возрастающее разбиение ξ — наименьшее, относительно к-рого измеримы все X_t с $t<0$. Если ξ обладает свойствами б) и в) (закон «все или ничего»), то процесс наз. **регулярным**. В частности, вероятностное происхождение имеет простейший пример K-автоморфизма — *Бернулли автоморфизм*.

Если у измеримого потока или каскада в пространстве Лебега одно из преобразований T^t изоморфно автоморфизму Бернулли, то и все они (при $t\neq 0$) изоморфны автоморфизмам Бернулли; в этом случае динамич. система наз. **бернуллиевской** (см. [5]). Существуют K-С., не являющиеся бернуллиевскими. K-С. (даже бернуллиевские) естественно возникают не только в теории вероятностей, но и в других вопросах (алгебраической, геометрической и даже физич. природы; см. [2], [3], [5]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1958, т. 119, № 5, с. 861—64; 1959, т. 124, № 4, с. 754—55; [2] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [3] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129—262; [4] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [5] Орнстейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [6] Parry W., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 16, № 5, p. 960—66; [7] Dugdale J. K., «Publ. math.», (Debrecen), 1967, t. 14, № 1/4, p. 79—81; [8] Conze J. P., «Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete», 1972, Bd 25, H. 1, S. 11—30; [9] Burton R. M., там же, 1979, Bd 47, H. 2, S. 207—12; [10] Dani S., «Amer. J. Math.», 1976, v. 98, № 1, p. 119—63; [11] Krengel U., Sucheston L., «Ann. Math. Statistics», 1969, v. 40, № 2, p. 694—96; [12] Kamiński B., «Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.», 1978, v. 26, № 2, p. 95—97.

Д. В. Аносов.

$У$-СИСТЕМА — гладкая динамич. система (*поток* или *каскад*) с компактным фазовым многообразием, к-рое все является *гиперболическим множеством*. Диффеоморфизм, порождающий $У$-каскад, наз. **$У$-диффеоморфизмом**. $У$-С. были введены Д. В. Аносовым (см. [1], [2]), поэтому иногда их наз. **системами Аносова**.

$У$-С. являются *грубыми системами*, причем при малом (в смысле C^1) возмущении $У$-С. снова получается $У$-С.; число периодич. траекторий $У$-С. периода не больше T экспоненциально растет с ростом T. $У$-С. обладают сильными эргодич. свойствами по отношению к широкому классу т. н. «гиббсовских» инвариантных мер (см. [4]—[6]). [В частности, если $У$-С. имеет конечную инвариантную меру, «совместимую с гладкостью», т. е. задаваемую в терминах локальных координат положительной плотностью (в первых работах только такие меры и рассматривались, см. [1] — [3]), то эта мера — гиббсовская.] Так, если у $У$-диффеоморфизма нет *блуждающих точек*, то он метрически изоморфен *Бернулли автоморфизму*; сходимость временных средних к пространственному среднему в широких предположениях подчиняется центральной предельной теореме, а скорость перемешивания — экспоненциальная («экспоненциальное убывание корреляций»).

При исследовании У-С. нередко используется *символическая динамика*, что стало возможным благодаря введенным в [7], [8] (окончательный вариант в [5]) марковским разбиениям. Ряд результатов об У-С. оказался справедливым и для нек-рых других типов гиперболич. множеств; имеются и менее непосредственные обобщения, при к-рых несколько ослабляются условия гиперболичности (см. [6], [14]).

У-С. являются гиперболич. автоморфизмы торов и *геодезические потоки* на замкнутых многообразиях отрицательной кривизны; имеются и другие примеры родственной алгебро-геометрич. природы. В этих примерах У-С. имеет инвариантную меру, совместимую с гладкостью. При малом возмущении такая мера может исчезнуть, но ввиду грубости все точки остаются неблуждающими. Принципиально иной характер имеют примеры У-С. с блуждающими точками (см. [9]).

Существование У-С. на многообразии налагает ограничения на его топологич. свойства. В общем случае об этом известно немногое (см. [10], [11]); хорошо изучен тот случай, когда устойчивое или неустойчивое подпространство (см. *Гиперболическое множество*) одномерно (см. [9], [12], [13]).

Лит.: [1] Аносов Д. В., «Докл. АН СССР», 1962, т. 145, № 4, с. 707—09; 1963, т. 151, № 6, с. 1250—52; [2] его же, Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, М., 1967; [3] Аносов Д. В., Синай Я. Г., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 107—72; [4] Синай Я. Г., там же, 1972, т. 27, в. 4, с. 21—64; [5] Боуэн Р., Методы символической динамики, пер. с англ., М., 1979; [6] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129—262; [7] Adler R. L., Weiss B., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1967, v. 57, № 6, p. 1573—76; [8] Синай Я. Г., «Функциональный анализ и его приложения», 1968, т. 2, № 1, с. 64—89; [9] Franks J. M., Williams B., в кн.: Global theory of dynamical systems, B.— [u. a.], 1980, p. 158—74 (Lecture notes in math., № 819); [10] Hirsch M. W., «Topology», 1971, v. 10, № 3, p. 177—83; [11] Shiraiwa K., «Nagoya Math. J.», 1973, v. 49, p. 111—15; [12] Гладкие динамические системы, пер. с англ., М., 1977; [13] Verjovsky A., «Bolet. Soc. Matem. Mexicana», 1974, v. 19, № 2, p. 49—77; [14] Fathi A., Laudenbach F., Poénaru V., «Asterisque», 1979, t. 66—67, p. 71—79, 139—58, 225—42.

Д. В. Аносов.

СИСТЕМНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — 1) Инженерная дисциплина, разрабатывающая методы построения системных программ, т. е. программ, входящих в состав больших программных комплексов (программных систем), придающих вычислительным средствам постоянные функции нек-рой специальной системы обработки информации.

2) Процесс составления системных программ — в этом качестве все больше становится синонимом профессионального программирования, т. е. составления программ (иначе называемых программным продуктом), отчуждаемых от их автора и применяемых впоследствии многократно.

В начальный период применения ЭВМ, главным образом для математич. расчетов, основной сферой приложения С. п. была разработка базового математич. обеспечения: операционных систем, систем программирования, библиотек стандартных подпрограмм. В связи с расширением и усложнением применения ЭВМ в методах С. п. все больше начинает нуждаться разработка прикладного математич. обеспечения — пакетов прикладных программ, автоматизированных систем управления и банков данных.

С. п. в своем развитии встречается с рядом трудностей. Главными источниками их являются больпюй объем программных систем (до 1 млн. машинных команд), сугубо нелинейная зависимость сложности от объема, слабая устойчивость системных программ к ошибкам программиста и отказам оборудования.

В методах С. п. различается программирование «в малом», т. е. методы разработки системной программы одним человеком, и «в большом», т. е. методы объединения индивидуального программного продукта в большую систему.

В С. п. «в малом» на первый план выступают математич. методы программирования: описание и свойства математич. модели программируемой задачи, методы систематич. преобразования исходной формулировки задачи в программный текст, методы доказательства правильности (верификации) программы. С. п. «в большом» сближается с теорией больших систем, общей системотехникой, методами организации коллективной работы и даже с вопросами эволюции динамич. систем.

Лит.: [1] Брукс Ф., Как проектируются и создаются программные комплексы. Мифический человеко-месяц, пер. с англ., М., 1979; [2] Создание качественного программного обеспечения. Тр. Рабочей конференции Междунар. федерации по обработке информации, пер. с англ., т. 1—2, Новосиб., 1978.

А. П. Ершов.

СКАЛЯР — величина, каждое значение к-рой может быть выражено одним (действительным) числом (см. *Величина*). В общем случае С.— элемент нек-рого поля.

СКАЛЯРНАЯ КРИВИЗНА риманова многообразия в точке p — след *Риччи тензора* по отношению к метрич. тензору g. Скалярная кривизна $s(p)$ связана с *Риччи кривизной* r и *секционной кривизной* k формулами

$$s(p)=\sum_{i=1}^{n} r(e_i)=\sum_{i,\, j=1}^{n} k(e_i,\, e_j),$$

где $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис касательного пространства. В эквивалентной индексной форме эти равенства имеют вид

$$s(p)=g^{ij}R_{ij}=g^{ij}g^{kl}R_{kijl},$$

где R_{ij} и R_{kijl} — координаты тензора Риччи и тензора кривизны соответственно, g^{ij} — контравариантные координаты метрич. тензора.

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

Л. А. Сидоров.

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ — скалярная функция точки области нек-рого пространства. Примеры С. п.: поле температуры внутри тела, поле плотности.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, внутреннее произведение $(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b})$ ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$,— произведение их модулей на косинус угла φ между ними:

$$(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi.$$

За φ принимается угол между векторами, не превосходящий π. Если $\boldsymbol{a}=0$ и $\boldsymbol{b}=0$, то С. п. полагают равным нулю. С. п. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$ наз. скалярным квадратом вектора $\boldsymbol{a}$. См. *Векторная алгебра*.

С. п. двух n-мерных векторов $\boldsymbol{a}=(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_n)$ и $\boldsymbol{b}=(b_1,\, b_2,\, \ldots\, b_n)$ в случае действительных координат наз. число

$$(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b})=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n,$$

в случае комплексных координат — число

$$(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b})=a_1\bar{b}_1+a_2\bar{b}_2+\ldots+a_n\bar{b}_n.$$

Бесконечномерное векторное пространство, в к-ром определено С. п. и выполнена аксиома полноты, наз. *гильбертовым пространством*.

А. Б. Иванов.

СКАНИРОВАНИЯ МЕТОД — метод максимизации и минимизации функции путем последовательного перебора и сравнения значений функции во всех точках нек-рого подмножества допустимого множества. В отличие от перебора методом Монте-Карло указанные точки в С. м. лежат на заранее детерминированной траектории.

Название «С. м.» пришло из техники, где часть задач обзора и обнаружения целей эквивалентна максимизации или минимизации функции яркости и решается с помощью аналоговых или цифровых разновидностей С. м. В дальнейшем С. м. привлек внимание в качестве удобного средства оптимизации на ЭВМ в диалоговом режиме.

Траектория сканирования, в частности, может образовывать всюду плотное множество в допустимом множестве аргумента.

Достоинствами С. м. являются отсутствие ограничений на способ задания функции и функциональные классы, к-рым она может принадлежать. Последнее (наряду с большой трудоемкостью перебора) является в то же время и главным недостатком С. м.: не используется для сокращения вычислений дополнительная информация, имеющаяся у вычислителя. Поэтому в вычислительной практике С. м. редко применяется без комбинации с другими методами оптимизации. Например, для функций, удовлетворяющих условию Липшица, поиск глобального экстремума эффективнее производить вместо С. м. методом «перебора на неравномерной сетке» (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Растригин Л. А., Системы экстремального управления, М., 1974; [2] Евтушенко Ю. Г., Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации, М., 1982; [3] Towards Global Optimisation, v. 1—2, Amst.— N. Y., 1975—78.

Ю. П. Иванилов, В. В. Охрименко.

СКАЧКОВ ФУНКЦИЯ — одна из трех компонент в *Лебега разложении* функции ограниченной вариации. Пусть $f(x)$ — *ограниченной вариации функция* на отрезке $[a, b]$. Пусть $d_л(x)=f(x)-f(x-0)$ при $a<x\leqslant b$ и $d_п(x)=f(x+0)-f(x)$ при $a\leqslant x<b$. Число $d_л(x)$ наз. скачком функции f в точке x слева, а число $d_п(x)$ — скачком функции f в точке x справа. Если $a<x<b$, то число

$$d(x)=f(x+0)-f(x-0)=d_л(x)+d_п(x)$$

наз. скачком функции f в точке x. Пусть $\{x_i\}$ — последовательность всех точек разрыва функции f на отрезке $[a, b]$ и

$$s(x)=\sum\nolimits_{a\leqslant x_i<x} d_п(x_i)+\sum\nolimits_{a<x_i\leqslant x} d_л(x_i)\ (s(a)=0).$$

Функция $s(x)$ наз. функцией скачков для функции $f(x)$. При этом разность $f(x)-s(x)=\varphi(x)$ является непрерывной функцией ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$, причем $V_a^b(f)=V_a^b(\varphi)+V_a^b(s)$, где $V_a^b(F)$ — *вариация функции* F на отрезке $[a, b]$. При этом

$$V_a^b(s)=\sum\nolimits_{a\leqslant x_i<b} |d_п(x_i)|+\sum\nolimits_{a<x_i\leqslant b} |d_л(x_i)|.$$

Лит.: [1] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.—Л., 1934; [2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974.

Б. И. Голубов.

СКАЧКООБРАЗНЫЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс, к-рый изменяет свое состояние только в случайные моменты времени, образующие возрастающую последовательность. Иногда термин «С. п.» относят к любому процессу с кусочно постоянными траекториями.

Важный класс С. п. образуют марковские С. п. Марковский процесс является С. п., если его переходная функция $P(s, x, t, B)$ такова, что

$$\lim_{t\downarrow s}\left[P(s, x, t, B)-I_B(x)\right]/(t-s)=q(s, x, B), \quad (1)$$

где $I_b(x)$ — индикатор множества B в фазовом пространстве $(E, \mathscr{E})$, и выполнены условия регулярности, заключающиеся в том, что сходимость в (1) равномерна и ядро $q(s, x, B)$ удовлетворяет нек-рым требованиям ограниченности и непрерывности.

Пусть

$$a(t, s) = -q(t, x, \{x\}),\ a(t, x, B) = q(t, x, B \setminus \{x\}),$$

$$\Pi(t, x, B) = a(t, x, B)/a(t, x), \text{ если } a(t, x) > 0,$$

и

$$\Pi(t, x, B) = 0$$

— в противном случае. Введенные величины допускают следующую интерпретацию: с точностью до $o(\Delta t)$ (при $\Delta t \to 0$) $a(t, x)\Delta t$ есть вероятность того, что в промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ процесс покинет состояние x; $\Pi(t, x, B)$, когда $a(t, x) > 0$, есть условная вероятность попадания процесса во множество B при условии, что в момент t он покидает состояние x.

При выполнении условий регулярности переходная функция С. п. дифференцируема по t при $t > s$, по s при $s < t$ и удовлетворяет прямому и обратному **уравнениям Колмогорова** с соответствующими граничными условиями:

$$\frac{\partial P(s, x, t, B)}{\partial t} = -\int_B a(t, y) P(s, x, t, dy) + \int_E a(t, y, B) P(s, x, t, dy),$$

$$\lim_{t \downarrow s} P(s, x, t, B) = I_B(x);$$

$$\frac{\partial P(s, x, t, B)}{\partial s} = a(s, x)\left[P(s, x, t, B) - \int_E P(s, y, t, B)\,\Pi(s, x, dy)\right],$$

$$\lim_{s \uparrow t} P(s, x, t, B) = I_B(x).$$

Пусть $X = (X_t)_{t \geq 0}$ — непрерывный справа строго марковский С. п., T_n — момент n-го скачка процесса, $T_0 = 0$, $Y_n = X_{T_n}$, S_n — время пребывания в n-м состоянии, $T_\infty = \lim T_n$ — момент обрыва, $X_{T_\infty} = \delta$, где δ — точка вне E. Тогда последовательность (T_n, Y_n) образует однородную цепь Маркова. При этом если X — однородный марковский процесс, то распределение S_n при заданном $Y_n = x$ — показательное с параметром $\lambda(x)$.

Естественным обобщением марковских С. п. являются полумарковские С. п., для к-рых последовательность (Y_n) является цепью Маркова, однако время пребывания в n-м состоянии зависит от Y_n и Y_{n+1} и имеет произвольное распределение.

При исследовании общих С. п. оказался плодотворным т. н. мартингальный подход. В рамках этого подхода удается получить содержательные результаты без дополнительных предположений о вероятностной структуре С. п. При мартингальном подходе предполагается, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, где задан С. п. X, фиксировано неубывающее непрерывное справа семейство σ-алгебр $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, причем для каждого t случайная величина X_t является $\mathcal{F}_t$-измеримой и, значит, моменты T_n — марковскими.

Пусть $\mathcal{P}$ — предсказуемая σ-алгебра на $\Omega \times \mathbb{R}_+$, $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \times \mathcal{E}$. Случайная мера η на $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$ наз. **предсказуемой**, если для любой неотрицательной $\tilde{\mathcal{P}}$-измеримой функции f процесс $(f * \eta_t)_{t \geq 0}$, где

$$f * \eta_t = \int_{(0, t] \times E} f(t, x)\,\eta(dt, dx),$$

является предсказуемым.

Пусть $\mu = \mu(dt, dx)$ — мера скачков процесса X, т. е. целочисленная случайная мера на $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$, определенная равенством

$$\mu([0, t] \times B) = \sum_{n \geq 1} I_{[0, t] \times B}(T_n, Y_n),\ t \in \mathbb{R}_+,\ B \in \mathcal{E}.$$

При весьма широких предположениях на $(E, \mathscr{E})$ (выполненных, в частности, когда E — полное сепарабельное метрич. пространство с борелевской σ-алгеброй $\mathscr{E}$) существует предсказуемая случайная мера $\nu = \nu(dt, dx)$ такая, что имеет место любое из следующих двух эквивалентных условий:

1) $Ef*\mu_\infty = Ef*\nu_\infty$ для любой неотрицательной $\mathscr{P}$-измеримой функции f;

2) при любых $n \geqslant 1$ и $B \in \mathscr{E}$ процесс

$$(\mu([0,\ t \wedge T_n] \times B) - \nu([0,\ t \wedge T_n] \times B))_{t \geqslant 0}$$

является мартингалом, выходящим из нуля.

Предсказуемая случайная мера ν определена однозначно с точностью до множества P-меры нуль и наз. компенсатором (или дуальной предсказуемой проекцией) μ. Можно выбрать такой вариант ν, что

$$\nu((T_\infty,\ \infty) \times E) = 0,\ \nu(\{t\} \times E) \leqslant 1,\ \forall t. \qquad (2)$$

Пусть Ω — пространство траекторий С. п. X, принимающих значения в $(E, \mathscr{E})$, $\mathscr{F}_t = \sigma(X_s, s \leqslant t)$, $\mathscr{F} = \bigcup\limits_{t > 0} \mathscr{F}_t$, P_0 — вероятностная мера, для к-рой выполнено (2). Тогда на $(\Omega, \mathscr{F})$ найдется и притом единственная вероятностная мера P такая, что ν является компенсатором μ относительно P и сужение P на $\mathscr{F}_0$ совпадает с P_0. Доказательство этого утверждения опирается на явную формулу, связывающую условные распределения величин (T_n, Y_n) и компенсатор, к-рый в ряде случаев оказывается более удобным средством для описания С. п.

С. п. является процессом с независимыми приращениями тогда и только тогда, когда ему отвечает детерминированный компенсатор.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1938, т. 5, с. 5—41; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процесссов, т. 2, М., 1973; [3] Jacod J., Calcul stochastique et problèmes de martingales, B. — [a.o.] 1979.

Ю. М. Кабанов.

СКЕЛЕТ КАТЕГОРИИ — минимальная *полная подкатегория* категории, эквивалентная самой категории. В произвольной категории $\mathfrak{K}$ существует, вообще говоря, много скелетов. Любой скелет можно построить следующим образом. В каждом классе изоморфных объектов категории $\mathfrak{K}$ выбирается по одному представителю. Тогда полная подкатегория категории $\mathfrak{K}$, порожденная выбранным подклассом объектов, является С. к. $\mathfrak{K}$.

Две категории эквивалентны тогда и только тогда, когда их скелеты изоморфны. С. к. наследует многие свойства самой категории: локальную малость, наличие бикатегорных структур, различные виды полноты и т. д.

М. Ш. Цаленко.

СКЛЕИВАНИЯ МЕТОД в теории поверхностей — метод построения поверхностей, изометричных данной. С. м. имеет приложения к доказательствам реализуемости абстрактно заданных выпуклых метрик, к вопросам изгибания выпуклых поверхностей и к количественным оценкам изгибаемости; сила его в том, что он работает там, где дифференциальные уравнения бессильны.

Теорема Александрова: пусть $G_1, \ldots, G_n$ — замкнутые области в многообразиях с внутренней метрикой и положительной кривизной, ограниченные конечным числом кривых с ограниченной вариацией поворота. Пусть G — многообразие, составленное из областей G_i путем отождествления точек их границ таким образом, что 1) отождествленные отрезки границ областей G_i и G_j имеют равные длины; 2) сумма поворотов отождествленных отрезков границ областей G_i и G_j со стороны этих областей неотрицательна; 3) сумма углов секторов в отождествленных точках областей G_k со стороны этих областей не превосходит 2π. Тогда многообразие G имеет внутреннюю метрику положительной кривизны, совпадающую с метриками областей в окрестностях соответствующих точек.

Лит.: [1] Александров А. Д., Залгаллер В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны, М.—Л., 1962; [2] Погорелов А. В., Изгибание выпуклых поверхностей, М.—Л., 1951. *М. И. Войцеховский.*

СКЛЕИВАНИЯ ТЕОРЕМЫ — теоремы, к-рые устанавливают существование аналитич. функций, подчиненных определенным соотношениям на границе области.

Теорема склеивания Лаврентьева [1]: какова бы ни была аналитич. функция $x_1=\varphi(x)$, определенная на сегменте $[-1,1]$, $\varphi(\pm 1)=\pm 1$, $\varphi'(x)>0$, можно построить две аналитич. функции $f_1(z, h)$ и $f_2(z, h)$, $z=x+iy$, $h=\text{const}$, отображающие однолистно и конформно прямоугольник $|x|<1$, $-h<y<0$ и прямоугольник $|x|<1$, $0<y<h$ соответственно на области D_1 и D_2 без общих точек так, что $f_1(x, h)=f_2(\varphi(x), h)$.

Эта С. т. была использована (см. [6]) для доказательства теоремы о существовании функции $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, осуществляющей квазиконформное отображение круга $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$ и обладающей почти всюду заданной характеристикой $h(z)$, где

$$h(z)=w_{\bar z}/w_z,\ |h(z)|\leqslant h_0<1,$$

$h(z)$ — измеримая функция, определенная почти для всех $z=x+iy$, $|z|\leqslant 1$. С. т., являющаяся видоизменением С. т. Лаврентьева, была также использована при решении вопроса о конформном отображении односвязной римановой поверхности на однолистный круг [5].

Были получены и другие С. т. (см. [2]), сыгравшие важную роль в теории римановых поверхностей (при этом брались более слабые ограничения на функцию типа $x_1=\varphi(x)$). Имеет место следующая С. т. (см. [3], [5]): пусть на окружности $|z|=1$ дана дуга γ_1 с концами a и b, $a\neq b$, и на γ_1 задана функция $g(z)$, обладающая свойствами: 1) она регулярна во всех внутренних точках дуги γ_1 и в них $g'(z)\neq 0$; 2) функция $z_1=g(z)$ устанавливает взаимно однозначное отображение дуги γ_1 на дополнительную дугу γ_2 на $|z|=1$ с сохранением концов a и b; тогда существует функция

$$w=F(z)=\frac{1}{z}+a_1z+\ldots,$$

регулярная в $|z|\leqslant 1$, за исключением точек 0, a и b, и во внутренних точках дуги γ_1 удовлетворяющая соотношению $F(z)=F(g(z))$.

Доказано также существование функции $F(z)$, однолистной в $|z|<1$ (см. [4], гл. 2).

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., «Матем. сб.», 1935, т. 42, № 4, с. 407—24; [2] Волковыский Л. И., там же, 1946, т. 18, № 2, с. 185—212; [3] Schaeffer A. C., Spencer D. C., «Duke Math. J.», 1947, v. 14, № 4, p. 949—66; [4] их же, «Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.», 1950, v. 35; [5] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966, гл. 11, § 1—2; [6] Белинский П. П., Общие свойства квазиконформных отображений, Новосиб., 1974, гл. 2, § 1. *Е. Г. Голузина.*

СКОЛЕМА ПАРАДОКС — следствие теоремы Лёвенхейма—Сколема (см. *Гёделя теорема о полноте*), состоящее в том, что всякая непротиворечивая формальная аксиоматич. теория, заданная счетным семейством аксиом, выполнима в счетной области. В частности, если предположить непротиворечивость аксиоматич. системы теории множеств Цермело — Френкеля или простой теории типов (см. *Аксиоматическая теория множеств*), то существует *интерпретация* этих теорий на счетной области. И это несмотря на то, что сами эти теории предназначены для описания весьма обширных фрагментов наивной теории множеств и в рамках этих теорий можно доказать существование множеств весьма большой несчетной мощности, так что в любой интерпретации этой теории должны существовать несчетные множества.

Следует подчеркнуть, что С. п. не является парадоксом в строгом смысле этого слова, т. е. отнюдь не свидетельствует о противоречивости теории, в рамках к-рой он установлен (см. также *Антиномия*). Кажущаяся парадоксальность С. п. может быть прояснена тем, что счетно-бесконечная интерпретация теории множеств является в нек-ром роде нестандартной. Элемент интерпретации может оказаться счетным в широком интуитивном смысле и несчетным внутри самой теории. Последнее означает, что среди элементов интерпретации отсутствует функция, задающая взаимно однозначное соответствие между элементами данного множества и элементами множества натуральных чисел, в то время как с теоретико-множественной точки зрения существование такой функции можно доказать.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *А. Г. Драгалин.*

СКОЛЕМА ФУНКЦИЯ, функция Скулема, сколемовская функция, — понятие логики предикатов. Если $A(x_1, \ldots, x_n, y)$ — предикатная формула от *индивидных переменных* $x_1, \ldots, x_n, y$, области изменения к-рых суть множества $X_1, \ldots, X_n, Y$ соответственно, то функция $f: X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ наз. функцией Сколема, или разрешающей функцией, для формулы $\exists y\, A(x_1, \ldots, x_n, y)$, если для всех $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$ имеет место импликация

$$\exists y A(x_1, \ldots, x_n, y) \Rightarrow A(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)).$$

С. ф. были введены Т. Сколемом (T. Skolem) в 20-х гг. 20 в. Понятие С. ф. широко применяется в работах по математич. логике. Объясняется это тем, что с помощью С. ф. можно исключить чередование кванторов $\forall$ и $\exists$. Так, напр., для всякой формулы A языка узкого исчисления предикатов можно построить формулу вида $\exists x_1, \ldots, x_n \forall y_1, \ldots, y_m C$, называемую сколемовской нормальной формой формулы A, где C не содержит кванторов, но содержит новые (т. е. не встречающиеся в A) предикатные символы, и такую, что в исчислении предикатов формула A выводима тогда и только тогда, когда выводима ее сколемовская нормальная форма.

Идея С. ф. используется в таких фундаментальных теоремах математич. логики, как теорема Эрбрана, сводящая вопрос о выводимости в исчислении предикатов предикатной формулы к исследованию вопроса о выводимости в исчислении высказываний бесконечной последовательности пропозициональных формул, теорема Лёвенхейма — Сколема и др.

В тех случаях, когда предметная область, на к-рой рассматриваются формулы, обладает дополнительной структурой, можно потребовать от С. ф. определенной связи с этой структурой. Напр., если рассматриваемая предметная область принадлежит иерархии *конструктивных по Гёделю множеств*, то можно потребовать, чтобы С. ф. также принадлежали определенному уровню в конструктивной иерархии. Существование С. ф., удовлетворяющих дополнительным свойствам, не всегда гарантировано, но эффект от их использования в случае, когда они существуют, оказывается более значительным.

В качестве примера можно указать на результат Йенсена о выводимости гипотезы Чэна о двух кардиналах (см. [6]) и отрицания *Суслина гипотезы* (см. [5]) из аксиомы конструктивности Гёделя. Теорема Новикова — Кондо об униформизации Π^1_1-отношений из дескриптивной теории множеств утверждает существование определенного рода С. ф. (см. [2], с. 280).

Лит.: [1] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [2] Шенфилд Дж. Р., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; [3] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч., Теория моделей, пер. с англ., М., 1977; [4] Ершов Ю. Л., Налютин Е. А., Математическая логика М., 1979; [5] Handbook of mathematical logic, Amst., 1977; [6] Devlin K. J., Aspects of constructibility, B.— [a. o.], 1973. *В. Н. Гришин.*

СКОЛЬЖЕНИЙ ГРУППА регулярного накрытия $p: X \to Y$ — группа $\Gamma(p)$ таких гомеоморфизмов γ пространства X на себя, что $\gamma p = p$ (X и Y — связные локально линейно связные хаусдорфовы топологич. пространства). Так, С. г. накрытия окружности действительной прямой $\mathbb{R}$, определяемого формулой $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, будет группа сдвигов $t \mapsto t+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Группа $\Gamma(p)$ является *дискретной группой* преобразований пространства X, действующей свободно (т. е. $\gamma(x)=x \Longrightarrow \gamma=1$), и пространство Y естественно изоморфно факторпространству $X/\Gamma(p)$. С. г. $\Gamma(p)$ изоморфна факторгруппе *фундаментальной группы* $\pi_1(Y, y_0)$, где $y_0 \in Y$, по образу группы $\pi_1(X, x_0)$, где $p(x_0)=y_0$, при гомоморфизме, индуцированном отображением p. В частности, для универсального накрытия p С. г. изоморфна фундаментальной группе пространства Y.

Лит.: Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964. *Э. Б. Винберг.*

СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ПРОЦЕСС — стационарный в широком смысле случайный процесс, к-рый может быть получен с помощью применения нек-рого линейного преобразования к процессу с некоррелированными значениями (т. е. к процессу белого шума). Часто С. с. п. наз. также более частный процесс $X(t)$ с дискретным временем $t=0, \pm 1, \ldots$, представимый в виде

$$X(t)=Y(t)+b_1 Y(t-1)+\ldots+b_q Y(t-q), \quad (1)$$

где $\mathsf{E}Y(t)=0$, $\mathsf{E}Y(t)Y(s)=\sigma^2\delta_{ts}$, δ_{ts} — символ Кронекера (так что $Y(t)$ — процесс белого шума со спектральной плотностью $\sigma^2/2\pi$), q — нек-рое целое положительное число, а $b_1, \ldots, b_q$ — постоянные коэффициенты. Спектральная плотность $f(\lambda)$ такого С. с. п. определяется формулой

$$f(\lambda)=(\sigma^2/2\pi)\,|\psi(e^{i\lambda})|^2,$$
$$\psi(z)=b_0+b_1 z+\ldots+b_q z^q, \quad b_0=1,$$

а его корреляционная функция $r(k)=\mathsf{E}X(t)X(t-k)$ имеет вид

$$r(k)=\sigma^2\sum_{j=0}^{q-|k|} b_j b_{j+|k|} \text{ при } |k| \leqslant q,$$
$$r(k)=0 \text{ при } |k|>q.$$

Обратно, если корреляционная функция $r(k)$ стационарного процесса $X(t)$ с дискретным временем t обладает тем свойством, что $r(k)=0$ при $|k|>q$ для какого-то целого положительного q, то $X(t)$ — это С. с. п. порядка q, т. е. он допускает представление вида (1), где $Y(t)$ — белый шум (см., напр., [1], § 5.7).

Наряду со С. с. п. конечного порядка q, представимыми в виде (1), существуют также два типа С. с. п. с дискретным временем бесконечного порядка, а именно: односторонние С. с. п., допускающие представление вида

$$X(t)=\sum_{j=0}^{\infty} b_j Y(t-j), \quad (2)$$

где $Y(t)$ — белый шум, а ряд в правой части (2) сходится в среднем квадратичном (и, значит, $\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|^2 < \infty$), и более общие двусторонние С. с. п., представимые в виде

$$X(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j Y(t-j), \quad (3)$$

где $Y(t)$ — белый шум, а $\sum_{j=-\infty}^{\infty}|b_j|^2<\infty$. Класс двусторонних С. с. п. совпадает с классом стационарных процессов $X(t)$, имеющих спектральную плотность $f(\lambda)$, а класс односторонних С. с. п.— с классом процессов, имеющих спектральную плотность $f(\lambda)$ такую, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda > -\infty$$

(см. [2], [1], [3]).

Односторонним или соответственно двусторонним С. с. п. с непрерывным временем наз. стационарный процесс $X(t), -\infty < t < \infty$, представимый в виде

$$X(t) = \int_0^{\infty} b(s)\, dY(t-s), \quad \int_0^{\infty} |b(s)|^2\, ds < \infty,$$

или соответственно в виде

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(s)\, dY(t-s), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |b(s)|^2\, ds < \infty,$$

где $\mathsf{E}|dY(t)|^2 = \sigma^2 dt$, т. е. $Y'(t)$ — обобщенный процесс белого шума. Класс двусторонних С. с. п. с непрерывным временем совпадает с классом стационарных процессов $X(t)$, имеющих спектральную плотность $f(\lambda)$, а класс односторонних С. с. п. с непрерывным временем — с классом процессов, имеющих такую спектральную плотность $f(\lambda)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log f(\lambda)\,(1+\lambda^2)^{-1}\, d\lambda > -\infty$$

(см. [4], [3], [5]).

Лит.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Колмогоров А. Н., «Бюлл. Моск. гос. ун-та», 1941, т. 2, в. 6, с. 1—40; [3] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [4] Karhunen K., «Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math.-Phys.», 1947, № 37, p. 3—79; [5] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963. *А. М. Яглом.*

СКОЛЬЗЯЩИЙ ВЕКТОР — см. *Вектор*.

СКРЕЩЕННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ группы G и кольца K — ассоциативное кольцо, определяемое следующей конструкцией. Пусть заданы однозначное отображение σ группы G в группу автоморфизмов ассоциативного кольца K с единицей и семейство

$$\rho = \{\rho_{g,h} \mid g, h \in G\}$$

обратимых элементов кольца K, удовлетворяющее условиям

$$\rho_{g_1, g_2, g_3} \cdot \rho_{g_2, g_3} = \rho_{g_1 g_2, g_3} \rho_{g_1, g_2}^{g_3 \sigma};$$

$$\alpha^{g_1\sigma \cdot g_2\sigma} = \rho_{g_1, g_2}^{-1} \alpha^{(g_1 g_2)\sigma} \rho_{g_1, g_2}$$

для всех $\alpha \in K$ и $g_1, g_2, g_3 \in G$. Семейство ρ наз. системой факторов. Элементами С. п. группы G и кольца K при системе факторов ρ и отображении σ будут всевозможные формальные конечные суммы вида

$$\sum_{g \in G} \alpha_g t_g, \ g \in G, \ \alpha_g \in K$$

(t_g — символ, однозначно сопоставляемый каждому элементу $g \in G$), а операции определяются формулами

$$\sum_{g \in G} \alpha_g t_g + \sum_{g \in G} \beta_g t_g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g)\, t_g;$$

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g t_g\right)\left(\sum_{g \in G} \beta_g t_g\right) = \sum_{h \in G}\left(\sum_{xy=h,\ x, y \in G} \left(\alpha_x \beta_y^{x\sigma} \rho_{x, y}\right)\right) t_h.$$

Это кольцо обозначается $K(G, \rho, \sigma)$; элементы t_g образуют K-базис С. п. $K(G, \rho, \sigma)$.

Если σ отображает G в единичный автоморфизм кольца K, то С. п. $K(G, \rho)$ наз. скрещенным групповым кольцом, а если, кроме того, $\rho_{g,h} = 1$ для всех $g, h \in G$, то $K(G, \rho, \sigma)$ — групповое кольцо группы G над кольцом K (см. *Групповая алгебра*).

Пусть K — поле и σ — мономорфизм. Тогда С. п. $K(G, \rho, \sigma)$ — простое кольцо, являющееся С. п. поля с его группой Галуа.

Лит.: [1] Sehgal S. K., Topics in group rings, N. Y., 1978; [2] Бовди А. А., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, с. 481—500; [3] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 2, М., 1973, с. 5—118. *А. А. Бовди.*

СКРЕЩЕННЫЕ МОДУЛИ — понятие, родственное понятию G-модулей (см. *Модуль*). Группа M (не обязательно коммутативная) с группой операторов G, снабженная гомоморфизмом $f: M \to G$ таким, что для любого $g \in G$ и любых $x, y \in M$ имеют место соотношения

$$f(gx) = g(fx)g^{-1}, \quad (fx)y = xyx^{-1},$$

наз. скрещенным (G, f)-модулем. Тогда и только тогда M является G-модулем (то есть M — абелева группа), когда $f = \mathrm{const}$ $(\equiv e \in G)$. *М. И. Войцеховский.*

СКРЕЩЕННЫЙ ГОМОМОРФИЗМ группы G в операторную группу Γ над G — отображение $\varphi: G \to \Gamma$, удовлетворяющее условию $\varphi(ab) = \varphi(a)(a\varphi(b))$. Если G действует на Γ тождественно, то С. г. — это обычный гомоморфизм. С. г. наз. также 1-коциклами группы G со значениями в Γ (см. *Неабелевы когомологии*). Каждый элемент $\gamma \in \Gamma$ определяет С. г. $\varphi(a) = \gamma^{-1}(a\gamma)$ $(a \in G)$, наз. главным С. г., или коциклом, *когомологичным e*. Отображение $\varphi: G \to \Gamma$ является С. г. тогда и только тогда, когда отображение ρ группы G в *голоморф группы* Γ, заданное формулой $\rho(a) = (\varphi(a), \sigma(a))$, где $\sigma: \Gamma \to \mathrm{Aut}\,\Gamma$ — гомоморфизм, определяющий на Γ структуру операторной группы, является гомоморфизмом. Напр., если σ — линейное представление группы G в векторном пространстве V, то С. г. $\varphi: G \to \Gamma$ определяет представление ρ группы G аффинными преобразованиями пространства V. Ядром С. г. φ наз. множество $\varphi^{-1}(e) \subset G$; оно всегда является подгруппой в G. *А. Л. Онищик.*

СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ — прямые в пространстве, не лежащие в одной плоскости.

Углом между С. п. наз. любой из углов между двумя параллельными им прямыми, проходящими через произвольную точку пространства. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — направляющие векторы С. п., то косинус угла между С. п. выражается формулой

$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}.$$

Общим перпендикуляром двух С. п. наз. прямая, пересекающая каждую из прямых и им перпендикулярная. Для любых двух С. п. существует единственный общий перпендикуляр. Уравнения (как линии пересечения двух нек-рых плоскостей) общего перпендикуляра к двум С. п. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}t_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{b}t_2$ имеют вид

$$((\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1), \boldsymbol{a}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = 0,$$
$$((\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2), \boldsymbol{b}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = 0.$$

Расстоянием между С. п. наз. длина отрезка общего перпендикуляра к этим двум прямым, концы к-рого лежат на этих прямых (или расстояние между параллельными плоскостями, в к-рых лежат С. п.). Расстояние d между С. п. выражается формулой

$$d = \frac{|((\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|}{|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|}.$$

А. Б. Иванов.

СЛАБАЯ ГОМОЛОГИЯ — отношение эквивалентности между циклами, приводящее к определению групп *спектральных гомологий* $\check{H}_p(C; G)$. Известно, что гомологии Стинрода — Ситникова компактного пространства $H_p(C; G)$ отображаются на $\check{H}_p(C; G)$ эпиморфно, причем ядро K этого отображения изоморфно первому производному функтору $\varprojlim^1$ от обратного предела гомологий $H_p(\alpha; G)$ нервов открытых покрытий α пространства C. Первоначально группы H_p определялись в терминах циклов Вьеториса, причем циклы, задающие элементы подгруппы $K \subset H_p(C; G)$, наз. слабо гомологичными нулю. Наоборот, циклы Вьеториса, гомологичные нулю в указанном выше определении групп H_p, иногда наз. сильно гомологич-н ы м и н у л ю (а соответствующее отношение эквивалентности между ними — с и л ь н о й г о м о л о г и е й). В случае, когда G — компактная группа или поле, ядро K равно нулю, и понятия сильной и слабой гомологий оказываются эквивалентными.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1959, т. 54, с. 3—136; [2] М а с с и У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981. *Е. Г. Скляренко.*

СЛАБАЯ ОСОБЕННОСТЬ, п о л я р н а я о с о б е н н о с т ь,— неограниченность ядра интегрального оператора $K(x, s)$ при ограниченном произведении $|x-s|^\alpha K(x, s)$, $(x, s)\in\Omega\times\Omega$, где Ω — множество пространства $\mathbb{R}^n$, $|x-s|$ — расстояние между точками x, s и $0<\alpha=\text{const}<n$. Интегральный оператор, к-рый порождается таким ядром

$$K\varphi(t)=\int_\Omega \frac{M(x, s)}{|x-s|^\alpha}\varphi(s)\,ds, \qquad (1)$$

наз. и н т е г р а л ь н ы м о п е р а т о р о м с о с л а б о й о с о б е н н о с т ь ю (или с п о л я р н о й о с о б е н н о с т ь ю). Пусть Ω — компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда если $M(x, s)$ непрерывна на $\Omega\times\Omega$, то оператор (1) вполне непрерывен в пространстве непрерывных функций $\mathbb{C}(\Omega)$, а если M — ограниченная функция, то — в пространстве $L_2(\Omega)$.

Ядро

$$(K_1 * K_2)(x, s)=\int_\Omega K_1(x, t)\,K_2(t, s)\,dt \qquad (2)$$

наз. с в е р т к о й я д е р K_1 и K_2. Пусть эти ядра имеют С. о., причем

$$|K_i(x, s)|\leqslant\frac{\text{const}}{|x-s|^{\alpha_i}},\ \alpha_i=\text{const}<n,\ i=1, 2,$$

тогда их свертка (2) ограничена или будет ядром со С. о., а именно:

$$|(K_1*K_2)(x, s)|\leqslant\begin{cases} c & \text{если } \alpha_1+\alpha_2<n,\\ c\,|\ln|x-s||, & \text{если } \alpha_1+\alpha_2=n,\\ c\,|x-s|^{n-\alpha_1-\alpha_2}, & \text{если } \alpha_1+\alpha_2>n,\end{cases}$$

где c — нек-рая постоянная.

Если ядро имеет С. о., то все его итерированные ядра, начиная с нек-рого, ограничены.

Лит.: [1] С м и р н о в В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959; [2] В л а д и м и р о в В. С., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1976; [3] К р а с н о с е л ь с к и й М. А. [и др.], Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966. *Б. В. Хведелидзе.*

СЛАБАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — то же, что *Гато производная.*

СЛАБАЯ ТОПОЛОГИЯ — *локально выпуклая топология* на векторном пространстве X, порожденная семейством *полунорм* $p(x)=|f(x)|$, где f пробегает нек-рое подмножество F *сопряженного пространства* X'.

Лит.: [1] Л ю с т е р н и к Л. А., С о б о л е в В. И., Краткий курс функционального анализа, М., 1982; [2] Ш е ф е р Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971. *М. И. Войцеховский.*

СЛАБО БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X, для любой бесконечной системы пар множеств к-рого

$$(A_i, B_i),\ A_i\cap B_i=\varnothing,\ i=1, 2, \ldots,$$

найдутся *перегородки* C_i (между A_i и B_i) такие, что $\bigcap C_i=\varnothing$. Пространство, не являющееся слабо бесконечномерным, наз. с и л ь н о б е с к о н е ч н о м е р н ы м. С. б. п. наз. также A-с л а б о б е с к о н е ч н о м е р н ы м. Если в определении С. б. п. еще потребовать, чтобы пары множеств были дизъюнктны, то получится понятие S-с л а б о б е с к о н е ч н о м е р н о г о п р о с т р а н с т в а.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., П а с ы н к о в Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973. *М. И. Войцеховский.*

СЛАБО БЛУЖДАЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО для обратимого измеримого преобразования T *измеримого пространства* $(X, \mathfrak{B})$ — измеримое подмножество $A\subset X$, для к-рого существует такая бесконечная последовательность целых чисел n_i, что множества $T^{n_i}A$ попарно не пересекаются (здесь обратимость T подразумевает измеримость T^{-1}). Если T имеет σ-конечную *квазиинвариантную меру* μ (определенную на $\mathfrak{B}$), то необходимое и достаточное условие существования у T конечной *инвариантной меры*, эквивалентной μ, состоит в том, чтобы для любого С. б. м. A было $\mu A=0$.

Лит.: [1] Hajian A. B., Kakutani Sh., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1964, v. 110, № 1, p. 136—51; [2] Hajian A., Ito Y., «J. math. and mech.», 1969, v. 18, № 12, p. 1203—16.

Д. В. Аносов.

СЛАБОЕ РЕШЕНИЕ дифференциального уравнения

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f \qquad (*)$$

в области D — локально интегрируемая функция u, удовлетворяющая равенству

$$\int_D u L^* \varphi dx = \int_D f \varphi dx$$

для любой гладкой (напр., класса C^∞) функции φ с компактным носителем в D. Здесь коэффициенты $a_\alpha(x)$ уравнения (*) предполагаются достаточно гладкими и L^* означает формально сопряженный по Лагранжу с L дифференциальный оператор

$$L^*\varphi = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi).$$

Напр., обобщенную производную $f=D^\alpha u$ можно определить как такую локально интегрируемую функцию f, что u есть С. р. уравнения $D^\alpha u = f$.

При рассмотрении С. р. уравнения (*) возникает задача: при каких условиях они являются *сильными решениями*. Напр., для эллиптич. уравнений всякое С. р. является сильным.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981.

А. П. Солдатов.

СЛАБЫЙ ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ МИНИМУМ — минимальное значение $J(\tilde{y})$, достигаемое функционалом $J(y)$ на кривой $\tilde{y}(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, такое, что $J(\tilde{y}) \leqslant J(y)$ для всех кривых сравнения $y(x)$, удовлетворяющих условию ε-близости 1-го порядка

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant \varepsilon, \; |y'(x) - \tilde{y}'(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (1)$$

на всем промежутке $[x_1, x_2]$. Предполагается, что кривые $\tilde{y}(x)$, $y(x)$ удовлетворяют заданным граничным условиям.

Если в (1) отбросить условие ε-близости по производной, то это приведет к условию ε-близости нулевого порядка. Минимальное значение функционала $J(\tilde{y})$ в ε-окрестности нулевого порядка наз. *сильным относительным минимумом.*

Поскольку условие ε-близости нулевого порядка выделяет более широкий класс кривых по сравнению с условием ε-близости 1-го порядка, всякий сильный относительный минимум является одновременно С. о. м., но не всякий С. о. м. является сильным относительным минимумом.

Для того чтобы экстремаль $\tilde{y}(x)$ доставляла С. о. м., необходимо, чтобы на ней выполнялось *Лежандра условие.* Для сильного относительного минимума вместо условия Лежандра необходимо выполнение более общего *Вейерштрасса условия.* В терминах теории оптимального управления это различие в формулировках необходимых условий означает следующее: для С. о. м. необходимо, чтобы *Гамильтона функция* в точках экстремали достигала локального максимума, а для сильного минимума — абсолютного максимума по управлению (в соответствии с принципом максимума Понтрягина).

Достаточные условия С. о. м. налагают нек-рые требования только на экстремаль $\tilde{y}(x)$, тогда как в случае сильного минимума требуется выполнение сходных по смыслу условий не только на экстремали $\tilde{y}(x)$, но и в нек-рой ее ε-окрестности нулевого порядка. Экстремаль доставляет С. о. м., если вдоль нее выполняется усиленное условие Лежандра и усиленное условие Якоби. Экстремаль доставляет сильный относительный минимум, если она может быть окружена полем экстремалей и для всех точек этого поля функция Вейерштрасса неотрицательна.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.—Л., 1950; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957.

И. Б. Вапнярский.

СЛАБЫЙ ЭКСТРЕМУМ — минимальное или максимальное значение $J(\tilde{y})$, достигаемое функционалом $J(y)$ на кривой $\tilde{y}(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, для к-рого выполняется одно из неравенств

$$J(\tilde{y}) \leqslant J(y) \text{ или } J(\tilde{y}) \geqslant J(y)$$

для всех кривых сравнения $y(x)$, находящихся в ε-близости от кривой $\tilde{y}(x)$ как по ординате, так и по производной:

$$|y(x)-\tilde{y}(x)| \leqslant \varepsilon, \ |y'(x)-\tilde{y}'(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Кривые $\tilde{y}(x)$, $y(x)$ должны удовлетворять заданным граничным условиям.

Поскольку максимизация функционала $J(y)$ эквивалентна минимизации функционала $-J(y)$, то часто вместо С. э. говорят о слабом минимуме. Термин «слабый» подчеркивает, что на кривые сравнения $y(x)$ наложено условие ε-близости не только по ординате, но и по производной (в отличие от сильного экстремума, где от $y(x)$ требуется ε-близость к $\tilde{y}(x)$ только по ординате).

По определению, С. э. является слабым относительным экстремумом, поскольку дает экстремум не абсолютный, т. е. не на всем классе допустимых кривых сравнения $y(x)$, на к-рых функционал $J(y)$ имеет смысл, а локальный, относительный, соответствующий нек-рому подмножеству всех допустимых кривых сравнения. Однако для краткости употребляют термин «С.э.».

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.—Л., 1950; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957.

И. Б. Вапнярский.

СЛАВЯНСКИЕ ЦИФРЫ — цифры древнерусского счета, в к-ром каждое из целых чисел от 1 до 9, а также десятки и сотни обозначались буквами славянского алфавита с надписанным над ними знаком (титло). Целые числа до 999 составлялись с помощью рядом стоящих С. ц. Тысячи обозначались с помощью приставки нек-рого знака к цифре, выражающей число тысяч.

СЛЕД — отображение $\mathrm{Sp}_{K/k}$ поля K в поле k (где K — расширение k), являющееся гомоморфизмом аддитивных групп и ставящее в соответствие элементу $\alpha \in K$ след матрицы k-линейного отображения $K \to K$, переводящего β из K в $\alpha\beta$.

Если K/k — сепарабельное расширение, то

$$\mathrm{Sp}_{K/k}(\alpha) = \sum \sigma_i(\alpha),$$

где σ_i пробегают все k-изоморфизмы поля K в алгебраич. замыкание $\bar{k}$ поля k. Отображение следа обладает свойством транзитивности: если L/K и K/k — конечные расширения, то для любого $\alpha \in L$

$$\mathrm{Sp}_{L/k}(\alpha) = \mathrm{Sp}_{K/k}(\mathrm{Sp}_{L/K}(\alpha)).$$

Л. В. Кузьмин.

СЛЕД квадратной матрицы — сумма элементов этой матрицы, стоящих на главной диагонали. С. матрицы $A = \|a_{ij}\|$ обозначается $\mathrm{tr}\, A$ или $\mathrm{Sp}\, A$:

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Пусть A — квадратная матрица порядка n над полем K. С. матрицы A совпадает с суммой корней характеристич. многочлена матрицы A. Если K — поле характеристики 0, то n следов: $\mathrm{tr}\, A, \ldots, \mathrm{tr}\, A^n$ однозначно определяют характеристич. многочлен матрицы A; в частности, матрица A нильпотентна тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}\, A^k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Если A и B — квадратные матрицы одного порядка над полем K, а $\alpha, \beta \in K$, то

$$\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\, \mathrm{tr}\, A + \beta\, \mathrm{tr}\, B,$$

$$\mathrm{tr}\, AB = \mathrm{tr}\, BA$$

и при $\det B \neq 0$

$$\mathrm{tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{tr}\, A.$$

С. тензорного произведения квадратных матриц над полем равен произведению следов сомножителей.

Д. А. Супруненко.

СЛЕД на C^*-алгебре A — функция f на множестве A^+ положительных элементов алгебры A, принимающая значения в $[0, +\infty]$, аддитивная, однородная относительно умножения на положительные числа и удовлетворяющая условию $f(xx^*) = f(x^*x)$ для всех $x \in A$. След f наз. конечным, если $f(x) < +\infty$ для всех $x \in A^+$; полуконечным, если $f(x) = \sup\{f(y) : y \in A,\ y \leqslant x,\ f(y) < +\infty\}$ для всех $x \in A^+$. Конечные следы на A суть ограничения на A^+ таких положительных линейных функционалов φ на A, что $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ для всех $x, y \in A$. Пусть f — след на A, $\mathfrak{N}_f$ — множество таких элементов $x \in A$, что $f(xx^*) < +\infty$, $\mathfrak{M}_f$ — множество линейных комбинаций попарных произведений элементов из $\mathfrak{N}_f$; тогда $\mathfrak{N}_f$ и $\mathfrak{M}_f$ — самосопряженные двусторонние идеалы в A и на $\mathfrak{M}_f$ существует однозначно определенный линейный функционал φ, совпадающий с f на $\mathfrak{M}_f \cap A^+$. Пусть f — полунепрерывный снизу полуконечный след на C^*-алгебре A; формула $s(x, y) = \varphi(y^*x)$ определяет на $\mathfrak{N}_f$ эрмитову форму, и для любого $x \in A$ отображение $\lambda_f(x) : y \to xy$ пространства $\mathfrak{N}_f$ в себя непрерывно относительно этой формы. Пусть $N_f = \{x \in \mathfrak{N}_f, s(x, x) = 0\}$, H_f — пополнение факторпространства $\mathfrak{N}_f / N_f$ относительно скалярного произведения, определенного формой s. Операторы $\lambda_f(x)$ определяют при переходе к факторпространству и пополнению нек-рые операторы $\pi_f(x)$ в гильбертовом пространстве H_f, и отображение $x \to \pi_f(x)$ есть представление C^*-алгебры A в H_f. Соответствие $f \to \pi_f$ есть взаимнооднозначное соответствие между множеством полунепрерывных снизу полуконечных следов на C^*-алгебре A и множеством представлений C^*-алгебры A со следом, определенных с точностью до квазиэквивалентности.

Лит.: [1] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974.

А. И. Штерн.

СЛОВО — горизонтальный ряд *букв* нек-рого *алфавита*. Напр., ряд знаков «слововалфавите» является С. в алфавите, состоящем из букв е, т, и, в, а, ф, л, о, с. Для удобства к рассмотрению допускается и пустое слово, т. е. С., не содержащее ни одной буквы. Оно является С. в любом алфавите.

Возможно, несколько более точной является индуктивная характеризация С., согласно к-рой С. в алфавите A определяются как объекты, получающиеся в результате развертывания порождающего процесса, определяемого следующими правилами: а) пустое С. считается С. в алфавите A; б) если объект P оказался С. в алфавите A, а ξ является буквой этого алфавита, то объект $P\xi$ также считается С. в алфавите A. Индуктивная характеризация С. делает оправданным применение правила индукции для доказательства утверждений типа всеобщности о С. в данном алфавите.

С. представляет собой достаточно общий тип *конструктивного объекта*, и в силу этого обстоятельства понятие С. играет важную роль в конструктивной математике. Понятие С. широко используется также в алгебраич. исследованиях, работах по математич. лингвистике и т. п.

Лит.: [1] Марков А. А., Теория алгорифмов, М.—Л., 1954 («Тр. матем. ин-та АН СССР», т. 42, с. 12—25). *Н. М. Нагорный.*

СЛОЕНИЕ на n-мерном многообразии M^n — такое разбиение M^n на линейно связные подмножества, именуемые слоями, что M^n можно покрыть координатными окрестностями U_α с локальными координатами $x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n$, в терминах к-рых локальные слои — компоненты связности пересечения слоев с U_α, задаются уравнениями $x_\alpha^{p+1}=$ $=\text{const}, \ldots, x_\alpha^n=\text{const}$. С. в этом смысле наз. топологическим С.; требуя же, чтобы M^n имело кусочно линейную, дифференцируемую или аналитич. структуру и чтобы локальные координаты были кусочно линейными, дифференцируемыми (класса C^r) или аналитическими, получают определение кусочно линейного, дифференцируемого (класса C^r) или аналитического С. Определение дифференцируемого С. класса C^r формально годится и при $r=0$, совпадая в этом случае с определением топологич. С. Обычно, говоря о дифференцируемом С., подразумевают, что $r \geqslant 1$. Слои естественно снабжаются структурой n-мерных многообразий (топологических, кусочно линейных, дифференцируемых или аналитических) и тем самым оказываются подмногообразиями (в широком смысле слова) многообразия M^n. Число p (размерность слоев) наз. размерностью С., а $q=n-p$ — его коразмерностью. Рассматривая С. на многообразии с краем, обычно требуют либо трансверсальности слоев к краю, либо же того, чтобы слой, пересекающийся с краем, целиком в нем содержался. Очевидным образом определяются комплексно-аналитические С. Основным в теории С. является дифференцируемый случай (ниже С. и отображения, как правило, подразумеваются дифференцируемыми).

Отображение

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^q,\ u \longrightarrow \left(x_\alpha^{p+1}(u), \ldots, x_\alpha^n(u)\right)$$

является *субмерсией*. Локальные слои суть $\varphi_\alpha^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}^q$. Система локальных субмерсий $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ является согласованной в том смысле, что если $u \in U_\alpha \cap U_\beta$, то возле u можно перейти от $\varphi_\alpha(v)$ к $\varphi_\beta(v)$ с помощью нек-рого локального диффеоморфизма $\Phi_{\beta\alpha, u}$ (класса C^r) пространства $\mathbb{R}^q$, т. е. для всех v, достаточно близких к u, имеет место $\varphi_\beta(v)=\Phi_{\beta\alpha, u}\,\varphi_\alpha(v)$. Обратно, если M^n покрыто областями U_α и заданы субмерсии φ_α: $U_\alpha \to \mathbb{R}^q$, согласованные в том же смысле, что и выше, то путем подходящего «склеивания» $\varphi_\alpha^{-1}(c)$ между собой получается такое С., что каждое $\varphi_\alpha^{-1}(c)$ содержится в нек-ром слое.

Сопоставление каждой точке $u \in M^n$ касательного пространства к проходящему через эту точку слою, приводит к нек-рому полю p-мерных касательных подпространств (по другой терминологии, p-мерному расслоению), к-рое наз. касательным полем С. При $p=1$ любое поле p-мерных касательных подпространств, при самых минимальных требованиях дифференцируемости, является касательным полем нек-рого однозначно определенного С. При $p>1$ это не так. Данный вопрос имеет локальный характер (см. *Фробениуса теорема*). Непосредственное применение теоремы Фробениуса к инволютивному распределению показывает, что при выполнении соответствующих условий имеется система согласованных локальных субмерсий, для к-рых заданное поле касается, переход к С. осуществляется путем надлежащих «склеиваний» (в других терминах это описано в [3]).

Формирование понятия С. произошло в 40-х гг. 20 в. в цикле работ Ж. Риба (G. Reeb) и Ш. Эресмана (Ch. Ehresmann), завершившемся книгой [1] (в связи с историей см. [2]), и было связано с переходом к глобальной точке зрения. Этому отчасти способствовала теория гладких *динамических систем*, где разбиение фазового многообразия (с выкинутыми *равновесия положениями*) на траектории потока является одномерным С. Особое положение, к-рое в этой теории занимают потоки на поверхностях (*Пуанкаре — Бендиксона теория*, *Дифференциальные уравнения на торе*, *Кнезера теорема*). Особое положение, где траектории локально разбивают пространство, способствовало привлечению внимания к С. коразмерности 1. Другой пример С., проанализированный в 40-х гг.,— разбиение группы Ли на смежные классы по аналитич. подгруппе (не обязательно замкнутой) (см. [3]). Наконец, в комплексной области решения дифференциального уравнения $dw/dz=f(z, w)$ с аналитической правой частью образуют (с вещественной точки зрения) двумерное С.

После первых работ наступил перерыв в развитии теории С., к-рая тогда была еще бедна значительными результатами. Интенсивное развитие началось с работ А. Хефлигера [4] и С. П. Новикова [7], наиболее известные результаты к-рых таковы (см. [17]): С. коразмерности 1 на трехмерной сфере имеет компактный слой [7] и не может быть аналитическим [4], хотя еще Ж. Риб построил С. класса C^∞. Тогда же при изучении нек-рых динамич. систем (*У-системы* и родственные им) возникли нек-рые вспомогательные С. (уже не одномерные, что тоже стимулировало исследование С. (см. [7], [8]). Все эти работы и ряд последующих можно отнести к «геометрическому» или «качественному» направлению [16]. В нем большое внимание уделяется С. коразмерности 1, существованию компактных слоев, теоремам устойчивости (устанавливающим, что при определенных условиях С. с компактным слоем устроено в его окрестности и глобально как расслоение; первые такие теоремы доказал еще Ж. Риб, см. [17]), характеристике «роста» слоев (т. е. зависимости p-мерного объема геодезич. шара радиуса r на слое от r) или их фундаментальных групп. Отметим также недавнее решение вопроса: если на замкнутом M^n имеется p-мерное С., все слои к-рого компактны, то обязательно ли ограничен p-мерный объем слоев? Д. Эпстейн (D. Epstein), Д. Сулливан (D. Sullivan) и др. выяснили, что ответ положительный только при $q\leqslant 2$ (см. [9]).

Позднее возникло «гомотопическое» направление, прообразом к-рого послужила гомотопич. теория *расслоений*. Отличия, возникающие для С., отчасти связаны с тем, что для С., вообще говоря, нет аналога *индуцированному расслоению*. Это вынуждает перейти от С. к более общим объектам — *Хефлигера структурам* (нечто вроде С. с особенностями), для к-рых такой аналог имеется.

Слоения F_0 и F_1 на M наз. **к о н к о р д а н т н ы м и,** если на «цилиндре» $M\times[0, 1]$ существует такое С. (той же коразмерности), слои к-рого трансверсальны ко «дну» и «крышке» цилиндра и «высекают» на них слоения F_0 и F_1. Сходным образом определяется конкордантность структур Хефлигера. Всякая структура Хефлигера конкордантна такой, к-рая вне множества «особых точек» на M соответствует нек-рому С., причем выполняются определенные условия о поведении слоев последнего возле этих точек. В этом смысле структуру Хефлигера можно представить себе как С. с особенностями. Имеется естественное биективное соответствие между классами конкордантных структур Хефлигера и гомотопич. классами непрерывных отображений M

в т. н. классифицирующее пространство $B\Gamma_q^r$ (q указывает коразмерность, r — класс гладкости структуры Хефлигера).

Гомотопич. теория устанавливает, какие гомотопич. объекты определяют конкордантность С.: два С. конкордантны тогда и только тогда, когда они конкордантны как структуры Хефлигера, а их касательные поля гомотопны (см. [6], [10], [11]). Родственный результат — доказательство существования p-мерных С. на любых открытых M (см. [6]) и на таких замкнутых M, на к-рых существует непрерывное поле p-мерных касательных подпространств (что является очевидным необходимым условием существования С., см. [10], [11]), ранее различными учеными было доказано существование С. на ряде многообразий путем непосредственных построений [12]. Идея (см. [10], [11]) состоит в том, чтобы, начав со С. с особенностями, ликвидировать их путем нек-рых модификаций С. Случай $q>1$ оказывается более простым (см. [10], [13]) и ликвидация особенностей может быть проведена в духе «геометрической» теории [14]; случай $q=1$ сложнее [11].

Отображение $f: M^n \to B\Gamma_q^r$ порождает отображение когомологий, что приводит к *характеристическим классам* С. В возникающую здесь «гомологическую» или «количественную» теорию С. (см. [13], [15], [16]) включаются и нек-рые результаты, полученные ранее без обращения к $B\Gamma_p^r$, напр. инвариант Годбийона—Вея; для $n=3$ (см. [17]) или указанные Р. Боттом (R. Bott(условия, необходимые для того, чтобы непрерывное поле касательных подпространств было гомотопно касательному полю С.

Лит.: [1] Reeb G., в кн.: Actualités Sci. Ind., № 1183, P., 1952; [2] Reeb G., Schweitzer P. A., в кн.: Differential topology..., B., 1978; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948; [4] Haefliger A., «Ann. Scuola norm. Sup. Pisa», ser. 3, 1962, t. 16, p. 367—97; [5] его же, в кн.: Manifolds, Amst., 1970, B., 1971; [6] его же, «Topology», 1970, v. 9, № 2, p. 183—94; [7] Новиков С. П., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1965, т. 14, с. 248—78; [8] Гладкие динамические системы, [пер.], М., 1977; [9] Бессе А., Многообразия с замкнутыми геодезическими, пер. с англ., М., 1981; [10] Thurston W., «Comm. math. Helv.», 1974, v. 49, p. 214—31; [11] его же, «Ann. Math.», 1976, v. 104, № 2, p. 249—68; [12] Lawson H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1974, v. 80, p. 369—418; [13] его же, The quantitative theory of foliations, Providence, 1977; [14] Мишачев Н. М., Элиашберг Я. М., «Функц. анализ и его прил.», 1977, т. 11, № 3, с. 43—53; [15] Фукс Д. Б., в кн.: Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. матем., М., 1978, т. 10, с. 179—285; [16] его же, в кн.: Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия, М., 1981, т. 18, с. 151—213; [17] Тамура И., Топология слоений, пер. с япон., М., 1979. *Д. В. Аносов.*

СЛОЖЕНИЕ — одна из основных арифметич. операций. Результат С. наз. суммой. Сумма чисел a и b обозначается $a+b$, при этом a и b наз. слагаемыми. С. чисел коммутативно: $a+b=b+a$, и ассоциативно: $(a+b)+c=a+(b+c)$. Операция, обратная С., наз. вычитанием.

Обычно С. называют также операцию в *абелевой группе* (аддитивная запись) и ту бинарную операцию в *кольце*, относительно к-рой элементы кольца образуют абелеву группу. Здесь также С. ассоциативно и коммутативно. Иногда сложением наз. и некоммутативная операция в группе, напр. операция в *мультиоператорной группе*. *О. А. Иванова.*

СЛОЖЕНИЕ множеств — векторное сложение и нек-рые другие (ассоциативные и коммутативные) действия над множествами A_i. С. рассматривается чаще всего для выпуклых множеств A_i в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Векторная сумма (с коэффициентами λ_i) определяется в линейном пространстве правилом

$$S=\sum_i \lambda_i A_i = \bigcup_{x_i \in A_i} \left\{ \sum_i \lambda_i x_i \right\},$$

где λ_i — действительные числа (см. [1]). В пространстве $\mathbb{R}^n$ векторная сумма наз. также суммой Минковского. С зависимостью объема S от λ_i связана *смешанных объемов теория*. Для выпуклых A_i С. сохраняет выпуклость и сводится к С. *опорных функций*, а для C^2-гладких строго выпуклых $A_i \subset \mathbb{R}^n$ характеризуется С. средних значений радиусов кривизны в точках с общей нормалью.

Рассматриваются также: С. множеств с точностью до сдвига; С. замкнутых множеств, сопровождаемое замыканием результата (см. *Выпуклых множеств пространство*); интегрирование континуального семейства множеств; С. в коммутативных полугруппах (см. [4]).

p-суммы Файри определены в классе выпуклых тел $A_i \subset \mathbb{R}^n$, содержащих нуль. При $p \geqslant 1$ опорная функция p-суммы определяется как $(\Sigma_i H_i^p)^{1/p}$, где H_i — опорные функции слагаемых. При $p \leqslant -1$ выполняют $(-p)$-сложение полярных для A_i тел и берут поляру результата (см. [2]). p-сумма Файри непрерывна по A_i и p. Проекция p-суммы на подпространство есть p-сумма проекций. При $p=1$ сумма совпадает с векторной, при $p=-1$ наз. инверсной суммой (см. [1], с. 38), при $p=+\infty$ дает выпуклую оболочку слагаемых, при $p=-\infty$ — их пересечение. При этих четырех значениях p-сумма многогранников есть многогранник; при $p=\pm 2$ сумма эллипсоидов есть эллипсоид (см. [2]).

Сумма Бляшке определена для выпуклых тел $A_i \subset \mathbb{R}^n$, рассматриваемых с точностью до сдвига. Определяется сложением поверхностных функций [3].

Сумма вдоль подпространства определена в векторном пространстве X, разложенном в прямую сумму подпространств Y и Z. Сумма A_i вдоль Y определяется как

$$\bigcup_{z \subset z} \left\{ \sum_i (Y_z \cap A_i) \right\},$$

где Y_z — так сдвинутое Y, что $Y_z \cap Z = \{z\}$ (см. [1]).

Лит.: [1] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973; [2] Firey W. J., «Pacif. J. Math.», 1964, v. 14, p. 53—60; [3] его же, «Proc. Colloq. on Conv.», Copenhagen, 1965, Kbh., 1967, p. 94—101; [4] Dinghas A., Minkowskische Summen und Integrale. Superadditive mengen-funktionale. Isoperimetrische Ungleichungen, P., 1961. *В. П. Федотов.*

СЛОЖНАЯ ГИПОТЕЗА — утверждение (предположение) о принадлежности функции распределения (плотности вероятности) случайной величины нек-рому множеству функций распределения, содержащему более одного элемента. См. *Статистических гипотез проверка, Простая гипотеза.*

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *М. С. Никулин.*

СЛОЖНАЯ СИСТЕМА — собирательное название систем, состоящих из большого числа взаимосвязанных элементов. Следует подчеркнуть неформальность этого понятия, поскольку на современном этапе развития науки нет строгого математич. определения С. с., охватывающего все интуитивные представления о реальных С. с. Типичными примерами С. с. являются: нервная система, мозг, ЭВМ, система управления в человеческом обществе и т. д.

В 20 в. в связи с необходимостью изучения все более сложных объектов к понятию С. с. подошли многие науки: биология, техника, экономика, социология и др. Особо следует отметить рождение *кибернетики* как самостоятельной науки, основным предметом к-рой являются сложные *управляющие системы*. В результате этого процесса появился также ряд специальных дисциплин, имеющих в своем названии слово «система»: системный анализ, системотехника, общая теория систем и др.

Существуют различные подходы к математич. описанию и изучению С. с. в зависимости от используемого математич. аппарата. Можно выделить два типа математич. моделей С. с.: дискретные и непрерывные. Первые изучаются преимущественно в математич. кибернетике (теория управляющих систем) и опираются на аппарат дискретной математики, а вторые — в теории *динамических систем* и теории автоматич. управления, математич. основой к-рых является теория дифференциальных уравнений. Широко применяются также при изучении С. с. вероятностно-статистические методы — теория массового обслуживания, методы стохастич. программирования и стохастич. моделирования. Несмотря на различие форм и математич. аппарата, все эти подходы к описанию С. с. объединяет общая методология и общий предмет изучения.

Одним из наиболее трудных моментов при всех попытках математич. описания С. с. является формализация понятия с л о ж н о с т и. Реальным С. с. присущи многие характерные черты «сложности»: большое число элементов, из к-рых состоит система; многообразие возможных форм связи элементов системы между собой; сложное функционирование; иерархичность структуры и т. д. Необходимо отметить, что понятия С. с. и «большая система» не являются синонимами, т. к. последний термин охватывает системы, обладающие лишь одной чертой сложности — большим числом элементов.

К настоящему времени (1983) основные продвижения в формализации понятия сложности в математич. изучении С. с. получены для достаточно простых (модельных) классов управляющих систем — *Тьюринга машин*, *схем из функциональных элементов*, *автоматов конечных* и т. п. Дальнейшее изучение С. с. идет по пути рассмотрения все более сложных математич. моделей, позволяющих полнее отразить структуру и функционирование реальных С. с. При этом многие закономерности, установленные для более простых моделей, часто переносятся на более сложные.

Лит.: [1] Л я п у н о в А. А., Я б л о н с к и й С. В., «Проблемы кибернетики», 1963, в. 9, с. 5—22; [2] Б у с л е н к о Н. П., К а л а ш н и к о в В. В., К о в а л е н к о И. Н., Лекции по теории сложных систем, М., 1973; [3] Энциклопедия кибернетики, т. 2, К., 1975, с. 373—75. *Н. Н. Кузюрин.*

СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, представленная как композиция нескольких функций. Если множество значений Y_i функции f_i содержится во множестве определения X_{i+1} функции f_{i+1}, т. е.

$$f_i : X_i \longrightarrow Y_i \subset X_{i+1}, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

то функция

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1, \quad n \geqslant 2,$$

определяемая равенством

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1)(x) = f_n(f_{n-1}(\ldots(f_1(x))\ldots)), \quad x \in X_1,$$

наз. с л о ж н о й ф у н к ц и е й или $(n-1)$-кратной к о м п о з и ц и е й (с у п е р п о з и ц и е й) функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Напр., всякая рациональная функция любого числа переменных является композицией четырех арифметич. действий, т. е. композицией функций $x+y$, $x-y$, xy, x/y.

С. ф. сохраняет многие свойства функций, композицией к-рых она является. Так, композиция непрерывных функций непрерывна. Это означает, что если функция $f_1 : X \rightarrow Y$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, а функция $f_2 : Y \rightarrow Z$ непрерывна в точке $f_1(x_0) \in Y$, то С. ф. $f_2 \circ f_1$ также непрерывна в точке x_0 (здесь X, Y и Z являются, напр., топологич. пространствами). Подобным образом, композиция n раз (непрерывно) дифференцируемых функций представляет собой также n раз (непрерывно) дифференцируемую функцию, $n=1, 2, \ldots$ Композиция возрастающих (убывающих) функций есть возрастающая (соответственно убывающая) функция. При композиции функций иногда меняются количественные характеристики свойств функций: композиция функций f_1 и f_2, удовлетворяющих условию Гёльдера нек-рых степеней, есть функция, удовлетворяющая условию Гёльдера степени, равной произведению степеней условий Гёльдера, к-рым удовлетворяют функции f_1 и f_2. Нек-рые характеристики функций не сохраняются при композиции. Так, композиция функций, интегрируемых по Риману или по Лебегу, не является, вообще говоря, функцией, интегрируемой по Риману или, соответственно, по Лебегу; композиция абсолютно непрерывных функций может оказаться не абсолютно непрерывной функцией. Вместе с тем, согласно результатам Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова [1], композиция трех абсолютно непрерывных на отрезке функций не приводит к новому классу функций по сравнению с композицией двух абсолютно непрерывных функций. Н. К. Бари [2] доказала, что любая непрерывная на отрезке функция может быть представлена в виде суммы трех композиций абсолютно непрерывных функций, и есть такие непрерывные функции, к-рые не могут быть представлены в виде суммы двух таких композиций. Вместе с тем, всякая непрерывная на отрезке функция является суммой двух композиций функций с ограниченным изменением; однако n-кратные композиции функций с ограниченным изменением для каждого $n=1, 2, \ldots$ приводят к существенно новым классам функций и существуют однократные композиции функций с ограниченным изменением, не являющиеся непрерывными функциями [3].

Понятие композиции функций представляет собой наиболее широкое понимание термина «представление функции формулой». Задача о представлении функций в виде композиций возникла в связи с отысканием формул для решений алгебраич. уравнений. Всякий корень уравнения степени не выше четвертой может быть представлен формулой, выражающей его через коэффициенты уравнения и представляющей собой композицию четырех арифметич. действий и радикалов. Всякое уравнение степени $n \geq 5$ может быть с помощью подстановки (наз. преобразованием Чирнгаузена) приведено к виду

$$x^n + a_1 x^{n-4} + \ldots + a_{n-4} x + 1 = 0.$$

Таким образом, каждый корень уравнения степени $n \geq 5$ представляет собой функцию $n-4$ параметров. Задача состоит в выяснении: можно ли эти функции представить в виде композиции алгебраич. функций меньшего числа переменных. Одна из 23 проблем Д. Гильберта (D. Hilbert), поставленных им на Международном конгрессе математиков в Париже в 1900, относилась к этой задаче. Именно, 13-я проблема состояла в следующем (см. [4]): представляется ли корень f уравнения

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0 \qquad (*)$$

через коэффициенты x, y и z этого уравнения посредством композиций каких-либо непрерывных функций двух переменных (следует отметить, что всякая функция конечного числа переменных является композицией разрывных функций двух переменных). Д. Гильбертом была показана невозможность получения всех аналитич. функций трех переменных в виде композиций аналитич. функций двух переменных. Он же для уравнения 9-й степени доказал [5], что решение уравнения 9-й степени можно представить в виде композиции алгебраич. функций четырех переменных (вместо пяти, как это сразу следует из применения преобразования Чирнгаузена). Эти исследования были продолжены многими математиками (см. [6] — [19]).

А. Г. Витушкин в 1954 доказал [10], что если натуральные числа m, n, m_1 и n_1 удовлетворяют неравенству $\frac{m}{n} > \frac{m_1}{n_1}$, то можно указать n раз дифференцируемую функцию m переменных, непредставимую в виде композиции n_1 раз дифференцируемых функций от m_1 переменных. В частности, при всяком n можно указать функцию n переменных наперед заданной гладкости, непредставимую композицией функций меньшего числа переменных той же гладкости. В этом смысле среди гладких функций любого числа переменных существуют функции, существенно зависящие от всех своих аргументов.

В 1956 А. Н. Колмогоров показал [11], что всякая определенная на n-мерном ($n \geqslant 4$) кубе непрерывная функция является композицией непрерывных функций трех переменных. Затем В. И. Арнольд уменьшил число переменных с трех до двух. Именно, он доказал [12], что любую непрерывную на кубе функцию трех переменных можно представить в виде композиции непрерывных функций двух переменных (и даже, более точно, в виде суммы 9 функций, каждая из к-рых является однократной композицией непрерывных функций двух переменных). Тем самым было показано, что каждая непрерывная на n-мерном ($n \geqslant 3$) кубе функция представима в виде композиции непрерывных функций двух переменных. Это явилось последним словом по опровержению гипотезы Гильберта о невозможности представления корней уравнения (*) в виде композиции непрерывных функций двух переменных. Работы А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда дали, в частности, положительный ответ на вопрос о представимости корней алгебраич. уравнений любой степени в виде композиции непрерывных функций не более чем двух переменных. Для композиций аналитич. и алгебраич. функций аналогичный вопрос не решен. До сих пор (1983) неизвестно, являются ли корни уравнения (*) композицией аналитич. функций или нет.

Этот цикл работ завершает следующая теорема Колмогорова [13]: любая непрерывная функция n переменных может быть получена с помощью композиций непрерывных функций одного переменного и единственной функции двух переменных $g(x, y) = x+y$; именно, он доказал, что любая функция f, непрерывная на n-мерном кубе, может быть представлена в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} h_i\left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_j)\right),$$

где функции h_i и φ_{ij} — непрерывны, а функции φ_{ij}, кроме того, стандартны, т. е. не зависят от выбора функции f.

А. Г. Витушкин показал [14], что для любых конечных наборов непрерывных функций p_k и непрерывно дифференцируемых функций q_k, зависящих от n переменных, $k=1, 2, \ldots, m$, $n=1, 2, \ldots$, существуют даже аналитич. функции n переменных, не представимые композицией вида

$$\sum_{k=1}^{m} p_k \circ (f_k \circ q_k),$$

где f_k — произвольные непрерывные функции одного переменного.

Лит.: [1] Бари Н. К., Меньшов Д. Е., «Ann. di Mat.», 1927, v. 5, p. 19—54; [2] Бари Н. К., «Math. Ann.», 1930, Bd 103, S. 185—248, pt 2, S. 598—653; [3] е е ж е, «Матем. сб.», 1933, т. 40, с. 326—72; [4] Проблемы Гильберта, М., 1969; [5] Hilbert D., «Math. Ann.», 1927, Bd 97, S. 243—51; [6] Bieberbach L., «J. reine u. angew. Math.», 1931, Bd 165, S. 89—92; [7] Чеботарев Н. Г., Собр. соч., т. 1, М.—Л., 1949, с. 255—340; [8] Чеботарев Г. Н., «Уч. зап. Казанск. ун-та», 1954, т. 114, кн. 2, с. 189—93; [9] Морозов В. В., там же, 1954, т. 114, кн. 2, с. 173—87; [10] Витушкин А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955; [11] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 2, с. 179—82; [12] Арнольд В. И., там же, 1957, т. 114, № 4, с. 679—81; [13] Колмогоров А. Н., там же, 1957, т. 114, № 5, с. 953—56; [14] Витушкин А. Г., там же, 1964, т. 156, № 6, с. 1258—61; [15] Lorentz G. G., Approximation of functions, N. Y.—[a.o.], 1966; [16] Sprecher D. A., «J. Approxim. Theory», 1972, v. 6, № 2, p. 123—34; [17] Kahane J. P., там же, 1975, v. 13, p. 229—34; [18] Лин В. Я., «Функц. анализ и его прилож.», 1976, т. 10, № 1, с. 37—45; [19] Витушкин А. Г., «Enseign. math.», 1977, t. 23, p. 255—320.

Л. Д. Кудрявцев.